

Günter Graumann
Universität Bielefeld

Konzeptionen und Ziele des Geometrieunterrichts im 19. und 20. Jahrhundert

Es ist notwendig, "das auf unserem Gebiet des Unterrichtswesens Vorhandene als Gewordenes aufzufassen, es in seiner geschichtlichen Entwicklung zu begreifen und als aus solcher Entwicklung hervorgegangen aufzuzeigen, um danach den Wert von Vorschlägen zu Neuem ermessen und würdigen zu können." (Treutlein, 1911, S. 6)

Summary

Grundlegende Gedanken der heutigen Diskussion über Konzeption und Ziele des Geometrieunterrichts sind schon 200 Jahre alt. Begründer eines wissenschaftssystematisch orientierten Mathematikunterrichts ist im 18. Jahrhundert Wolff. Der Geometrieunterricht des 19. Jahrhunderts war in seinem Sinne weitgehend an Euklids Elementen orientiert. Als Begründer eines geometrischen Anschauungsunterrichtes ist Pestalozzi anzusehen. Anfang des 20. Jahrhunderts setzt sich dann ein propädeutischer Anschauungsunterricht ergänzt durch das Prinzip der Abbildungen und des funktionalen Denkens aufgrund der Kleinschen Reform auch im Gymnasium durch. Der Geometrieunterricht des gesamten 20. Jahrhunderts ist hiervon geprägt. Die letzten beiden Jahrzehnte sind allerdings durch verschiedene, auch neuere Trends gekennzeichnet.

Die Geometrie und damit auch deren Weitergabe ist zwar schon über Jahrtausende bekannt, von einem Geometrieunterricht im eigentlichen Sinne kann man jedoch erst seit etwa drei Jahrhunderten sprechen. Im Mittelalter wurde an den Kloster- und Stiftsschulen sowie später an den Universitäten die Mathematik und insbesondere die Geometrie praktisch nicht gelehrt. In der Neuzeit nahm dann wegen der Ausweitung des Handels und der Entwicklungen im Handwerk und in der Kunst die Geometrie, wie die Mathematik generell, stetig an Bedeutung zu. Sie wurde in der frühen Neuzeit aber im wesentlichen von Rechenmeistern oder Baumeistern und Künstlern (vgl. etwa das geometrische Lehrbuch von Albrecht Dürer aus dem Jahre 1525) weitergegeben. In den Schulen spielte die Geometrie weiterhin kaum eine Rolle, was auch durch einzelne Forderungen wie etwa dem äußerst fortschrittlichen Gothaer Schulmethodus von 1644 nicht geändert wurde. Im 17. Jahrhundert hatte die

Geometrie lediglich an den sogenannten Ritterakademien im Zusammenhang mit militärisch-technischen Anwendungen eine Bedeutung. Im 18. Jahrhundert hat dann der Leibniz-Schüler Christian Wolff "das Lehrgebäude der Mathematik in klarer, übersichtlicher, allgemein verständlicher, zusammenfassender Darstellung aufgeführt." und "zum Gemeingut deutscher Bildung gemacht" (Treutlein, 1911, S. 13). Da *Wolff sowohl die praktische Bedeutung der Mathematik - was im ganzen 18. Jahrhundert der vorrangige Aspekt war - als auch "den sogenannten formalbildenden Wert des mathematischen Unterrichts" hervorhebt, kann er vermutlich als der Begründer des systematisch orientierten Mathematikunterrichts angesehen werden.* Zumindest seit dieser Zeit besteht der Geometrieunterricht an Gymnasien aus der Behandlung der Elemente von Euklid. "Aus ihnen entnahm man Stoff, Umfang und Methode. Anfangs nur an den Inhalt des 1., wohl auch des 2. Buches sich haltend, nahm man nach und nach, sehr langsam den Unterricht erweiternd, den Inhalt des 3. und 4., des 5. und 6. Buches Euklids in den Lehrplan und in die Unterrichtsdurchführung auf, dann fügte man weitergehend, die arithmetischen Bücher überspringend oder kurz rechnerisch erledigend, die die Raumgeometrie betreffenden Lehren des 11. und 12. Buches sowie das Wesentliche des 13. Buches hinzu. Indem der Gymnasialunterricht, als er überhaupt anfang, der Mathematik mehr Beachtung zu schenken, das Werk des Euklids als Führer und Lehrbuch übernahm, ihn anfangs sklavisch folgend, später doch jedenfalls ziemlich eng sich daran anlehnend, übernahm man in den Unterrichtsbetrieb auch vier Dinge, die für diesen Betrieb kennzeichnend wurden, lange scharf kennzeichnend geblieben sind und dies zum guten Teil noch heute sind.

Diese vier Merkmale geometrischen Unterrichts sind: 1) der bekannte viel gerühmte und nicht selten hart geschmähte streng dogmatische Lehrvortrag. 2) die scharf durchgeführte Trennung der allgemeinen Raumgeometrie von der ebenen Geometrie, 3) die Rückschiebung der Raumbetrachtung gegen das Ende des ganzen üblichen Lehrganges und 4) die Voranstellung der abstrakteren Lehren über Geraden und Ebenen vor die Betrachtung der körperlichen Raumgebilde." (Treutlein, 1911, S. 70/71)

Als vor 200 Jahren das 18. Jahrhundert seinem Ende zugeht, vollzieht sich in der Pädagogik im allgemeinen und in der Mathematikdidaktik im besonderen ein grundlegender Wandel, der auch für den Unterricht von heute große Bedeutung hat. Im Geiste der Aufklärung und einer naturgemäßen Erziehung im Sinne von Rousseau fordert Pestalozzi die "allgemeine Emporbildung der inneren Kräfte der Menschennatur zu reiner Menschenweisheit. Übung, Anwendung und Gebrauch seiner Kraft und seiner Weisheit in den besonderen Lagen und Umständen der Menschheit ist Berufs- und Standesbildung. Diese muß immer dem allgemeinen Zweck

der Menschenbildung untergeordnet sein." (Pestalozzi, 1780; zitiert nach Treutlein, 1911, S. 14)

Zum Erreichen eines so hoch gesteckten Zieles reicht das bisher übliche mechanische Auswendiglernen nicht mehr aus; *Pestalozzi fordert deshalb ein Lernen, das man als "verständiges Lernen" bezeichnen kann.* Deshalb muß nach ihm alles Lernen die drei methodischen Stufen "Anschauung", "Vorstellung durch Eigenschaftsbestimmung (Beschreibung)" und "Begriffsbildung" sowie das Prinzip der "Selbsttätigkeit des Schülers" berücksichtigen; weiterhin soll sich dem Wissen das Können, die Fertigkeit zugesellen. Hervorzuheben ist dabei, daß man als "den obersten Grundsatz des Unterrichts die Anerkennung der Anschauung, als des absoluten Fundamentes aller Erkenntnis" anzusehen hat. (Pestalozzi a.a.O.)

Es ist deshalb offensichtlich, daß Pestalozzi der Pflege der Rauman-schauung große Bedeutung beimißt; und zwar fordert er eine intensive Auseinandersetzung der Kinder mit geometrischen Objekten (insbesondere der geraden Linie und dem Quadrat) schon ab Beginn der Elementarschule. Pestalozzi ist deswegen auch als Begründer des geometrischen Anschauungsunterrichtes anzusehen.

Seine Vorstellungen werden zu Beginn des 19. Jahrhunderts von vielen aufgegriffen, im Methodischen variiert und auch weiterentwickelt. Herbart zum Beispiel stellt nicht das Quadrat, sondern eine größere Anzahl von Dreiecken an den Anfang. Graßmann möchte die "unendliche Linie der Konstruktion" als Grundlage verwenden. Harnisch schließlich verwarf solche "Beschränkung auf Strich- und Flächenanschauungen" und ist neben v. Raumer der erste, der die "Körper-Anschauungen" als Grundlage hinstellt. (Genaueres vgl. Treutlein, 1911, S. 19-68) Erwähnt sei auch noch Fröbel, der zunächst in enger Anlehnung an Pestalozzi von der "Scheitel- und Brustlinie des Menschen, das Senkrechte und Waagerechte" ausgeht, dann aber sehr bald zu verschiedenartigen Dreiecken und Vierecken sowie geometrischen Körpern übergeht. (Vgl. dazu etwa Wagemann o. J., S. 152-160) In den ersten Kindergärten, deren Gründer Fröbel ist, läßt er die Kinder mit einer ganzen Reihe von geometrischen Spielobjekten Erfahrungen machen. Für den sogenannten "geteilten Würfel", einem aus acht Teilwürfeln bestehendem Würfel, etwa hat er auch über achtzig Übungen, in denen die Kinder räumliche Figuren nach verschiedenartigsten Vorlagen bauen sollen, entwickelt. Eine Schulung der Rauman-schauung schon im Kindergarten, wie es auch Pestalozzi fordert, wird hierbei ohne Zweifel erreicht.

Ohne daß das Pestalozzische Prinzip der allgemeinen Bildung des Menschen und des verständigen Lernens geleugnet wurde, *gab es aber auch schon bald Widerspruch zu der Theorie und Praxis des geometrischen Anschauungsunterrichts* von Pestalozzi und seinen Anhängern.

"Dieser fand seinen Rückhalt an dem Aufkommen, Vordringen und wenigstens in den amtlichen Schulen an dem vollen Sieg des viel berufenen 'Grundsatzes von der formalen Bildung', durch den das Betonen des rein Wissenschaftlichen, das Zurücktreten oder Verschwinden der Anwendungen, dafür die Hinwendung zum mehr oder völlig Abstrakten und damit die einzige Behandlung rein euklidischer Geometrieform bedingt war. Der Stoffumfang, fast möchte man sagen, der Inhalt des Gelehrten trat zurück hinter der nun gestellten Haupt-, ja fast einzigen Aufgabe des mathematischen Unterrichts, unbedingt für logische Strenge zu sorgen, vor allem logische Schulung zu erzielen sowohl durch die Einzelarbeit wie durch die (z.B. später 1834 in Preußen gestellte) Zielforderung, 'klare Einsicht zu gewinnen in den Zusammenhang sämtlicher Sätze des systematisch geordneten Vortrages.'" (Treutlein, 1911, S. 40) Aus diesen Gründen, die durch die Ablehnung der emanzipatorischen Gedanken Pestalozzis durch die Herrschenden verstärkt wurden, *folgte deshalb die Praxis des Geometrieunterrichts an Gymnasien fast das ganze 19. Jahrhundert dieser euklidischen Methode*, zu der man sich die oben genannten vier Merkmale noch dazudenken muß.

Ab Mitte des 19. Jahrhunderts wurden dann wieder Stimmen nach Reformbestrebungen laut, hervorgerufen durch die Entwicklungen in der Mathematik an Universitäten und die entstandene Konkurrenz der sogenannten Höheren Bürgerschulen und Realschulen. Sie hatten wegen der politischen Situation zunächst noch keine Chance zur Verwirklichung; *aber mit dem wirtschaftlichen Aufschwung in der Gründerzeit wurden Lehrplanreformen wieder akut. Die Forderungen nach einem genetischen Unterricht brachten dann für den Geometrieunterricht die Einrichtung eines propädeutischen geometrischen Anschauungsunterrichts als Vorstufe zum systematischen Geometrieunterricht nach und nach in den einzelnen Ländern. An der Wende des 19. und 20. Jahrhunderts werden diese Forderungen durch die sogenannte Arbeitsschulbewegung und die Reformpädagogik vielfältig unterstützt.* So schreibt zum Beispiel F. Reidt : "Es ist selbstverständlich, daß eine jede Anleitung zum Unterricht eines besonderen Lehrgegenstandes die allgemeinen Grund- und Lehrsätze der Didaktik zugrunde legen muß, welche infolge der historischen Entwicklung der Pädagogik und der Ergebnisse der psychologischen Wissenschaften dem gegenwärtigen Standpunkt des Unterrichtswesens entsprechen." (Reidt, 1906, S. 8) Bezogen auf den Zweck des mathematischen Unterrichts nennt Reidt dann "das positive Wissen", "die Förderung im sprachlichen Ausdruck", "die formale Verstandesbildung", "die Übung des Anschauungsvermögens" und "die Übung des Gedächtnisses" (Reidt, S. 10-29).

Großen Einfluß auf den Geometrieunterricht hatte auch Treutlein, der sein Konzept wie folgt beschreibt: "Der Unterricht der Unterstufe ist ein 'geometrischer Anschauungsunterricht'; er lehnt sich an die Betrachtung von Körpern an, leitet daraus die verschiedenen geometrischen Gebilde ab, formt sie um und gestaltet neue, er benützt und fördert die Selbsttätigkeit der Schüler durch Schätzen, Messen (auch im Freien), Zeichnen, Modellieren, er pflegt die innere Anschauung und die Raumvorstellung und leitet allmählich das anschauliche Erkennen hin zum beweisenden Begründen des Erkannten." (Treutlein, 1911, S. 75)

Durch die sogenannte Ingenieurbewegung und die Kleinsche Reform kommt dann Anfang des 20. Jahrhunderts noch das Prinzip der Abbildungen und des funktionalen Denkens hinzu. In den Meraner Vorschlägen zur Reform des Mathematikunterrichts von 1905 werden als wesentliche Ziele die "Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens", die "logische Schulung" und die "Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens" genannt. Ihren lehrplanmäßigen Niederschlag finden diese Forderungen wegen des Ersten Weltkrieges dann erst in den Lehrplänen der 20er Jahre. In einem Lehrbuch zur Raumlehre aus der damaligen Zeit beispielsweise findet man im Vorwort folgendes: "Die Erzeugung der Raumformen durch Bewegung ist Grundlage des Lehrganges und des Lehrverfahrens. Durch Bewegung einzelner Teile einer Raumform wird der funktionelle Zusammenhang der Formelemente aufgedeckt, und durch das Herausheben der Sonder- und Grenzfälle wird das gesamte Formengebiet zu einer organischen Einheit verbunden. Die unterrichtliche Behandlung einer jeden Raumform führt von der Anschauung zu ihrer geistigen Durchdringung (Herausheben der Entwicklungs-, Seins- und Erkenntnisbeziehungen) und zu ihrer Darstellung. Das innere Leben der Form wird mit dem äußeren Leben der Umgebung verknüpft." (Engel, 1922, S. VII)

In der Zeit von 1933 bis 1945 wurden die Reformbemühungen nicht weiter verfolgt; der gesamte Mathematikunterricht und insbesondere dessen Aspekte allgemeiner Menschenbildung wurden zurückgedrängt. "Nach 1933 mußte die höhere Schule ihre Ziele niedriger stecken und sah unter einem uniformierenden Zwang sich der echten Möglichkeiten zu tiefer Bildungswirkung und fruchtbarer Fortentwicklung beraubt." (Lohmeyer, 1958, zitiert nach Winter, 1984, S. 118)

Nach 1945 knüpfte man an den Richtlinien der Weimarer Zeit wieder an. Die Raumlehre in der Volksschule hatte das Ziel der Schulung der Raumanschauung und der praktischen Vorbereitung für Handwerksberufe durch die Behandlung von Flächen- und Raumberechnungen. Der Geometrieunterricht der Gymnasien bestand aus der propädeutischen Geometrie in den ersten zwei bis drei Klassen im Sinne der Reformen aus dem Anfang

des 20. Jahrhunderts und einer Kongruenz und Ähnlichkeitsgeometrie im Geiste Euklids in den oberen Jahrgängen der Mittelstufe (Sekundarstufe I) sowie einer anschaulichen Vektorgeometrie in der Oberstufe (Sekundarstufe II). Ab Mitte der 50er Jahre wurde in Anknüpfung an die Kleinsche Reform in allen drei Stufen der klassische Stoff durch verschiedene Einfügungen über geometrische Abbildungen und abbildungsgeometrische Beweise erweitert. Die Ziele waren dabei im wesentlichen die gleichen wie zu Anfang des 20. Jahrhunderts.

Mit der Reform des gesamten Mathematikunterrichts Ende der 60er Jahre ergab sich dann auch für den Geometrieunterricht eine große Veränderung. Auf der einen Seite wurde ein Geometrieunterricht auch für die Grundschule verordnet, so daß ein erfahrungsorientierter anschaulicher Geometrieunterricht im Geiste Pestalozzis bzw. der Forderungen aus dem Anfang des 20. Jahrhunderts jetzt für das erste bis sechste Schuljahr verankert und ausgebaut werden konnte. Auf der anderen Seite wurde der weiterführende Geometrieunterricht in weiten Teilen auf die strukturmatischen Aspekte der Abbildungsgeometrie und der dreidimensionalen Vektorraumgeometrie reduziert.

Seit Mitte der 70er Jahre findet dann eine erneute Diskussion um den Geometrieunterricht statt, aufgrund derer man heute nicht mehr von einer Konzeption des Geometrieunterrichts sprechen kann. Die gegenwärtige Situation ist vielmehr durch verschiedenartige Trends gekennzeichnet, die gewolltermaßen nebeneinander oder miteinander verzahnt den Geometrieunterricht prägen sollen, wobei spezielle neuere mathematikdidaktische Forschungsergebnisse (etwa über Kommunikation und Interaktion im Mathematikunterricht sowie Theorien zum Lehrerhandeln und kognitionspsychologische Erkenntnisse) zu berücksichtigen sind. Stichwortartig können die Trends wie folgt beschrieben werden:

Zurückdrängen einer formalen Systematik zugunsten von erstens Umwelterschließung und Anwendungsorientierung im Geometrieunterricht (vgl. etwa Graumann, 1976; H. Winter, 1978; Graumann, 1988), zweitens Entwicklung und Präzisierung eines geometrischen Begriffsapparates zur Strukturierung des Anschauungsraumes und zur Erforschung der Nutzbarkeit dieser Struktur (vgl. etwa Bender, 1978; Graumann, 1988; Krainer, 1990), drittens der Förderung des räumlichen Anschauungsvermögens (vgl. etwa Besuden, 1979; Wölpert, 1983), viertens der Förderung allgemeiner Lernziele (vgl. etwa Graumann, 1977; Profke, 1985, Schumann; 1986, Graumann, 1993) und der Nutzung von Geometrie als Übungsfeld für Problemlösen. Außerdem werden seit Beginn der 80er Jahre unterschiedliche Verwendungen von Computern im Geometrieunterricht vorgeschlagen und diskutiert (vgl. dazu etwa den Übersichtsartikel Graumann, 1991). Eine ausführliche Erörterung des

heutigen Diskussionsstandes kann nicht erfolgen; es sei dazu auf einen voraussichtlich 1995 im Journal für Mathematikdidaktik erscheinenden Artikel eines Autorenkollektivs, das aus dem GDM-Arbeitskreis Geometrie hervorgegangen ist, verwiesen.

Prinzipiell kann man unter Weiterentwicklung der Vorschläge von Vollrath (1974/ 81) und Holland (1979) den Geometrieunterricht heute auf folgende drei Aspekte hin konzipieren:

- Geometrie als Wissenschaft, der man begegnet, um exemplarisch mathematische Darstellungs- und Denkweise kennenzulernen oder um einen Vorrat mathematischer Strukturen zu erwerben oder um Beweisen, Formalisieren und Axiomatisieren zu erlernen oder um wissenschaftliches Arbeiten zu trainieren oder um einen kulturell und wissenschaftshistorisch wichtigen Inhalt kennenzulernen.
- Geometrie als empirische Wissenschaft über den Raum, die man erwirbt, um sich im Raum zu orientieren, das räumliche Anschauungsvermögen zu fördern und die kognitive Struktur für die Denk- und Handlungsfähigkeiten zu entwickeln oder um die Erschließung der Umwelt durch Geometrie, die Strukturierung des Anschauungsraumes und der Umwelt durch geometrische Begriffe und Zusammenhänge und die Nutzung von Geometrie in Wissenschaft, Technik und Alltag zu erfahren und zu trainieren.
- Geometrie als Gegenstandsbereich, mit dem allgemeine Ziele besonders gut verbunden werden können. Solche Ziele sind vor allem die Entwicklung und das Training von Problemlösefähigkeiten und Kreativität, die Präzisierung von Sprach- und Ausdrucksformen sowie Argumentationsweisen, die Entwicklung und Förderung von vernetztem Denken und Handeln in komplexen Situationen, das Training geistiger Grundtechniken wie Klassifizieren, Ordnen, Systematisieren, Verallgemeinern und Analysieren, das Training zeichnerischer und darstellerischer Fähigkeiten und die Förderung des Selbstbewußtseins, sozialer Fähigkeiten sowie der Bereitschaft und Fähigkeit zur kritischen Reflexion geometrischer Modellierungen und Hilfsmittel.

Literatur

- Bender, P. (1978). Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. *Der Mathematikunterricht* 1, 24 (5), 25-87.
- Bender, P. & Schreiber (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien.
- Besuden, H. (1979). Die Förderung der Raumvorstellung im Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Band 1979, S. 64-67). Hannover.

- Engel, E. (1922). *Raumlehre. Eine Anleitung zur Erteilung des Unterrichts in der Raumlehre im Sinne der Meraner Beschlüsse*. Langensalza.
- Graumann, G. (1977). Praxisorientierter Geometrieunterricht. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Band 1977, S.98-101). Bad Salzdetfurth.
- Graumann, G. (1988). Geometrie im Alltag. *mathematik lehren*, 29, 8-14.
- Graumann, G. (1991). Können Computer sinnvoll den Geometrieunterricht bereichern? *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik* (Band 21 - Computer-Mensch-Mathematik). Wien.
- Graumann, G. (1993). Wodurch wirkt der Mathematikunterricht allgemeinbildend ? - Vier Beispiele aus dem Geometrieunterricht. In Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hrsg.), *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht* (S.55-68). Buxheim-Eichstätt.
- Holland, G. (1979). Das Beweisen geometrischer Sätze in der Sekundarstufe I unter verschiedenen Aspekten der Geometrie. *Didaktik der Mathematik*, 7, 104-119.
- Krainer, K. (1990). *Lebendige Geometrie*. Frankfurt/Main.
- Profke, L. (1985). Zeichnen in Praxis und Theorie. *mathematik lehren*, 27, 13-17.
- Reidt, F. (1906). *Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen*. Berlin.
- Schumann, H. (1986). Achsensymmetrie - Operative Übungen an und mit Achtecken. *Didaktik der Mathematik*, 17, 263-295.
- Treutlein, P. (1911). *Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen*. Leipzig und Berlin.
- Vollrath, H.-J. (1974/ 81). Geometrie im Mathematikunterricht - eine Analyse neuerer Entwicklungen. In *Schriftenreihe des IDM 3* (74), 1-22, und leicht überarbeitet in Steiner & Winkelmann (1981). *Fragen des Geometrieunterrichts*. Köln.
- Wagemann, E. B. (o.J.). *Quadrat - Dreieck - Kugel. Die Elementarmathematik und ihre Bedeutung für die Pädagogik bei Pestalozzi, Herbart und Fröbel*. Weinheim.
- Winter, M. (1984). Zur Geschichte des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen in Deutschland - Versuch einer Rekonstruktion des Verlaufs. In A. Mannzmann, *Geschichte der Unterrichtsfächer III*. München.
- Winter, H. (1978). Umwelterschließung im Geometrieunterricht - Zur Einführung. *Der Mathematikunterricht*, 24 (5), 516.
- Wölpert, H. (1983). Materialien zur Entwicklung der Raumvorstellung im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht*, 29 (6), 7-42.