Entdeckendes Lernen im Geometrieunterricht

Günter Graumann

„Es ist aufregend zu sehen, wie primitiv, banal, farblos und unbedeutend oft die ersten Einfälle selbst außerordentlicher Meister sind."
[Hindemith, zitiert nach Glatfeld 1977, S. 83]

Einleitung

Der Sinn des Geometrieunterrichts an allgemeinbildenden Schulen kann nicht allein im Erwerb geometrischer Kenntnisse oder der Darlegung geometrischer Strukturen (etwa in Anlehnung an Euklid) liegen, vielmehr müssen die allgemeinbildenden Aspekte die Leitschnur sein. Nun gibt es natürlich verschiedene solcher Aspekte, unter denen man bei der konkreten Unterrichtsplanung Schwerpunkte setzen muß (vgl. etwa Graumann 1993a und 1993b). ein solcher Schwerpunkt, der in der Schulpraxis leider immer noch zu kurz kommt, soll hier behandelt werden. Gemeint ist der Aspekt, den man mit den Stichwörtern „Problemlösen", „Heuristik", „Induktion", „Kreativität" und „entdeckendes Lernen" umschreiben kann; ein Aspekt, der schon seit langer Zeit ein für Herrn Glatfeld wichtiges Arbeitsfeld darstellt.

„Der Lernende soll sich eine heuristische Arbeitshaltung zu eigen machen, die auf Verstehen und Entdecken angelegt ist. Genau das aber meint kreatives Verhalten, ... Denken, das 'wirklich' weiterführt, d. h. 'in unmittelbarer lebendiger Auseinandersetzung mit der Sache (zu) eigene(n) Einsichten (führt)'." [Glatfeld 1987, S. 19]

Dieses Ziel welches auch in Richtlinien immer wieder auftritt, hat zwei Seiten:

Einerseits sind allgemeine Fähigkeiten von „Problembewältigung" und „Kreativität" im Leben an vielen Stellen wenn nicht nötig so zumindest hilfreich. „Das Verstehen eines mathematischen Gebietes, das Hören eines Musikwerkes, die Analyse einer literarischen Arbeit usw. setzen Kreativität frei; dazu kann die Schule in der rechten Weise Hilfen geben. Die 'kreativen Produkte' unserer Kultur erschließen sich uns nicht mühelos. Die gewaltigen Anstrengungen der Menschen, die sie schufen, fordern die Entfaltung spezifischer Fähigkeiten, Motivation, Mühe – und Kreativität derer, die sie verstehen oder erleben wollen. Das sei den Lernenden zur Ermutigung gesagt!" [Glatfeld 1987, S. 16] „Withhin such cognitive skills that could be developed with problem-solving are e. g. flexible thinking, logical thinking, analytic observation, evaluation of information, visualisation, forming analogies and deduction." [Pehkonen 1987, S. 73]

Andererseits werden die selbst entdeckten Erkenntnisse und selbst entwickelten Fähigkeiten besser behalten, sie fügen sich in die (möglicherweise dadurch weiterentwickelte) kognitive Struktur besser ein. „Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, speziell Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer faßbare bildende Formung -, je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen der Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht." [Winter 1989, S. 1]

Beide Seiten sind aber nicht völlig getrennt voneinander zu sehen, vielmehr bedingen sie sich gegenseitig: Allgemeine Fähigkeiten sind nicht ohne Stoffe zu erlernen und können sich nicht entwickeln, wenn der Stoff nur vorgetragen wird; umgekehrt werden beim aktiven, selbständigen Erwerb von Kenntnissen und Fähigkeiten die allgemeinen Fähigkeiten automatisch mit entwickelt und trainiert.

Allerdings birgt unser Ziel ein großes Problem in sich. Es gibt keine Methode, kein allgemeines Rezept, nach dem man das Problemlösen und die Entwicklung der Kreativität lehren kann. (Dieses ist sicherlich auch der Grund dafür, daß Ziele des „entdeckendes Lernens" gegenüber Zielen des „algorithmischen Denkens" immer noch ins Hintertreffen geraten. Beim nur auf das algorithmische Denken ausgerichteten Mathematikunterricht „lernt der Schüler Mathematik als bloßes System von Regeln kennen. Seine Antwort auf die Frage was Mathematik sei, kann nur lauten: Eine Formelsammlung. Dieses starre Bild von der Mathematik kommt Lehrenden insofern entgegen, als sie fertiges Wissen vermitteln wollen, und Schülern insofern, als sie Kalküle mit einer sicheren Gebrauchsanweisung haben wollen. Diese den traditionellen Unterricht bestimmende Auffassung von Mathematik läßt für Kreativität wenig Raum." [Glatfeld 1977, S. 77])

Zur Förderung der Ziele, die wir mit dem „entdeckenden Lernen" verbinden, ist es deshalb vor allem wichtig, im Unterricht sich auf Probleme einzulassen und gemeinsam Probleme zu bearbeiten. Hierbei ist es dann für die Lehrenden eine wichtige Aufgabe, die verwendeten Wege bewußt zu machen und Hinweise für heuristische Strategien zu geben; die Diskussion auf der Metaebene stellt nämlich einen wichtigen Aspekt beim Lernen von Problemlösefähigkeiten dar, einen Aspekt, der selbstverständlich von den Lehrenden initiiert und geleitet werden muß (während das „Finden, Erfinden, Lernen" von Lösungen und Hilfsmitteln auf der Objektebene größtenteils den Schülerinnen und Schülern überlassen werden kann). Auf die dazu wichtigen allgemeinen heuristischen Methoden soll hier nicht näher eingegangen werden, man findet sie in den meisten Veröffentlichungen zum Thema Heuristik bzw. Problemlösen.

Ich möchte an dieser Stelle jedoch noch hervorheben, daß es bei „entdeckendem Lernen" nicht nur um das Entdecken von Lösungen allein gehen darf, sondern daß gerade auch das Finden neuer Fragestellungen und das Aufsuchen und Entdecken von Zusammenhängen ein wichtiger Aspekt in Bezug auf Allgemeinbildung und Verstehen von Mathematik darstellt; „daß sich Heuristik mit der 'Kunst des Findens' befaßt, einer Kunst, die nicht nur Lösungen zu bestehenden Fragen, sondern immer wieder neue Fragestellungen und Probleme sucht." [Kratz 1988, S. 206/7]

Darüberhinaus ist es in der heutigen Welt – in der einerseits die Menschen mit sehr vielen Einzelinformationen überschüttet werden und andererseits viele lebensbestimmende Probleme komplexe Vernetzungen enthalten – besonders wichtig, Zusammenhänge zu entdecken, einzelne Begriffe und Aussagen in verschiedenartige Zusammenhänge einzubetten und übergreifende strukturelle Zusammenhänge zu finden. (Vgl. auch Graumann 1994). Der Mathematikunterricht, insbesondere der Geometrieunterricht, ist hierfür ein gut geeignetes Feld zur Entwicklung und Förderung solcher Denkweisen. Ein besonderer Gesichtspunkt der Mathematik ist ja gerade das Verallgemeinern, Analysieren und Strukturieren. In einem auf „entdeckendes Lernen" orientierten Unterricht sollten deshalb nicht nur isolierte Probleme behandelt werden, vielmehr sollten im Sinne des Prinzips der „Ausstrahlung" von Wagenschein auch weiterführende Aspekte zum Tragen kommen; besser wäre noch die Behandlung mehrerer Probleme eines Problemfeldes, das durch Aufdecken von Vernetzungen strukturiert wird.

Von daher bietet sich auch eine Verbindung von „entdeckendem Lernen" und „Mathematiklernen" an, ein großes Anliegen von Herrn Glatfeld. „Auf fachliche Systematik kann kein Mathematikunterricht (gleich welcher Stufe) verzichten. Abgesehen von ihrer wissenschaftsspezifischen Bedeutung besteht im Denken und Handeln des Menschen die Intention nach Fertigstellung, Vervollkommnung, nach Erreichen einer bestimmten Ordnung, die hier eben in der mathematischen Systematik ihren Ausdruck findet. Entscheidend für die Unterrichtspraxis ist ein sinnvoller Wechsel zwischen verschiedenen Erarbeitungsphasen, die sich mit den Unterrichtsmethoden wechselseitig bedingen." [Glatfeld 1987, S. 17]

Im folgenden sollen anhand von Beispielen für entdeckendes Lernen im Geometrieunterricht Anregungen zur Behandlung von geometrischen Themen im oben dargelegtem Sinne gegeben werden. Zunächst seien jedoch einige Bemerkungen zur Konzeption des Geometrieunterrichts, in den diese Art der Behandlung von geometrischen Themen paßt, dargelegt.

Zur Konzeption von Geometrieunterricht

Bis in die 60er Jahre unseres Jahrhunderts gab es grob gesehen zwei Konzeptionen von Geometrieunterricht: erstens den auf die Fachsystematik (meistens im Geiste von Euklid, ab Ende der 50er Jahre durch Abbildungsgeometrie ergänzt) orientierten sowie Konstruktionen und Beweise betonenden Geometrieunterricht an Gymnasien und zweites den auf Berechnungen und Formelanwendung orientierten Raumlehreunterricht an Volksschulen. Beiden ging ein auf die Fundierung geometrischer Grundbegriffe orientierter propädeutischer Geometrie- bzw. Raumlehreunterricht in Klasse 5/6 voran. Durch die Reform des Mathematikunterrichts Ende der 60er Jahre veränderte sich das Bild: einerseits wurde die Beschäftigung mit Geometrie schon für die Grundschulkinder vorgeschrieben, andererseits wurde die Bedeutung der Geometrie in der Sekundarstufe zurückgedrängt, da es Schwierigkeiten gab die strukturmathematischen Gesichtspunkte der euklidischen Geometrie zu vermitteln. In der Praxis hat sich in Deutschland dann aber der klassische Geometrieunterricht halten können, wobei einige Aspekte neuerer Entwicklungen wie die Abbildungsmethode und die Problemorientierung sowie ab Ende der 70er Jahre die Anwendungsorientierung hinzukamen. Zurückgehend auf Begriffsbildung von Vollrath (1973/1981) und Holland (199) kann man heute etwa drei Aspekte der Geometrie, die für die Schule von Bedeutung sind, konstatieren:

- Geometrie als deduktive Theorie und Vorrat mathematischer Strukturen
- Geometrie als Lehre vom Raum und Vorrat an Handlungsschemata
- Geometrie als Übungsfeld zum Problemlösen und Vorrat an interessanten Problemen

Der erste Aspekt ist größtenteils identisch mit dem klassischen auf Konstruktionen und Beweise orientierten Geometrieunterricht des Gymnasiums ergänzt durch strukturmathematische Gesichtspunkte der sog. Neuen Mathematik. Diesen Aspekt halte ich unter dem Gesichtspunkt von Allgemeinbildung als nachrangig gegenüber den anderen. Er wird heutzutage von allen Autoren auch nur für das Gymnasium als wichtig angesehen. Darüberhinaus meine ich, daß er für einen Geometrieunterricht unter der Hinsicht des entdeckenden Lernens nur in sehr eingeschränktem Maße geeignet ist. Das für diesen Aspekt meistens rekrutierte Ziel des „Argumentieren-Lernens" kann sicherlich auch in vielen anderen Zusammenhängen – etwa bei der Analyse und Lösung von Problemen – trainiert werden.

Der zweite oben genannte Aspekt – Geometrie als Lehre vom Raum und Vorrat an Handlungsschemata – erscheint mir als der wichtigste Aspekt für jeglichen Geometrieunterricht an allgemeinbildenden Schulen, wenn dieser mit dem dritten Aspekt – Geometrie als Übungsfeld zum Problemlösen und Vorrat an interessanten Problemen – eng verbunden wird. Als Ziele einer solchen Konzeption sind zunächst einmal die Entwicklung von Raumanschauung und die Entwicklung intellektueller Kompetenzen zu nennen. Raumvorstellung gilt seit den 30er Jahren und den Forschungen von Thurstone in der Intelligenzforschung als einer von sieben Faktoren der Intelligenz und „fast jedes Denken, jede kognitive Kompetenz bedient sich visueller, d. h. geometrischer Stützen. Die intellektuelle Entwicklung ist eng verbunden mit Fähigkeiten, visuell dargebotene Informationen aufzunehmen, zu analysieren, zu speichern, mit ihnen in der Vorstellung zu operieren u. a." [Radatz/Rickmeyer 1991, S. 7]

Um diese Ziele zu erreichen, ist es notwendig, sich mit geometrischen Themen und Problemen auseinanderzusetzen, wobei die konkreten Erfahrungen mit Gegenständen im Raume und das Training von Vorstellungen (Kopfgeometrie, Verbalisierung des „Gesehenen") von großer Wichtigkeit sind. Einzelne Problemstellungen und die Entfaltung von Problemfeldern aus zusammenhängenden Problemen können dabei als Motivation und Denkanstoß gut genützt werden. Aber auch die Klärung von Begriffen und deren Beziehungen untereinander sowie zur Alltagswelt sind hierbei von Bedeutung.

Die grundlegenden geometrischen Begriffe zusammen mit den Darstellungsformen der Geometrie stellen ein zweites Ziel des Geometrieunterrichts dar, nämlich der Erwerb von im Alltag üblichen geometrischen Begriffen (einschließlich der zugehörigen Vorstellungen und verschiedenartigen Verwendungen) und Darstellungsweisen zum besseren Verstehen der Umwelt und zur besseren Kommunikation unter den Menschen. Etwas weiter gefaßt gehört dann zum Verstehen der Welt auch der Aspekt der Geometrie als Kulturgut, d. h. als Erkenntnisgegenstand, der in bestimmten Situationen und bei bestimmten Fragestellungen entstanden ist und Auswirkungen auf unsere Welt und unser Weltbild gezeitigt hat.

Als dritter Zielkomplex für den Geometrieunterricht ist dann die Fähigkeit zur Bewältigung von Problemen in der Welt bzw. zur Mitwirkung an deren Bearbeitung zu nennen. Hierzu gehört das Erkennen der Relevanz von Geometrie im Alltag und das Training der Bewältigung von Problemen aus dem Alltag mittels Geometrie (vgl. etwa Graumann 1988) sowie der Erwerb von Einstellungen und Fähigkeiten zur kritischen Reflexion der Grenzen geometrischer Modellierungen und Hilfsmittel. Aber auch das Training von allgemeinen Problemlösefähigkeiten und heuristischen Vorgehensweisen an rein geometrischen Fragestellungen kann hierzu hilfreich sein. Als besonders wichtiges Lernziel in der heutigen Zeit ist in diesem Zusammenhang die Entwicklung und Förderung von „vernetztem Denken und Handlungskompetenzen in komplexen Situationen" (vgl. Graumann 1993a und 1994) zu nennen; ein Lernziel, für das die Geometrie ein besonders gut geeignetes Übungsfeld darstellt, da die Probleme des Geometrieunterrichts einerseits noch nicht so schwierig sind wie in der Wirklichkeit, aber andererseits genügend (nicht-lineare) Vernetzungen bieten.

Ohne, daß mit den genannten drei Zielkomplexen die ganze Fülle der Möglichkeiten des Geometrieunterrichts erfaßt ist, meine ich jedoch, daß damit ganz wesentliche Teile des Geometrieunterrichts abgedeckt sind, insbesondere wenn man den üblicherweise für den Geometrieunterricht zur Verfügung stehenden Zeitrahmen berücksichtigt. Nicht unerwähnt bleiben soll allerdings der Zielaspekt der affektiven und sozialen Dispositionen wie etwa die Freude an der Geometrie und an geometrisch-ästhetischen Objekten, die Stärkung des Selbstbewußtsiens, der Stolz über erstellte Produkte und die Fähigkeit der teamartigen Bewältigung von Problemen.

Abschießend möchte ich folgendes festhalten: Das Schwergewicht meiner Konzeption von Geometrieunterricht bezüglich der inhaltlichen Seite liegt auf den konkreten Erfahrungen mit geometrischen Gebilden (im konkreten Raum und in der Vorstellung), der Exploration eines geometrischen Begriffsapparates (mit mehrperspektivischen Charakterisierungen und funktionalen/zweckrationalen Hintergründen), dem Verstehen und Verwenden geometrischer Darstellungsweisen und der Behandlung geometrischer Probleme bzw. Probleme des Alltags mit geometrischem Gehalt sowie dem Entwickeln neuer, weitergehender Fragestellungen. Schließlich gehört zu meiner Konzeption noch die Ordnung/Strukturierung geometrischer Begriffe und Sätze, wobei die Sätze in der Regel im Zusammenhang und als Hilfsmittel bei Problemlöseprozessen entdeckt und begründet werden.

Beispiele für entdeckendes Lernen im Geometrieunterricht

Als Anregung für die Praktiker und zur Vertiefung der konzeptionellen Erörterungen werden im folgenden Beispiele aus verschiedenen Schulstufen skizziert. Eine ausführliche Unterrichtsbeschreibung kann hier nicht geschehen (sie hängt auch sehr von der Klassensituation ab) und auch die Themen sind vielfach nicht unbedingt neu; vielmehr geht es um die Unterrichtskultur, insbesondere um Aufgabenstellungen, die zum Entdeckenden Lernen anregen, und um die sich im Anschluß daran öffnenden Problemfelder.

1. Was rollt denn da? – Funktionalität von Körperformen im 2. Schuljahr

In einer ersten Phase wird eine Sammlung von Verpackungen u. ä. von mehreren Kindern (nacheinander) sortiert. Wichtig ist dabei, daß die Kriterien, die ein Kind jeweils benutzt, gemeinsam diskutiert und sprachlich präzisiert werden. Sicherlich tauchen dabei ganz verschiedene, auch nicht-mathematische Kriterien auf.

In der darauffolgenden Phase sollen dann kleine Gruppen gebildet werden und jede Gruppe soll eine vorgegebene Menge von Bauklötzen sortieren. Wegen der Gleichartigkeit im Material kommen dabei im wesentlichen nur noch geometrische Kriterien in Frage. Bei der anschließenden Besprechung (in den Gruppen oder im gemeinsamen Sitzkreis) sollte das Augenmerk dann auf den Unterschied von Rechtecksäule (Quader) und Rundsäule (Zylinder) gelenkt werden, wobei auch die zugehörigen Begriffe eingeführt bzw. gefestigt werden.

Obgleich die grundlegenden Erfahrungen mit Bauklötzen sicherlich schon im Vorschulalter stattgefunden haben, sollte man jetzt dennoch die Aufgabe stellen, die Klötze auf verschiedene Weise zu stapeln (sofern das überhaupt möglich ist – bei Rundsäulen kann es dabei ja Probleme geben). Während dieser Arbeit erhält jede Gruppe noch einen Satz Holzkugeln.

Eine alle bisherigen Erfahrungen festhaltende gemeinsame Erörterung sollte dann zu folgendem Ergebnis kommen:

- Quader rutschen nur und lassen sich gut stapeln.
- Rundsäulen rollen in eine Richtung weg und können in „Hochkant-Position" stehen,
- Kugeln rollen in alle Richtungen und können nur dann gestapelt werden, wenn die unterste Schicht irgendwie eingeklemmt ist.

Als Hausaufgabe bietet sich danach an, für jede der besprochenen drei Grundformen mindestens fünf Gegenstände aus der Umwelt zu entdecken und mit einer kurzen Beschreibung ins Heft zu notieren. Bei der Besprechung dieser Hausaufgabe sollte dann die Funktionalität der Formen wiederholt und erweitert werden, wobei etwa auf die Funktion von Ziegelsteinen, Rädern bzw. Rollen, Bällen u. a. eingegangen wird.

Eine mögliche Erweiterung des Themas kann durch Hinzunahme weiterer Formen (wie z. B. Dreieckssäule, Sechseckssäule, quadratische Pyramide, Tetraeder oder auch Eikörper) erfolgen. In späteren Schuljahren wird man dann auf das Prinzip der Funktionalität von geometrischen Formen immer wieder zurückgreifen.

2. Polyominos – Systematische Formensuche im 4. Schuljahr

Als Einstieg eignet sich die Behandlung irgendwelcher Puzzles oder Legespiele (vgl. z. B. Floer 1989/90). Danach schränkt man das Legespiel auf eine Grundform, das Quadrat, ein. Dazu werden eine Reihe von kongruenten Quadraten (aus Pappe selbst hergestellt oder der Lehrmittelsammlung entnommen) vorgegeben, die jeweils an mindestens einer Seite aneinanderstoßen sollen, so daß sich diese Seiten decken. Als Variante können auch Quadrate eines Karopapiers ausgemalt werden, wobei die entsprechende Regel gilt. Dabei können ganz verschiedene Formen entstehen, die man möglicherweise als stilisierte Figuren der Umwelt deuten lassen kann.

In der nächsten Phase wird die Aufgabe dahingehend eingeschränkt, daß nach allen möglichen Formen, die man mit 2 bzw. 3 bzw. 4 Quadraten bilden kann, gesucht wird. Hierbei wird zunächst der Begriff „deckungsgleich" wiederholt und vertieft. Vor allem kommt es aber darauf an, daß die Kinder Strategien entwickeln, nach denen sie sicher sind, alle möglichen Formen zu erhalten. In einer gemeinsamen Besprechung sollen die verschiedenen Strategien dann auch diskutiert werden.

Zur Vertiefung schließen sich hier Fragen an wie „Kann man die Anzahl der Fünflinge voraussagen?", „Welche Sechslinge sind auch Würfelnetze?", „Welche Formen treten immer auf, d. h. bei Drillingen, Vierlingen, Fünflingen, Sechslingen, ...?", „Bei welchen n-lingen kann man ein Rechteck (das keine Stange ist) oder sogar ein Quadrat bilden?"

Geht man danach zur analogen Aufgabenstellung mit gleichseitigen bzw. gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken oder mit Würfen (vgl. Somawürfel) über, so können die Kinder einerseits die bisherigen Erfahrungen vertiefen und andererseits auf ganz neue Erkenntnisse stoßen. Durch weitere Variation des Themas kann man dann auch zu den bekannten Fragen der Parkettierungen und Raumausfüllungen vordringen. Markiert man die Quadratseiten (bzw. Dreieckseiten) mit verschiedenen Farben, so lassen sich weitere interessante kombinatorische Probleme (immer verschiedene Farben bzw. gleiche Farben sollen aneinanderstoßen, das große Quadrat soll an jeder Seite jeweils eine Farbe haben, etc.) behandeln, die an den Rubic-Cube erinnern; teilweise sind die Kombinationsmöglichkeiten sehr groß, teilweise läßt sich aber auch die Unmöglichkeit einer Lösung leicht feststellen.

3. Wie spitz oder stumpf kann ein Dreieck sein? – Formenvielfalt und Kombinatorik der Dreieckslehre im 6. Schuljahr

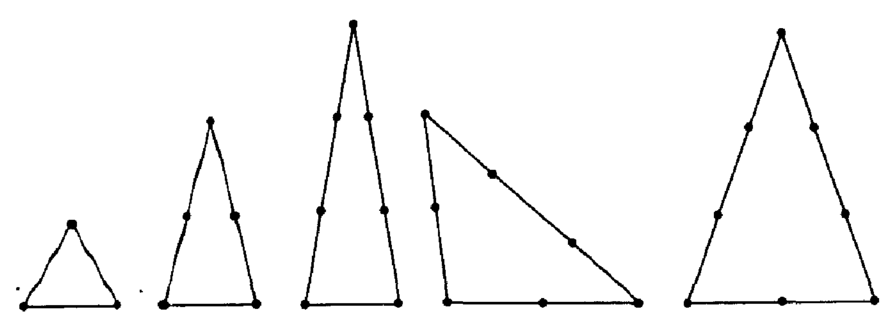
Die Beschäftigung mit „ganzzahligen Dreiecken" (d. h. Dreiecken, deren Seitenlängen in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen) hat mehrere vorteilhafte Aspekte. Einmal können die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit der Formenvielfalt unter den Dreiecksformen sammeln, wobei auch die handelnde Ebene (bauen, legen, zeichnen) nicht zu kurz kommt. Zum zweiten wird die kombinatorische Gabe durch geeignete Aufgaben angeregt und trainiert. Außerdem kennen die Schülerinnen und Schüler bis dato nur natürliche Zahlen und viele Materialien aus dem Spielbereich basieren auf einer Einheitslänge (z. B. gelochte Leisten, Legosteine, Streichholzspiele). Ein Vorteil beim Zeichnen liegt darin, daß man sich auf Karoeinheiten oder ganze Zentimeter auf dem Lineal beschränken kann. Voraussetzung ist dabei allerdings, daß die Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seitenlängen mittels Zirkel bekannt ist (oder zumindest bei den ersten Aufgaben eingeführt wird).

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Beschäftigung mit „ganzzahligen Dreiecken" an die Gedankenwelt der Pythagoreer („Alle Welt ist Zahl" – und zwar ganze Zahl) anschließt.

Die Aufgabe besteht nun zunächst darin, daß man nur Längen der Größe 1, 2, 3 (Längeneinheiten) zur Verfügung hat und daraus alle möglichen Dreiecke konstruieren soll. Nach anfänglichem Probieren (insb. mit Material) wird man bald gezwungen, sich ein System zu überlegen. Außerdem können die Schülerinnen und Schüler entdecken, daß bei gewissen Kombinationen wie (1/1/2) oder (1/1/3) kein echtes Dreieck oder gar kein Dreieck konstruierbar ist. Dieses führt dann zu dem Satz von der Dreiecksungleichung. Weiterhin fällt auf, daß die Kombinationen (1/1/1), (2/2/2) und (3/3/3) die gleiche Form (nur in verändertem Maßstab) liefert. [Der Begriff der Ähnlichkeit kann in diesem Zusammenhang schon erwähnt werden, er muß es aber nicht; wesentlich ist nur das Erkennen der gleichen Form.]

Eine mögliche Systematik geht davon aus, daß die Seitenbenennung ja unwesentlich ist, man also $a \leq b \leq c$ annehmen kann. Dann muß man nur noch systematisch die Zahlen 1, 2, 3 durchlaufen, indem man mit 1 anfängt und von hinten die Zahlen anwachsen läßt. Die Tripel, die die Dreiecksungleichung $c<a+b$ nicht erfüllen oder ein Vielfaches eines vorherigen Tripels sind, werden anschließend durchgestrichen. So erhält man:

(1/1/1), (~~1/1/2~~), (~~1/1/3~~), (1/2/2), (~~1/2/3~~), (1/3/3), (~~2/2/2~~), (2/2/3), (2/3/3), (~~3/3/3~~)



Als Erweiterung dieser Aufgabe bietet sich von selbst an, die Menge der vorgegebenen Längen zu erweitern, also etwa noch 4 und 5 zuzulassen. Es tritt dabei erwartungsgemäß eine größere Vielfalt auf (z. B. ein nichtgleichschenkliges Dreieck mit den Längen 2,3,4 sowie ein rechtwinkliges Dreieck mit den Längen 3, 4, 5) und die systematische Arbeit wird erheblich umfangreicher. Eine einfache Formel für die Anzahl der Dreiecke in Abhängigkeit der vorgegebenen Längen ist dabei nicht zu erkennen.

Die besonders spitzen Dreiecke wie (1/5/5) oder besonders stumpfen Dreiecke wie (3/3/5) führen uns zu der Frage nach noch spitzeren bzw. noch stumpferen Dreiecken. Wir entdecken dabei, daß ein Dreieck beliebig spitz oder stumpf werden kann, wenn bei (1/n/n) oder (n/n/2n-1) die Zahl n nur genügend groß gewählt wird.

Ergänzend sei noch bemerkt, daß dieses Thema ab 8. Schuljahr wieder aufgegriffen werden kann und dann nach Dreiecken gesucht werden kann, deren Winkel ganzzahlige Verhältnisse bilden. Wegen des

Winkelsummensatzes ist die Situation dabei etwas anders. Der Vergleich mit den Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen ist dabei recht interessant. Die Berechnung der zugehörigen Winkel im allgemeinen Fall ist allerdings erst mit Hilfe von Trigonometrie möglich. Im 9. oder 10. Schuljahr kann man die Dreiecke mit ganzzahligen Seiten unter Benutzung des Satzes von Pythagoras und dessen Erweiterung auf Ungleichungen auch leicht in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke einteilen, nämlich je nachdem ob $a^2 + b^2 > c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$ oder $a^2 + b^2 < c^2$ (wobei $a \leq b \leq c$) gilt.

Eine andere Erweiterung wäre der Übergang in die Dreidimensionalität, d. h. die Untersuchung von Dreieckspyramiden (allgemeinen Tetraedern) mit ganzzahligen Kantenlängen.

4. Dreieck, Viereck und was noch? – Vielecke im 8. Schuljahr

Üblicherweise werden in der Sekundarstufe I nur das Dreieck und das Viereck behandelt; dagegen bietet gerade die Beschäftigung mit Vielecken allgemein eine Reihe von Anlässen zu Begriffsklärungen und interessanten Problemstellungen. Außerdem spielen die regulären Vielecke eine besondere Rolle bei der künstlerischen Ausgestaltung von Fassade und Plätzen.

Nachdem das Dreieck und das Viereck schon behandelt wurden, kann man das Thema „Vieleck" damit einleiten, daß die Kinder verschiedene Fünfecke und Sechsecke zeichnen sollen. Begrifflich zu klären ist dann erst einmal, ob man damit eine Fläche oder eine Linie meint. Weiterhin tritt die Klärung der Begriffe „konvexes Vieleck", „Vieleck mit einspringender Ecke" und „Vieleck mit überschlagenden Seiten" auf, wobei gerade bei dem letzten Typ sicherlich die Frage auftaucht, ob das denn überhaupt noch ein Vieleck ist. Hierbei sollte dann besprochen werden, daß man in der Mathematik gewisse Freiheiten in der Definition hat, aber andererseits auch auf übergeordnete Stimmigkeiten und auf Konventionen achten muß. Vertieft werden kann die Beschäftigung mit Fünf- und Sechsecken dann durch die Aufgabe, symmetrische Fünf- und Sechsecke – insbesondere solche, die nicht schon regulär sind, – zu finden. (Das reguläre Fünfeck bildet ein eigenes Thema, auf das ich hier nicht näher eingehen kann.) Für das allgemeine Fünf- und Sechseck stellen die Fragen nach der Winkelsumme und der Anzahl der Diagonalen weitere Probleme bereit. Insbesondere beim Vieleck mit überschlagenen Seiten ist zu klären, was man unter den Winkeln des Vielecks zu verstehen hat. Mit Hilfe der Diagonalen läßt sich dann der Begriff des „konvexen Vielecks" recht einfach beschreiben.

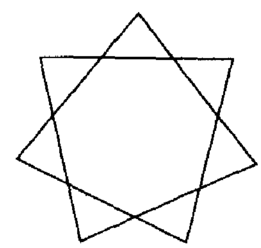
Ein weiteres Problem aus dem Bereich Vieleck betrifft die Sternvielecke. Eine interessante Aufgabenstellung ist zum Beispiel diese:
Gegeben sei eine konstante Länge a und ein konstantes Winkelmaß α. Wir zeichnen zunächst eine Strecke der gegebenen Länge und tragen an ein Ende den Winkel α an. Vom freien Schenkel des Winkels nehmen wir die Länge a und tragen am Ende wieder den Winkel α ab. Vom neuen freien Schenkel nehmen wir wieder die Länge a und tragen den Winkel α ab; usw.

Die Frage ist nun: Was für eine Figur erhalten wir und schließt sich die Figur nach einer bestimmten Anzahl von Iterationen?

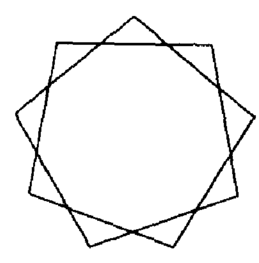
Entspricht der vorgegebene Winkel der Größe des Innenwinkel eines regulären Vielecks, so erhält man offensichtlich ein solches. Bei anderen Winkel wie etwa 36° schließt sich die Figur auch und man erhält ein Sternvieleck, in diesem Fall den regelmäßigen Fünfeckstern. Für Experimentelle Erkundungen bietet ein Computer hierbei eine gute Hilfe, wobei mit LOGO das Programm sogar von den Schülerinnen und Schülern leicht selbst erstellt werden kann. (Vgl. auch Graumann 1989)

Nun kann man mehrere solche Figuren entdecken und sich mit deren besonderen Eigenschaften und deren Anwendungsmöglichkeiten beschäftigen.

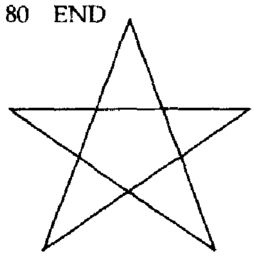
```
1    REM * Angle-Iteration *
10   LPRINT CHRS(28); CHRS (37): REM
     * Graphik-Modus is on *
20   INPUT "ANGLE" = ;A
30   INPUT „NUMBER OF ITERATIONS =" ; B
35   IF B=0 THEN 80
40   INPUT "RADIUS = ; R
     INPUT "NUMBER OF COLOUR =" ; C
55   LPRINT "J"; C:REM
     * choosen colour is on *
60   W= 180-A
62   X=48+R*COS (90)
64   Y=-48 +R*SIN(90)
66   LPRINT "M";X;";Y:REM
     *Move to starting-point *
70   FOR 1=1 TO B
72   x=48+R*COS (90+I*W)
74   y=-48+R*SIN 890+I*W)
76   LPRINT "D";",":X;",";Y:REM
     *draw *
78   NEXT I
80   END
```



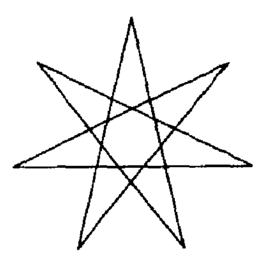
$\alpha = \frac{540°}{7} \approx 77°; k=2; n=7$



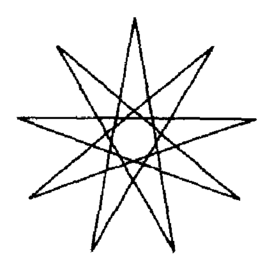
$\alpha = 100°; k=2; n=9$



$\alpha = 35°; k=2; n=5$



$\alpha = \frac{180°}{7} \approx 25{,}7°; k=3; n=7$



$\alpha = 20°; k=4; n=9$

Für die theoretisch interessierten Schülerinnen und Schüler lohnt sich aber auch eine weitergehende Analyse. Dabei wird man erst einmal feststellen, daß bei den Sternpolygonen neben dem gegebenen Winkel α noch die Zahl der Ecken n und die Anzahl k der (vom Mittelpunkt aus gesehenen) 360°-Umdrehungen bis zum Schließen der Figur von Bedeutung sind. Von der Bestimmung der Winkelsumme eines konvexen Vielecks her ist die Methode des „Abschreitens mit Drehungen an den Enden" bekannt. Angewendet auf die Sternvielecke erhält man dabei die Formel $n \cdot (180°-\alpha) : 360° = k$. Durch Umformung erhält man daraus $(180°-\alpha) : 360° = k : n$. Da für positive α (die hier nur diskutiert werden) die linke Seite kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, muß k kleiner als $\frac{n}{2}$ sein. Man kann nun alle möglichen ganzzahligen Paare (k/n) mit $0 < k < n/2$ durchprobieren und enthält jedesmal über die Formel einen zugehörigen Winkel α. Für k=1 erhält man alle regulären konvexen Vielecke. Für k=2 ist das kleinste n gleich 5; man erhält dann α =36° und damit den Fünfeckstern, der auch aus den Diagonalen des regulären Fünfecks gebildet werden kann. Für k=2 und n=6 erhält man wegen 2 : 6 = 1 : 3 wieder nur das reguläre Dreieck. Für k=2 und n=7 erhält man einen regulären Siebeneckstern. Für n=7 ist ein zweiter Siebeneckstern möglich, den man für k=3 und n=7 erhält. Fährt man so fort, so erhält man, wie leicht einzusehen ist, auf diese Weise alle regulären Sternvielecke, die sich in einem Zug zeichnen lassen.

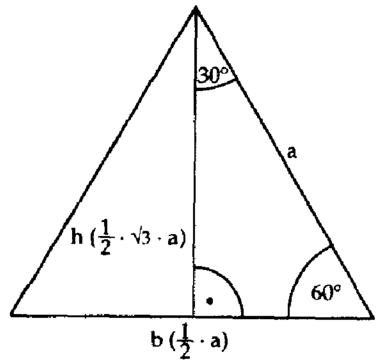
Weiterführende Fragen können sich dann auf Vielecke, die nicht in einem Zug zu zeichnen sind (wie z. B. der Davidstern), oder auf nicht-reguläre Sternvielecke (vgl. etwa „Das vollständige Vierseit") beziehen. Ab 9. Schuljahr kann man dann auch die Frage behandeln, wann sich eine Figur bei der obigen Prozedur niemals schließt, wobei der Begriff der Irrationalität bzw. das Phänomen der Endlosschleife vertieft werden kann.

5. Wie erhält man die Werte der Sinusfunktion? – Zur Trigonometrie im 10. Schuljahr

Zur Einführung der trigonometrischen Funktionen empfiehlt es sich, die Frage der Berechnung von Größen an Dreiecken, die aufgrund eines Kongruenzsatzes eindeutig konstruierbar sind, zu stellen. Durch vorläufige Beschränkung auf spezielle Dreiecke (gleichschenklige bzw. rechtwinklige Dreiecke) und Verwendung von Gesetzen der Ähnlichkeitslehre gelangt man dann zur Definition von trigonometrischen Funktionen. Empfehlenswert ist dabei zu Anfang gleich alle sechs möglichen Verhältnisse zweier Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks herauszustellen und mit Namen zu belegen, um die prinzipielle Gleichberechtigung aller sechs trigonometrischen Funktionen und das Prinzip ihrer Bildung deutlich werden zu lassen. Außerdem erkennt man dann einige Zusammenhänge fast von selbst.

Nachdem die Begriffe eingeführt wurden, stellt sich nun aber die Frage, wie erhalte ich die Werte dieser Funktionen für konkrete Winkel. Die erste Antwort der Schülerinnen und Schüler wird vermutlich der Hinweis auf den Taschenrechner sein. Dann muß man aber weiter fragen „Wie berechnet der Taschenrechner diese Werte?" oder „Wie hat man früher diese Werte ermittelt?". – Ein historischer Exkurs, insbesondere für interessierte Schülerinnen und Schüler, über trigonometrische Fragestellungen, Begriffe und Bezeichnungen ist in diesem Zusammenhang sehr empfehlenswert. (Vgl. etwa Graumann 1987) –

Zur Ermittlung erster Werte trigonometrischer Funktionen wird man in jedem Fall zu der Frage geführt, ob es nicht rechtwinklige Dreiecke gibt, von denen man die Winkelgrößen und die Seitenlängen kennt. Nach einigem Suchen werden die Schülerinnen und Schüler dann auch auf Teilfiguren der regulären Vielecke, insbesonders des gleichseitigen Dreiecks und des Quadrats, stoßen. Auf diese Weise erhält man dann die Werte für 30°, 45°, 60° und eventuell auch 36°, 72°. Durch Grenzbetrachtungen wird man auch noch zu den Werten für 0° und 90° geführt.



$\sin 30° = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

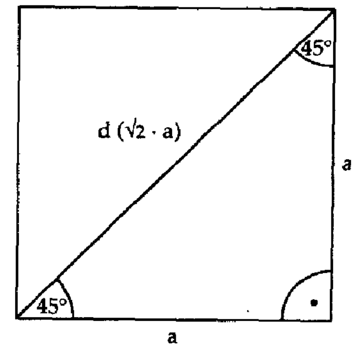
$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{b}{h} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$

$\tan 60° = \frac{h}{b} = \sqrt{3}$



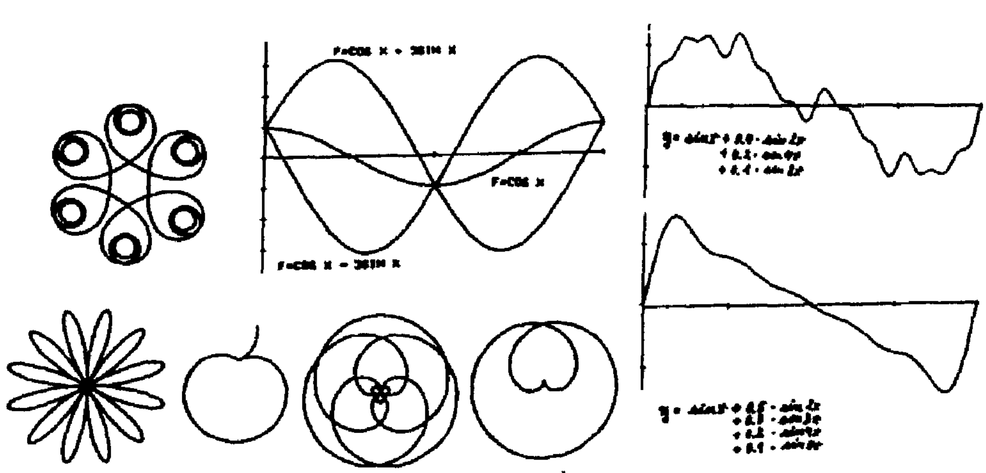
$\sin 45° = \frac{a}{d} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1$

Weiteres Suchen ist dann nur erfolgreich, wenn man schon einige goniometrische Formeln, insbesondere die Additionstheoreme, kennt. Um auf solche Formeln zu kommen, ist sicherlich eine Lenkung durch die Lehrperson notwendig; in Bezug auf die allgemeinen Ziele ist aber die Erfahrung wichtig, daß Sätze nicht nur im Rahmen eines Deduktionszusammenhangs wichtig sind, sondern vor allem auch Hilfen für Problemlöseprozesse darstellen.

Ein weiteres Problemfeld, das im Anschluß an die Einführung und die graphische Darstellung der Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen behandelt werden kann, stellt die Familie der Sinuskurven ($y = a \cdot \sin bx + c \cdot \sin dx$) – die auch mit Fragen der Musikstheorie verbunden werden kann – oder die Familie der Rosettenkurven ($r = | a \cdot \sin b\varphi |$ mit Polarkoordinaten r, φ) dar. Für beide Themen empfiehlt sich die Benutzung eines Computers. (Vgl. auch Graumann 1989)

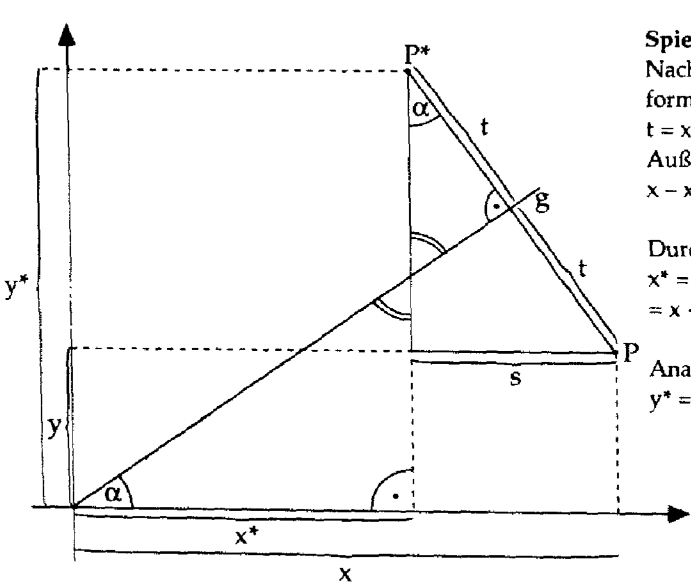


6. Wie kann man die Symmetrie von Figuren analytisch erfassen? – Zur Analytischen Geometrie im 12. Schuljahr

Aus der Sekundarstufe I sind geometrischen Abbildungen und deren Zusammenhang mit Symmetrie bekannt. In der Analytischen Geometrie hat man die Beschreibung von Figuren kennengelernt. Es stellt sich nun die Frage, wie man die geometrischen Abbildungen und die Symmetrie mit Mitteln der Analytischen Geometrie erfassen kann. Ohne große Probleme werden die Schülerinnen und Schüler die Spiegelungen an den Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen analytisch beschreiben können. Daraus ergibt sich dann auch leicht die Bedingung für die Symmetrie einer Figur/Kurve zu einer dieser Achsen. Die Herleitung der Formeln für die Spiegelung an einer beliebigen Geraden, die durch den Ursprung geht, erfordert dann schon einige heuristische Ideen und geometrischen Kenntnisse. Nach der allgemeinen Herleitung ist es ratsam, die Formeln auf einige Beispiele hin (etwa die Symmetrieachsen regelmäßiger Fünf-, Sechs- und Achtecke mit Mittelpunkt im Ursprung) zu spezialisieren. Durch Anwendung dieser Formeln auf die Eckpunkte der Vielecke kann man dann auch die Symmetrie überprüfen. In entsprechender Weise können danach die Drehungen um den Ursprung und die Drehsymmetrie behandelt werden. Die Verschiebung und die Verschiebungssymmetrie stellt sich danach wieder als einfaches Problem dar.

Die Zusammensetzung der bisherigen Abbildungen durch Schachtelung der Funktionsvorschriften rundet das Thema dann ab. Ausdrücklich erwähnt sei hierbei daß es sich bei allen genannten Themen nicht um einen Lehrervortrag mit Übungsaufgaben handelt, sondern daß die Schülerinnen und Schüler die Themen einzeln oder in Gruppen selbständig bearbeiten, wobei natürlich die Hilfe durch die Lehrperson und das „Stöbern" in Lehrbüchern miteingeschlossen sind.

Eine Öffnung zu weiterführenden Themen stellt der Übergang in die räumliche Geometrie oder zu ebenen affinen Abbildungen dar. Der Zusammenhang mit komplexen Zahlen und die Darstellung von Ähnlichkeitsabbildungen der Gaußebene stellt ein anderes interessantes Problemfeld für Arbeitsgemeinschaften dar.



Spiegelung an g

Nach der Hesseschen Normalform einer Geraden ergibt sich:
$t = x \cdot \sin\gamma - y \cdot \cos\gamma$

Außerdem gilt:
$x - x^* = s = 2t \cdot \sin\gamma$

Durch Einsetzen folgt:
$x^* = x - 2x \cdot \sin^2\gamma + 2y \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma$
$= x \cdot \cos 2y + y \cdot \sin 2y$

Analog erhält man:
$y^* = x \cdot \sin 2y - y \cdot \cos 2y$

Literatur

Becker, G. (1987): Über den Beitrag des Geometrieunterrichts zum Erwerb heuristischer Strategien. In: mathematica didactica 1987, S. 13-20

Bungartz, P. (1983/84): Problemorientierte Entdeckung der Vektorraumstruktur. In: Didaktik der Mathematik 4/83, S. 307-312 und 1/84, S. 57-69

Floer, J. (1989/90): Formenpuzzle-Tangram für Kinder. In: Die Grundschulzeitschrift Heft 11/89, S. 48-54 und Heft 7/90, S. 60-67

Fraedrich, A. M. (1989): Heuristisches Vorgehen bei geometrischen Beweisaufgaben am Beispiel der Höhenaufgabe von Dunker. In: Praxis der Mathematik 1979, S. 225-233, 264-273, 297-309

Glatfeld, M. (1977): Mathematiklernen – Probleme und Möglichkeiten, Braunschweig

Glatfeld, M. (1980): Teilbarkeit – im Zusammenspiel von heuristischen und beweistechnischen Methoden, Paderborn

Glatfeld, M. (1987): Überlegungen zum Induktionsbegriff – unter fachdidaktischer Hinsicht, Frankfurt/M

Glatfeld, M. (1990): Finden, Erfinden, Lernen – Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischen Aspekt, Frankfurt/M

Graumann, G. (1986): Computers and Geometry Teaching. In: Kupari, P. (1986): Mathematics education research in Finland, Yearbook 1985, Jyväskylä, S. 61-79

Graumann, G. (1987): eine genetische Einführung in die Trigonometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987, S. 146-149

Graumann, G. (1977): Geometrie im Alltag. In: mathematik lehren Heft 29 (1988), S. 8-14

Graumann, G. (1989): Problem-Orientated Geometry Teaching – With consideration of Computers. In: Pehkonen (1989): Geometry Teaching – Geometrieunterricht; Research Report 74, Department of Teacher Education, University of Helsinki, S. 141-150

Graumann, G. (1993a): Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule. In: Pädagogische Welt, Heft 5/93, S. 194-199

Graumann, G. (1993b): Wodurch wirkt der Mathematikunterricht allgemeinbildend? – Vier Beispiele aus dem Geometrieunterricht. In: Arbeitskreis Mathematik und Bildung: Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht; Buxheim-Eichstätt, S. 55-68

Graumann, G. (1994): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung – mit Blick auf Schlüsselprobleme unserer Welt. In: Mathematik in der Schule Heft 1/94, S. 1–7

Hinkfuss, H. (1980): Heuristische Methoden im Mathematikunterricht, Bielefeld

Holland, G. (1979): Das Beweisen geometrischer Sätze in der Sekundarstufe I unter verschiedenen Aspekten der Geometrie. In: Didaktik der Mathematik Heft 2/79, S. 104-119

Hürten, K. H. (1976): Das heuristische Prinzip in der Geometrie. In.: Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht, Heft 5/86, S. 276-281

Kratz, J. (1979): Die Erziehung zum konstruktiven und deduktiven Denken im Geometrieunterricht der Mittelstufe. In: Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht, Heft 2/79, S. 79-86

Kratz, J. (1988): Beziehungsreiche geometrische Problemdarstellungen aus didaktischer Sicht. In: Didaktik der Mathematik, Heft 3/88, S. 206-234

Lunkenbein, D. (1982): Deltagone: Formen und Zahlen. In: mathematiklehrer, Heft 1/82, S. 34-37 und Heft 2/82, S. 25-30

Mohry, B. (1980): Winkelsummenkonstanz und Parallelität – Erkundung eines Problemfeldes. In: mathematiklehrer, Heft 1/80, S. 6-10

Mohry, B. (1981): Trennlinien – Problemsequenzen zu einer integrativen Unterrichtsidee. In: mathematiklehrer, Heft 2/81, S. 21-27 und Heft 2/81, S. 25-27

Polya, G. (1980/Org. 1966): Wie lehren wir Problemlösen. In: mathematiklehrer, Heft 1/80, S. 3-5

Pehkonen, E. (1986): Wie könnte man in der Geometrie eine neue Unterrichtspraxis verwirklichen? In: Praxis der Mathematik, Heft 1/86, S. 11-19

Pehkonen, E. (1987): The meaning of Problem Solving for Children's Development. In: Pehkonen (1987): Articles in mathematics Education, Research Report 55, Department of Teacher Education, University of Helsinki, S. 71-86

Pehkonen, E. (1988): Offene Aufgaben im Geometrieunterricht. In: Mathematische Unterrichtspraxis, Heft 29 (1988), S. 16–19

Pehkonen, E. (1989): Verwenden der geometrischen Problemfelder. In: Pehkonen (1989): Geometry Teaching – Geometrieunterricht, Research Report 74, Department of Teacher Education, University of Helsinki, S. 221-230

Radatz/Rickmeyer (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen, Hannover
Siemon, H. (1976): Ein geometrisches Beispiel zum problemorientierten Unterricht. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3/76, S. 77-90
Spiess, H. (1981): Eine problemorientierte Bearbeitung der Ähnlichkeitslehre in der Schule. In: mathematiklehren, Heft 3/81, S. 3-7
Stowasser, R. (1976): Küstenschiffahrt, Landmessen, Billard – drei Problemfelder der Geometrie. In: Der Mathematikunterricht, Heft 3/76, S. 24-52
Vollrath, H.-J. (1974/81): Geometrie im Mathematikunterricht – eine Analyse neuerer Entwicklungen. In: Schriftenreihe des IDM Heft 3/84, S. 1-22 und leicht überarbeitet in: Steiner/Winkelmann (1981), Fragen des Geometrieunterrichts, Köln, S. 11-27
Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Braunschweig