EINSCHLIESSUNGSSÄTZE FÜR EIGENWERTE GESTÖRTER DREIECKSMATRIZEN

von L. Elsner in Erlangen

I. EINLEITUNG, DEFINITIONEN

Das Problem, die Eigenwerte gestörter Matrizen auch im nichtnormalen Fall abzuschätzen, ist von mehreren Autoren behandelt worden ([2], [3], [4], unter speziellen Voraussetzungen auch von DREVES [1]). Die dabei auftretenden Schranken sind i. a. unhandlich und z. T. implizit. Kürzlich hat Herr WETTERLING in dem wichtigen Spezialfall gestörter Dreiecksmatrizen leicht berechenbare explizite Schranken angegeben [7].

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß diese Schranken noch verbessert werden können.

Für eine $n\times n$ -Matrix $B = (b_{ij})$ sei $|B| = (|b_{ij}|)$. $B \leq C = (c_{ij})$ bedeute $b_{ij} \leq c_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

Analog wird $x \leq y (x < y)$ für Vektoren x, y definiert.

Sei $\sigma(B)$ das Spektrum von B und $\rho(B)$ der Spektralradius. Es gilt

$$|B| \leq C \Longrightarrow \rho(B) \leq \rho(C).$$

Für alle multiplikativen Matrixnormen $\| \ \|$, insbesondere also für die Spektralnorm

$$\|B\|_{Sp} = \sqrt{\rho(B^*B)}$$

und die Erhard-Schmidt-Norm

$$\|B\|_{ES} = \sqrt{\sum_{i,k} |b_{ik}|^2}$$

gilt

$$\rho(B) \leq \|B\|.$$

Es sei im folgenden stets

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -\widetilde{R} \\ & D & \\ -\widetilde{E} & & \ddots \end{pmatrix} = D - \widetilde{E} - \widetilde{R}$$

mit

$$D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

$$|\widetilde{R}| \leq rR = \begin{pmatrix} o & r & r & \ldots & r & r \\ & o & r & \ldots & & r \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ O & & & & \ddots & r \\ & & & & & o \end{pmatrix}$$

und

$$E \leq \epsilon L.$$

Es werden die Fälle

$$L = L_1 = \begin{pmatrix} o & & & & O \\ 1 & \ddots & & & \\ \vdots & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & o \end{pmatrix}$$

$$L = L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$L = L_3 = \begin{pmatrix} o & & & & O \\ 1 & \ddots & & & \\ o & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ o & \ldots & o & 1 & o \end{pmatrix}$$

betrachtet.

Es sei $\lambda \in \sigma(A)$ und

$$\delta = \min_{i=1,\dots,n} |\lambda - d_i|.$$

II. DER ALLGEMEINE FALL

Da $\lambda \in \sigma(A)$ ist, existiert $x \neq 0$ mit

$$(D - \lambda I)x = (\widetilde{E} + \widetilde{R})x.$$

Für die Abschätzung von δ können wir $\delta > 0$ annehmen. Dann folgt

$$x = (D - \lambda I)^{-1}(\widetilde{E} + \widetilde{R})x,$$

also

$$1 \leq \rho((D-\lambda I)^{-1}(\widetilde{E}+\widetilde{R})) \leq \rho(\delta^{-1}(\epsilon L+rR))$$

oder

(1) $$\delta \leq \rho(\epsilon L+rR).$$

Man verifiziert sofort, daß

$$(\epsilon L_1+rR)z = kz$$

für

$$z = (t, t^2, \dots, t^n), \qquad t = (\frac{\epsilon}{r})^{\frac{1}{n}}, \quad k = \frac{r\epsilon^{\frac{1}{n}} - \epsilon r^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}} - \epsilon^{\frac{1}{n}}}$$

gilt. Nach dem Satz von Perron-Frobenius haben wir damit $\rho(\epsilon L_1 + rR)$ bestimmt. Aus $\epsilon L_2 + rR = \epsilon L_1 + \epsilon I + (r + \epsilon)R$ folgt sofort

$$\rho\,(\epsilon L_2 + rR) = \epsilon + \frac{(r+\epsilon)\epsilon^{\frac{1}{n}} - \epsilon(r+\epsilon)^{\frac{1}{n}}}{(r+\epsilon)^{\frac{1}{n}} - \epsilon^{\frac{1}{n}}} = \frac{r\epsilon^{\frac{1}{n}}}{(r+\epsilon)^{\frac{1}{n}} - \epsilon^{\frac{1}{n}}} .$$

Damit haben wir bewiesen

SATZ 1: *Ist A wie oben, $\lambda \in \sigma(A)$, so ist im Falle*

$$|\widetilde{E}| \leq \epsilon L_1$$

(2) $$\min_i |\lambda - d_i| \leq \frac{r\epsilon^{\frac{1}{n}} - \epsilon r^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}} - \epsilon^{\frac{1}{n}}}$$

und im Falle

$$|\widetilde{E}| \leq \epsilon L_2$$

(3) $$\min_i |\lambda - d_i| \leq \frac{r\epsilon^{\frac{1}{n}}}{(r+\epsilon)^{\frac{1}{n}} - \epsilon^{\frac{1}{n}}} .$$

Bemerkung 1: Für $\epsilon = r$ ist $t = 1$ und die Schranke in (2) gleich $n-1$.

Bemerkung 2: Wegen $L_1 \leq L_2$ ist $\rho(\epsilon L_1 + rR) \leq \rho(\epsilon L_2 + rR)$, also ist die Schranke (2) schärfer als die Schranke (3).

(3) ist wiederum besser als Wetterlings Ergebnis

$$\delta \leq \frac{\hat{r}\,\hat{\epsilon}^{\frac{1}{n}}}{(\hat{r}+\hat{\epsilon})^{\frac{1}{n}} - \hat{\epsilon}^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{mit } \hat{r} = \|\widetilde{R}\|_{Sp} \geq r, \quad \hat{\epsilon} = \|\widetilde{E}\|_{Sp} \geq \epsilon.$$

Bemerkung 3: Die Schranken (2) und (3) können generell nicht mehr verbessert werden, da sie im Falle $D = 0$, $\widetilde{R} = rR$, $\widetilde{E} = \epsilon L$, $\lambda = \rho(\epsilon L + rR)$ $(L = L_1$ bzw. $L = L_2)$ angenommen werden.

III. STÖRUNGEN IN DER NEBENDIAGONALE

Wenn eine Dreiecksmatrix mit einer Matrix gestört wird, deren Elemente kleiner als ϵ sind, so läßt sich die Störung der Eigenwerte nach Satz 1 durch $O(\epsilon^{1/n})$ abschätzen. Die Abschätzung ist zu grob im Falle, daß die Störung nur in der ersten Nebendiagonale erfolgt. Dieser Fall tritt etwa beim Abbrechen des *QR*-Algorithmus bei Hessenbergmatrizen auf.

Wir werden zeigen, daß in diesem Falle

$$\min |\lambda - d_i| = O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$$

ist.

Es sei also $|E| \leq \epsilon L_3$. Nach (1) haben wir nur $\rho(\epsilon L_3 + rR)$ abzuschätzen.

Nach dem Quotientensatz ([5], S. 32) ist für

$$z = \left((\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{1}{2}}, (\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{2}{2}}, (\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{3}{2}}, \ldots, (\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{n}{2}} \right)$$

$$\rho(\epsilon L_3 + rR) \leq \max_i \frac{[(\epsilon L_3 + rR)z]_i}{z_i} .$$

Eine einfache Rechnung ergibt: Das Maximum wird für $i=2$ angenommen und ist gleich

$$r^{\frac{1}{2}} \frac{2\epsilon^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} - \epsilon - \epsilon^{\frac{n-1}{2}} r^{-(\frac{n-3}{2})}}{r^{\frac{1}{2}} - \epsilon^{\frac{1}{2}}} .$$

Wir haben also

SATZ 2: *Ist A wie vorne,* $\epsilon < r$ *und sogar*

$$|E| \leq \epsilon L_3$$

$\lambda \in \sigma(A)$, *so ist*

$$\min |\lambda - d_i| \leq r^{\frac{1}{2}} \frac{2\epsilon^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} - \epsilon - \epsilon^{\frac{n-1}{2}} r^{-(\frac{n-3}{2})}}{r^{\frac{1}{2}} - \epsilon^{\frac{1}{2}}} = O(\epsilon^{\frac{1}{2}}) .$$

Bemerkung 4: Liegt die Störung nur in den ersten k Nebendiagonalen, so können wir analog vorgehen.

Zur Abschätzung des Spektralradius von

$$S = \begin{array}{c} \\ k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & r & & & & r \\ \epsilon & 0 & r & & & r \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \epsilon & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & r \\ & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \underbrace{\epsilon \;\; \epsilon}_{k} & & 0 \end{pmatrix}$$

werden die Quotienten $q_\nu = \dfrac{(Sz)_\nu}{z_\nu}$ mit

$$z = \left((\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{1}{k+1}},\ (\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{2}{k+1}}, \dots, (\tfrac{\epsilon}{r})^{\frac{n}{k+1}} \right)$$

herangezogen. Es ergibt sich für $\epsilon < r$

$$\delta \leq \rho(S) \leq \max q_\nu = q_{k+1} = r \,\frac{2(\frac{\epsilon}{r})^{\frac{1}{k+1}} - \frac{\epsilon}{r} - (\frac{\epsilon}{r})^{\frac{n-k}{k+1}}}{1-(\frac{\epsilon}{r})^{\frac{1}{k+1}}} = O(\epsilon^{\frac{1}{k+1}}) .$$

IV. GETRENNTE EIGENWERTE

Es seien die Voraussetzungen in I erfüllt, und es gelte

$$|d_i - d_j| \geq 2\mu > 0 \qquad \text{für } i \neq j.$$

Es sei $\delta = \min |\lambda - d_i| = |d_k - \lambda|$. Dann ist

$$|\lambda - d_j| \geq \mu \qquad \text{für } j \neq k.$$

Daher ist

$$|(D-\lambda I)^{-1}| \leq diag(\underbrace{\mu^{-1},\ldots,\mu^{-1}}_{k-1},\delta^{-1},\mu^{-1},\ldots,\mu^{-1}) = \Delta^{-1} = \Delta^{-1}(\delta).$$

Aus

$$x = (D-\lambda I)^{-1}(\widetilde{E}+\widetilde{R})x$$

und

$$|(D-\lambda I)^{-1}(\widetilde{E}+\widetilde{R})| \leq \Delta^{-1}(\epsilon L + rR)$$

folgt

(4) $$1 \leq \rho(\Delta^{-1}(\delta)(\epsilon L + rR)).$$

LEMMA 3: *Für* $r \neq \epsilon$, $r \neq o$, $\epsilon \neq o$ *sind äquivalent*

(a) $$k = \rho(\Delta^{-1}(\delta)(\epsilon L_1 + rR)).$$

(b) $$\Phi(k,\delta) \equiv \frac{\epsilon}{r}\left(\frac{k\mu + r}{k\mu+\epsilon}\right)^{n-1}\left(\frac{k\delta + r}{k\delta+\epsilon}\right) = 1 \wedge k > o.$$

Beweis: Ist $k = \rho(\Delta^{-1}(\delta)(\epsilon L_1 + rR))$, so gibt es nach Perron-Frobenius wegen der Irreduzibilität von $\epsilon L_1 + rR$ einen Vektor $y > o$ mit

$$\Delta^{-1}(\delta)(\epsilon L_1 + rR)y = ky$$

und $k > o$.

Durch Vergleich der j-1- ten und der j-ten Gleichung erhält man

(5) $$\frac{y_{j-1}}{y_j} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{k\mu+r}{k\mu+\epsilon} & j,j-1 \neq k \\ \frac{k\mu+r}{k\delta+\epsilon} & j-1 = k \\ \frac{k\delta+r}{k\mu+\epsilon} & j = k \end{array}\right\} \quad j = 2,\ldots,n,$$

während der Vergleich von erster und n-ter Gleichung

(6) $$\frac{y_n}{y_1} = \begin{cases} \frac{k\mu+r}{k\mu+\epsilon}\cdot\frac{\epsilon}{r} & k \neq 1,n \\ \frac{k\delta+r}{k\mu+\epsilon}\cdot\frac{\epsilon}{r} & k = 1 \\ \frac{k\mu+r}{k\delta+\epsilon}\cdot\frac{\epsilon}{r} & k = n \end{cases}$$

ergibt. Es folgt

$$1 = \frac{y_1}{y_2}\cdot\frac{y_2}{y_3}\cdots\frac{y_n}{y_1} = \Phi(k,\delta).$$

Wählt man umgekehrt $y_1 = 1$ und bestimmt $y_2, \ldots, y_n$ nach (5), so folgt durch Einsetzen zunächst

$$\Delta^{-1}(\delta)(\epsilon L_1 + rR)y = ky + \tilde{s}, \qquad y > o$$

$\tilde{s} = (s,\ldots,s)'$, s beliebig. (b) impliziert nun (6), und für $r \neq \epsilon$ folgt daraus $s = o$.

Q. E. D.

Für $r > \epsilon$ ist $\Phi(k,\delta)$ in k monoton fallend. Aus (4) $(L = L_1)$ folgt daher

$$1 = \Phi(k,\delta) \leq \Phi(1,\delta)$$

und daraus für

$$\left(\frac{\mu+\epsilon}{\mu+r}\right)^{n-1} > \frac{\epsilon}{r}$$

(7) $$\delta \leq \mu_1 = \epsilon\,\frac{(\mu+r)^{n-1} - (\mu+\epsilon)^{n-1}}{(\mu+\epsilon)^{n-1} - \frac{\epsilon}{r}(\mu+r)^{n-1}}\ .$$

SATZ 3: *Ist* $|\tilde{E}| \leq \epsilon L_1$, *ist* $|d_i - d_j| \geq 2\mu$ *für* $i \neq j$ *und ist* $\lambda \in \sigma(A)$, *so ist*

$$\operatorname*{Min}_i |\lambda - d_i| \leq \epsilon\,\frac{(\mu+r)^{n-1} - (\mu+\epsilon)^{n-1}}{(\mu+\epsilon)^{n-1} - \frac{\epsilon}{r}(\mu+r)^{n-1}}\ ,$$

solange der Nenner positiv ist.

Aus Satz 3 folgert man

SATZ 4: *Ist* $|\widetilde{E}| \leq \epsilon L_2$, *ist* $|d_i - d_j| \geq 2\mu$ *für* $i \neq j$ *und ist* $\lambda \in \sigma(A)$, *so ist*

$$\min_i |\lambda - d_i| \leq \frac{r\epsilon}{(r+\epsilon)(\frac{\mu}{\mu+r})^{n-1} - \epsilon} = \hat{\mu}_1 \tag{8}$$

solange der Nenner positiv ist.

Beweis: Offenbar ist $A = D - \widetilde{E} - \widetilde{R} = D_1 - \widetilde{E}_1 - \widetilde{R}_1$ mit $|\widetilde{R}_1| \leq (r+\epsilon)R$, $|\widetilde{E}_1| \leq \epsilon L_1$ und $D_1 = diag(\widetilde{d}_i)$ mit $|\widetilde{d}_i - d_i| \leq \epsilon$. Wir können Satz 3 mit $\mu - \epsilon$ anstelle von μ und $r+\epsilon$ anstelle von r anwenden und erhalten

$$\min_i |\lambda - d_i| \leq \epsilon + \min_i |\lambda - \widetilde{d}_i| \leq \epsilon + \epsilon \frac{(\mu+r)^{n-1} - \mu^{n-1}}{\mu^{n-1} - \frac{\epsilon}{r+\epsilon}(\mu+r)^{n-1}} = \frac{r\epsilon}{(r+\epsilon)(\frac{\mu}{\mu+r})^{n-1} - \epsilon}$$

Bemerkung 5: Diese Schranke kann wie Satz 3 über ein Lemma 3 analoges Ergebnis erhalten werden. Man kann zeigen, daß

$$\kappa = \rho(\Delta^{-1}(\delta)(\epsilon L_2 + rR))$$

äquivalent ist mit

$$\hat{\Phi}(\kappa, \delta) \equiv (\frac{r+\kappa\mu}{\kappa\mu})^{n-1}(\frac{r+\kappa\delta}{\kappa\delta}) \cdot \frac{\epsilon}{r+\epsilon} = 1 \quad \wedge \ \kappa > 0.$$

Aus $\hat{\Phi}(1, \delta) \geq 1$ folgt die Schranke von Satz 4.

Bemerkung 6: Ist ϵ so klein, daß die rechte Seite μ_1 in (7) kleiner als μ ist, können wir wegen

$$|\lambda - d_j| \geq |d_k - d_j| - |\lambda - d_k| \geq 2\mu - \mu_1 > \mu$$

in $\Phi(k, \delta)$ μ durch $2\mu - \mu_1$ ersetzen und erhalten eine neue Schranke

$$\delta \leq \mu_2 = \epsilon \frac{(2\mu-\mu_1+r)^{n-1} - (2\mu-\mu_1+\epsilon)^{n-1}}{(2\mu-\mu_1+\epsilon)^{n-1} - \frac{\epsilon}{r}(2\mu-\mu_1+r)^{n-1}} \equiv h(\mu_1) < \mu_2 \tag{9}$$

usw.

Das Iterationsverfahren

$$\mu_{i+1} = h(\mu_i), \quad \mu_o = \mu, \quad i = o, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

ist ein Spezialfall des von VARGA [6] beschriebenen Verfahrens zur Berechnung des minimalen k-ten Gerschgorinkreises. Es gilt daher

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_i \geq \mu_{i+1}$$

und

$$\delta \leq M = \lim_{i \to \infty} \mu_i . \tag{11}$$

Ähnliches gilt für Satz 4.

V. STÖRUNGEN IN DER NEBENDIAGONALE. GETRENNTE EIGENWERTE

Es sei $1 \leq i \leq n$, $\widetilde{\Delta}(t) = diag(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i-1}, t, 1, \ldots, 1)$

und

$$f(t, \epsilon) = \rho(\widetilde{\Delta}^{-1}(t)(\epsilon L_3 + R)).$$

Es gilt

LEMMA 4: *Ist s eine Zahl mit*

$$4\epsilon \leq \frac{(s-\epsilon)^3}{s+\epsilon} \tag{12}$$

so ist

$$f\left(\frac{4\epsilon}{(s-\epsilon)^2}, \epsilon\right) \leq s. \tag{13}$$

Der Beweis soll hier nicht ausgeführt werden. Man zeigt dazu, daß mit

$$\alpha = \frac{2\epsilon}{s+\epsilon}, \quad t = \frac{4\epsilon}{(s-\epsilon)^2}$$

$$z' = \begin{cases} (1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}) & i = 1 \\ (t, t\alpha, \dots, t\alpha^{i-2}, \alpha^{i-1}, \dots, \alpha^{n-1}) & i \geq 2 \end{cases}$$

gilt

$$\tilde{\Delta}^{-1}(t)(\epsilon L_3 + R)z \leq s\, z.$$

SATZ 4: *Ist* $A = D - \tilde{E} - \tilde{R}$ *mit*

$$|\tilde{E}| \leq \epsilon L_3, \quad |\tilde{R}| \leq rR, \quad |d_j - d_k| \geq 2\mu \quad j \neq k$$

und

$$(14) \qquad 4\epsilon r \leq \frac{(\mu-\epsilon)^3}{\mu+\epsilon}$$

so gilt für $\lambda \in \sigma(A)$

$$(15) \qquad \delta = \min_i |\lambda - d_i| \leq \frac{4r\mu}{(\mu-\epsilon)^2} \cdot \epsilon .$$

Beweis: Aus (4) erhalten wir

$$1 \leq \rho(\Delta^{-1}(\delta)[\epsilon L_3 + rR])$$

und die rechte Seite ist gleich

$$(16) \qquad \frac{r}{\mu} \rho(\tilde{\Delta}^{-1}(\frac{\delta}{\mu})[\frac{\epsilon}{r} L_3 + R]) = \frac{r}{\mu} f(\frac{\delta}{\mu}, \frac{\epsilon}{r}).$$

Also haben wir

$$(17) \qquad \frac{\mu}{r} \leq f(\frac{\delta}{\mu}, \frac{\epsilon}{r}).$$

Mit $s = \frac{\mu}{r}$ und $\frac{\epsilon}{r}$ anstelle von ϵ ist wegen (14) die Voraussetzung (12) von Lemma 4 erfüllt, es ist daher

$$(18) \qquad f(\frac{4r\epsilon}{(\mu-\epsilon)^2}, \frac{\epsilon}{r}) \leq \frac{\mu}{r}.$$

Da f in der ersten Variablen monoton fällt, folgt aus (17) und (18)

$$\frac{\delta}{\mu} \leq \frac{4r\epsilon}{(\mu-\epsilon)^2}$$

d. h. (15).

VI. ZAHLENBEISPIELE

Wir betrachten den Fall $n = 4$, $r = 1$. Für verschiedene Werte von ϵ sind in den Spalten die Werte der Schranken in (2), in (3) und in Satz 2, also bei Störung nur in der Nebendiagonalen, angegeben. Für die Schranke von Wetterling (Bemerkung 2) hat man in (2) ϵ durch $\hat{\epsilon} = \|\widetilde{E}\|_{Sp}$ und r durch $\hat{r} = \|\widetilde{R}\|_{Sp}$ zu ersetzen. Schätzt man diese Größen weiter durch die entsprechende Erhard-Schmidt-Norm ab, so ist die Schranke in (2) mit $\sqrt{6} = \|L\|_{ES} = \|R\|_{ES} = 2.4494\ldots$ zu multiplizieren.

ϵ	(2)	(3)	Satz 2	$\epsilon^{1/4}$
0.1	1.0564	1.2178	0.8250	0.5623
0.01	0.4479	0.4608	$0.21\overline{22}$	0.3162
0.001	0.2151	0.2162	0.06431	0.1778
0.0001	$0.111\bar{0}$	0.11108	0.02030	$0.1\bar{0}$

In der zweiten Tabelle sind im selben Fall für $\mu = 1$ die Schranken aus (7), (8) und (15) angegeben.

ϵ	(7)	(8)	(15)
0.1	1.2559	2.66666	0.4938
0.01	0.07334	0.08602	0.04081
0.001	0.007032	0.00805	0.00408
0.0001	0.0007003	0.00080	0.00040

LITERATUR

1. Dreves, H. D.: Fehlerabschätzung beim QR-Algorithmus. Dissertation Hamburg (1971).
2. Elsner, L.: Einschließungssätze für Eigenwerte nicht-normaler Matrizen. "Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik". ISNM 7 (1967), 185-193.
3. Henrici, P.: Bounds for iterates, inverses, spectralvariation and fields of values of non-normal matrices. Num. Math. 4 (1962), 24-40.
4. Morrison, D. D.: Errors in the solution of eigenvalue problems by finite difference methods. Ph. D. Dissertation, University of California, Los Angeles (1961).
5. Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall Inc., (1962).
6. Varga, R. S.: On smallest isolated Gerschgorin-Disks for Eigenvalues. Num. Math. 6 (1964), 366-376.
7. Wetterling, W. und A. C. B. den Ouden: Eigenwerteinschließungen bei Fastdreiecksmatrizen. ISNM, 19 (1974) 221-228.