

Günter GRAUMANN, Bielefeld

### Über den Sinn des Mathematikunterrichts und dessen Vermittlung

Das Streben nach Sinn und das Suchen nach Sinnzusammenhängen ist bei allen Menschen von Grund auf angelegt. Der Mensch ist nicht wie das Tier durch Instinkte festgebunden, sondern er hat vielfältige Möglichkeiten sich in seiner Umwelt zu verhalten. Damit aber eine den Instinkten analoge Eingepaßtheit in seine Lebenswelt nicht völlig verloren geht, muß er nach dem Sinn von Dingen und Handlungen fragen. Bruno Bettelheim hat dies in einem Fernsehinterview einmal folgendermaßen ausgedrückt: "Die Hauptaufgabe jedes Menschen ist das Finden von Sinn — Sinn im Sinnlosen finden". Und bei Alfred Nitschke heißt es: "Ohne Vertrauen auf eine in unserem Dasein wirkende, sinnvoll gestiftete Ordnung kann der Mensch nicht wahrer Mensch sein" (Nitschke 1962, S. 15). Paul Oswald führt den Gedanken dann weiter, indem er schreibt: "Die Dinge und Ereignisse tragen aber ihre Sinnantwort nicht an ihrer Stirn geschrieben; der Mensch muß ihren Sinn suchen, finden und deuten; d.h. aber, daß er mit dem Sinnproblem wiederum auf vermittelnde Hilfe angewiesen ist, es also auch ein pädagogisches Problem ist" (Oswald 1980, S. 87). Durch die vielfältigen Umwelteinflüsse insbesondere die Medien, werden wir alle mit einer Fülle von einzelnen Eindrücken überflutet; sinnvermittelnde Zusammenhänge werden kaum angesprochen. Und auch der heutige Unterricht in der Schule, der noch stark geprägt ist durch die vor zwanzig Jahren eingeleitete Wissenschaftsorientierung (in Form des positivistischen Wissenschaftsbegriffs), begegnet diesem Problem nicht, sondern verstärkt es eher noch (vgl. dazu Graumann 1984).

Deshalb ist es notwendig, daß die Frage nach dem Sinn und die Vermittlung von Sinn in den Mittelpunkt didaktischer Überlegungen gestellt wird.

Fragt man Lehrer und Lehrerinnen nach dem Sinn des gerade durchgeführten Unterrichts, so erhält man in der Regel nur Hinweise auf die Richtlinien und Schulbücher oder darauf, daß der behandelte Inhalt doch wichtig sei. Inwiefern über die einzelnen Inhalte den Lernenden ein umfassendes und beziehungsreiches Verständnis der Welt vermittelt und die Entwicklung ihrer Persönlichkeit gefördert wird, kommt selten zum Ausdruck. Nun wird man nicht bei jeder Unterrichtsvorbereitung diesen Aspekt explizit bedenken können — vor allem auch weil aus den allgemeinen Zielen sich keine konkreten Planungen direkt ableiten lassen und die allgemeinen Ziele mehr indirekt über den Unterrichtsstil zum Ausdruck kommen — ; aber gerade deshalb ist es wichtig, sich im Vorfeld konkreter Planungen mit der Frage nach dem Sinn des Unterrichts auseinanderzusetzen.

Nachdem die Notwendigkeit der Sinnfrage hoffentlich deutlich geworden ist, möchte ich zunächst einmal fragen was denn eigentlich mit "Sinn" gemeint ist. Im Lexikon (vgl. etwa Brockhaus 1962) finden wir, daß *mit dem Sinn einer Sache oder Handlung deren Bedeutung, Zweck, Funktion oder Wesen gemeint ist*. Und Klaus Schaller schreibt dazu: "Das bloße Wissen ist stumm. Dagegen muß der Sinn des Einzelnen im Ganzen zugleich mit dem bloßen Wissen dem Schüler vornehmlich werden als Ruf und Anspruch, in seinem Denken, Reden und Tun diesen Sinn zu erfüllen.... *Der Sinn des Einzelnen erschließt sich immer vom Ganzen her.*" (Schaller 1961, S.69/70). Sinnhaftigkeit hängt deshalb eng zusammen mit ganzheitlicher Auffassungsweise, ein Aspekt der auch schon bei Johannes Wittmann deutlich wurde.

Um den Sinn des Unterrichts nicht einseitig — etwa nur innerhalb der Fachsysteme

matik oder nur in Bezug auf unmittelbaren Nutzen — zu suchen, möchte ich als nächstes auf die verschiedenen Motive eingehen, die für einen einzelnen Lernenden Sinn konstituieren können.

### Kategorien der Konstituierung von Sinn:

- *pragmatischer Aspekt*: Es geht hierbei um Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die eine praktische Hilfe im sog. täglichen Leben darstellen. Die meisten rechnerischen und sachrechnerischen Fertigkeiten und Fähigkeiten fallen unter diesen Aspekt. Auch die von mir entwickelte "praxisorientierte" Konzeption des Mathematikunterrichts (vgl. Graumann 1976/77 und 88) hat hier ihren Schwerpunkt. Die Lebensechtheit und Situationsgebundenheit ist dabei ein wesentlicher Gesichtspunkt, damit der pragmatische Sinn auch wirklich deutlich wird.
- *statusorientierter Aspekt*: Hier ist man auf günstige Chancen für einen Beruf bzw. eine Position orientiert. Es geht dabei darum, daß man für bestimmte Berufe bestimmte mathematische Qualifikationen benötigt. Oder es geht einfach darum Zeugnisse mit guten Noten zu erreichen. Im letzten Fall besteht natürlich kein Bezug zum Inhalt.
- *sozial/gesellschaftlicher Aspekt*: Erstens wird der Sinn in den bewußt angestrebten sozialen Lernzielen, (z.B. der Kooperationsfähigkeit bzw. der Fähigkeit zum gemeinsamen Lösen von Problemen) gesehen. Zweitens kann auch einfach das gemeinsame Lernen einer Lernsituation einen Sinn geben. Drittens kann der Sinn im Wahrnehmen gesellschaftlicher Aufgaben der Menschen liegen. Hierzu gehört das Bewahren von Kulturgut (z.B. mathemathikhistorischen Tatsachen) und das Bearbeiten von gesellschaftlichen Problemen (z.B. ökologischer Problemen mittels Computersimulationen oder systemtheoretischer Analysen).
- *erkenntnisorientierter Aspekt*: Es ist eine Eigenschaft von Menschen, Erkenntnisse ohne unmittelbaren Nutzen zu gewinnen. Auch darin können Lernende Sinn für sich konstituieren. Die reine Mathematik ist von diesem Aspekt sehr stark geprägt. In der Schule fängt das etwa bei der Frage nach der Unendlichkeit der Primzahlreihe oder dem Vierfarbenproblem an.
- *ästhetisch/spielerischer Aspekt*: Die Freude an der Schönheit geometrischer Figuren oder logischer Zusammenhänge und die Freude an der spielerischen Betätigung kann in vielen Fällen Sinn konstituieren. Aber auch die Förderung ästhetischer Kreativität oder ästhetischen Erlebens sowie spielerischer Betätigung kann einen Sinnaspekt ausmachen. Hierzu gehören etwa mathematische Analysen zur Musiktheorie, Untersuchungen von Architekturen mittels mathematischer Begriffe und das Analysieren von Unterhaltungsmathematik.

Wir kommen nun zu der Frage, wie der Sinn von Mathematikunterricht vermittelt werden kann. Hierzu gehört als erstes, wie schon erwähnt, daß sich die Lehrenden über den Sinn Klarheit verschaffen. Neben der grundlegenden Reflexion über den Sinn von Mathematikunterricht, wie wir sie hier betreiben, ist die Reflexion der allgemeinen Lernziele, (etwa mittels der Taxonomie von Bloom u.a., der didaktischen Fragen von Klafki oder dem Katalog von H. Winter) hilfreich. Die allgemeinen Ziele sind es ja gerade, die die Verbindung zwischen dem Sinn und den konkreten Unterrichtsabläufen herstellen sollen, auch wenn die Problematik ihrer Verwirklichung und Überprüfung akzeptiert wird. Deswegen ist die Reflexion und die Durchdringung der Inhalte aus der Sicht allgemeiner Ziele für die Unterrichtsvorbereitung aber so

wichtig. Was man intensiv durchdacht hat, kann man auch besser vermitteln. Hierzu gehört insbesondere auch daß sich die Lehrenden über Zusammenhänge innerhalb der Mathematik, Zusammenhänge der Mathematik mit gesellschaftlichen Fragestellungen und Aufgaben und Zusammenhänge des Mathematikunterrichts mit persönlichen Problemen, Wünschen und Entwicklungen der Lernenden klar werden und daß sie diese Zusammenhänge den Lernenden übermitteln.

Zum Abschluß möchte ich Ihnen noch einige beispielhafte Hinweise geben, wie der Sinn des Mathematikunterrichts vermittelt werden kann. Aus den bisherigen Äußerungen sollte allerdings schon klar geworden sein, daß die Darstellung eines auf Sinnvermittlung orientierten Mathematikunterrichts sehr ausführlich sein muß (insbesondere auch den Unterrichtsstil miteinbeziehen muß) und deshalb hier nicht geleistet werden kann. Deshalb werde ich mich hier darauf beschränken, Zusammenhänge zwischen den mathematischen Unterrichtsinhalten und anderen innermathematischen oder außermathematischen Bereichen beispielhaft aufzuführen. Ich hoffe, daß dadurch deutlich wird, wie wichtig das Thematisieren solcher Zusammenhänge im Mathematikunterricht für die Vermittlung eines sinngebenden, aspektreichen Bildes der Mathematik ist.

### 1. Beispiel: Natürliche Zahlen

In der Grundschule haben die Zahlen im wesentlichen pragmatischen Wert, was durch Aufzeigen vielfältiger Zusammenhänge mit der Umwelt verdeutlicht werden muß. Aber auch schon in der Grundschule und vor allem in der Sekundarstufe I und II sollten die Beziehungen der natürlichen Zahlen und ihrer Verknüpfungen untereinander und die Zusammenhänge mit anderen Zahlbereichen immer deutlich herausgestellt werden. Im 5. Schuljahr im Rahmen der zusammenfassenden Wiederholung der natürlichen Zahlen sollten dann auch die Zusammenhänge mit historischen Entwicklungen der Zahlensprechweisen und Zahlenschreibweisen sowie die Bedeutung der Zahlen in der Mystik thematisiert werden.

### 2. Beispiel: Symmetrie

Der innermathematische Zusammenhang mit Abbildungen wird in der Regel behandelt. Man muß hier aber auch den Zusammenhang mit dem Gleichgewichtsgefühl und der Funktionalität symmetrischer Gebilde in der natürlichen und künstlichen Umwelt sowie der Schönheit bzw. Regelmäßigkeit symmetrischer Figuren herstellen. Außerdem sollte die Bedeutung eines verallgemeinerten Symmetriebegriffs in Form von "symmetrischen" Zahlen und Wörtern, symmetrischen Gesetzmäßigkeiten (Kommutativität) und symmetrischen Formen der Lyrik und Musik je nach Alter der Lernenden mehr oder weniger ausführlich behandelt werden. Ebenso sollte zu gegebener Zeit auf die Ökonomie der Symmetrie (einschließlich deren Verallgemeinerung zur "Gleichwertigkeit in Bezug auf eine Fragestellung") beim Beweisen und Lösen von Problemen eingegangen werden. In der Oberstufe wäre dann auch auf die Bedeutung des Symmetriebegriffs in der Physik und als wissenschaftstheoretischer Grundgedanke einzugehen.

### 3. Beispiel: Sachrechnen

Wie man Kindern den Sinn von Sachrechnen klarmachen kann, habe ich in meinem Vortrag über "Praxisorientiertes Sachrechnen" (vgl. Graumann 1976) näher ausgeführt.

#### 4. Beispiel: Satz des Pythagoras

Ein wesentlicher Sinn des Satzes von Pythagoras und seiner Umkehrung liegt darin, daß man damit viele Längen ohne genaue Konstruktion berechnen kann. Auf diese innermathematischen und außermathematischen Anwendungen muß deshalb zu Anfang ausführlich eingegangen werden. Aber auch die Bedeutung der Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras in der Antike als Hilfsmittel für die Flächenverwandlungen — die ja zahlentheoretische Aufgaben in geometrischem Gewande waren — sollte zumindestens im Gymnasium behandelt werden. Weiterhin ist der Satz des Pythagoras in der Regel der erste Satz, bei dem eine Beweisnotwendigkeit klar zu Tage tritt. Es sollte deshalb der Zusammenhang mit dem Sinn von Beweisen in der Geschichte der Mathematik ebenfalls angesprochen werden. Schließlich sollten auch die zahlentheoretischen Fragen, die sich aus der Suche nach pythagoreischen Tripeln und deren Verallgemeinerungen in der Geschichte der Mathematik ergeben haben, thematisiert werden.

#### 5. Beispiel: Trigonometrische Funktionen

Bei der Einführung der trigonometrischen Funktionen sollte auf den Zusammenhang mit Entwicklungen in der Astronomie und der Fragestellung, wie Dreiecksstücke, die eindeutig konstruierbar sind, auch berechnet werden können, eingegangen werden (vgl. dazu Graumann 1987). Interessant ist es in diesem Zusammenhang auch, auf die Entstehung der Bezeichnungen in der Trigonometrie einzugehen. Weiterhin sollte der Zusammenhang aller sechs trigonometrischen Funktionen untereinander und der Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras aufgezeigt werden. Schließlich darf auch die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen in der Akustik und Elektrodynamik nicht vergessen werden.

#### Literatur:

- BÖNSCH, Manfred: Die Konstituierung von Sinn als schulpädagogisches Problem. In: Neue Deutsche Schule, Heft 20/88, S.24/25.
- GRAUMANN, Günter: Praxisorientiertes Sachrechnen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1976, S. 79–83
- GRAUMANN, Günter: Praxisorientierter Geometrieunterricht In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, S. 98–101
- GRAUMANN, Günter: Was kann die Mathematikdidaktik zum neuen Weltbild beitragen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, S. 126–129
- GRAUMANN, Günter: Eine genetische Einführung in die Trigonometrie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1987, S. 116–149
- NITSCHKE, Alfred: Das verwaiste Kind der Natur, Tübingen 1962
- OSWALD, Paul: Erziehen? – heute?, Kastellaun 1980
- SCHALLER, Klaus: Vom "Wesen" der Erziehung, Ratingen 1961