zubringen.

((15)) Die evtl. vorhandene Bedeutung verschiedener Ausführungen Wandschneiders für die Probleme (a)-(e) müßte sich erweisen lassen, falls die wichtigsten Begriffe geklärt werden: menschliche und künstliche Intelligenz; mentale Logik von Mensch und Maschine; die Art der Maschine.

((16)) Der Hinweis sei gestattet, daß der untrainierte Mensch bei logischen Schlüssen nur sehr elementare Operationen einsetzt, die in ihrer Gesamtheit nichts mit einer Logik zu tun haben. Die meisten Inferenzleistungen auf der Basis dieser Operationen sind darüber hinaus nicht allgemeingültig (im Sinne üblicher Logiken). Die dabei zum Tragen kommende, überwiegend nur partikuläre Validierungsfähigkeit ist allerdings lebenswichtig. Formale Systeme können kontextspezifisch als mentale Werkzeuge benutzt und erlernt werden, doch ergreift und handhabt der Mensch diese Werkzeuge immer mit einfacheren mentalen Operationen. Es ist deshalb höchst fragwürdig, ob der Mathematiker, der einen Beweis sucht oder der beweist, völlig maschinenäquivalente Operationen einsetzt (was übrigens Gödels Intuitionsüberzeugung stützt).

((17)) Für KI und Humanintelligenz kommt Cherniavsky zu einem ähnlichen Ergebnis, indem er beweist, daß die Annahme eines deterministischen "truth-reaction"-Mechanismus falsch ist und nicht algorithmiert werden kann. Humanintelligenz und eine daran orientierte KI müssen also entweder nicht-deterministische Mechanismen dieser Art aufweisen, wenn sie gleich sein sollen oder die KI-Turingmaschinen müssen in ihren Mechanismen von den menschlichen abweichen. Da kein formales Intelligenzmodell die Nichtdeterminiertheit teilt, gibt es einen substantiellen Unterschied zwischen KI und Humanintelligenz. Nach diesem Beweis wäre Wandschneiders Bejahung der Problemfrage (a) der verkehrte Standpunkt.

((18)) Schließlich läßt der historische Ort der Gödel-Ergebnisse es (vgl. oben ((3)) und ((4))) notwendig erscheinen, die Übertragung auf einen Realkontext (Mensch) mit Plausibilitäten zu versehen. Gerade ((8)) zeigt, daß an die Interpretation der Theoreme mit zuviel Dramatik herangegangen wird.

((19)) Wandschneiders (W.((12)); ((19)) et passim.) Schwerpunkte in der Argumentation zur Diagonalisierung und vor allem zum außergewöhnlichen Status der Selbstreferentialität verlieren angesichts ((5)) und ((6)) (oben) an Gewicht, so daß auf sie keine weitreichenden Schlußfolgerungen mehr für die Lösung der Probleme (a)-(e) aufgebaut werden können. Es ist dabei vor allem zu bedauern, daß die in der Selbstreferentialitätstheorie durchaus wichtigen semantischen Aspekte keiner modallogischen Durchdringung, wie in dieser Theorie üblich, und damit keinem Lösungsvorschlag für (e) zugeführt wurden. Auch mag angesichts ((4)) und ((5)) (oben) bezweifelt werden, ob Arithmetisierungsargumente (W. ((34))) ohne ausreichende Allgemeinheitsbetrachtung von so großer Bedeutung sind.

((20)) Sollte es so sein, daß ähnliche Umstände, wie unter ((1)) (oben) beschrieben, Wandschneider dazu bewogen haben, solche Probleme jenseits von (a)-(e) anzugehen, die nach der gesamten philosophischen Folgediskussion im Anschluß an Lucas im Prinzip ausdiskutiert sind (vgl. auch ((17)) oben sowie für Wandschneiders Verteidigung von Maschinenhierarchien ((7)) oben), würde das auch erklären, weshalb er Fragen der mathematischen Intuition umgeht (vgl. ((8))-((10)) oben).

((21)) Die Gödel-Theoreme limitieren nicht das menschliche Denken generell, sondern nur eine spezifische Klasse von Verwendungen mentaler Werkzeuge.

Adresse

Dr. Lutz-Michael Alisch, Zum Ziegeleiteich 2, D-3326 Baddeckenstedt

Alles klar?

Ansgar Beckermann

((1)) Wenn ich D. Wandschneider richtig verstanden habe, lautet sein Hauptargument: Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz zeigt nicht, daß formale Systeme Menschen in ihren logischen Möglichkeiten grundsätzlich unterlegen sind; denn daß es für jedes formale System *S*, das bestimmte Eigenschaften hat,[1] einen wahren Satz *G* gibt, der in diesem System nicht bewiesen werden kann, liegt nicht an den deduktiven Möglichkeiten von *S*, sondern an der semantischen Struktur von *G*, d.h. insbesondere an der Selbstreferentialität dieses Satzes. Bei diesem Argument ist allerdings nicht leicht zu sehen, wie die Konklusion

(1) Formale Systeme sind Menschen in ihren logischen Möglichkeiten nicht grundsätzlich unterlegen

aus der Prämisse

(2) Daß es für jedes formale System *S*, das bestimmte Eigenschaften hat, einen wahren Satz *G* gibt, der in diesem System nicht bewiesen werden kann, liegt nicht an den deduktiven Möglichkeiten von *S*, sondern an der Selbstreferentialität von *G*

folgen soll. Denn zunächst einmal zeigt der Gödelsche Unvollständigkeitssatz doch ohne jeden Zweifel, daß gilt:

(3) Für jedes formale System *S*, das die entsprechenden Eigenschaften hat, gibt es einen Satz *G*, der in *S* nicht bewiesen werden kann, obwohl wir (Menschen) zeigen können, daß er wahr ist.

Und allein hieraus scheint die Negation von (1)

(4) Formale Systeme sind Menschen in ihren logischen Möglichkeiten grundsätzlich unterlegen

zu folgen - ganz unabhängig davon, worauf die Wahrheit von (3) beruht. D.h., die in (3) festgestellte Tatsache allein scheint entscheidend, nicht die Gründe, auf denen diese Tatsache beruht. Selbst wenn es wirklich so sein sollte, daß *G* in *S* unbeweisbar ist, weil *G* in bestimmter Weise selbstreferentiell ist, ist also zunächst einmal nicht zu sehen, was dies an der Wahrheit von (3) und damit auch an der Wahrheit von (4) ändern sollte.

Aber vielleicht greift diese Antwort zu kurz und vielleicht ist es deshalb sinnvoll, alles noch einmal systematisch zu durchdenken. Beginnen wir also mit der Frage, wie die Konklusion (1) eigentlich zu verstehen ist. Meiner Meinung nach kann mit der These, daß formale Systeme Menschen in ihren logischen Möglichkeiten nicht grundsätzlich unterlegen sind, nur zweierlei gemeint sein:

(1a) Zumindest für ein formales System *S* gilt, daß sich alles, was ein Mensch beweisen kann, auch mit Mitteln des Systems beweisen läßt. (Falls ein Mensch beweisen kann, daß ein Satz *G* in einem solchen System nicht beweisbar ist, muß das in diesem Fall daher auch mit Mitteln des Systems selbst beweisbar sein.)

Oder:

(1b) Menschen sind genauso eingeschränkt wie formale Systeme, da sich auch für jeden Menschen ein wahrer Satz angeben läßt, der von ihm nicht bewiesen werden kann.

Die entscheidende Frage lautet daher: Kann die Prämisse (2) irgendetwas zur Begründung der Behauptung (1a) oder der Behauptung (1b) beitragen? Bevor ich auf diese Frage eingehe, möchte ich jedoch zwei kurze Bemerkungen zum Problem der Selbstreferentialität von *G* und zur Struktur des Beweises des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes vorausschicken.

((2)) Im strengen Sinn ist der Satz *G* sicher nicht selbstreferentiell. Denn er enthält keinen Ausdruck, der den Satz *G* selbst bezeichnet. (Schließlich ist *G* ein Satz, der außer logischen nur arithmetische Zeichen enthält.[2]) Andererseits kann man aber vielleicht doch sagen, daß *G* in einem gewissen Sinne "semantisch" selbstreferentiell ist, da sich - unter der Voraussetzung der Korrektheit von *S* - zeigen läßt, daß *G* bzgl. der Standardinterpretation genau dann wahr ist, wenn *G* nicht in *S* beweisbar ist.

Diese Tatsache spielt jedoch in den herkömmlichen Beweisen des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (im Gegensatz zu dem, was Wandschneider vorauszusetzen scheint) keine Rolle.[3] Denn bei diesen Beweisen muß nicht einmal vorausgesetzt werden, daß die Sprache von *S* überhaupt interpretiert ist. Entscheidend ist nur, daß man zeigen kann, daß aus der Beweisbarkeit von *G* die Beweisbarkeit von $\neg G$ folgt (damit kann unter der Voraussetzung der Konsistenz von *S* gezeigt werden, daß *G* nicht in *S* beweisbar ist) und daß - unter der Voraussetzung der Omega-Konsistenz von *S* - aus der Annahme, daß $\neg G$ beweisbar ist, folgt, daß $\neg G$ nicht beweisbar ist (damit kann gezeigt werden, daß $\neg G$ nicht in *S* beweisbar ist). Bei den herkömmlichen Beweisen des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes sind die semantischen Eigenschaften von *G* also ganz irrelevant.[4] Auch wenn es richtig ist, daß *G* bzgl. der Standardinterpretation genau dann wahr ist, wenn *G* in *S* nicht beweisbar ist, muß auf diese Tatsache beim Beweis dieses Satzes also nicht Bezug genommen werden.

((3)) Aber lassen wir diesen Punkt beiseite und fragen einfach, ob die semantische Selbstreferentialität von *G* - ob sie nun im Beweis des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes eine entscheidende Rolle spielt oder nicht - in irgendeiner Weise zur Stützung der Behauptungen (1a) oder (1b) beitragen kann. Im Hinblick auf die Formulierung (1a) findet sich bei Wandschneider eine interessante Überlegung (vgl. insbes. Abschn. 32), die mit der Bemerkung beginnt, daß man zwischen dem Beweis eines Sachverhalts und dem Beweis einer entsprechenden Aussage unterscheiden müsse. Diese Unterscheidung macht auf den ersten Blick zwar einen eigenartigen Eindruck, da streng genommen immer nur Sätze bewiesen werden können, aber sie ist doch sinnvoll. Denn wenn wir einen Satz beweisen, geht es uns in der Regel darum zu beweisen, daß ein bestimmter Sachverhalt der Fall ist, nämlich daß das der Fall ist, was der Satz besagt. Grundsätzlich könnte man also sagen, daß man, wenn man einen Satz beweist, damit auch beweist, daß ein bestimmter Sachverhalt besteht, und daß man dementsprechend das Bestehen eines Sachverhalts beweisen kann, indem man einen Satz beweist, der besagt, daß dieser Sachverhalt besteht. Wenn das so ist, ist aber klar, daß man das Bestehen eines Sachverhaltes in der Regel auf verschiedene Weise beweisen kann; denn in der Regel wird es verschiedene Sätze geben, die besagen, daß dieser Sachverhalt besteht. Damit erscheint das durch den Gödelschen Unvollständigkeitssatz gestellte Problem jedoch in einem ganz anderen Licht. Denn das Problem war, daß aus (3) zu folgen scheint, daß es etwas Wahres (einen Sachverhalt) gibt, das wir als wahr erkennen können, das im System *S* aber nicht bewiesen werden kann. Tatsächlich besagt (3) jedoch nur, daß es einen Satz *G* gibt, der wahr ist und in *S* nicht bewiesen werden kann. Diese Tatsache läßt aber die Möglichkeit offen, daß es einen anderen Satz *G'* gibt, der dasselbe besagt wie *G* (der dieselben Wahrheitsbedingungen hat) und der trotzdem in *S* beweisbar ist. Und wenn es einen solchen Satz gäbe, könnte man eigentlich nicht sagen, daß in *S* etwas Wahres nicht bewiesen werden könne.[5]

Dies ist sicher eine interessante Überlegung. Aber sie führt nur dann zur Stützung der Behauptung (1a), wenn man zeigen kann, daß es (für das System *S* oder ein anderes System dieser Art) einen solchen Satz tatsächlich gibt. Wandschneider scheint das zu glauben. Und diese Überzeugung scheint er auf die Auffassung zu gründen, daß wir selbst beim Beweis der Unbeweisbarkeit von *G* nur mit Mitteln operieren, die auch in *S* verfügbar sind. "Alle für die Beweise benötigten deduktiven Mittel sind keine anderen als die im System *S* selbst verfügbaren Mittel ..." (Abschn. 23). Aber diese Auffassung ist doch sehr zweifelhaft. Denn zunächst einmal gilt offenbar, daß wir beim Beweis des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes deutlich über die in *S* verfügbaren Mittel hinausgehen, da schon bei der Formulierung des Satzes und der Prämissen, aus denen wir diesen Satz ableiten, Formulierungen vorkommen, die in der Sprache von *S* gar nicht möglich sind. Auf der anderen Seite ist jedoch gezeigt worden (und darauf scheint sich Wandschneider zu berufen), daß der von uns geführte (metatheoretische) Beweis des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes in *S* weitgehend rekonstruiert werden kann, d.h. daß in der Sprache von *S* ein Analogon zu diesem Beweis formuliert werden kann, das einen Beweis der Formel $Con_s \rightarrow G$ darstellt.[6] Aber dieser Beweis ist natürlich kein Beweis der Formel *G* und auch kein Beweis einer Formel *G'*, die dasselbe gesagt wie *G*. Und es ist auch nicht möglich, von dem Beweis der Formel $Con_s \rightarrow G$ zum Beweis von *G* zu kommen, da sich zeigen läßt, daß Con_s in *S* nicht beweisbar ist.[7] Dies gesteht Wandschneider auch ausdrücklich zu (Abschn. 28 f.) und er räumt auch ein, daß wir, wenn wir die Konsistenz von *S* beweisen wollen, über die in *S* verfügbaren Mittel hinausgehen müssen. Aber, so fährt er fort: "Auf der anderen Seite spricht nichts dagegen, daß derartiges auch einer geeigneten Maschine möglich ist" (ebd.). Diese Bemerkung macht jedoch ein fundamentales Mißverständnis deutlich. Denn ein formales System ist <u>definiert</u> durch seine Sprache, seine Axiome und seine Schlußregeln. Wenn man "über die in *S* verfügbaren Mittel hinausgeht", geht man also über *S* hinaus und gelangt damit zu einem anderen formalen System. Die Frage ist aber nicht, ob Con_s in irgendeinem anderen System beweisbar ist (das ist sicher so), sondern ob Con_s in *S* beweisbar. Und das ist - wie der Gödelsche Beweis zeigt - eben nicht der Fall.[8] Denn wenn Con_s in *S* beweisbar wäre, dann wäre auch *G* in *S* beweisbar.

Somit ergibt sich: 1. der Satz *G* selbst ist in *S* sicher nicht beweisbar (es sei denn, *S* ist inkonsistent); 2. zur Beantwortung der eigentlichen Frage, ob es möglicherweise einen von *G* verschiedenen Satz *G'* gibt, der - ebenso wie *G* - bzgl. der Standardinterpretation genau dann wahr ist, wenn *G* nicht in *S* beweisbar ist, und der trotzdem in *S* beweisbar ist, tragen die Überlegungen Wandschneiders nichts bei.

((4)) Im folgenden Abschn. 30 gibt Wandschneider seiner Argumentation allerdings noch einmal eine etwas andere Richtung. Denn dort macht er selbst darauf aufmerksam, daß es auch für jede Erweiterung *S'* von *S* (die bestimmte Eigenschaften hat) wieder einen Satz *G'* gibt, der von uns als wahr erkannt, aber in *S'* nicht bewiesen werden kann, daß man also durch Systemerweiterung dem Gödelschen Problem nicht entgehen kann. Doch, so schreibt er weiter: "Das gilt aber für das Denken <u>ebenso</u> wie für die Maschine; <u>beide</u> finden immer wieder das Gödelsche Problem vor." Dies scheint aber nahezulegen, daß Wandschneider hier eher an eine Lösung in Richtung der Formulierung (1b) denkt. Wie könnte man eine solche Lösung begründen?[9] Nun, man könnte argumentieren, daß es, wenn man die Struktur des Satzes *G* erst einmal durchschaut hat, leicht ist, für jedes System *S* (und damit auch für die uns Menschen zur Verfügung stehenden logischen Mittel) einen entsprechenden Satz zu formulieren, nämlich den Satz:

(5) Dieser Satz kann mit den im System *S* zur Verfügung stehenden Mitteln nicht bewiesen werden.

Bzw. den Satz:

(6) Dieser Satz kann mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln nicht bewiesen werden.

Denn in Hinblick auf diesen Satz läßt sich argumentieren: Wenn der Satz (6) mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln beweisbar wäre, dann wäre er falsch; in diesem Falle wäre mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln also ein falscher Satz beweisbar, d.h. in diesem Fall wären die uns zur Verfügung stehenden Mittel nicht korrekt; wenn auf der anderen Seite der Satz (6) mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln nicht beweisbar wäre, dann wäre er wahr; in diesem Falle wäre mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln also ein wahrer Satz nicht beweisbar, d.h. in diesem Fall wären die uns zur Verfügung stehenden Mittel nicht vollständig.

Der Satz (6) ist allerdings im Gegensatz zum Satz *G* explizit selbstreferentiell, d.h., er enthält einen Ausdruck, der diesen Satz selbst bezeichnet. Und es gibt gute Gründe, bei der Zulassung solcher Sätze vorsichtig zu sein. Daher ist die Frage: Gibt es einen nicht explizit selbstreferentiellen Satz *M*, für den gilt:

(7) *M* ist wahr genau dann, wenn *M* nicht mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln bewiesen werden kann.

Klar ist wohl, daß ein solcher Satz nicht (ohne weiteres) mit den Gödelschen Mitteln konstruiert werden kann. Denn diese Mittel sind nur anwendbar, wenn wir Sätzen und Folgen von Sätzen der unseren logischen Schlüssen zugrundeliegenden Sprache *L* in der Weise eindeutig natürliche Zahlen zuordnen können, daß sich zeigen läßt, daß das Prädikat "*a* ist Gödelzahl eines Beweises der Formel von *L*, die aus der Formel mit der Gödelzahl *b* hervorgeht, wenn man in dieser Formel alle freien Vorkommnisse der Variablen x_1 durch die Ziffer k_b ersetzt" rekursiv ist und daß mit den uns Menschen zur Verfügung stehenden Mitteln alle rekursiven Prädikate (durch entsprechende arithmetische Formeln) repräsentiert werden können.[10] Und zumindest, was den ersten Teil angeht, ist nicht zu sehen, wie man dies zeigen können soll.[11] (Auf jeden Fall ist dies so lange nicht zu sehen, wie wir die uns zur Verfügung stehenden Mittel nicht einmal vollständig überblikken.)

Aber auch wenn sich mit den Gödelschen Mitteln nicht zeigen läßt, daß es einen Satz *M* gibt, für den die Aussage (7) gilt, folgt daraus natürlich noch nicht, daß es einen solchen

Satz tatsächlich nicht gibt. Nur, mehr als diese Möglichkeit haben wir eben auch nicht.

((5)) Ich denke also, daß Wandschneider in seinem Aufsatz zwei sehr interessante Aspekte anspricht: Zum einen die Möglichkeit, daß es zu den Systemen, von denen man zeigen kann, daß in ihnen ein wahrer Satz G nicht beweisbar ist, einen Satz G' geben könnte, der in dem System beweisbar ist und der dieselben Wahrheitsbedingungen wie G hat, und zum anderen die Möglichkeit, daß es auch im Hinblick auf uns Menschen einen Satz M geben könnte, der entweder wahr und mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht beweisbar oder falsch und mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln beweisbar ist. In beiden Fällen haben wir jedoch nicht mehr als die bloße Möglichkeit. Denn in beiden Fällen wird nicht gezeigt, daß diese Möglichkeit auch realisiert ist. Letzten Endes bleibt daher die Frage offen, ob von den Aussagen (1a) und (1b) wenigstens eine wahr ist.

((6)) Zum Schluß möchte ich noch einen Punkt ansprechen, der mir besonders interessant zu sein scheint, auf den Wandschneider aber kaum eingeht.[12] Wie mir scheint, ist nämlich zunächst einmal gar nicht zu sehen, was die Gödelschen Sätze überhaupt mit den Fähigkeiten von Maschinen zu tun haben sollen. Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz z.B. besagt nur, daß mit bestimmten Mitteln (der Sprache, den Axiomen und den Schlußregeln eines bestimmten formalen Systems S) ein bestimmter wahrer Satz nicht bewiesen werden kann bzw. daß es einen Satz G der Sprache von S gibt, von dem gilt, daß in S weder dieser Satz noch dessen Negation bewiesen werden kann. Und die Erweiterungen dieses Satzes besagen nur, daß Entsprechendes auch für bestimmte andere Systeme gilt, d.h., daß es für alle diese Systeme einen Satz gibt, von dem gilt, daß weder er noch seine Negation mit den Mitteln dieser Systeme bewiesen werden kann. Aus dieser Tatsache folgt jedoch nur dann etwas über die Fähigkeiten von Maschinen, wenn es möglich ist, jeder Maschine in eindeutiger Weise ein entsprechendes formales System zuzuordnen, d.h., wenn es möglich ist zu zeigen, daß jede Maschine, die dazu in der Lage ist, bestimmte Sätze zu beweisen, bei diesen Beweisen nur bestimmte Mittel (eine bestimmte Sprache, bestimmte Axiome und bestimmte Schlußregeln) anwenden kann und daß diese Mittel eines der Systeme definieren, die die Voraussetzungen des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes erfüllen. Ich habe nicht den Eindruck, daß dies bisher tatsächlich gezeigt worden ist.

Anmerkungen

1 Dieser Zusatz ist notwendig. Denn der Gödelsche Unvollständigkeitssatz und seine Varianten besagen nicht, daß es für alle formalen Systeme einen wahren Satz G gibt, der in ihnen nicht bewiesen werden kann, sondern nur, daß dies für bestimmte formale Systeme gilt (z.B. für alle konsistenten rekursiv axiomatisierbaren Erweiterungen des zahlentheoretischen Ausgangssystems S). Dieser Punkt kommt in der Wandschneiderschen Argumentation vielleicht etwas zu kurz.

2 Im Abschn. 5 schreibt Wandschneider, daß "diejenigen Zahlen, die Gödelzahlen sind, ... nicht mehr nur Zahlen sind, sondern außerdem eine Interpretation besitzen und damit nicht nur in formalen, sondern auch in semantischen Relationen stehen." Diese Bemerkung, aus der man schließen könnte, daß G doch explizit selbstreferentiell ist, wenn G einen Ausdruck enthält, der die Gödelzahl von G bezeichnet, ist jedoch irreführend. Denn erstens wird an keiner Stelle im Gödelschen Beweis gezeigt, daß G tatsächlich einen solchen Ausdruck enthält. Und zweitens - und das ist wichtiger - begründet die Tatsache, daß es eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Formeln von S in die natürlichen Zahlen gibt, keine semantische Beziehung zwischen diesen Zahlen und den entsprechenden Formeln. Die Zahlen entsprechen diesen Formeln zwar, aber sie bezeichnen sie nicht. (Zahlen sind schließlich nicht einmal sprachliche Ausdrücke.) Es ist daher einfach falsch zu sagen, daß die Ziffer k_g, die die Gödelzahl g von G bezeichnet, auch die Formel G selbst bezeichnet.

3 Herkömmlicherweise wird der Gödelsche Unvollständigkeitssatz nicht einmal semantisch formuliert; denn die Standardformulierung dieses Satzes lautet nicht: (*) "Für jedes System S (mit bestimmten Eigenschaften) gibt es einen wahren Satz, der in S nicht bewiesen werden kann", sondern: (**) "Für jedes System S (mit bestimmten Eigenschaften) gibt es eine Formel A, so daß weder A noch $\neg A$ in S bewiesen werden kann". Allerdings folgt (*) für beliebige Interpretationen von A natürlich aus (**).

4 Insofern ist es völlig irreführend, wenn Wandschneider im Abschnitt 34 schreibt: "Auf der anderen Seite könnte selbst der Ausdruck G, als rein formales Gebilde genommen, sehr wohl beweisbar sein, wenn er nicht außerdem semantisch selbstreferentiell wäre. Selbstreferentiell ist G aber nur aufgrund der in S arrangierten Arithmetisierung eines Teils der Metatheorie von S. Ohne Arithmetisierung könnte G also durchaus beweisbar sein ...".

5 Wandschneider weist extra daraufhin, daß ja auch wir nicht den Satz G selbst, sondern nur einen anderen Satz (nämlich den Satz "G ist in S nicht beweisbar") als wahr erweisen, der jedoch dasselbe besagt wie G.

6 Diese Formel entspricht insofern der Konklusion des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes, als Con_s eine Formel von S ist, die bzgl. der Standardinterpretation von S genau dann wahr ist, wenn S konsistent ist, und G, wie schon mehrfach gesagt, eine Formel von S, die bzgl. der Standardinterpretation von S genau dann wahr ist, wenn G in S nicht beweisbar ist.

7 Dies betont Wandschneider selbst im Abschn. 29.

8 Es ist allerdings interessant, daß Wandschneider in der zitierten Passage nicht von formalen Systemen, sondern von Maschinen spricht. Und man kann diese Passage auch so lesen, daß Wandschneider in ihr bezweifelt, daß jeder Maschine tatsächlich eindeutig ein formales System zugeordnet werden kann. Dieser außerordentlich wichtige Punkt wird von ihm aber nicht explizit thematisiert.

9 Wandschneider selbst sagt dazu relativ wenig.

10 Bzw. daß das Prädikat "a ist Gödelzahl eines Beweises der Formel mit der Gödelzahl b" ein rekursives Prädikat und die Diagonalfunktion, die jeder Gödelzahl a einer Formel A von L die Gödelzahl der Formel zuordnet, die aus der Formel A hervorgeht, wenn man in ihr alle freien Vorkommnisse der Variablen x_1 durch die Ziffer k_a ersetzt, eine rekursive Funktion ist.

11 Der zweite Teil scheint weniger problematisch, wenn man davon ausgeht, daß unsere logischen Möglichkeiten die Möglichkeiten des Gödelschen Systems S umfassen.

12 Siehe aber Anm. 8 oben.

Adresse

Prof. Dr. Ansgar Beckermann, Universität Göttingen, Philosophisches Seminar, Platz der Göttinger Sieben 5, D-3400 Göttingen