Math Semesterber (1992) 39: 143–161

Mathematische Semesterberichte

Mathematik in der Wirtschaftstheorie am Beispiel der Struktur der Marktnachfrage

Walter Trockel*

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung, Universität Bielefeld, Universitätsstraße, W-4800 Bielefeld 1

Eingegangen am 2.3.1991, angenommen am 10.2.1992

Zusammenfassung. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Rolle der Mathematik in der Wirtschaftstheorie zu erhellen. Dies geschieht anhand eines akuten Problems, nämlich der Strukturierung der Marktnachfrage durch geeignete Annahmen an die grundlegenden, das ökonomische System beschreibenden Daten und deren Verteilung. Es zeigt sich, daß neben der Bewältigung und Anwendung teilweise komplexer Mathematik ein Hauptproblem darin besteht, ökonomische Vorstellungen zu präzisieren und durch geeignete Formalisierung einer exakten mathematischen Analyse zugänglich zu machen. Im konkreten Beispiel wird gezeigt, wie die Vorstellung „hinreichend diversifizierter Präferenzen" von Konsumenten durch geeignete Verteilungen auf einem polnischen Raum spezieller binärer Relationen formalisiert wird. Das erzielte Ergebnis konstatiert, daß die durch Integration über sehr viele Individuen ermittelte „mittlere" oder „Markt"-Nachfrage über Strukturen verfügen kann, welche die individuellen Nachfragerelationen nicht aufweisen. Dies hat einen wesentlichen Einfluß auf den Erklärungswert des Wettbewerbsgleichgewichts, dessen Eindeutigkeit nur für hinreichend strukturierte Marktnachfrage gewährleistet ist.

1. Einleitung

Wenn man einen Oberstufenschüler, der ein Studium der Physik plant, nach der Rolle der Mathematik in diesem Studium fragt, so wird er im allgemeinen keine präzisen Antworten bereit halten. Er wird jedoch in der Regel wissen, daß solide Mathematikkenntnisse etwa auf dem Leistungskursniveau wohl eine unverzichtbare Grundlage bilden.

---

* Die vorliegende Arbeit ist die revidierte Version eines auf dem 5. Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik am 20. Februar 1990 gehaltenen Vortrags. Der Autor bedankt sich für wertvolle Veränderungs- und Ergänzungsvorschläge eines ungewöhnlich engagierten, sorgfältigen und kompetenten anonymen Gutachters.

Fragt man dagegen einen künftigen Studenten der Wirtschaftswissenschaften nach seiner Motivation für diesen Studienwunsch, so muß man mit der Antwort rechnen, er wolle so einer zu intensiven Begegnung mit der Mathematik entgehen.

Leider hat es sich an deutschen Gymnasien noch immer nicht herumgesprochen, daß auch für ein Studium der Wirtschaftswissenschaften gründliche Mathematikkenntnisse und eine Bereitschaft, mit Mathematik umzugehen, unerläßlich sind. Natürlich gibt es Unterschiede je nach fachlicher Ausrichtung. So stellen etwa Betriebswirtschaftslehre und Volkswirtschaftslehre durchaus verschiedene Ansprüche was die Mathematik betrifft. Auch hängt der Stellenwert der Mathematik von der Hochschule ab, an der Wirtschaftswissenschaften gelehrt werden.

Als generelle Regel kann man jedoch sagen: ein Wirtschaftswissenschaftler benötigt im allgemeinen die Mathematik ebenso sehr wie ein Experimental-Physiker. Für eine Wirtschaftstheoretiker besitzt die Mathematik sogar einen Stellenwert wie für einen theoretischen Physiker. Natürlich handelt es sich bei diesen Vergleichen um möglicherweise sehr verschiedene, jedoch durchaus „vergleichbar schwierige" Mathematik.

Faszinierend ist insbesondere die Vielfalt mathematischer Teilgebiete und Methoden, die für eine adäquate Behandlung wirtschaftstheoretischer Probleme relevant sein können.

Ich möchte im folgenden am Beispiel einer sehr zentralen Fragestellung der Wirtschaftstheorie die Problematik einer geeigneten Präzisierung der Konzepte, einer Modellierung des ökonomischen Szenarios und einer Lösung des Problems im Rahmen des formalen Modells darstellen. Das Problem ist das der *Struktur der Marktnachfrage einer Volkswirtschaft.*

Um es dem Leser zu ermöglichen, die Relevanz der hier betrachteten Problematik für die Wirtschaftswissenschaften und den Stellenwert vergleichbar abstrakter Probleme der mathematischen Wirtschaftstheorie im wirtschaftswissenschaftlichen Alltag realistisch einzuschätzen, sind einige Vorbemerkungen angebracht.

Die Mathematikausbildung für Studenten der Wirtschaftswissenschaften beschränkt sich an fast allen Universitäten auf Grundkenntnisse in linearer Algebra und Analysis. Zum Standardlehrstoff gehören ferner Optimierungsmethoden, Grundlagen der Statistik sowie Differenzen- und Differentialgleichungen. Bei der Vermittlung dieser Inhalte wird Mathematik als für die Anwendung auf konkrete Probleme nützlicher Werkzeugkasten gesehen. Jedoch schon hier macht man häufig die Erfahrung, daß Studenten den Anforderungen nicht gerecht werden, weil die Anwendung vieler Techniken eben doch auch wirkliches konzeptionelles Verständnis erfordert. Allerdings bleibt die Auseinandersetzung mit sehr abstrakten Problemen der mathematischen Wirtschaftstheorie der überwiegenden Mehrzahl der Studenten erspart, und das völlig zu Recht.

Insofern ist die vorliegende Arbeit representativ nur für die Aktivitäten einer relativ kleinen Gruppe von Forschern (in Deutschland noch kleiner als etwa in den USA). Grundlagenforschung ist kein Massenphänomen.

Einige Aspekte der vorliegenden Abhandlung sind aber von genereller Bedeutung.

Erstens wird klar werden, daß Mathematik nicht nur als Werkzeug für Anwendungen auf konkrete Probleme der Praxis und deren Lösungen dient, sondern auch als Sprache verstanden werden muß, ohne deren Gebrauch gewisse ökonomische Phänomene nicht nur nicht verstanden, sondern gar nicht erst präzise formuliert werden können. Dieser Aspekt der Rolle der Mathematik in Wirtschaftswissenschaften ist häufig schwer zu vermitteln.

Zweitens sind es häufig vermeintlich „esoterische" Methoden, mit denen aber wirklich grundlegende und bedeutsame Phänomene analysiert werden. Die Marktnachfrage, um die es in der vorliegenden Abhandlung geht, repräsentiert in einem bestimmten Kontext das aggregierte Entscheidungsverhalten einer Gruppe oder Gesellschaft. Daß die Struktur solcher Entscheidungen typisch verschieden ist von der individueller, rationaler Entscheidungen ist sehr wesentlich, vielen aber keineswegs klar. Die häufig zu hörende Klage mangelnder Konsistenz im Entscheidungsverhalten von Parlamenten oder Staaten oder der Gebrauch des Terminus „repräsentativer Konsument" im Kontext aggregierter makroökonomischer Modelle offenbart grobe Lücken im allgemeinen Verständnis von Gruppenverhalten.

Drittens ist im vorliegenden Fall das Ergebnis der Analyse sogar durchaus für die Anwendung relevant. Empirische Wirtschaftsforscher und Ökonometriker gehen selbstverständlich davon aus, daß Nachfrageverhalten durch Funktionen und sogar solche bestimmter Typen beschrieben werden kann. Sie haben für diese Sichtweise jedoch keinerlei theoretische, aus der mikroökonomischen Analyse resultierende Rechtfertigung. Die Eindeutigkeit der aggregierten Nachfrage (Satz 1) stellt einen wichtigen Schritt in Richtung auf eine solche Rechtfertigung hin dar.

Der Leser ist also gut beraten, die folgenden Ausführungen als im extremen, sehr mathematisierten Randbereich der Wirtschaftswissenschaften angesiedelt, für das Verständnis gewisser ihrer grundlegenden Konzepte und Phänomene aber durchaus bedeutsam zu betrachten, und sie als Beispiel dafür zu sehen, wie ein theoretisches ökonomisches Problem mathematisch modelliert werden kann.

2. Verbale Beschreibung des Problems

Ein zentraler Begriff der Wirtschaftstheorie ist der eines *allgemeinen ökonomischen Gleichgewichts*. Darunter versteht man grob gesagt ein System von Preisen für alle Güter derart, daß die Gesamtnachfrage nach jedem Gut genau gleich dem Gesamtangebot ist. Implizit steckt in dieser Formulierung die Voraussetzung, daß bei einem anderen Preissystem der Ausgleich von Angebot und Nachfrage nicht gewährleistet wäre, daß also Gesamtangebot und Gesamtnachfrage vom Preissystem abhängen. Der Mathematiker denkt hier sofort an funktionale Abhängigkeit. Definitionsbereich (Güterpreise) und Wertebereich (Quantitäten von Gütern) für Angebots- und Nachfragefunktion müßten in einem Modell natürlich spezifiziert werden,

Wie wir sehen werden, ist schon die Vorstellung von einer geeeigneten Modellierung durch eine *Funktion* etwas voreilig. Natürlich liegt es nahe, für die Anwendung bewährte Standardkonzepte zu verwenden. Die Schwierigkeit geeigneter Verwendung von Mathematik in Anwendungsbereichen liegt jedoch nicht nur in der Komplexität der Mathematik selbst, sondern in der problemadäquaten Auswahl der „richtigen" Mathematik und einer geeigneten Formulierung der zugrunde liegenden ökonomischen Konzepte.

Was das skizzierte Gleichgewichtskonzept betrifft, ergeben sich unter dem Gesichtspunkt seines Erklärungswertes für ökonomische Systeme mehrere wichtige Fragen:

1. Existenz:	Unter welchen Bedingungen existiert in einem geeigneten Modell der Volkswirtschaft ein solches Gleichgewicht?
2. Realisierbarkeit:	Wie läßt sich, Existenz unterstellt, ein Gleichgewicht etablieren? Insbesondere: a) *Stabilität:* Ist ein Gleichgewicht stabil? b) *Eindeutigkeit:* Gibt es mehrere Gleichgewichte?
3. Soziale Akzeptanz:	Wie erwünscht ist ein solches Gleichgewicht unter Fairness- oder Gerechtigkeitsaspekten?

Natürlich ist die Existenz für ein vernünftiges Konzept unverzichtbar. Um so wichtiger ist es, die Bedingungen für Existenz zu kennen. Es gibt hier sehr allgemeine Existenzsätze (vgl. Shafer und Sonnenschein 1982), so daß man für ziemlich realistische Modelle von Existenz ausgehen kann. Ich werde auf diesen Punkt nicht weiter eingehen.

Die für die soziale Akzeptanz wichtigen Eigenschaften von Gleichgewichten bilden ein wichtiges Objekt wirtschaftstheoretischer Forschung. Insbesondere spielt hier die von Wirtschaftspolitikern häufig ziemlich unreflektiert behauptete Effizienz von Gleichgewichten eine Rolle. Die hier nötigen Vorraussetzungen an das Modell sind bereits wesentlich restriktiver als die für die Existenz von Gleichgewichten benötigten. Auch auf diesen Punkt will ich jedoch nicht weiter eingehen.

Das Problem, das ich etwas näher betrachten möchte, ergibt sich aus der Frage, unter welchen Bedingungen an die Daten des ökonomischen Systems man *Eindeutigkeit* und *Stabilität* des Gleichgewichts herleiten kann.

In Ermangelung einer halbwegs überzeugenden Theorie der Dynamik ökonomischer Systeme begnügt man sich mit der Untersuchung statischer Modelle. Man untersucht dann die Auswirkung von Änderungen der Parameter des Systems auf die zugehörigen Gleichgewichte. Statt eines Films betrachtet man sozusagen eine Dia-Serie. Man nennt das ganze *komparative Statik*.

Dahinter steckt die Vorstellung, daß ein im Detail nicht verstandener dynamischer Prozeß durch die Momentaufnahme der komparativen Statik einigermaßen adäquat repräsentiert wird. Ein wenn auch nur hypothetischer Gleichgewichtspfad setzt aber Eindeutigkeit und Stabilität (zumindest lokal) voraus. Es wird unterstellt, daß ein System sich auf ein Gleichgewicht hin bewegt (Stabilität) und somit insbesondere dieses Gleichgewicht identifizierbar ist (lokale Eindeutigkeit).

Damit Eindeutigkeit und Stabilität des Gleichgewichts in einem ökonomischen System vorliegen, müssen Marktangebot und Marktnachfrage als Funktionen von Preissystemen mit ganz bestimmten Eigenschaften formalisiert werden können. Es erhebt sich dann die Frage, welche Bedingungen an die exogenen Daten, die das ökonomische System beschreiben, ausreichen, um diese strukturellen Eigenarten von *Angebot* und *Nachfrage* zu gewährleisten.

Um der Beantwortung dieser Frage näher zu kommen, müssen wir ein geeignetes ökonomisches Szenario mathematisch modellieren. Dabei erweist es sich als nützlich und gerechtfertigt, sich auf die Nachfrage zu konzentrieren. Insbesondere vernachlässigt man den Produktionssektor.

Wir betrachten daher das Problem der Struktur der Marktnachfrage in einer stilisierten Volkswirtschaft ohne Produktion.

Die Konsumenten sind in Besitz von Gütern und Ressourcen und versuchen, ihre Mittel optimal zu ihrer Bedürfnisbefriedigung einzusetzen. Sie können zu gegebenen Preisen kaufen bzw. verkaufen.

Man kann auch zunächst auf die Preise verzichten und ist dann im Rahmen einer *Tauschwirtschaft*. Ein Ergebnis der Wirtschaftstheorie, der Kern-Äquivalenzsatz von Aumann (1964) besagt, daß in größeren Ökonomien, also solchen mit sehr vielen Konsumenten, ein natürliches Ergebnis einer Tauschwirtschaft (der Kern) durch ein Gleichgewichtspreissystem realisiert werden kann. Das bedeutet, daß sich bei reinem Tausch natürlich für alle Konsumenten gleiche Tauschraten zwischen den verschiedenen Gütern ergeben, die Gleichgewichtspreisverhältnisse.

Die Nachfrage eines Individuums bei gegebenem Preissystem muß nun durchaus nicht eindeutig sein. Es mag mehrere alternative Kombinationen von Gütermengen (Warenkörbe, Güterbündel) geben, die für dieses Individuum optimal sind. Seine Nachfrage ist dann eine Menge von Güterbündeln, nicht ein einziges Güterbündel. Statt einer Element–Element-Zuordnung (Abbildung, Funktion) haben wir eine Element–Teilmenge-Zuordnung (Korrespondenz) zwischen zwei Mengen. Eine *Korrespondenz* β von einer nicht-leeren Menge A in eine nicht-leere Menge B ist also eine Teilmenge von $A \times B$ derart, daß für jedes $a \in A$ gilt:

$$\beta(a) = \{b \in B | (a,b) \in \beta\} \neq \emptyset \; .$$

Man kann β natürlich als Abbildung von A in die Potenzmenge von B ohne die leere Menge, $\mathbb{P}B \backslash \{\emptyset\}$, betrachten. In der mathematischen Wirtschaftstheorie wird aus verschiedenen Gründen häufig die Schreibweise

$$\beta : A \Rightarrow B : a \mapsto \beta(a)$$

anstelle von

$$\beta : A \to \mathbb{P}B \backslash \{0\} : a \mapsto \beta(a)$$

verwendet.

Kann man dennoch in einer großen Ökonomie davon ausgehen, daß die Gesamtnachfrage trotz individueller Nachfragekorrespondenzen durch eine Funktion, die zudem noch schön strukturiert ist, beschrieben werden kann, falls das ökonomische System bestimmte Bedingungen erfüllt?

3. Präzisierung des ökonomischen Szenarios in einem mathematischen Modell

Wir gehen von endlich vielen beliebig teilbaren Gütern aus. Die Güterquantitäten sind also reelle Zahlen. Bei $l \geq 2$ Gütern formalisiert man daher durch $\mathbb{R}^l$ den *Güterraum*. Die *Konsummenge* für jeden Konsumenten ist $\mathbb{R}^l_+$, der nicht-negative Orthant des $\mathbb{R}^l$. Wir gehen von einer nicht-leeren Menge A von Konsumenten aus. Jeder Konsument $a \in A$ wird beschrieben durch seine *Erstausstattung* an Gütern, $e_a \in \mathbb{R}^l_+$, und seine *Präferenzrelation* $\succsim_a$ auf der Konsummenge $\mathbb{R}^l_+$.

Die Präferenzrelation ist ist eine vollständige (somit reflexive), transitive, binäre Relation auf $\mathbb{R}^l_+$, welche die Präferenz des Konsumenten a beschreibt.

Für $x, y \in \mathbb{R}^l_+$ bedeutet $x \succsim_a y$, daß Konsument a das Güterbündel x für mindestens so erwünscht hält wie y. Unter bestimmten Bedingungen läßt sich eine Präferenzrelation $\succsim_a$ auf $\mathbb{R}^l_+$ durch eine Funktion $u_a : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ „repräsentieren", d.h. $x \succsim_a y \Leftrightarrow u_a(x) \geq u_a(y)$. Eine solche Funktion heißt *Nutzenfunktion*. So ist etwa jede stetige Präferenzrelation auf $\mathbb{R}^l_+$ durch eine stetige Nutzenfunktion repräsentierbar.

Die Stetigkeit einer Präferenzrelation $\succsim$ wird definiert als die Abgeschlossenheit der Mengen

$$\{x \in \mathbb{R}^l_+ | x \succsim y\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R}^l_+ | y \succsim x\} \quad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^l_+ .$$

Eine Ökonomie ist eine Liste der Charakteristika aller ihrer Konsumenten, formal eine Abbildung

$$\mathcal{E} : A \to \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ : a \mapsto (\succsim_a, e_a) .$$

Hierbei ist $\mathcal{P}$ die Menge aller stetigen Präferenzrelationen auf $\mathbb{R}^l_+$.

An A und $\mathcal{P}$ werden zunächst keine Bedingungen gestellt. Bei gegebenem Preissystem definiert die Erstausstattung e_a des Konsumenten a die Restriktion für sein Optimierungsproblem.

Ein *Preissystem* ist ein (stetiges) lineares Funktional $\tilde{p}$ auf dem Güterraum $\mathbb{R}^l$, also $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{l^*}$, ein Bewertungsfunktional. Diese Definition gilt auch für allgemeinere ökonomische Modelle, in denen der Güterraum ein Funktionenraum ist. Im Fall des endlich-dimensionalen Güterraums $\mathbb{R}^l$ läßt sich $\tilde{p} \in \mathbb{R}^{l^*}$ wegen der Isomorphie der dualen Räume $\mathbb{R}^l$ und $\mathbb{R}^{l^*}$ mit einem Vektor $p \in \mathbb{R}^l$ identifizieren, derart daß für jedes Güterbündel $x \in \mathbb{R}^l_+$ gilt $\tilde{p}(x) = \langle p, x \rangle$. Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^l$. Man bezeichnet dann den Vektor p ebenfalls als *Preisvektor* oder *Preissystem*. Die Verwendung des Skalarprodukts aus Preissystem und Güterbündel läßt sich in der Tat erst durch die Identifizierung des $\mathbb{R}^l$ mit seinem Dualraum rechtfertigen. Bei der mathematischen Modellierung gibt es zunächst keinen Grund, zwei völlig verschiedene Objekte in ein und demselben Raum unterzubringen. Es ist eines der wesentlichen Kennzeichen sorgfältiger wirtschaftstheoretischer Modellierung, nur solche mathematischen Strukturen zu verwenden, die das zugrunde liegende ökonomische Phänomen geeignet repräsentieren. Preise sind in der Tat Bewertungsfunktionale, die aus ökonomischen Gründen heraus als stetig und linear vorausgesetzt werden. Im einfachsten Fall eines endlich-dimensionalen Güterraums folgt natürlich die Stetigkeit aus der Linearität. Ebenso gilt dort die Darstellbarkeit durch das Skalarprodukt.

Die Bewertung der Erstausstattung e_a mit dem Preissystem p ergibt $\langle p, e_a \rangle = w_a$, das *Einkommen* oder *Vermögen* des Konsumenten a, das in Verrechnungseinheiten (z.B. ECU) gemessen wird. Das *Optimierungsproblem* des Konsumenten a ist dann das folgende: Suche ein $\succsim_a$-maximales Element in der *Budget-Menge* $B(p, w_a) := \{x \in \mathbb{R}^l_+ | \langle p, x \rangle \leq w_a\}$.

Die Menge dieser $\succsim_a$-maximalen Elemente heißt *Nachfragemenge des Konsumenten a beim Preissystem p*. Wir bezeichnen sie mit $\varphi(a, p) := \varphi(\succsim_a, w_a, p)$. Offenbar gilt für jedes positive λ

$$\varphi(\succsim_a, w_a, p) = \varphi(\succsim_a, \lambda w_a, \lambda p) ,$$

d.h. φ ist positiv homogen vom Gerade 0 in Einkommen und Preisen. Wie können uns daher auf eine normierte Menge von Preisen beschränken, falls $p \neq 0$ ist, etwa auf dem $(l-1)$-dimensionalen Preissimplex

$$\left\{p \in \mathbb{R}^l_+ \mid \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\right\} \quad \text{oder die Sphäre} \quad \{p \in \mathbb{R}^l_+ \mid \|p\|_2 = 1\} .$$

Eine typische Wahl der Normierung der Preise durch $p_l = 1$ führt zum Preisraum $S = \{p \in \mathbb{R}^l | p \gg 0,\ p_l = 1\}$. Das l-te Gut heißt dann das numeraire–Gut und spielt die Rolle der Verrechnungseinheit. Dabei bedeutet $p \gg 0$, daß alle Koordinaten von p positiv sind.

Wird jedem Konsumenten a und jedem Preissystem $p \in S$ die Nachfragemenge $\varphi(a,p)$ zugeordnet, so erhalten wir eine Korrespondenz

$$\varphi : A \times S \Longrightarrow \mathbb{R}^l_+ : (a,p) \longmapsto \varphi(a,p) .$$

Für festes $a \in A$ heißt

$$\varphi(a,\cdot) : S \Longrightarrow \mathbb{R}^l_+ \longmapsto \varphi(a,p)$$

individuelle Nachfragekorrespondenz des Konsumenten a.

Bei etwas laxem Gebrauch desselben Symbols φ betrachtet man in diesem Kontext auch die Korrespondenzen

$$\varphi : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ \times \mathbb{R}^l_+ \Longrightarrow \mathbb{R}^l_+ : (\succsim, e, p) \longmapsto \varphi(\succsim, \langle p, e\rangle, p)$$

bzw.

$$\varphi : \mathcal{P} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l_+ \Longrightarrow : (\succsim, w, p) \longmapsto \varphi(\succsim, w, p) .$$

Um Stetigkeitseigenschaften von φ betrachten zu können, oder um eine Borel-Struktur, also eine aus der Topologie auf $\mathcal{P}$ abgeleitete meßbare Struktur auf $\mathcal{P}$ zu erhalten, stattet man $\mathcal{P}$ mit einer *Topologie*, d.h. einem System *offener Mengen* aus. Das läßt sich bei inhaltlicher Variation von $\mathcal{P}$ auf sehr verschiedene Arten bewältigen. Die einfachste Art ist die, stetige monotone Nutzenfunktionen mit der Topologie der *gleichmäßigen Konvergenz auf kompakte Mengen* zu betrachten. Die stetigen monotonen Nutzenfunktionen sind gerade diejenigen Funktionen, die stetige monotone Präferenzrelationen repräsentieren.

Eine Präferenzrelation $\succsim$ auf $\mathbb{R}^l_+$ heißt *monoton*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^l_+$ gilt:

$$x \succsim y \Longrightarrow y - x \notin \mathbb{R}^l_+ .$$

Wie bereits früher erklärt wurde, ist $\succsim$ stetig repräsentierbar, falls sie stetig ist. Für eine $\succsim$ repräsentierende Nutzenfunktion gilt dann:

$$y > x :\Longleftrightarrow [y \in x + \mathbb{R}^l_+, y \neq x] \Rightarrow u(y) > u(x) \quad \text{(Monotonie)} .$$

Zwei Nutzenfunktionen sind *äquivalent*, wenn sie dieselbe Präferenzrelation darstellen. Somit wird $\succsim$ identifiziert mit einer Äquivalenzklasse im Raum der Nutzenfunktionen. Die *Quotiententopologie* auf $\mathcal{P}$ macht diese Menge dann zum *Polnischen* (d.h. vollständig metrisierbaren separablen) *Raum*. Diese Topologie fällt mit Hausdorffs *Topologie der abgeschlossenen Konvergenz* zusammen. Als

Polnischer Raum erfüllt $\mathcal{P}$ alle Voraussetzungen, um auf $\mathcal{P}$ vernünftige Wahrscheinlichkeitstheorie betreiben zu können.

Die Struktur eines Polnischen Raumes wird in der mathematischen Wirtschaftstheorie häufig benötigt, um die Existenz regulärer bedingter Verteilungen oder die Straffheit (d.h. Konzentration „fast" der gesamten Masse auf einer kompakten Menge) von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu gewährleisten.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit benötigt man die Struktur für die Existenz integrierbarer Selektionen aus Korrespondenzen.

Als Produkt zweier Polnischer Räume $\mathcal{P}$ und $\mathbb{R}^l_+$ (bzw. $\mathbb{R}_+$) ist $\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+$ (bzw. $\mathcal{P} \times \mathbb{R}_+$) selbst ein Polnischer Raum. Sobald wir wissen, wie das *Integral über Korrespondenzen* aussieht, können wir die *aggregierte* oder *Marktnachfrage* definieren.

Dazu sei τ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem meßbaren Raum $(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+, \mathcal{B}(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+))$. Hier bezeichnet $\mathcal{B}(T)$ die von den offenen Mengen eines topologischen Raumes T erzeugte σ-Algebra. Ihre Elemente sind die *Borelschen Teilmengen* von T.

Seien nun $\Psi : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ \Rightarrow \mathbb{R}^l_+$ eine Korrespondenz und $g : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}^l_+$ eine Abbildung mit den Koordinatenabbildungen $g_i : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$, $i = 1, \ldots, l$. Gilt für alle $i = 1, \ldots, l$, daß $g_i \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+, \mathcal{B}(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+), \tau)$ und gilt $g(\succsim, e) \in \psi(\succsim, e)$ für τ-fast alle $(\succsim, e) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+$, dann heißt g *integrierbare Selektion* von ψ.

Die Menge $\{\int g(\succsim, e)\mathrm{d}\tau | g$ ist integrierbare Selektion von $\psi\}$ heißt *Integral von* ψ bezüglich τ und wird mit

$$\int \psi \mathrm{d}\tau = \int \psi(\succsim, e)\mathrm{d}\tau \quad \text{bezeichnet} .$$

Natürlich kann $\int \psi \mathrm{d}\tau$ leer sein, da ψ keine integrierbare Selektion zu besitzen braucht. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} \int \psi \mathrm{d}\tau \neq 0, \ \text{falls } & 1.)\ \text{graph}\ \psi \in \mathcal{B}(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+) \quad \text{und} \\ & 2.)\ \exists g = (g_1, \ldots, g_l) : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}^l_+ \quad \text{mit} \quad -g \leq \psi \leq g \\ & \text{und für} \quad i = 1, \ldots, l : g_i \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+, \mathcal{B}(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+), \tau) . \end{aligned}$$

Nachfragekorrespondenzen $\varphi(\cdot, \cdot, p)$ erfüllen üblicherweise diese Bedingung.

Die Menge $\int \varphi(\succsim, e, p)\mathrm{d}\tau$ ist die *aggregierte* oder *Marktnachfrage* beim Preissystem p für die Ökonomie $\mathcal{E}$.

Wir können nun den Begriff eines allgemeinen ökonomischen Gleichgewichts definieren, das auf Walras (1874) zurückgeht.

Zu diesem Zweck unterstellen wir jetzt, daß die nicht-leere Menge A von Konsumenten mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß ν ausgestattet ist. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathcal{A}, \nu)$ enthält keinerlei ökonomische Informationen über die Konsumenten $a \in A$. Man kann A besser als die Menge der Namen der Konsumenten interpretieren. Im Kontext vollkommener Konkurrenz soll kein einzelnes Individuum alleine das Marktgeschehen beeinflussen können. Dies ist eine sinnvolle Annahme für eine sehr große Anzahl von Konsumenten. „Sehr groß" wird dabei durch ein *atomloses* Maß ν formalisiert, bei dem also jeder Konsument das Maß 0 besitzt. Im Kontrast zu A bezeichnet $\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+$ die Menge der ökonomischen Charakteristika der Konsumenten. Eine Ökonomie wird nun als meßbare Abbildung $\mathcal{E} : (A, \mathcal{A}, \nu) \to (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+, \mathcal{B}(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+))$ verstanden, deren Bildmaß τ ist, also $\tau = \nu \circ \mathcal{E}^{-1}$, und für die gilt: $\int_A \tilde{e}(a) \mathrm{d}\nu \ll \infty$. Hier bezeichnet

$$\tilde{e} := \mathrm{proj}_2 \circ \mathcal{E} : A \to \mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+ : a \mapsto e_a$$

die Abbildung, die jedem Konsumenten seine Erstausstattung zuordnet. Nur wenn die Gesamtausstattung $\int \tilde{e}(a) \mathrm{d}\nu$ der Ökonomie endlich ist, hat man das Problem einer geeigneten Allokation knapper Ressourcen modelliert.

Es ist an dieser Stelle wichtig, sich klar zu machen, daß die technische Bedingung „ν-fast alle a" im Modell die Vorstellung „alle Konsumenten a" in dem zu modellierenden Szenario repräsentiert. Das Mittel $\int_A \tilde{e}(a) \mathrm{d}\tau$ repräsentiert die mittlere Erstausstattung der gesamten Ökonomie an Gütern. Diese ist offenbar von Änderungen von $\tilde{e}$ auf ν-Nullmengen unabhängig. Für eine ausführliche Diskussion dieser Problematik sei auf Hildenbrand (1974), Seiten 126, 127 verwiesen.

Definition : *Ein* Walras-Gleichgewicht *für die Ökonomie* $\mathcal{E}$ *ist ein Paar* (f, p) *derart, daß gilt*
$p \in S, f : A \to \mathbb{R}^l_+, \int_A f \mathrm{d}\nu = \int_A \tilde{e} \mathrm{d}\nu,$
$f(a) \in \varphi(a, p)$ *ν-fast überall in* A.
f *heißt* Walras-Allokation, p Gleichgewichtspreissystem.

Natürlich gilt:

$$\int_A f(a) \mathrm{d}\nu(a) = \int_A \tilde{e}(a) \mathrm{d}\nu = \int_{\mathcal{P} \times \mathbb{R}^l_+} \mathrm{proj}_2(\succsim, e) \mathrm{d}\tau(\succsim, e) .$$

Der Begriff des Walras-Gleichgewichts spiegelt die Idee wieder, daß bei zentraler Vorgabe eines geeigneten Preissystems jeder Konsument a durch Lösen seines Optimierungsproblems seine Nachfragemenge $\varphi(a, p)$ ermittelt, und daß die resultierende Marktnachfrage mit dem Gesamtangebot gedeckt werden kann. Sind alle Nachfragemengen einelementig, bedeutet das $\int_A \varphi(a, p) \mathrm{d}\tau = \int_A \tilde{e} \mathrm{d}\tau$, andernfalls $\int_A \tilde{e} \mathrm{d}\tau \in \int_A \varphi(a, p) \mathrm{d}\tau$. Im ersten Falle spricht man von starker, im zweiten Falle von schwacher Dezentralisierung der ökonomischen Entscheidungen durch das Gleichgewichtspreissystem.

Im Falle eines nicht einelementigen $\varphi(a, p)$ legt die Theorie nicht fest, welches Element in $\varphi(a, p)$ der Konsument auswählt. Es mag sein, daß alle Konsumenten $f(a) \in \varphi(a, p)$ so wählen, daß f eine Walrasallokation ist und somit die Märkte geräumt werden. Das ist aber nicht zwangsläufig so. Die Vorgabe von p erzwingt also nicht die Realisierung eines Gleichgewichts als Ergebnis individueller Optimierung. Ein Gleichgewicht ist lediglich verträglich mit dem Optimalitätsanspruch der Konsumenten (schwache Dezentralisierung). Ist jedoch für alle Konsumenten die Nachfragemenge einelementig, dann ist die Korrespondenz eine Funktion, nämlich eine Walrasallokation. Die Vorgabe des Preissystems erzwingt über individuelle Optimierung in diesem Fall das Gleichgewicht, also die Markträumung (starke Dezentralisierung).

Die Einelementigkeit der Nachfragemenge $\varphi(a, p)$ bei jedem $p \in S$ ist gewährleistet, wenn $\succsim_a$ *streng konvex* ist, d.h. wenn die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^l_+ | x \succsim_a y\}$

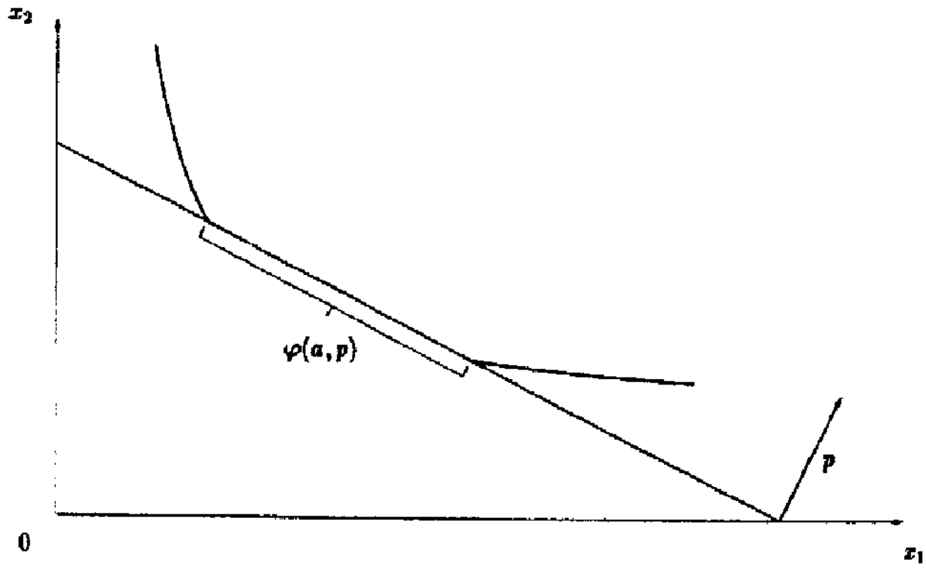

Abb. 1.

für alle $y \in \mathbb{R}^l_+$ streng konvex sind. Konvexität alleine reicht nicht aus, wie Abb. 1 zeigt.

Nur im Falle streng konvexer Präferenzen aller Konsumenten erhält man also starke Dezentralisierung in dem Sinne, daß die Lösungen der individuellen Nutzenmaximierungsprobleme bei gegebenem Gleichgewichtspreissystem eine Walrasallokation eindeutig festlegen. Schon die (nicht unbedingt strenge) Konvexität bedeutet aber eine sehr schwer zu rechtfertigende Annahme an die individuellen Präferenzen.

Modelliert man große Ökonomien durch einen *atomlosen* Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathcal{A}, \tau)$ so garantiert eine Anwendung eines Satzes von Lyapunov (vgl. Hildenbrand 1974), daß selbst bei nicht-konvexen Präferenzen die aggregierte Nachfragemenge $F_\tau(p) := \int_A \varphi(a,p)d\tau$ bei jedem Preissystem konvex ist. Diese Tatsache garantiert auch für diesen Fall die für die Anwendung eines Fixpunktsatzes und damit die Existenz von Gleichgewichten fundamentale Konvexität.

Außer der Konvexwertigkeit der aggregierten Nachfragekorrespondenz F_τ läßt sich noch eine interessante Stetigkeitseigenschaft nachweisen, die Oberhalb-Semistetigkeit. Ohne auf sie im Detail einzugehen, läßt sie sich etwa wie folgt beschreiben: Eine Korrespondenz Ψ ist oberhalb-semistetig in einem Punkt x, wenn ein Verlassen dieses Punktes höchstens zur Implosion der Bildmenge, nicht aber zur Explosion der Bildmenge führen kann (vgl. Abb. 2).

Für Korrespondenzen, die sogar Funktionen sind, reduziert sich diese Stetigkeit auf die übliche Stetigkeit. Bei möglicherweise nicht-konvexen Präferenzen hat man also das Problem, Bedingungen an die Verteilung der Konsumcharakteristika $\succsim, e$ zu stellen, welche gewährleisten, daß die Marktnachfragekorrespondenz F_τ bei jedem p einwertig ist und somit eine stetige Funktion der Preise ist.

Selbst wenn man unterstellt, daß die Marktnachfrage durch solch eine stetige Funktion beschrieben werden kann, daß also das genannte Problem vernünftig gelöst werden kann, ist man noch sehr weit weg von den Eigenschaften, welche zur Eindeutigkeit und Stabilität des Gleichgewichts führen. Hierzu benötigt man

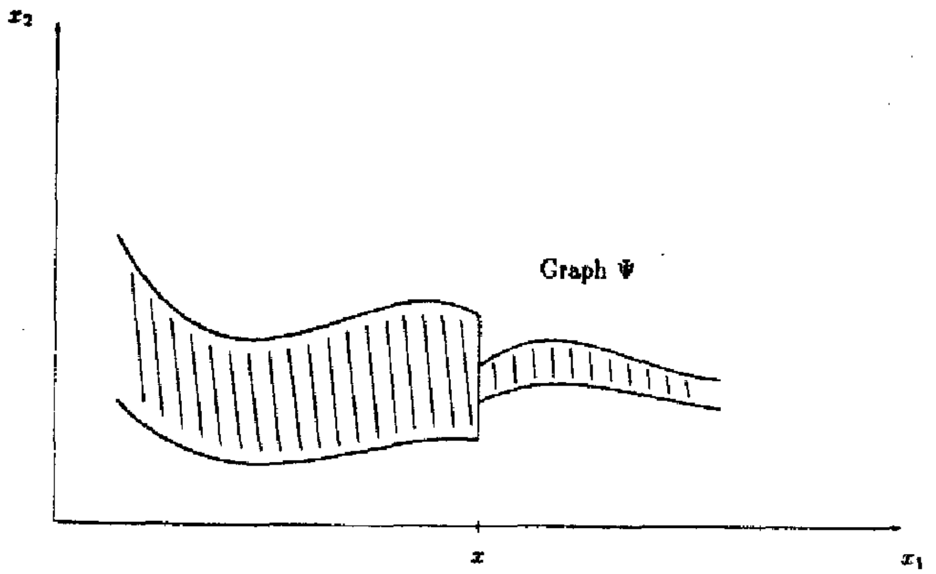

Abb. 2.

nämlich die Differenzierbarkeit von F_r und die negative Semi-Definitheit der Jakobi-Matrix von F_r bei jedem $p \in S$.

Dies stellt ein bis heute offenes Problem der Wirtschaftstheorie dar. Die Differenzierbarkeit selbst kann man unter gewissen Bedingungen herleiten (Dierker et al. 1981). Ebenso kann man, wenn man mit individuellen differenzierbaren Nachfragefunktionen startet, die negative Semi-Definitheit nachweisen (Hildenbrand 1983).

Ich werde mich im folgenden auf das Problem beschränken, wie man trotz individueller nicht unbedingt einelementiger Nachfragemengen, eine stetige Nachfragefunktion erhält.

4. Die Marktnachfrage als stetige Funktion der Preise

Die Überzeugung, daß in der Tat trotz nicht eindeutiger individueller Nachfrage die Marktnachfrage eindeutig ist, hat eine lange Tradition. So findet man bei Cournot (1838) folgende Ausführung:

"We will assume that the function $F(p)$ which expresses the law of demand or of the market is a continuous function... It might be otherwise if the number of consumers were very limited... But the wider the market extends and the more the combination of needs of fortunes or even caprices, are varied among consumers, the closer the function $F(p)$ will come to varying with p in a continuous manner. However little may be the variation of p, there will be some consumers so placed that the slight rise or fall of the [price of the] article will effect their consumptions..."

Cournot (1838, S. 49, 50)

Dies ist nicht nur vermutlich die erste Aussage über den Glättungseffekt der Aggregation. Es ist bereits eine sehr explizite Aussage darüber enthalten, wie dieser Glättungseffekt zustande kommt. Wie wir noch sehen werden, enthält Cournots Aussage eine verblüffend gute verbale Beschreibung dessen, was man wirklich benötigt. Zu bedenken ist dabei, daß Cournot noch nicht die später entwickelten Konzepte der Präferenzrelation oder der Indifferenzmenge kannte. Dies erklärt die Terme "needs", "fortunes" und "caprices". Natürlich fehlten zu Cournots Zeit die technischen Vorraussetzungen, um aus der zitierten Aussage einen formalen mathematischen Satz zu machen.

Walras (1874) machte im Kontext einer Diskussion dieses Cournot-Zitats die interessante Bemerkung, die Stetigkeit der Marktnachfragefunktion sei "by virtue of the so called law of large numbers". Die einzige damals bekannte Version des Gesetzes der großen Zahlen war Jacob Bernoullis „schwaches Gesetz" aus der ars conjectandi (1713).

Wir werden noch sehen, daß auch Walras nicht so unrecht hatte.

Die Behauptung oder Vermutung Cournot's fand erst vor fast 20 Jahren konkretere Versionen.

So schrieb Hildenbrand (1974):

"There is another, probably deeper reason why one should consider atomless distributions of agent's characteristics: the very fact that economic agents are not all alike... can give rise to properties, for example of the mean demand, which would not hold without a diversification of agent's characteristics. ...it may be possible – by properly restricting the space of preferences and strengthening its topology – to characterize a class of atomless distributions μ such that the demand set is small or even unique for μ-almost all characteristics."

Hildenbrand (1974, S. 111)

Zu dieser Zeit lagen bereits Ergebnisse vor, daß die Menge der Präferenzen mit einer separablen Topologie versehen werden kann. Wenig später folgten Beweise, daß alle relevanten Räume von Präferenzen Polnisch sind. Es gab also zu dieser Zeit eine vernünftige Basis, um den Beweis von Hildenbrands Vermutung in Angriff zu nehmen.

Eine weitergehende Vermutung, nämlich die stetige Differenzierbarkeit der Marktnachfragefunktion geht auf Debreu (1972) zurück, der damals das Konzept *glatter Präferenzen* einführte.

Auch diese weitergehende Vermutung hat ihre Wurzel im Werk Cournot's. Denn wie wir heute wissen (Trockel 1984), besteht die Hauptschwierigkeit beim Versuch, eine stetig differenzierbare Nachfrage herzuleiten, im Nachweis der Lipschitz-Eigenschaft. Für Cournot aber waren Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit noch identisch (vgl. Cournot 1838, S. 50). Das ist nicht verwunderlich wenn man bedenkt, daß erst 1861 Callerier in Genf und Riemann in Göttingen in ihren Vorlesungen die ersten Beispiele stetiger fast überall nicht differenzierbarer Funktionen gaben. Und erst 1872 präsentierte Weierstraß der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin sein Beispiel einer nirgends differenzierbaren, überall stetigen Funktion.

Das Problem der Glättung der Nachfrage durch Aggregation ist also wesentlich älter als die technischen Werkzeuge, die zu seiner präzisen Formulierung nötig sind. Zu Beginn der 70er Jahre stand man also vor zwei auf Cournot zurückgehenden Problemen:

1. Wann ist die Marktnachfrage C^0?
2. Wann ist die Marktnachfrage C^1?

Für das zweite, wesentlich komplexere Problem, dessen Behandlung tiefe Methoden der Differentialtopologie erfordert, sei auf Dierker et al. (1981) und Trockel (1984) verwiesen.

Unsere heutige Fragestellung ist die erstgenannte. Das Hauptproblem dabei, sowohl begrifflich als auch technisch, besteht darin, geeignete Diversität der Konsumcharakteristika zu formalisieren. Das ist die Vorstellung, daß ohne besondere ökonomische Gründe im Raum der Konsumcharakteristika nicht gewisse Umgebungen eine besondere Rolle spielen, ausgedrückt durch eine besonders hohe Masse-Konzentration. Man sucht nach einer (zumindest annähernden) „Gleichverteilung" auf der Menge der Charakteristika. Gleichgroße Mengen im Raum sollen in etwa dasselbe Maß haben. Solche Anforderungen erfüllt beispielsweise das Lebesgue-Maß auf einem $\mathbb{R}^n$. Im Raum $\mathbb{R}_+$ der Vermögen oder $\mathbb{R}_+^l$ der Erstausstattungen ist also die Situation nicht so sehr probematisch. Da man ein Wahrscheinlichkeitsmaß benötigt, schwächt man die Anforderung nach Gleichverteilung ab etwa auf Äquivalenz zum Lebesgue-Maß. Das bedeutet, daß man dieselbe Nullmengenstruktur wie beim Lebesgue-Maß erhält.

Die eigentliche Schwierigkeit bereitet der Raum $\mathcal{P}$ der Präferenzen. $\mathcal{P}$ trägt keine euklidische Vektorraum-Struktur. Nun wären die Invarianzeigenschaften von Haar-Maßen auf lokal-kompakten Gruppen ein hinreichender Ersatz. Aber $\mathcal{P}$ besitzt auch keine Gruppenstruktur. Was wir wissen ist, daß $\mathcal{P}$ ein polnischer Raum ist.

Die Literatur weist verschiedenartige Versuche auf, diesem Dilemma zu entrinnen (vgl. Trockel 1984). So beschränkt man sich im sogenannten parametrischen Ansatz auf eine Teilmenge von $\mathcal{P}$, die durch eine offene Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ parametrisiert werden kann. Die Gleichverteilung auf dem $\mathbb{R}^n$ erzeugt dann ein Bildmaß auf der betrachteten Teilmenge von $\mathcal{P}$. Natürlich liegt es an der speziellen Parametrisierung, ob sich die Dispersion auf das Bild überträgt. Mit Methoden der Differentialtopologie, sogenannten Transversalitätsbedingungen, läßt sich hinreichende Dispersion des Bildmaßes erzwingen. Die aggregierte Nachfragefunktion, die man dann in der Tat erhält, bezieht sich aber nur auf einen ad hoc ausgewählten winzigen Teilraum im Raum aller Präferenzen. Ein solches Ergebnis besagt insbesondere nicht, daß eine natürliche Verteilung auf der Menge aller Präferenzrelationen die Eindeutigkeit der aggregierten Nachfrage als Ausdruck inherenter Dispersion von $\mathcal{P}$ mit sich bringt.

Eine Lösung des Problems ergibt sich durch den sogenannten ergodischen Ansatz (Trockel 1984, Kapitel 6).

Erinnern wir uns an Walras's Hinweis auf das Gesetz der großen Zahlen und ziehen als eine sehr allgemeine Version dieses Gesetztes Birkhoff's berühmten punktweisen Ergodensatz heran. Dieser Satz bildet die formale Rechtfertigung für den klassischen Slogan

"space average equals time average" .

Eine formale Version dieser Aussage besagt für eine ergodische, d.h. den Raum in gewisser Weise durcheinandermischende Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine reellwertige integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, daß gilt

$$\int_\Omega f(\omega) \mathrm{d}P = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k(\omega)\right) \quad P\text{-fast überall} .$$

Hier bedeutet T^k die k-fache iterierte Transformation T, wobei T^0 die Identität repräsentiert.

Es gibt auch kontinuierliche Versionen dieser Aussage.

Was hat der Ergodensatz mit unserem Problem zu tun? Der „Raum" ist der Raum der Präferenzen, die „Zeit" wird bei uns 1.) kontinuierlich und 2.) l-dimensional, d.h. die Rolle der Zeit spielt der Raum der Preise. Damit sich das formal durchführen läßt, muß der Raum der Preise eine lokal-kompakte topologische Gruppe bilden. Wir werden sehen, daß diese Forderung unproblematisch ist.

Die Gruppe der Preise agiert auf dem Raum der Präferenzen und zerlegt diesen in disjunkte, sogenannte ergodische Komponenten. Sei etwa $[\succsim_0]$ die Komponente mit $\succsim_0 \in [\succsim_0]$. Dann gibt es ein zum Lebesgue-Maß äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ξ auf S derart, daß, wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, (\mathcal{P}))$ ist, gilt:

$$\int_{[\succsim_0]} \varphi\left(\succsim, p^0\right) \mathrm{d}\mu = \int_S \varphi(\succsim, p) \mathrm{d}\xi \; .$$

Die linke Seite der Gleichung repräsentiert den "space average", die rechte den "price average".

Das Integral von φ über $\mathcal{P}$ erhält man durch einen zweiten Integrationsschritt über die Menge der Komponenten (Satz von Fubini!).

Wir schauen uns unter diesem Aspekt noch einmal das Zitat von Cournot an:

"However little may be the variation of p, there will be some consumers that the slight rise or fall of the [price of the] article will affect their consumptions".

Man kann diesen Effekt für nicht-konvexe Präferenzen sofort sehen (vgl. Abb. 3). Cournot suggeriert nun, daß sich ähnliches Verhalten in gewissem Sinne gleichmäßig über alle Preise verteilt. Ferner suggeriert die Intuition, daß solche Sprünge in der Nachfrage eines Konsumenten nur bei relativ wenigen Preissystemen auftreten können.

Wir betrachten nun bei festem Vermögen w die Menge S der normalisierten Preise. Unter der koordinatenweisen Multiplikation, die ich mit $*$ bezeichne, wird S eine lokal-kompakte abelsche Gruppe mit $(1, \ldots, 1)$ als neutralem Element. Elemente von S lassen sich ebenso gut als *Preisvariationen* interpretieren.

Für ein q nahe bei $(1, \ldots, 1)$ bedeutet $p_q := q * p$ eine leichte Modifikation von p. Die Gruppe $(S, *)$ agiert auch auf dem Güterraum $\mathbb{R}^l$ auf folgende Weise:

$$(q, x) \mapsto x_q := q * x \; .$$

Schließlich induziert diese Aktion eine weitere Aktion der Gruppe $(S, *)$ auf $\mathcal{P}$:

$$\underset{\sim}{a} : S \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} : (q, \succsim) \mapsto \succsim_q \; .$$

Dabei ist die Präferenzrelation $\succsim_q$ für alle $q \in S$ definiert durch

$$x \succsim y :\Leftrightarrow x_q \succsim_q y_q \; .$$

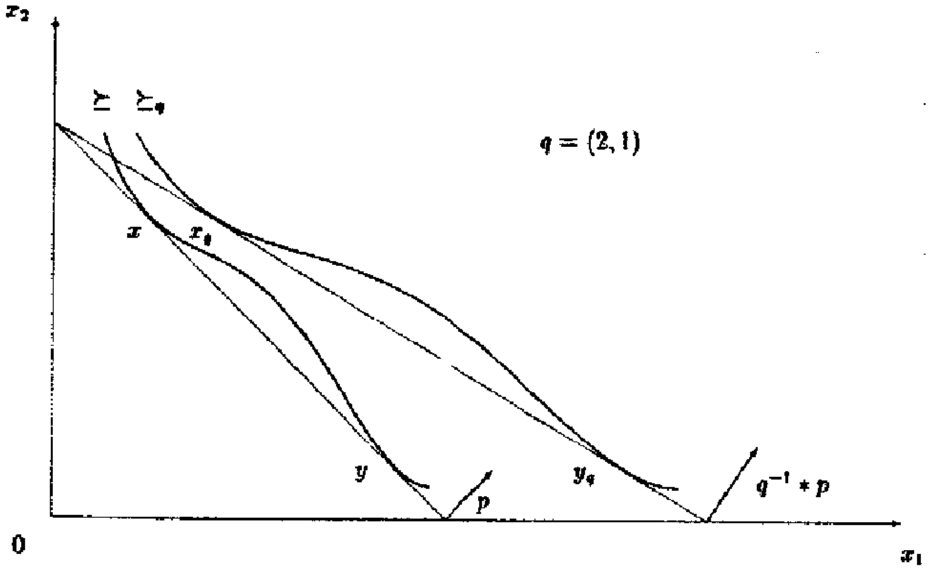

Abb. 3.

Abbildung 3 illustriert die drei Aktionen von $(S,*)$ auf $S, \mathbb{R}^l_+$ und $\mathcal{P}$. Aus Abb. 3 ergibt sich eine Beziehung von fundamentaler Bedeutung:

$$q * \varphi(\succsim, p, w) = \varphi(\succsim_q, q^{-1} * p, w)$$

oder äquivalent dazu

$$q * \varphi(\succsim, q * p, w) = \varphi(\succsim_q, p, w) .$$

Zunächst sieht man, daß diese Preis- und Präferenztransformationen das Vermögen invariant lassen.

$$\begin{aligned}\langle p, \varphi(\succsim, p, w)\rangle &= w = \langle p * q^{-1}, q * \varphi(\succsim, p, w)\rangle \\ &= \langle q^{-1} * p, \varphi(\succsim_q, q^{-1} * p, w)\rangle .\end{aligned}$$

Man kann also unter Verwendung von Fubinis Theorem über die Einkommen getrennt integrieren. Eine für unser Problem besonders wichtige Konsequenz ist aber

$$\#\varphi(\succsim, p_q, w) = \#\varphi(\succsim_q, p, w) .$$

Im Hinblick auf die Eindeutigkeit der Marktnachfrage läuft es also auf dasselbe hinaus, ob wir die individuellen Nachfragen aller Konsumenten mit Vermögen w und Präferenzrelation in der Bahn (Komponente) $[\succsim] = S * \succsim$ beim festen Preissystem p betrachten, oder ob wir die individuelle Nachfrage eines einzigen durch $(\succsim, w)$ beschriebenen Konsumenten bei allen Preisen in S betrachten. Statt $[\succsim]$ zu durchlaufen (space average), kann man bei festem $\succsim$ den Preisraum S durchlaufen. In beiden Fällen ergibt das Integral die Anzahl der Güterbündel in der aggregierten Nachfragemenge bei p für festes w.

Wir wollen jetzt dahin gelangen, ein interessantes Ergebnis der im Rahmen des vorliegenden Modells durchgeführten wirtschaftstheoretischen Analyse durch einen mathematischen Satz präzise zu formulieren.

Zunächst stellen wir fest, daß S mit der durch die Topologie des $\mathbb{R}^l$ erzeugten Relativtopologie lokalkompakt ist. Daher besitzt der meßbare Raum $(S, \mathcal{B}(S))$ ein bis auf Normierung eindeutiges invariantes Maß χ:

$$\forall q \in S \forall M \in \mathcal{B}(S) : \chi(q * M) = \chi(M) .$$

Das „Haar-Maß" χ is äquivalent zum Lebesgue-Maß auf S.

Sei nun μ irgendein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$, ξ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S, \mathcal{B}(S))$. Es gilt $\mathcal{B}(S \times \mathcal{P}) = \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P})$, d.h. die σ-Algebra der Borelmengen auf $S \times \mathcal{P}$ ist die Produkt-σ-Algebra der σ-Algebren $\mathcal{B}(S)$ und $\mathcal{B}(\mathcal{P})$.

Wir können nun auf $\mathcal{P}$ eine für unsere Zwecke ausreichende Verteilung definieren, die hinreichende Dispersion der Präferenzen gewährleistet.

Definition : *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ^* auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$ heißt* S-verschmiert *wenn gilt:*

1.) Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß ξ auf $(S, \mathcal{B}(S))$, das absolut stetig bezüglich χ ist.

2.) Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$ derart, daß $\mu^* = (\xi \otimes \mu) \circ \underset{\sim}{a}^{-1}$.

Die absolute Stetigkeit von ξ bezüglich χ besagt, daß für jede Menge $M \in \mathcal{B}(S)$ gilt: $\chi(M) = 0 \Rightarrow \xi(M) = 0$.

Das Maß μ^* ist das Bildmaß des Produktmaßes $\xi \otimes \mu$ auf $(S \times \mathcal{P}, \mathcal{B}(S \times \mathcal{P}))$ unter der Aktion $\underset{\sim}{a}$. Man bezeichnet es auch als *verallgemeinerte Faltung* des Maßes μ mit ξ. Die S-verschmierten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{P}$ bilden eine dichte Teilmenge des Raumes der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$ mit der schwach-*-Topologie.

Ist die gesamte Masse eines Maßes auf einen Punkt $\underset{\sim}{\succsim} \in \mathcal{P}$ konzentriert, handelt es sich also um das Dirac-Maß $\delta_{\underset{\sim}{\succ}}$ auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$ mit $\delta_{\succ}(\{\underset{\sim}{\succsim}\}) = 1$, so verschmiert das Maß $\delta^*_{\underset{\sim}{\succ}}$ die Masse mehr oder weniger gleichmäßig auf der Bahn $[\underset{\sim}{\succsim}]$.

Liegt der Träger des Maßes ξ, mit dem gefaltet wird, in einer Umgebung der Identität $(1, \ldots, 1) \in S$, so gehört zu einem Driac-Maß $\delta_{\underset{\sim}{\succ}}$ ein Maß $\delta^*_{\underset{\sim}{\succ}}$, dessen Masse auf einer Umgebung von $\underset{\sim}{\succsim}$ in $[\underset{\sim}{\succsim}]$ verschmiert ist. Das Maß $\delta^*_{\underset{\sim}{\succ}}$ reflektiert eine Aufweichung einer „überscharfen" Beobachtung von $\delta_{\underset{\sim}{\succ}}$.

Satz 1: (Trockel (1983b) *Sei μ^* ein S-verschmiertes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{P}, \mathcal{B}(\mathcal{P}))$, γ ein Lebesgue-stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}_+$. Dann ist die Marktnachfragerelation*

$$F_{\mu^*,\gamma} : S \to \mathbb{R}^l_+ : p \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{P}} \varphi(\underset{\sim}{\succ}, p, w) \mathrm{d}\mu^* \mathrm{d}\gamma$$

eine stetige Funktion.

Zum Beweis dieses Satzes benötigt man folgenden Satz von Mas-Colell (vgl. Trockel 1983c).

Satz 2: *Für jedes $\underset{\sim}{\succ} \in \mathcal{P}$ gilt:*
Die Menge aller Budgetsituationen $(p, w) \in S \times \mathbb{R}_+$ mit $\#\varphi(\underset{\sim}{\succ}, p, w) > 1$ hat das Lebesgue-Maß 0.

Dieser Satz besagt, daß jede individuelle Nachfragekorrespondenz eine relativ gutartige Korrespondenz ist, die fast überall auf ihrem Definitionsbereich mit einer *Funktion* übereinstimmt. Mehrwertiges Nachfrageverhalten ist also die

„pathologische" Ausnahme. Es passiert für jede Präferenzrelation $\succsim \in \mathcal{P}$ nur auf einer Nullmenge $N_{\succsim}$ von Preis–Einkommens-Paaren.

Verteilt man also für verschiedene Präferenzen $\succsim$ die Nullmengen $N_{\succsim}$ in etwa gleichmäßig über $S \times \mathbb{R}_+$, so verhalten sich bei jedem (p, w) fast alle Präferenzen gutartig.

Beweis von Satz 1:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{P}} \varphi(\succsim, p, w) \mathrm{d}\mu^* \\ &= \int_{\mathcal{P}} \varphi(\succsim, p, w) \mathrm{d}\left((\xi \otimes \mu) \circ \underset{\sim}{a}^{-1}\right) = \int_{S \times \mathcal{P}} \varphi\left(\underset{\sim}{a}(\succsim', q), p\right) \mathrm{d}(\xi \otimes \mu) \\ &= \int_{\mathcal{P}} \left(\int_S \varphi\left(\underset{\sim}{a}(\succsim', q), p\right) \mathrm{d}\xi(q)\right) \mathrm{d}\mu(\succsim') .\end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, daß für alle $p \in S$ das innere Integral einelementig ist. Anschließende Integration über $\mathcal{P}$ und über $\mathbb{R}_+$ zerstören das Ergebnis nicht. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$\xi\left(\left\{q \in S \middle| \#\varphi\left(\underset{\sim}{a}(\succsim', q), p, w\right) > 1\right\}\right) = 0 .$$

Da aber $\varphi(\underset{\sim}{a}(\succsim', q), p, w) = \varphi(\succsim'_q, p, w) = q * \varphi(\succsim, q * p, w)$ und da die Operation $q*$ die Kardinalität nicht ändert, gilt

$$\#\varphi\left(\underset{\sim}{a}(\succsim', q), p, w\right) = \#\varphi(\succsim', q * p, w) .$$

Es bleibt also zu zeigen, daß für μ-fast alle $\succsim \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\xi(\{q \in S | \#\varphi(\succsim, q * p, w) > 1\}) = 0 .$$

Nun gilt aber $\xi \ll \chi \sim \lambda$ (wobei λ das Lebesgue-Maß auf S ist.) Es reicht daher zu zeigen, daß

$$\chi(\{q \in S | \#\varphi(\succsim, q * p, w) > 1\}) = 0 .$$

Wegen der Invarianz von χ ist das genau dann der Fall, wenn

$$\chi(\{q^* p \in S | \#\varphi(\succsim, q * p, w) > 1\}) = 0 .$$

Wegen $\chi \sim \lambda$ ist dies nach Umbenennung (p statt $q * p$!) äquivalent zu

$$\lambda(\{p \in S | \#\varphi(\succsim, p, w) > 1\}) = 0 .$$

Dies aber garantiert uns Satz 2. q.e.d.

Damit haben wir gezeigt, daß bei hinreichender Dispersion der Präferenzen und Einkommen der Konsumenten einer großen Ökonomie die Marktnachfrage sich als stetige Funktion der Preise beschreiben läßt, wie es bereits Cournot suggeriert hatte. Wir haben das pathologische Nachfrageverhalten für die verschiedenen Konsumenten gleichmäßig über die möglichen Budget-Situationen verstreut, so daß bei jeder einzelnen fast alle Konsumenten eine eindeutige Nachfrage aufweisen. Der Beweis in Analogie zum Ergodensatz rechtfertigt Walras' Begründung durch das Gesetz der großen Zahlen.

5. Schlußbetrachtung

Es mag hilfreich und interessant zugleich sein, eine Rückschau auf die verwendeten mathematischen Methoden vorzunehmen. Die Modellierung des Güterraums und des Preisraums erfordern Kenntnisse der linearen Algebra. Insbesondere werden benötigt endlich-dimensionale Vektorräume, der Begriff des dualen Raumes und der des linearen Funktionals sowie der des Skalarprodukts. Konvexität erwies sich als fundamentaler Begriff. Sie wird für Fixpunkte und Trennungssätze benötigt.

Die Formalisierung von Präferenzen sowie der Begriff der Korrespondenz basieren auf dem Konzept einer Relation. Insbesondere wurden verschiedene Eigenschaften binärer Relationen benutzt. Die Erfordernisse komparativer Statik oder einer Sensitivitätsanalyse erfordern die Konzepte aus der Topologie, insbesondere offener und abgeschlossener Mengen.

Eine wesentliche Rolle spielten ferner für die Aggregation bzw. Mittelbildung die Verwendung des Lebesgue-Integrals von Abbildungen und seine Ausdehnung auf Korrespondenzen. Ein wichtiges technisches Hilfsmittel war der Satz von Fubini über Vertauschbarkeit bzw. Hintereinanderschaltung von Integrationen. Die Invarianzforderung für Maße erforderte die Verwendung lokal-kompakter, also topologischer, Gruppen. Schließlich beruht der verwendete Satz 2 von Mas-Colell auf Kenntnissen über Hausdorff-Maße auf Mannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^n$ bzw. Kenntnissen über topologische Maßtheorie (analytische Mengen, Projektionssatz).

Will man die Analyse ausdehnen, um stetige Differenzierbarkeit oder gar weitere Strukturen der Marktnachfrage herzuleiten, so kommt man nicht darum herum, das Arsenal mathematischer Methoden zu erweitern. Singularitätentheorie, Katastrophentheorie sowie verschiedene andere Teile aus der Differentialtopologie und der algebraischen Topologie werden dann benötigt. Für einen tieferen Einstieg sei auf Mas-Colell (1985) und Trockel (1984) verwiesen.

Literatur

Aumann, R.: Markets with a continuum of traders. Econometrica 32, 39–50 (1964)

Bernoullli, J.: Ars conjectandi. Basel (1713)

Billingsley, P.: Ergodic theory and Information. New York: Wiley, 1965

Cournot, A.: Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Paris: Librairie des Sciences Politiques et Sociales. M. Rivière & Cie. (1838). Translated by Nathaniel T. Bacon; Researches into the mathematical principles of the theory of wealth. New York: Macmillan 1897

Debreu, G.: Theory of value. New York: Wiley, 1959

Debreu, G.: Smooth preferences. Econometrica 40, 603–615 (1972)

Dierker, E., Dierker, H., Trockel, W.: Continuous mean demand functions derived from nonconvex preferences. J. Math. Econ. 7, 27–33 (1980a)

Dierker, E., Dierker, H., Trockel, W.: Smoothing demand by aggregation with respect to wealth. J. Math. Econ. 7, 227–247 (1980b)

Dierker, E., Dierker, H., Trockel, W.: Price-dispersed preferences and C^1 mean demand. J. Math. Econ. 13, 11–42 (1981)

Halmos, P.: Lectures on ergodic theory. The mathematical society of Japan, Tokyo (1956)

Hildenbrand, W.: Core and equilibria of a large economy. Princeton: Princeton University Press 1974

Hildenbrand, W.: On the "Law of Demand". Econometrica 51, 997–1019 (1983)

Hildenbrand, W., Kirman, A.: Equilibrium analysis, 2nd edn. Amsterdam: North-Holland 1988

Mas-Colell, A.: The theorey of general economic equilibrium. Cambridge: Cambridge University Press 1985

Royden, H.L.: Real analysis, London: Macmillan 1968

Shafer, W., Sonnenschein, H.: Market demand and excess demand functions. In: Arrow, K., Intriligator, M. (eds) Handbook of mathematical economics. Amsterdam: North-Holland 1982

Trockel, W.: A measure theoretical problem in mean demand analysis. Methods Oper. Res. **38**, 175-187 (1980)

Trockel, W.: Uniqueness of mean maximizers via an ergodic theorem. Math. Oper. Forsch. Stat., Series Optimization **14**, 411-419 (1983a)

Trockel, W.: Market demand is a continuous function of prices. Econ. Lett. **12**, 141-146 (1983b)

Trockel, W.: On the uniqueness of individual demand at almost every price system. J. Econ. Theory **33**, 397-399 (1983c)

Trockel, W.: On uniform local dispersion on a family of G-orbits. J. Math. Anal. Appl. **118**, 173-179 (1983d)

Trockel, W.: Market demand. Berlin Heidelberg New York: Springer 1984

Trockel, W.: Classification of budget-invariant monotonic preferences. Econ. Lett. **30**, 7-10 (1989)

Walras, L.: Eléments d'économie politique pure. Lausanne: L. Corbaz 1874, 1877. (English translation by W. Jaffé: Elements of pure economies) London: Allen and Unwin 1954