

Thema 1: Mathematikunterricht

Günter Graumann

Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule

1. Einleitung

Seit einigen Jahren wird in der Pädagogik und in den Fachdidaktiken der Aspekt der Allgemeinbildung diskutiert. Man hatte festgestellt, daß der wissenschaftsorientierte Unterricht der 70er Jahre nur zu einer Ansammlung von einzelnen Kenntnissen und Fertigkeiten führte; es fehlte ihm so etwas wie eine „integrierende Mitte“ bzw. „zentrierende, übergeordnete Orientierungs- und Beurteilungskriterien“ (Klafki 1985/91, S. 44). Mit Bezugnahme auf Klafki wähle ich hierfür den Begriff der *Allgemeinbildung*, der einerseits an das Gedankengut der alten Bildungstheorien anknüpft und sich andererseits dadurch davon absetzt, daß die Aspekte „Bildung für alle“ (für alle Schichten und alle Völker), „allseitige Bildung“ (Hirn-Herz-Hand) und „Schlüsselprobleme“ (gegenwärtige Menschheitsprobleme) als wesentliche Gesichtspunkte berücksichtigt werden.

Dabei ist aufgrund früherer Erfahrungen klar, daß eine Deduktion von Allgemeinbildungskonzepten bzw. -katalogen hin zu bestimmten Stoffen und Methodiken nicht möglich ist. Es ist eher umgekehrt, daß bestimmte Stoffe und Methoden bei vorgegebenen Rahmenbedingungen aufgrund von allgemeinen Zielen und allgemeinbildenden Konzepten ausgeschlossen werden können. Außerdem hat ein Allgemeinbildungskonzept, wie oben schon angedeutet, die Funktion der Orientierung (Kompaßfunktion) und des Deutlichmachens der „integrierenden Mitte“ sowie des Sich-Klar-Werdens über den Sinn des Unterrichts.¹ Da hierbei eine Wechselwirkung zwischen Inhalten und allgemeinbildender Funktion besteht, ist es für die Diskussion über Allgemeinbildung wichtig, daß diese auch auf ein Fach hin geführt wird.

Mathematik- bzw. Rechenunterricht ist schon seit vielen Jahrhunderten vorgeschriebener Schulstoff und der inhaltliche Kanon erscheint daher vielen als selbstverständlich. Sollten wir aber

nicht vielleicht doch nach dem Sinn des Mathematikunterrichts fragen? Ich meine: Ja! Das allgemein bekannte negative Verhältnis vieler Menschen zur Mathematik und die geringe Verwendung mathematischer Vorgehensweisen im Alltag trotz der starken Technisierung unserer Welt erfordert meiner Ansicht nach ein Überdenken des Mathematikunterrichts. Wieviel und welche Mathematik sollte in den allgemeinbildenden Schulen unterrichtet werden? Und vor allem mit welchen Intentionen sollten sie unterrichtet werden? Der Sinn des Mathematikunterrichts kann, wie ich meine, nicht in der Vermittlung von Mathematik an sich (und schon gar nicht im Lernen von Strukturmathematik, wie es in den 70er Jahren angestrebt wurde) gesehen werden.² Vielmehr hat der *Mathematikunterricht die Aufgabe, zur allgemeinen Entwicklung und Bildung der jungen Menschen beizutragen*. Was heißt das aber nun? Einerseits muß man bei einer ganzen Reihe von bislang üblichen mathematischen Inhalten überlegen, ob es noch Sinn macht, sie für alle verpflichtend zu unterrichten. Andererseits, und das ist das wichtigere, kommt es auf die sogenannte *Unterrichtskultur des Mathematikunterrichts* an, d. h. auf die Präsentation von Mathematik (dem Bild von Mathematik), die Vermittlung von positiven Einstellungen zur Mathematik und deren Bedeutung in der Umwelt sowie die Methoden des Umgangs mit und des Erwerbens von Mathematik.³

Ein an Allgemeinbildung orientierter Mathematikunterricht läßt sich daher nicht einfach nur durch Verordnungen oder Richtliniempfehlungen durchsetzen, er setzt vielmehr ein ständiges Bemühen um den Sinn des Mathematikunterrichts voraus. Auch wird man stets neue und der Unterrichtssituation angepaßte Wege finden müssen. *Als ersten Schritt dazu sollte jede Lehrerin und jeder Lehrer sich befragen, welchen Sinn sie bzw. er in der Behandlung eines bestimmten Themas in der*

vorgegebenen Klasse bzw. Gruppe sieht. Es ist zwar unrealistisch diese für jede Unterrichtsvorbereitung zu fordern; aber von Zeit zu Zeit sollte man sich diese Frage ernsthaft stellen, um den allgemeinbildenden Zweck des Unterrichts stets präsent zu haben.

2. Aufgaben der Schule im allgemeinen

Welchen Sinn und welche Aufgabe hat die Schule heute eigentlich? Geht man davon aus, daß die Schule keine Kinderaufbewahrungsanstalt ist und die Selektionsfunktion nicht ihre eigentliche Aufgabe ist, so könnte man die *Aufgabe der Schule generell* wie folgt fassen:

Die Kinder sollen befähigt werden, ihr gegenwärtiges und zukünftiges Leben zu bewältigen und zu gestalten, sofern dieses nicht der Familie und dem alltäglichen Leben oder speziellen Institutionen (wie Kirchen, Sportvereinen, etc.) übertragen werden kann bzw. sollte.

Das Wort „bewältigen“ muß hierbei in sehr weitem Sinne verstanden werden. Die Eingliederung der Kinder in die Gesellschaft mit ihren speziellen Normen, Lebensweisen und kulturellen Wurzeln gehört genauso dazu, wie auch die kritische Distanz zu gegenwärtigen Denk- und Lebensweisen von Erwachsenen sowie das Bemühen um eine friedliche und humane Existenz der Menschheit in Gegenwart und Zukunft einschließlich eines harmonischen Verhältnisses zur Natur. Da unsere heutige Welt für alle Menschen sehr komplex geworden ist, reichen einfache und archaische Verhaltensweisen (wie etwa ein „Freund-Feind-Denken“) nicht mehr aus, das gegenwärtige und zukünftige Leben angemessen zu bewältigen; die Entwicklung von differenzierten Auffassungsweisen und Handlungsschemata ist deshalb heutzutage eine der wichtigsten Aufgaben der Schule.

Zur Orientierung möchte ich einen Katalog von zu erwerbenden Qualifikationen nennen, bei dem ich versucht ha-

be die allgemeine *Aufgabe der Schule in fünf Kategorien* (wobei gewisse Überschneidungen nicht ganz zu vermeiden und in der Praxis ja auch gewünscht sind) zu fassen:

1. Pragmatische Dimension

Jeder Mensch soll die nötigen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten erwerben, die eine praktische Hilfe in seinem gegenwärtigen und zukünftigen Leben bieten, wobei die gesellschaftlichen Probleme und die gemeinschaftliche Gestaltung der zukünftigen Welt miteingeschlossen sind.

Die erste Aufgabe der Schule ist es, unmittelbare Lebensvorbereitung (vgl. Heymann 1989, S. 4 u. 6/7) zu liefern. Gemeint sind also erstens Kenntnisse und Fertigkeiten, deren praktischer Nutzen im Alltag offensichtlich ist, und zweitens Fähigkeiten, Probleme der Umwelt zu bewältigen.

Unter Bewältigung wird allerdings nicht nur eine Lösung im mathematischen Sinne verstanden, sondern Bewältigung kann auch das Feststellen der Nicht-Lösbarkeit mit den momentan zur Verfügung stehenden Fähigkeiten bedeuten; ebenso wird die Zuhilfenahme von Fachliteratur bzw. von Experten und die Bewältigung durch ein Team als Möglichkeit mit eingeschlossen.

Weiterhin gehört zur ersten Aufgabe der Schule auch der Erwerb allgemeiner Problemlösefähigkeiten und grundlegender neuer Denkstile, um auf (für den Einzelnen oder die Gesellschaft) neue Situationen angemessen reagieren zu können.⁴

Außerdem sei im Zusammenhang mit der ersten Aufgabe der Schule erwähnt, daß wir bezüglich der zukünftigen Welt (des Einzelnen als auch insgesamt) nur Prognosen aufstellen können, die mit vielen Ungewißheiten verbunden sind. Aber dieses Dilemma tritt ja in jeder pädagogischen Konzeption auf; vielmehr ist Pädagogik nur dann lebendig und fruchtbringend, wenn sie fundierte Analysen über die Zukunft mit Hoffnung und Vertrauen in die Richtigkeit der pädagogischen Handlungen verknüpfen kann.

Schließlich gehört zur ersten Aufgabe der Schule auch der Erwerb von klaren Begriffen des Alltags, die Kenntnis der unterschiedlichen Verwendung bestimmter Wörter und der Erwerb allgemeiner Kommunikationsfähigkeiten.

2. Aufklärungs-Dimension

Jeder Mensch soll möglichst viele Einzelheiten und Zusammenhänge unserer Welt verstehen und sich ein eigenes Bild von der Welt machen können

Die zweite Aufgabe der Schule ist es, den Kindern und Jugendlichen die Welt zu erschließen. Für einen mündigen und emanzipierten Bürger unserer Gesellschaft ist ein gewisses Maß von Kenntnissen und Einsichten in Umwelterscheinungen notwendig.

Hierbei verstehe ich unter Umwelt nicht nur Begebenheiten auf der materiellen Ebene, sondern auch auf der geistigen Ebene. Auch sind im Begriff Umwelt die kausalen und sozialen Vernetzungen innerhalb sozialer Gefüge wie Familie, Gemeinde, Staat etc. und die Vernetzungen mit der natürlichen Umwelt mit eingeschlossen.

Zur zweiten Aufgabe der Schule gehört deshalb auch die Aufklärung über die geschichtliche und kulturelle Einbindung der vielen Dinge und Zusammenhänge im Leben um uns herum. Weiterhin gehört dazu auch die Erschließung von Normen und Denkweisen von Menschen aus anderen Kulturkreisen, denn bekanntlich erwirkt man eine echte Bildung erst, wenn man eine Sache nicht nur aus einer Hinsicht kennt.

Schließlich sollen die Schülerinnen und Schüler im Rahmen der zweiten Aufgabe der Schule auch die Möglichkeit und Anregung erhalten, ein eigenes Weltbild aufzubauen bzw. zu differenzieren und fortzuentwickeln.

Der Umfang und Grad der Aufklärung von Kindern bzw. Jugendlichen soll dabei nicht von irgendeiner Instanz (wie etwa Richtlinienkonferenzen) festgelegt werden, sondern nur vom Interesse bzw. dem Grad der Betroffenheit der Schülerinnen und Schüler sowie ihrem Entwicklungsstand abhängen. Wichtig ist außerdem, daß es hier nicht um den Erwerb perfekter Kenntnisse und Fertigkeiten geht, sondern um das Verstehen der Grundgedanken und Zusammenhänge.

3. Soziale Dimension

Jeder Mensch soll sich als Mitglied verschiedener sozialer Ganzheiten sehen und einbringen können.

Bei der dritten Aufgabe der Schule steht nicht das Individuum, sondern das gemeinschaftliche Zusammenleben und -wirken im Vordergrund. Es geht dabei insbesondere um die Be-

reitschaft und Fähigkeit, sich in soziale Gruppen einzugliedern und an gemeinschaftlichen Aufgaben mitzuwirken (ohne sich einfach nur unterzuordnen).

Hierzu gehören dann die Kooperationsbereitschaft, Kooperations- und Kommunikationsfähigkeiten, die Bereitschaft und Fähigkeit, anderen bei Schwierigkeiten zu helfen, Konfliktbewältigungsfähigkeiten und ein Verantwortungsbewußtsein; aber auch die Fähigkeit, einzelne Wünsche und individuell-kurzfristige Vorteile zurückstellen zu können zugunsten gemeinschaftlicher Aufgaben und langfristiger Erfolge gehört dazu.

Das Denken in größeren Zusammenhängen insbesondere in Bezug auf soziale Vernetzungen und das Bewußtsein um die Eingebundenheit in zeitliche Entwicklungen ist hierbei ebenfalls wichtig.

Außerdem gehören zu dieser dritten Aufgabe der Schule auch die Pflege von „humanen“ Umgangsformen und Formen der Auseinandersetzung bei Konflikten. Leider herrscht heutzutage in vielen Klassen ein Ton von gegenseitiger Mißachtung bzw. Rücksichtslosigkeit vor. Auch werden bei den Konflikten meist nur kurzfristige und vordergründige Vorteile ins Auge gefaßt. Dieses ist natürlich nicht nur ein Problem der Schule (z. B. der Führung einer Klasse), sondern ein gesellschaftliches Problem. Nach der sicherlich notwendigen Revision alter Normen in den vergangenen 25 Jahren, haben wir außer der durch die Wirtschaft vorgeführten Ziele des „kurzsichtigen“ Profits kaum noch allgemein anerkannte Normen des Umgangs von Menschen untereinander. Mit Blick auf die Menschenrechte und die Zukunftsprobleme der Menschheit hat die Schule hier im Verband mit anderen gesellschaftlichen Institutionen eine wichtige Aufgabe. Als Grundprinzip ist hierbei die Achtung der Würde des anderen Menschen anzusehen.

4. Persönlichkeits-Dimension

Jeder Mensch soll sich zu einer eigenständigen Persönlichkeit mit gesundem Selbstbewußtsein und ausgebildeten Fähigkeiten entwickeln, bestimmte Einstellungen und Normen ausbilden und seine individuellen Fähigkeiten und Interessen entfalten können.

Die vierte Aufgabe der Schule hat einmal die Entwicklung einzelner intellek-

tueller Kompetenzen wie etwa das Perzeptionsvermögen, das Verarbeitungsvermögen einschließlich der Denkstrukturen, das Speicherungsvermögen, das Anschauungsvermögen einschließlich der Intuition, das Abstraktionsvermögen einschließlich Strukturierungsfähigkeiten und die Kreativität sowie einzelne psychomotorische Kompetenzen im Auge.

Zum zweiten gehört dazu auch die Entwicklung bzw. Förderung von Einstellungen und Normen wie etwa die Bereitschaft, sich mit Sachen und Menschen auseinanderzusetzen, die Freude an der Beschäftigung mit bestimmten Themen, die Entdeckerfreude, die Freude an Spiel, Spaß und Muße, sowie die Bereitschaft für ästhetisches Empfinden und ein gesundes Maß an Selbstvertrauen.

Weiterhin gehört dann zur vierten Aufgabe der Schule auch die Differenzierung nach individuell unterschiedlichen Begabungen und Interessen.

Alle diese Aspekte dürfen nicht isoliert voneinander gesehen werden.

5. Dimension der kritischen Reflexion

Jeder Mensch soll über sein Denken und Handeln kritisch reflektieren können, Verantwortungsbewußtsein im Umgang mit Mensch und Natur zeigen und sich der Grenzen einzelner Verfahren sowie menschlicher Erkenntnisfähigkeit grundsätzlich bewußt sein.

Die fünfte Aufgabe der Schule besteht darin, daß Menschen ihren eigenen Standpunkt reflektieren und relativieren können und aufgrund erworbener Erkenntnisse und Fähigkeiten nicht der Überheblichkeit verfallen, sondern möglichst immer das rechte Maß finden.⁵

Insbesondere gehört hierzu die Reflexion individueller und gesellschaftlicher Normen und Fakten in Hinsicht auf ihre kulturell-philosophischen Wurzeln und die Reflexion der Erkenntnisse von den Gefahren der extensiven Nutzung von Werkzeugen, Techniken und Machtmitteln sowie das Wissen über die Grenzen wissenschaftlicher Erkenntnisse. Zu dieser fünften Aufgabe der Schule gehört aber auch die Fähigkeit zur Sachlichkeit und Objektivität, die Würdigung des eigenen Standpunktes und die Übernahme von Verantwortung gegenüber Mensch und Umwelt.

3. Allgemeinbildender Mathematikunterricht

Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht hebt sich gegenüber anderem Mathematikunterricht dadurch ab, daß die genannten allgemeinen Aufgaben der Schule die einzelnen Lernziele, die Auswahl der Inhalte und vor allem die (oben schon erwähnte) gesamte Unterrichtskultur im Sinne der Kompaßfunktion leiten. Die Hauptaufgabe der Lehrenden besteht deshalb in der Reflexion des Bildes von Mathematik und der Rolle der Mathematik in unserer Welt sowie der Reflexion ihrer Unterrichtspraxis unter der Sicht der genannten allgemeinen Aufgabe der Schule.

Ich möchte deshalb im folgenden zunächst einige allgemeine Bemerkungen über Mathematikunterricht und mathematische Vorgehensweisen in unserer Welt machen und danach die obengenannten Aufgaben der Schule anhand von Lernzielen des Mathematikunterrichts verdeutlichen.

Ein wesentliches Merkmal des Menschen ist es, daß er seine Umwelt mit Hilfe von Begriffen ordnet.⁶ Daß bei einer solchen Modellierung niemals alle Erfahrung erfaßt werden kann, hatte ich schon oben erwähnt. Wir haben aber keine andere Möglichkeit, Orientierungen für unser Leben zu finden. Außerdem gewinnen wir die Möglichkeit über vergangene Erfahrungen zu reflektieren und Planungen für die Zukunft zu machen. In diesem Zusammenhang sollte man *die Mathematik als ein in besonderer Weise elaboriertes Begriffssystem sehen, das uns Erklärungshilfen für die Vergangenheit und Handlungsorientierungen für Gegenwart und Zukunft zur Verfügung stellt.*

Traditionell hat sich die Mathematik auf die Aspekte der Quantifizierungen und räumlichen Formen konzentriert. In der modernen Mathematik stehen allerdings die abstrakten Formen, die allgemeinen Strukturaspekte und die funktionalen Zusammenhänge im Vordergrund. Die Frage der richtigen Anwendung dieser Strukturen auf die Wirklichkeit, also der neben der Entwicklung von Strukturen, in Bezug auf den Sinn von Mathematik ebenso wichtige Aspekt der Anwendung von Mathematik, wird allerdings heutzutage nicht mehr innerhalb der Wissenschaft Mathematik berücksichtigt. Dieses Manko ist in der Didaktik der Mathematik erkannt worden, und es folgte auf die Reform des Mathematikunterrichts der

70er Jahre die Ergänzung durch die Anwendungsorientierung der 80er Jahre. Denn im Erziehungsprozeß kann man sich nicht wie in einer wissenschaftlichen Disziplin auf einen einzelnen Aspekt begrenzen.⁷ Andererseits darf aber auch nicht vergessen werden, daß gerade in unserer heutigen Welt die Strukturierung von Erfahrungsbereichen bzw. Vorgängen der Erfahrung mittels formaler Strukturen eine notwendige Aufgabe jedes Menschen ist, um in angemessener Weise das Leben zu bewältigen. Neben dem Ordnen der Erfahrungswelt durch das Netz der Begriffe müssen wir unsere Umwelt auch nach abstrakten Gesichtspunkten strukturieren.

Die Mathematik liefert uns also neben einem Handwerkszeug für bestimmte Probleme (pragmatische Dimension) vor allem eine bestimmte Denkweise, mit der wir unsere Welt besser erfassen können (Aufklärungs-Dimension). Hierbei sei besonders hervorgehoben, daß die Mathematik ein weites Feld für die Erforschung von Zusammenhängen und funktionalen Abhängigkeiten darstellt und nicht nur lineares, algorithmisches Denken fordert, wie es das Bild der Schulmathematik heute leider zu oft nahelegt. Das kreative, suchende und mehrperspektivische Denken ist aber gerade in Zukunft gefordert.⁸ Ein noch anderer Aspekt der Mathematik, der in der Praxis zunehmend an Bedeutung gewinnt, zeichnet sich in den letzten Jahren ab. Es ist das, was man mit „Simulation“ bezeichnen kann. Mit Hilfe von Mathematik war es schon immer möglich bestimmte Effekte einer Planung im Voraus zu berechnen. Mit Hilfe der modernen Computer können wir heute sehr komplexe Geschehnisse, die nicht „berechenbar“ sind, in gewissem Umfang simulieren, d. h. ohne die möglicherweise unangenehmen Folgen eines Experimentes durchspielen. Dieses scheint mir eine neue Qualität der Sammlung und Verarbeitung von Erfahrung in Hinsicht auf Ordnung und Planung von Geschehnissen zu sein. Darüber hinaus kann man an der Mathematik in besonderem Maße auch erfahren, daß der menschliche Geist über Umweltprobleme hinausgehend zu rein theoretischen spekulativen Fragen angeregt werden kann. Dieser *rein spekulative Aspekt des menschlichen Geistes*, der in der Mathematik vornehmlich nach Gesetzmäßigkeiten und innermathematischer Ästhetik Ausschau hält (bei *Pythagoras* stand auch noch ein religiöser Gesichtspunkt dahinter), darf bei den Überlegungen

zur Bildung junger Menschen nicht vergessen werden.

Nach diesen grundlegenden Gesichtspunkten, über Mathematik in Bezug auf deren allgemeinbildenden Charakter, möchte ich nun einzelne *allgemeinbildende Gesichtspunkte des Mathematikunterrichts, geordnet nach den oben genannten Dimensionen der Aufgaben von Schule*, nennen:

1. Pragmatische Dimension

Es ist allgemein unbestritten, daß eine gute Vorstellung von natürlichen Zahlen und den vier Grundrechenarten im Alltag hilfreich und größtenteils auch notwendig ist. Inwieweit perfekte Fertigkeiten in den schriftlichen Rechenverfahren heute noch nötig sind bzw. wirklich im Alltag verwendet werden, ist eine noch zu diskutierende Frage. Weiterhin sollte aber jeder Mensch in unserer Gesellschaft die wichtigsten Größen und einfachen Dezimalzahlen sicher beherrschen können und die Grundgedanken der Prozent- und Zinsrechnung kennen. Außerdem gehört die Fähigkeit der richtigen und angemessenen Anwendung von Mathematik zur pragmatischen Dimension der allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts. Dabei ist es wichtig, nicht nur Textaufgaben, sondern auch mittels Mathematik lösbare realitätstreue Situationen zu behandeln, wobei die nicht-mathematisierbaren Aspekte ebenso wie die mathematisierbaren bei der Problembehandlung zu berücksichtigen sind; manchmal ist sogar das Erkennen der Nicht-Mathematisierbarkeit eines Problemaspektes die wesentliche Erkenntnis. Auf jeden Fall soll es aber darum gehen, die Anwendung von Mathematik, wie sie im täglichen Leben wirklich stattfindet, zu erfahren und zu trainieren (vgl. *Graumann* 1976, 1977 und 1988).

Im weiteren Sinne gehören zur lebenspraktischen Nutzung auch allgemeine Fähigkeiten, die zwar zur Persönlichkeits-Dimension gezählt werden können, aber auch unmittelbar im Alltag notwendig sind. In der mathematikdidaktischen Literatur der vergangenen 25 Jahre findet man in diesem Zusammenhang die folgenden Formulierungen:

Zeichnerische Fähigkeiten, Argumentationsfähigkeiten, Fähigkeiten des Mathematisierens, Fähigkeiten zum Klassifizieren, Ordnen, Generalisieren, Analogisieren und Formalisieren, Strukturierungsfähigkeit bzw. Fähigkeit Systeme erkennen und entwickeln können sowie systematische Vorgehensweisen durchhalten können⁹, Fähigkeiten heuristi-

sche Strategien erkennen und verwenden können, Fähigkeiten zum wissenschaftlichen Denken und Arbeiten und auch Fähigkeiten zur Konzentration, Ordnung, Sorgfalt, Genauigkeit und Gewissenhaftigkeit (vgl. dazu auch *Graumann* 1992).

Weiterhin gehört zu diesem Komplex, wie schon oben erwähnt, auch der Erwerb neuer Denkstile, um die komplizierten Probleme der Gegenwart und Zukunft angemessen behandeln zu können.

Beispielsweise ist das Entwickeln von Prozeßsteuerungsmaximen (Handlungsorientierungen) in offenen Systemen (das ich gerne als „synergetisch denken“ bezeichne) ein für die Menschheit insgesamt neuer Denkstil, der aufgrund der Schlüsselprobleme Ökonomie – Bevölkerungsentwicklung – Sicherheitspolitik – Ökologie meiner Ansicht nach unbedingt notwendig ist¹⁰ (vgl. auch *Graumann* 1984 und 1991).

Schließlich gehören zur pragmatischen Dimension der allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts auch die Kenntnis einer ganzen Reihe von mathematischen Begriffen, die in die Alltagssprache übergegangen sind oder zumindest bei der Kommunikation von vielen Menschen verwendet werden.

Beispiele hierfür sind etwa „Rechteck“, „Kreis“, „Würfel“, „Wahrscheinlichkeit“, „Potenz“ oder auch „Quadratur des Kreises“.

Neben dem Erwerb einer Grundvorstellung dieser Begriffe ist es oft auch wichtig, den teilweise unterschiedlichen Gebrauch in Mathematik und Umwelt zu kennen. Außerdem ist in diesem Zusammenhang noch das allgemeine Streben nach Begriffsklarheit und klarer Ausdrucksweise als Lernziel zu nennen.

Dieses ist wie viele allgemeine Ziele zwar keine Domäne des Mathematikunterrichts, aber es kann im Mathematikunterricht sicherlich gut trainiert werden; man sollte dabei aber das Training nicht auf die reine Mathematik beschränken, denn gerade in Anwendungssituationen ist diese Fähigkeit wichtig. Ansonsten besteht die Gefahr, daß die im Mathematikunterricht gelernten Fähigkeiten quasi ein Modul im Gehirn darstellen, die nur im Mathematikunterricht aktiviert werden und im sonstigen gegenwärtigen und zukünftigen Leben keine Rolle spielen, was ja der Allgemeinbildung durch Mathematikunterricht widersprechen würde.

2. Aufklärungs-Dimension

Um mathematische Begriffe, Strukturen und Techniken in der Umwelt richtig nutzen zu können, ist es auch notwendig, diese zu verstehen. Auf diese Weise trägt der Mathematikunterricht

schon einen gewissen Teil zur Aufklärung bei. Zum Erschließen der Welt gehört aber auch ein Verständnis von Dingen und Zusammenhängen, die nicht unmittelbar im Alltag genutzt werden können.

Hierzu gehören etwa die Bedeutung von Symmetrie in unserer Welt, das unterschiedliche Wachstum verschiedener Funktionen und das Verhalten dynamischer Systeme wie z. B. zellulärer Automaten, die Prinzipien der Computertechnik (insbesondere die Codierung mittels des Dualsystems der Zahlen und die Funktionsweise von Prozeduren) und die Simulation komplexer Mechanismen bzw. Entwicklungen mittels Computer, Stochastische Prozesse, die Rolle der Analysis in der klassischen Physik und in der Technik.

Im Rahmen der Stiftung kultureller Kohärenz (vgl. *Heymann* 1989, S. 5) gehört dann auch ein gewisses Verständnis mathemathistorischer Entwicklungen und deren Zusammenhang mit kulturellen und politischen Entwicklungen zur allgemeinbildenden Aufgabe des Mathematikunterrichts.

Hierbei wäre etwa die Entstehung von Kalendern, Zahlzeichen und Ornamentik in prähistorischer Zeit, das Aufkommen von Beweisen (vgl. *Graumann* 1990b) und der Zusammenhang von Religion, Philosophie und Mathematik bei den alten Griechen, der Weg der Stellenwertschreibweise von den Babyloniern über die Inder und Araber bis zu Adam Riese, die Entwicklung der Algebra in der Renaissance und deren Zusammenhang mit der Entwicklung der wohltemperierten Stimmung in der Musik sowie die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien und der modernen Denkweise in der Mathematik.

Außerdem gehört zur Aufklärung über unsere Welt und den Menschen die Erfahrung, daß Menschen auch von rein theoretischen Fragestellungen gebannt sein können, wobei in der Mathematik insbesondere der Umgang mit dem Unendlichen von Bedeutung ist.

Hierfür eignet sich z. B. die Behandlung von Primzahlverteilungen oder pythagoräischen Tripeln, des Beweises der Irrationalität von $\sqrt{2}$, der Erweiterung der euklidischen Ebene zur projektiven Ebene und der Nicht-Abzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen. Das Phänomen, daß der menschliche Geist über bestimmte Lebenssituationen zu rein theoretischen Fragen angeregt werden kann, läßt sich aber auch schon bei der Behandlung von Parakkettierungen oder den Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten bei Glücksspielen recht gut erfahren.

3. Soziale Dimension

Obleich wir im Alltag viele Probleme mit anderen Menschen gemeinsam lösen oder zumindest besprechen und Mathematiker in der Industrie vielfach

im Team arbeiten, ist der Mathematikunterricht größtenteils noch auf das Einzelkämpfertum ausgerichtet. Die Kooperationsbereitschaft und -fähigkeit sollte deshalb eine wesentlich größere Bedeutung auch im Mathematikunterricht spielen. In diesem Sinne sollte im Mathematikunterricht insbesondere auch die Möglichkeit genutzt werden, die Bereitschaft und Fähigkeit zum rationalen Dialog zu fördern.

Außerdem kann in einem Mathematikunterricht, in dem aktuelle gesellschaftliche Fragen (wie etwa Bevölkerungsentwicklung, Energiereserven, Wasserverbrauch oder Müll), thematisiert werden zur Entwicklung eines gesellschaftlichen Verantwortungsbewußtseins beigetragen werden.

Grundsätzlich wichtig für die Förderung sozialer Lernziele ist aber der Umgangsstil der Schüler und Schülerinnen untereinander und mit der Lehrerin bzw. dem Lehrer. Dieser sollte erstens durch gemeinsames Bemühen um eine Sache geprägt sein, wobei die Vorkenntnisse einzelner Schüler bzw. Schülerinnen oder der Lehrerin bzw. des Lehrers nicht zur erdrückenden Autorität gewendet werden darf. Der Prozeß der gemeinsamen Entwicklung von Mathematik und ihrer Anwendung – und nicht das Erlernen fertiger Mathematik – ist dabei vorrangig. Zweitens sollte der Umgangsstil stets die gegenseitige Achtung der Person (einschließlich ihrer Unzulänglichkeiten) als Grundlage haben.

4. Persönlichkeits-Dimension

Wie oben angeführt geht es hier um die Entwicklung der Kinder zu einer vielseitig befähigten und selbständigen Persönlichkeit. Der Mathematikunterricht kann an dieser Aufgabe immer nur im Zusammenhang mit anderen Fächern, Umwelt und Familie wirken. Es kommt dabei auch weniger auf den Stoff als auf die Art der Darstellung und der Auseinandersetzung mit Mathematik und ihren Anwendungen an. Die Aspekte, die im Mathematikunterricht besonders zu beachten sind – sie tauchen in Lernzielkatalogen und Richtlinien zum Mathematikunterricht immer wieder auf –, lassen sie durch folgenden Stichworte kennzeichnen:

Räumliches Vorstellungsvermögen, Anschauungsvermögen und Intuition, Abstraktionsvermögen und Strukturierungsfähigkeit bzw. Fähigkeit des Organisierens von abstrakten Vorgängen, Logisch-Denken-Können und Urteilsvermögen, geistige Initiative-Phantasie-Kreativität und Fähigkeiten des Entdeckens und spielerischen Umgangs mit bestimmten

Dingen einschließlich dessen Lenkung in konstruktiv-produktive Bahnen, Fähigkeit differenzierter Wahrnehmung in komplexen Feldern (z. B. bestimmte Figuren bzw. Strukturen in einer vielgestaltigen Figur erkennen) und das Sich-Hinein-Denken-Können in komplexe Zusammenhänge, Bereitschaft und Fähigkeit bei komplizierteren Problemen nach Lösungswegen zu suchen und längere Frustrationsphasen durchzuhalten, Fähigkeit Vernetzungen innerhalb eines Bereiches und mit anderen Bereichen herstellen können und Handlungsorientierungen für Entscheidungen in offenen, dynamischen Systemen entwickeln können (vgl. auch *Graumann* 1992).

Für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens und des Anschauungsvermögens spielt der Geometrieunterricht eine wichtige Rolle; reflektierte Erfahrungen im Raum mit gleichzeitiger Differenzierung des geometrischen Begriffsapparates sowie der Behandlung geometrischer Probleme und der Anwendung von Geometrie auf Umweltsituationen ist deshalb von der Grundschule bis zum Abitur ein notwendiger Aspekt von Allgemeinbildung in der heutigen Zeit. Wie schon oben erwähnt, sind aber auch die Fähigkeit zur Abstraktion, Ordnung und Strukturierung der Geschehnisse um uns herum grundlegend wichtige Eigenschaften für alle Menschen.

Dieses kann im Mathematikunterricht etwa dadurch trainiert werden, daß Ordnungsgesichtspunkte wie das „Haus der Dreiecke“, „Symmetrie“ oder Analogien zwischen ebenen und räumlichen Figuren behandelt werden und Überlegungen zur vollständigen Erfassung eines Problems bei Allaussagen (z. B. Menge aller Teiler einer Zahl, Anzahl aller Verbindungsgeraden von fünf verschiedenen Punkten) oder Fallunterscheidungen (z. B. bei quadratischen Gleichungen bzw. bei Ungleichungen mit Absolutbeträgen oder bei Kurvendiskussionen) in den Vordergrund des Unterrichts gestellt werden.

Für den Mathematikunterricht besonders geeignet erscheint mir auch die Vermittlung von Erfahrungen des rein theoretisch orientierten Denkens („homo theoreticus“) mit seinen spielerischen und ästhetischen Aspekten.

Dazu müssen dann einzelne ansprechende Probleme (wie z. B. Konstruktion, Form und Größenverhältnisse an regelmäßigen N -Ecken) und damit zusammenhängende weiterführende Fragestellungen oder systematische Überlegungen (beim genannten Beispiel: Parkettierungen, regelmäßige Körper oder Stern-Ecke etc.) im Unterricht behandelt werden. Auch die Diskussion von mathematikhistorischen Gesichtspunkten (wie z. B. die Bedeutung der Zirkel- und Linealkonstruktionen für die alten Griechen oder die Diskussionen im Zusammenhang mit dem Parallelenpostulat) bieten hierfür gute Möglichkeiten.

Schließlich möchte ich noch hervorheben, daß der Mathematikunterricht für den Erwerb der oben schon erwähnten neuen Denkweise („vernetztes Denken“ und „synergetisches Denken“) eine sehr wichtige Aufgabe zu übernehmen hat, da ja gerade über den Mathematikunterricht im Zusammenhang mit dem Unterricht in den naturwissenschaftlichen Fächern das alte „Newtonsche“ Denken (positivistisch-mechanistische Denken) vermittelt wurde und wird.

Hierzu sollten im Mathematikunterricht von Anbeginn an die Grenzen der Mathematik und Mathematisierbarkeit der Welt im allgemeinen und die Grenzen von Algorithmen im besonderen immer wieder thematisiert werden. In den oberen Klassen des Gymnasiums kann dann anhand chaotischer Funktionen auch die Anwendbarkeit des Ursache-Wirkungs-Gesetzes auf die Umwelt grundsätzlich reflektiert werden. Das anaioge, mehrdimensionale Denken und die Intuition kann man aber auch schon dadurch fördern, daß man sich etwa in der Grundschule an komplexere Sachrechenaufgaben gemeinsam heranwagt oder im Geometrieunterricht einen Begriff auf mehrfache Weise charakterisiert und in komplexen Figuren nach Untergebilden sucht.

Außerdem gehört zu dieser Dimension der allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts auch die Erfahrung der Kraft des eigenen Denkens und die damit zusammenhängende Entwicklung von Selbständigkeit und Selbstbewußtsein (Schüler-Ich) sowie die Bildung von Einstellungen zur Mathematik und ihrer Rolle in der Umwelt. Schließlich sollte der Mathematikunterricht auch noch zur Bildung eines ästhetischen Empfindens (gegenüber visuellen Formen und abstrakten Gebilden) beitragen und eine positive Einstellung zu einem rechten Maß von Muße vermitteln.¹¹

5. Dimension der kritischen Reflexion

Zum kritischen Vernunftgebrauch in bezug auf Mathematik gehört es zu allererst, daß der Modellcharakter und die Grenzen der Modellierung durch die Mathematisierung bewußt werden.

Das fängt schon in der Grundschule damit an, daß das rechnerische Ergebnis einer Textaufgabe nicht einfach als Endergebnis hingenommen wird, sondern noch einmal (zumindest als Antwortsatz) in bezug auf die Ausgangssituation bzw. Fragestellung reflektiert wird. Bei komplexeren Sachaufgaben sollte dann ausführlich der Sinn und Zweck der mathematischen Lösung für die Bewältigung der Sachsituation diskutiert werden und es sollte auf die durch die vereinfachende Modellierung möglicherweise entstehenden Fehler eingegangen werden.

Auch nicht-lösbare Aufgaben (wie z. B. $5 - 8$ im ersten Schuljahr oder $2x + 3 = 2(x + 3)$ im achten Schuljahr) und bislang ungelöste Probleme (wie z. B. die Frage nach der Anzahl von Primzahlzwillingen) sollten im Mathematikunterricht von Zeit zu Zeit behandelt werden, um die Grenzen auch innerhalb der Mathematik bewußt zu machen. Einerseits wird damit das Bild von Mathematik als reinem Rechenapparat kritisch beleuchtet und andererseits bieten die Grenzen bestimmter Verfahren, wie in der Geschichte der Mathematik, auch einen Anreiz zur Erweiterung der Zahlbereiche bzw. festgefahrener Vorstellungen überhaupt. Aber auch schon das Aufspüren von Fehlern in anscheinend klaren Beweisen kann das kritische Bewußtsein fördern, wenn die Besprechung der Fehler nicht nur als „technisches“ Problem gesehen wird.

Zur Dimension der kritischen Reflexion gehört aber auch die Reflexion über die Veränderung unserer Welt durch die immer stärkere Durchdringung mit mathematischen Methoden und die Diskussion, daß Probleme wie die der Ökologie nicht mit der positivisch-mechanistischen Denkweise der klassischen Wissenschaften angemessen gelöst werden können.¹²

4. Schlußbemerkung

Lassen Sie mich zum Schluß noch einmal die meiner Ansicht nach wichtigsten Punkte für den Mathematikunterricht zusammenfassen:

● *Erstens* darf der Sinn des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen nicht im Lernen von Mathematik an sich gesehen werden.

● *Zweitens* sollte der Mathematikunterricht eine Reihe von Kenntnissen und Fertigkeiten vermitteln, die für das tägliche Leben eines jeden Menschen unserer Gesellschaft notwendig oder zumindest sehr hilfreich sind.

Hierdurch ist der Sinn des Mathematikunterrichts allerdings noch nicht ausgeschöpft. Vielmehr nimmt die Vermittlung dieser Kenntnisse und Fertigkeiten nur einen relativ kleinen Anteil der üblicherweise im Mathematikunterricht behandelten Themen ein. Wichtig ist außerdem, daß bei der Vermittlung dieser pragmatischen Aspekte des Mathematikunterrichts, die Anwendungssituation der Schülerinnen und Schülern deutlich gemacht werden und daß die Grenzen der Mathematisierung aufgezeigt werden.

● *Drittens* soll im Mathematikunterricht zum Verständnis der Welt beigetragen werden und es sollen die Fähigkeiten zum Ordnen und Strukturieren gefördert werden. Insbesondere sollte auch das „vernetzte, synergetische Denken“ im Mathematikunterricht entwickelt werden.

● *Viertens* gibt es eine Reihe von allgemeinen Qualifikationen (einschließlich individueller Interessen), zu deren Bildung der Mathematikunterricht mitbeitragen kann.

Bei der Entwicklung bzw. Förderung dieser allgemeinen Qualifikationen kommt es meistens nicht so sehr auf den Stoff an, sondern vielmehr auf die Art und Weise der Präsentation (Unterrichtskultur). Das Bild von Mathematik sowie die Kenntnisse und Einstellungen bezüglich des Verhältnisses von allgemeinen Zielen und Mathematikunterricht bei den Lehrerinnen und Lehrern ist hierfür ganz wesentlich, weshalb die Behandlung des Themas „Allgemeinbildung durch Mathematik“ für Lehreraus-, weiter- und fortbildung eine zentrale Rolle einnehmen sollte.

Anmerkungen

- 1 „Ohne Vertrauen auf eine in unserem Dasein wirkende, sinnvoll gestiftete Ordnung kann der Mensch nicht wahrer Mensch sein.“ (A. Nitsche, Das verwaiste Kind der Natur, Tübingen 1962, S. 15)
„Die Dinge und Ereignisse tragen aber ihre Sinnantwort nicht auf ihrer Stirn geschrieben; der Mensch muß ihren Sinn suchen, finden und deuten (P. Oswald, Erziehen? – heute?, Kastellmann 1980, S. 87).
- 2 „Das Rechnen darf nicht mehr Selbstzweck bleiben, sondern soll Mittel zur Verfolgung höherer Zwecke werden. Diese höheren Zwecke aber können keine anderen sein, als die Erfassung der Wirklichkeit, die uns in Geist und Natur entgegentritt, und die Förderung der Kultur... (J. Kühnel, Neubau des Rechenunterrichts, Bad Heilbrunn [1916] 1965, S. 67)
- 3 „Ein nach lernbiologischen Erkenntnissen erarbeiteter Unterricht, der zum Verstehen und Analogedenken, zum Erkennen von Zusammenhängen zwingt... könnte in Schulen und Universitäten ein der individuellen Lernart angepaßtes und damit weit effizienteres Lernen unterstützen.“ (Vester 1991, S. 475)
„Aber in Wirklichkeit, d. h. in den durch behördliche Lehrpläne auf Stoff und Ziel festgelegten Unterricht, herrscht überall das Lernen, richtiger noch Einlernen vor. Zum mindesten gibt das Erwerben des Wissens der jetzigen Schule das Gepräge. Die schöpferischen Kräfte der Gestaltungskraft und des Denkvermögens werden vernachlässigt... (A. Gerlach, Von schönen Rechenstunden, Leipzig [1908] 1921, S. 2/3).
- 4 Aus der Lernpsychologie wissen wir, daß neue Inhalte leichter erfaßt und neue Probleme leichter gelöst werden, wenn das Denkschema schon Integrationspunkte dafür besitzt.
„Wir stehen vor der Aufgabe, unsere Spezies zu einer neuen überlebensfähigen Integration mit der Umwelt hinzuführen. Das bedeutet Verhaltensänderung, ... Verhaltensänderungen setzen eine Beweglichkeit des Denkens voraus.“ (F. Vester 1991, S. 459)
„Schließlich nenne ich noch eine weitere Bereitschaft und Fähigkeit von übergreifender Bedeutung. Man kann sie als ‚vernetztes Denken‘ oder ‚Zusammenhangsdenken‘ bezeichnen.“ (W. Klafki 1991, S. 63).
- 5 Beachtenswert finde ich in diesem Zusammenhang folgende neue Interpretation von vier alten Tugenden: 1. Besonnenheit (sich von innen Grenzen setzen), 2. Tapferkeit (Behaupten der Grenzen nach außen gegen Angriffe), 3. Gerechtigkeit (Anerkennung der Grenzen anderer; wechselseitige Anerkennung) und 4. Weisheit (Wissen, wo Grenzen liegen und Überdenken der Grenzen).
- 6 „Wir werfen über die Erfahrungswelt das Netz der Begriffe und suchen, sie darin zu fangen.“ (Frey 1967, S. 30).

7 „Auch die Bildungsreform der siebziger Jahre zementierte mit ihrer Verakademisierung des Unterrichts (die fälschlicherweise oft Verwissenschaftlichung genannt wird) die Unfähigkeit, mit Gelerntem umzugehen, es zur Realität in Beziehung zu setzen... (Vester 1991, S. 469 u. 475).

8 „So besteht zwar die Welt aus einer Menge von Einzeldingen, doch viele von diesen sind zu Systemen vernetzt. Zu den Systemgesetzmäßigkeiten zählt nun auch eine ganz besondere Eigenschaft...: Lebensfähige Systeme sind niemals abgeschlossen, sondern immer nach außen offen, von außen zugänglich.“ (Vester 1991, S. 17 u. 29).

9 Diese scheint mir bei Diskussionen und bei Problembearbeitungen eine besonders auffällige Eigenschaft von mathematisch gut gebildeten Menschen zu sein. Der Mathematikunterricht hat deshalb die Aufgabe, alle Menschen so gut wie möglich in dieser Hinsicht zu bilden.

10 „Die meisten von uns haben eine verschwommene Vorstellung von der ‚modernen Wissenschaft‘, die ihren Ursprung als Forschungsprogramm in Westeuropa im 17. Jahrhundert hat... Das 20. Jahrhundert hat erlebt, wie diese Denkweise als universeller Rahmen für die Wahrnehmung der Welt zusammengebrochen ist. Um 1920 mußte das mechanistische Weltbild in der physikalischen Forschung aufgegeben werden. Die Beschaffenheit der ‚Probleme‘, mit denen sich die Wissenschaft beschäftigte änderte sich grundlegend. Sie waren nicht länger trennbar innerhalb von Raum und Zeit, sondern umfaßten systematische gegenseitige Abhängigkeiten scheinbar isolierter Phänomene... Rekursive Formen der Organisation mit aufeinander bezogenen Ebenen der Beschreibung kommen in den Blick.“ (Chr. Floyd, Wissenschaft und Ethik. In: Informationsdienst Wissenschaft & Frieden, 1/92, S. 11/12).

„Solche Probleme, wie sie schon in den Analysen des Club of Rome oder neuerdings etwa in Ulrich Becks Deutung der Entwicklung moderner Gesellschaften und tendenziell der zukünftigen Welt-Gesellschaft zur Risiko-Gesellschaft aufgewiesen werden, machen deutlich, wie unzulänglich, wie folgenblind unser weitgehend noch vorwaltendes Denken, Entscheiden und Handeln ist.“ (Klafki [1985] 1991, S. 63/64).

„Die Crux liegt darin, daß wir nach wie vor keine Erfahrung haben, wie sich Probleme in komplexen Systemen lösen lassen. Ja, daß unser ganzes Ausbildungssystem, von der Grundschule bis hinauf zu den renommiertesten Forschungsstätten, bisher kaum eine Möglichkeit anbietet, dies zu erlernen“ (Vester S. 470 u. 23).

11 „Die Menschheit selbst hat die vielen Umweltkatastrophen seit ihrem Erscheinen (wie Eiszeiten und Vulkanausbrüche) sicher nicht nur durch Anwendung rationaler Fähigkeiten überlebt. Ebenso wichtig waren nichtrationale Fähigkeiten, wie Intuition, Schönheitssinn (Ernst-Ulrich von Weizsäcker und Georg Picht haben den Sinn für Ästhetik als Frühwarnsystem für drohende Gefahren bezeichnet) und spielerischer Umgang mit der Umwelt. Heute gilt es, diese Fähigkeiten in Erziehung und Berufsausübung bewußt zu pflegen, damit wir besser für das Unerwartete vorbereitet sind.“ (H. Spitzer, Berliner Herausforderungen. In: Informationsdienst Wissenschaft & Frieden 1/92, S. 5).

12 Vgl. hierzu die entsprechenden Äußerungen weiter oben. Insbesondere möchte ich diesbezüglich auch auf das Buch von Vester und meine Aufsätze von 1984 und 1991 hinweisen.

Literatur

- Bigalke, H. (1976): Zur „gesellschaftlichen Relevanz“ der Mathematik im Schulunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 76/1, S. 25–34.
- Buddensiek, W. (1992): Auf dem Weg zur Ökolehrschule. In: Neue Deutsche Schule, Heft 13/14, 1992, S. 11–16.

Fortsetzung siehe Seite 204