

Literaturempfehlungen:

GABISCH, G.: Konjunktur und Wachstum, in: VAHLENS Kompendium der Wirtschaftstheorie und Wirtschaftspolitik, Bd. 1, München 1980, S. 275 ff.
 VOSGERAU, H.J.: Konjunkturtheorie, in: HdWW, Bd. 4, Stuttgart u.a. 1978, S. 478 ff.
 WENIG, A.: Konjunkturtheorie, in: Handwörterbuch der mathematischen Wirtschaftswissenschaften, Bd. 1, Wirtschaftstheorie, Wiesbaden 1979, S. 141 ff.

Die Beantwortung der Fragen erfolgt im WISU-Repetitorium.

Hauptstudium

Der Kern einer Tauschwirtschaft

PD Dr. Walter Trockel, Bielefeld

Im Mittelpunkt der auf WALRAS (1874) zurückgehenden allgemeinen Gleichgewichtstheorie steht der Begriff des Wettbewerbsgleichgewichts. Diesem nicht kooperativen Gleichgewichtsbegriff läßt sich ein anderer, kooperativer gegenüberstellen, der auf EDGEWORTH (1881) zurückgeht, der des Kerns einer Ökonomie. Der folgende Beitrag entwickelt und veranschaulicht dieses Konzept im Rahmen einer Tauschwirtschaft und beschäftigt sich mit der Beziehung zwischen Kern und Wettbewerbsgleichgewichten.

I. Einführung

Der Kern ist ein Lösungskonzept aus der allgemeinen Theorie kooperativer Spiele. Als Menge der „detached imputations“ benutzten ihn bereits VON NEUMANN/MORGENSTERN (1944). Da er sich für eine bedeutende Klasse von Spielen, die sogenannten **wesentlichen Konstantsummen-Spiele**, als leer erwies, war er als eigenständiges Lösungskonzept zunächst ziemlich unattraktiv. Dennoch verwandten bereits VON NEUMANN/MORGENSTERN (1944) den Kern für eine ökonomische Analyse und wiesen auf Querverbindungen zur bestehenden ökonomischen Literatur hin. Sie analysierten den von BÖHM-BAWERK (1888) für den Fall eines Verkäufers und zweier Käufer beschriebenen Pferdemarkt. Nach BÖHM-BAWERK bestimmt ein sogenanntes **Grenzpaar von Preisen** ein Intervall möglicher Preise, das, wie VON NEUMANN/MORGENSTERN zeigten, gerade der Kern eines geeignet gewählten, die Situation beschreibenden **kooperativen Spiels** ist.

Wir werden uns im folgenden mit dem Kern im Rahmen einer **Tauschwirtschaft** beschäftigen, in welcher der Kern aus einer Menge von **Güterallokationen** oder **-umverteilungen** besteht. In diesem Spezialfall wurde der Kern bereits von EDGEWORTH (1881) unter dem Namen „**contract curve**“ eingeführt. Daß es sich dabei tatsächlich um den Kern eines geeignet formulierten Spiels handelt, wurde von SHUBIK (1959) festgestellt. Wir verdanken EDGEWORTH aber nicht nur das Konzept des Kerns, sondern auch die Idee, daß der Kern nicht nur die **Gleichgewichtsallokationen** enthält, sondern auch mit **wachsender Anzahl von Wirtschaftssubjekten** auf eben diese Gleichgewichtsallokationen **zusammenschrumpft**. Diese Aussage verifizizierte EDGEWORTH für den Spezialfall zweier Güter und zweier Typen von Konsumenten, die mit derselben positiven ganzen Zahl vervielfacht („repliziert“) werden. Daß dieses Beispiel einen sehr allgemeinen Sachverhalt repräsentiert, ist der Inhalt der sogenannten **EDGEWORTH-Vermutung**.

II. Das Modell der Tauschwirtschaft

Wir betrachten eine endliche Anzahl, l , beliebig teilbarer Güter. Den **Güterraum** beschreiben wir dementsprechend durch \mathbb{R}^l , den Vektorraum aller geordneten l -elementigen Folgen reeller Zahlen („ l -tupel“). Ferner betrachten wir eine endliche Menge A von Wirtschaftssubjekten, deren Anzahl wir mit $\#A$ bezeichnen. Die konsumierbaren Güterbündel der Konsumenten bilden ihre **Konsummenge**, \mathbb{R}_+^l , also die Menge aller l -tupel reeller Zahlen mit nicht negativen Komponenten. Jeder Konsument a in der Menge A („ $a \in A$ “) wird durch seine **Konsumcharakteristika** beschrieben. Diese sind seine **Erstausstattung**, $e_a \in \mathbb{R}_+^l$, und seine **Präferenz(relation)**, R_a auf \mathbb{R}_+^l .

Eine (stetige) Präferenz auf \mathbb{R}_+^l ist eine binäre Relation R auf \mathbb{R}_+^l , die durch eine (stetige) Nutzenfunktion u darstellbar ist, d. h. für $x, y \in \mathbb{R}_+^l$ gilt: $x R y$ genau dann, wenn $u(x) = u(y)$. P bzw. \sim sind die zu R gehörige strikte Präferenz- bzw. Indifferenzrelation. $x \sim y$ (bzw. $x P y$) bedeutet $x R y$ und $y R x$ (bzw. $x R y$, aber nicht $y R x$). Mengen, auf denen u konstant ist, sind zu R gehörige Indifferenzmengen. Die Stetigkeit von R bedeutet, daß strikte Präferenz bei leichter Störung der verglichenen Güterbündel erhalten bleibt.

Frage 1: Bleibt auch Indifferenz bei leichter Veränderung der verglichenen Güterbündel erhalten?

Frage 2: Man gebe ausgehend von u_a eine weitere Nutzenfunktion u_a , die ebenfalls R_a repräsentiert!

Der Kern:
Ein Lösungskonzept aus der Spieltheorie

Geschichte des Kerns

EDGEWORTH-Vermutung

Konsumcharakteristika

Präferenzen

Tauschwirtschaft

Eine **Tauschwirtschaft**, E , ist beschrieben durch ihre exogenen Daten, die **Konsumcharakteristika** (R_a, e_a) der Konsumenten $a \in A$. Bezeichnet P die Menge der möglichen Präferenzen, so läßt sich die Tauschwirtschaft E beschreiben als Abbildung

$$E: A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^l: a \mapsto (R_a, e_a).$$

Ein **Preissystem** p ist eine **lineare Bewertungsfunktion**, die jedem Güterbündel $x \in \mathbb{R}_+^l$ seinen **Wert** bei p zuordnet.

Preissystem

Die Linearität erlaubt es, ein Preissystem als Element des \mathbb{R}^l zu beschreiben. Der Wert von x bei p ist dann das Ergebnis des **inneren Produkts**, d. h. $px = p_1 x_1 + \dots + p_l x_l$. Das **Verhältnis der Preise** zweier Güter beschreibt ihre **Tauschrate**. Da es uns nur auf Preisverhältnisse ankommt, reicht es, **normierte Preise** zu betrachten.

Wir wählen daher als **Preisraum** die Menge

$$S = \{p \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{h=1}^l p_h^2 = 1\}.$$

Die Budgetmenge und die Nachfragemenge des Konsumenten a beim Preissystem p sind

$$\beta(a, p) = \{x \in \mathbb{R}_+^l \mid px \leq p e_a\} \text{ und } \varphi(a, p) = \{x \in \beta(a, p) \mid (y P_a x) \Rightarrow py > p e_a\},$$

die Menge der R_a -**maximalen Güterbündel** in $\beta(a, p)$.

Wir definieren einige mögliche Eigenschaften von Präferenzen. R ist genau dann

Konvexität und Monotonie von Präferenzen

konvex
streng konvex
monoton } wenn gilt $\begin{cases} x P y \\ x R y \\ x > y \end{cases}$ impliziert $\begin{cases} tx + (1-t)y P y \\ tx + (1-t)y P y \\ x P y \end{cases}$
für alle $t, 0 < t < 1$

Für Vektoren x, y bedeutet $x > y$ (bzw. $x \gg y$):

$x^h \geq y^h$ für alle h , $x \neq y$ (bzw. $x^h > y^h$ für alle h).

Strenge Konvexität impliziert, daß die Nachfragemenge **aus höchstens einem Güterbündel besteht**. In diesem Fall definiert die Zuordnung $p \rightarrow \varphi(a, p) \neq \emptyset$ die **Nachfragefunktion** des Konsumenten a . Ein **Sättigungskonsumplan** für die Präferenz R ist ein Güterbündel $x \in \mathbb{R}_+^l$ mit $x R y$ für alle $y \in \mathbb{R}_+^l$.

Wir sind nun in der Lage unsere beiden zentralen Gleichgewichtsbegriffe zu definieren.

Eine **Allokation** für die **Tauschwirtschaft** $E: A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^l$ ist eine Abbildung $\tilde{x}: A \rightarrow \mathbb{R}_+^l$:

$$a \xrightarrow{\tilde{x}} x_a. \text{ Sie ist } \textbf{erreichbar}, \text{ wenn gilt } \sum_{a \in A} x_a = \sum_{a \in A} e_a$$

Die Erreichbarkeit garantiert, daß die vorgeschlagene Allokation \tilde{x} zu ihrer Verwirklichung nicht mehr von den betrachteten Gütern benötigt als insgesamt vorhanden sind.

WALRAS-Gleichgewicht

Eine Allokation \tilde{x} für die Tauschwirtschaft E ist eine **Gleichgewichtsallokation** oder auch **WALRAS-Allokation** wenn gilt:

- i) \tilde{x} ist erreichbar,
- ii) es gibt ein Preissystem $p \in S$, so daß für alle $a \in A$ gilt: $x_a \in \varphi(a, p)$.

Das Preissystem p heißt dann **Gleichgewichtspreissystem**. Das Paar (\tilde{x}, p) heißt **Wettbewerbs- oder WALRAS-Gleichgewicht** der Tauschwirtschaft E . Wir bezeichnen die Menge der WALRAS-Allokationen der Tauschwirtschaft E mit $W(E)$.

Ein Gleichgewichtspreissystem p ermöglicht eine **dezentrale Organisation des Gütertauschs über Märkte**. Der Ausgleich von Angebot und Nachfrage auf allen Märkten ist verträglich mit individueller Nutzenmaximierung unter der Budgetrestriktion, wenn die individuellen Budgets gerade die Bewertung der individuellen Erstausstattungen mit einem Gleichgewichtspreissystem sind. In einem WALRAS-Gleichgewicht wird der Tausch **nicht-kooperativ** dezentral organisiert. Das Gleichgewichtspreissystem, das die Tauschraten angibt, enthält die nötige Information über die relative Knappheit der verschiedenen Güter.

Bei der Definition des **Kerns** spielen **nicht nur die Konsumenten als individuelle Akteure eine Rolle, sondern auch sämtliche** denkbaren **Gruppierungen von Konsumenten**. Wir bezeichnen die nicht-leeren Teilmengen der Menge A aller Konsumenten als **Koalitionen**.

Kern

Der **Kern einer Tauschwirtschaft** E , den wir mit $C(E)$ bezeichnen, besteht aus all den Allokationen \tilde{x} , welche die Eigenschaft haben, daß sich **keine Koalition** $S \subset A$ **gegenüber** \tilde{x} **verbessern kann**. Dabei kann sich eine Koalition $S \subset A$ gegenüber einer Allokation \tilde{x} **verbessern**, wenn eine Allokation \tilde{y} für E existiert, derart daß

- i) $y_a P_a x_a$ für alle $a \in S$,
- ii) $\sum_{a \in S} y_a = \sum_{a \in S} e_a$.

Während i) besagt, daß wirklich **alle** Mitglieder von S sich verbessern, besagt ii), daß S diese Verbesserung auch **ausschließlich aus den Erstausstattungen** realisieren kann, die der Koalition insgesamt zur Verfügung stehen.

PARETO-Effizienz

Wenn \tilde{x} im Kern der Tauschwirtschaft E liegt, kann sich also keine Koalition gegenüber \tilde{x} verbessern, **insbesondere also auch nicht die Gesamtkoalition $S = A$** . Diese letzte Eigenschaft ist eine schwache Form von **PARETO-Effizienz**. Eine Allokation \tilde{x} für die Tauschwirtschaft E ist PARETO-effizient, wenn jede Allokation, die irgendeinen Konsumenten besser stellt als bei \tilde{x} mindestens einen anderen Konsumenten schlechter stellt.

Frage 3: Wieso ist im Falle monotoner Präferenzen jede Kern-Allokation PARETO-effizient?

Wir illustrieren nun die eingeführten Konzepte.

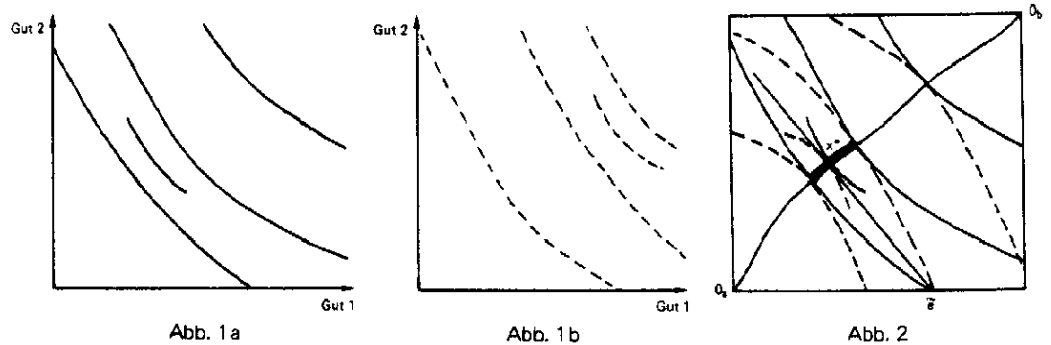


Abbildung 2 zeigt eine sogenannte EDGEWORTH-Box. Man erhält sie, indem man Abb. 1b um 180° dreht und über Abb. 1a legt. Jeder Punkt in der EDGEWORTH-Box repräsentiert eine andere Umverteilung (Allokation) derselben Gesamterstaussstattung, $e_a + e_b = \bar{e}$. Das Linienstück $[0_a, 0_b]$ repräsentiert die PARETO-effizienten Allokationen. Dies sind gerade die Punkte, in denen sich Indifferenzkurven berühren. Läßt sich in einem solchen PARETO-effizienten Punkt, x^* , die Menge aller für a besseren Allokationen von der Menge aller für b besseren Allokationen durch eine durch \bar{e} und x^* verlaufende Gerade trennen, so existiert ein zu dieser Geraden senkrechter Preisvektor, p^* , der zusammen mit x^* ein WALRAS-Gleichgewicht bildet. Im allgemeinen Rahmen ist dies der Inhalt des ersten Hauptsatzes der Wohlfahrtstheorie, wonach jedes WALRAS-Gleichgewicht PARETO-effizient ist.

Wie sieht aber nun in Abbildung 2 der Kern aus? Da alle Kernallokationen PARETO-effizient sind, müssen sie alle durch Punkte auf $[0_a, 0_b]$ repräsentiert werden. Die Punkte außerhalb des fettgedruckten Teils von $[0_a, 0_b]$ können aber entweder von a , wenn sie unterhalb liegen, oder von b , wenn sie oberhalb liegen, abgelehnt werden, da \bar{e} im einen Fall für a , im anderen Fall für b besser wäre. Gegenüber den durch Punkte im fettgedruckten Teil von $[0_a, 0_b]$ dargestellten Allokationen kann sich aber weder a noch b verbessern. Sie repräsentieren den Kern unserer Tauschwirtschaft E , d.h. $C(E)$.

III. Zusammenhang zwischen $W(E)$ und $C(E)$

Bisher wissen wir, daß WALRAS-Allokationen und (bei monotonen Präferenzen) auch Kernallokationen PARETO-effizient sind. Überdies suggeriert unser EDGEWORTH-Box-Beispiel die Vermutung: $W(E) \subset C(E)$.

WALRAS-Allokationen gehören zum Kern

Tatsächlich läßt sich diese Vermutung bestätigen. Es gilt der folgende

Satz: Für jede Tauschwirtschaft $E: A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^2$ gilt: $W(E) \subset C(E)$

Beweis: Sei $\tilde{x} \in W(E)$ und $p \neq 0$ ein zugehöriges Gleichgewichtspreissystem. Wir müssen zeigen, daß sich keine Koalition $S \subset A$ gegenüber \tilde{x} verbessern kann. Für jede Koalition $S \subset A$ ist also zu zeigen, daß für alle Allokationen \tilde{y} für E die Gültigkeit der Bedingung i): ($y_a P_a x_a$ für alle $a \in S$) in der Definition von „verbessern“ die Gültigkeit von ii): ($\sum_{a \in S} y_a = \sum_{a \in S} e_a$) ausschließt.

Es gelte also i). Da \tilde{x} WALRAS-Allokation ist, muß x_a für alle $a \in A$ und somit erst recht für alle $a \in S$ ein \mathbb{R}_+ -maximales Element in der Budgetmenge $\beta(a, p)$ sein. Da $y_a P_a x_a$ ist, kann also y_a nicht in $\beta(a, p)$ liegen. Also ergibt sich für alle $a \in S$: $p y_a > p e_a$ und daher

$$\sum_{a \in S} p y_a > \sum_{a \in S} p e_a. \text{ Da } p \neq 0 \text{ ist folgt: } \sum_{a \in S} y_a \neq \sum_{a \in S} e_a, \text{ was wir gerade zeigen wollten. } \square$$

Daß im allgemeinen $W(E) = C(E)$ gilt, zeigt das Beispiel in Abbildung 3. Natürlich gibt es Fälle, in denen die Gleichheit gilt, z.B. gilt, wenn $\tilde{e} = (e_a)_a \in A$ bereits PARETO-effizient ist, im Fall streng konvexer Präferenzen: $W(E) = C(E) = \{\tilde{e}\}$.

In den bisherigen Beispielen existierten immer WALRAS-Allokationen, d.h. es galt $W(E) \neq \emptyset$. Das gilt natürlich nur unter bestimmten Voraussetzungen (vgl. DEBREU (1959)). Zwei notwendige Voraussetzungen für die Existenz von WALRAS-Gleichgewichten sind:

- (1) Kein Konsument besitzt einen Sättigungskonsumplan.
- (2) Jeder Konsument verfügt über ein Budget oberhalb des Existenzminimums, ganz gleich mit welchem Preissystem seine Erstausrüstung bewertet wird, d.h.

$$pe_a > \min \{px_a \mid x_a \in \mathbb{R}_+^k\}$$

In Abbildung 3a repräsentiert \tilde{x} den Sättigungskonsum für den Konsumenten b, so daß die erste der beiden obigen Bedingungen verletzt ist. Hier existiert **keine** WALRAS-Allokation. Der Kern ist **nicht** leer und wird durch den fettgedruckten Teil der PARETO-Menge $[\tilde{x}, 0_b]$ dargestellt. In Abbildung 3b ist der einzige Kandidat für ein Gleichgewichtspreissystem der zu $[\tilde{e}, \tilde{x}]$ senkrechte Preisvektor $p \in S$. In diesem Falle ist die zweite der beiden obigen Bedingungen verletzt, weil $pe_a = px_a$ das Existenzminimum für den Konsumenten a darstellt. Der Kern besteht aus dem fettgedruckten Teil der Abszisse.

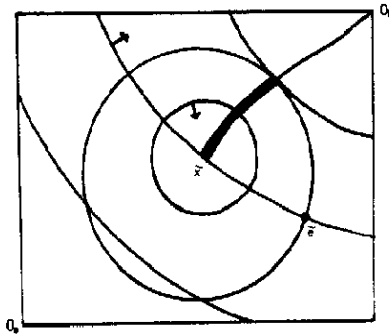


Abb. 3a

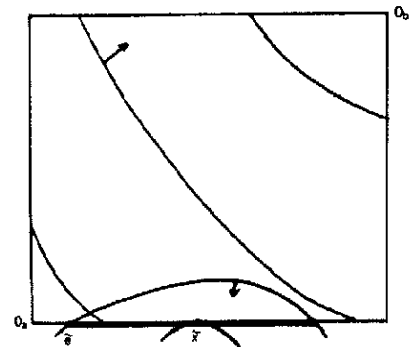


Abb. 3b

Diese beiden Beispiele deuten darauf hin, daß der Beweis der Existenz von Kernallokationen weniger restriktive Annahmen erfordert als der des Existenzsatzes für WALRAS-Gleichgewichte. In der Tat sind es im wesentlichen die beiden obigen Bedingungen (1) und (2), die man zusätzlich benötigt, wenn man die Existenzaussage für den Kern zu einer Existenzaussage für Wettbewerbsgleichgewichte verschärfen will. Für den Kern hat SCARF (1967) den folgenden **Existenzsatz** bewiesen.

Existenz von Kernallokationen

Satz: Sei $E : A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^k$ eine Tauschwirtschaft, in der alle R_a konvex sind. Dann gilt: $C(E) \neq \emptyset$.

SHAPLEY/SHUBIK (1966) geben ein Beispiel einer Tauschwirtschaft mit zwei Gütern und drei Konsumenten mit nicht-konvexen Präferenzen, für die der Kern leer ist.

IV. Der Grenzwertsatz für Replika-Ökonomien

EDGEWORTH hatte das **Zusammenschrumpfen des Kerns auf die Menge der WALRAS-Allokationen** für den Spezialfall nachgewiesen, in dem eine vorgegebene Tauschwirtschaft E mit zwei Gütern und zwei Konsumenten in dem Sinne **wächst**, daß für alle natürlichen Zahlen n die Tauschwirtschaften betrachtet werden, in denen je n **identische Kopien** der beiden Ausgangskonsumenten vorkommen. Formal ergibt sich die **n-Replika-Ökonomie** einer Tauschwirtschaft $E : A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^k$ als Tauschwirtschaft $E_n : A \times \{1, \dots, n\} \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^k$ mit $E_n(a, i) = E(a)$ für alle $a \in A$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$. **Präferenzen und Erstausrüstungen sind also identisch für alle Konsumenten vom selben Typ.** Setzt man geeignete **Konvexität der Präferenzen** voraus, so erhält man eine für den Beweis der EDGEWORTH-Vermutung im Falle von Replika-Ökonomien fundamentale Eigenschaft: **Die Gleichbehandlung von Konsumenten desselben Typs im Kern.** **Konvexität** der Präferenzen führt dazu, daß Konsumenten desselben Typs in einer Kernallokation **dasselbe Nutzenniveau realisieren.** **Strenge Konvexität** garantiert ihnen **sogar identische Güterbündel.** Die Identität der Konsumcharakteristika erlaubt es uns R_a, e_a, x_a statt $R_{(a,i)}, e_{(a,i)}, x_{(a,i)}$ zu schreiben. Wir formulieren nun den **Satz von der Gleichbehandlung im Kern.**

Replika-Ökonomien

Satz: Sei $E : A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^k$ eine Tauschwirtschaft mit **monotonen, streng konvexen Präferenzen.** Sei E_n ihre n -Replika. Falls $\tilde{x} \in C(E_n)$ ist, gilt für alle $a \in A$ ($\sum_{h=1}^n p_h = 1$) $\{1, \dots, n\} : \tilde{x}((a, i)) \sim_a \tilde{x}((a, j))$.

Gleichbehandlung im Kern

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, die Aussage des Satzes sei falsch. Dann existieren eine natürliche Zahl n , eine Kernallokation \tilde{y} für die n -Replika E_n und $(a^*, i), (a^*, j) \in A \times \{1, \dots, n\}$ derart daß: $\tilde{y}((a^*, i)) P_{a^*} \tilde{y}((a^*, j))$.

Wir setzen voraus, daß die Konsumenten jedes Typs a so numeriert sind, daß $\tilde{y}((a, i)) R_a \tilde{y}((a, i-1))$ für alle $i \in \{2, \dots, n\}$. Dann existiert also mindestens ein $i \in \{2, \dots, n\}$ mit $\tilde{y}((a^*, i)) P_{a^*} \tilde{y}((a^*, 1))$.

Wegen der Konvexität von R_{a^*} folgt $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{y}((a^*, i)) P_{a^*} \tilde{y}((a^*, 1))$.

Wir betrachten nun die Koalition $T = \cup_{a \in A} \{(a, 1)\}$ der Ersten jeden Typs. Wir werden zeigen, daß sich T gegenüber \tilde{y} verbessern kann. Wir betrachten die Allokation $\tilde{z}: A \times \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ für E_n mit

$\tilde{z}((a, i)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{y}((a, j))$. Für sie gilt $\tilde{z}((a, 1)) R_a \tilde{y}((a, 1))$ für alle $a \in A$, wobei $\tilde{z}((a^*, 1)) P_{a^*} \tilde{y}((a^*, 1))$.

Außerdem gilt

$$\sum_{a \in A} \tilde{z}((a, 1)) = \sum_{a \in A} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{y}((a, i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} \tilde{y}((a, i)) = \frac{1}{n} \cdot n \sum_{a \in A} e_a = \sum_{a \in A} e_a$$

Wegen der Monotonie kann man nun \tilde{z} modifizieren, indem $(a^*, 1)$ den Ersten der anderen Typen gerade soviel mitgibt, daß alle $(a, 1), a \in A$, sich gegenüber \tilde{y} verbessern. Das widerspricht aber der Voraussetzung $\tilde{y} \in C(E)$. \square

Bemerkung: Der Gleichbehandlungssatz für Replika-Ökonomien gilt **nicht** mehr, wenn verschiedene Konsumententypen **unterschiedlich oft** repliziert werden (vgl. Example 5.1, Seite 117, in HILDENBRAND/KIRMAN (1976)).

Frage 4: Wie kann man mit Hilfe des Satzes von der Gleichbehandlung im Kern nachweisen, daß Konsumenten desselben Typs bei streng konvexen Präferenzen in einer Kernallokation sogar identische Güterbündel erhalten?

Der folgende Satz von DEBREU/SCARF (1963) bestätigt EDGEWORTHs Vermutung für Folgen von Replika-Ökonomien mit beliebiger (endlicher) Anzahl von Gütern. Dabei sei für jede Allokation \tilde{x} für die Tauschwirtschaft E die Allokation \tilde{x}_n für die n -Replika E_n definiert durch: $\tilde{x}_n((a, i)) = \tilde{x}(a)$ für alle $a \in A$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Satz: Sei $E: A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^2$ eine Tauschwirtschaft mit streng konvexen, monotonen Präferenzen R_a und mit $e_a \gg 0$ für alle $a \in A$. Dann gilt:

Eine Allokation \tilde{x} ist genau dann WALRAS-Allokation für E wenn für alle natürlichen Zahlen n die Allokation \tilde{x}_n in $C(E_n)$ liegt.

Einen Beweis findet man z. B. auf den Seiten 100 ff. in HILDENBRAND/KIRMAN (1976). Wir wollen hier nur die Beweisidee anhand der EDGEWORTH-Box illustrieren.

Sei $A = \{a, b\}$, $\bar{e} = \tilde{e}(a) + \tilde{e}(b)$. In Abb. 4 repräsentiert \tilde{e} die Anfangsausstattungen. $\tilde{x} = (x_a, x_b) \in C(E)$. Insbesondere ist \tilde{x} erreichbar, d.h. $x_a + x_b = e_a + e_b = \bar{e}$. Dann gilt für die 2-Replika E_2 von E :

$$\tilde{e}_2((a, 2)) + \tilde{x}_2((a, 1)) + \tilde{x}_2((b, 1)) = \tilde{e}_2((a, 2)) + \tilde{e}_2((a, 1)) + \tilde{e}_2((b, 1)).$$

Außerdem gilt wegen der strengen Konvexität von R_a :

$z_a = 1/2 (x_a + e_a) P_a x_a$. Die Konsumenten $(a, 1)$ und $(a, 2)$ können also, wenn sie beide z_a erhalten, dem $(b, 1)$ noch etwas abgeben, so daß der sich gegenüber $\tilde{x}_2((b, 1))$ verbessert, und sie selbst immer noch besser gestellt sind als mit $\tilde{x}(a)$. Die Koalition $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}$ kann sich also gegenüber der Allokation $\tilde{x}_2: A \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ verbessern. Also kann **nicht** gelten: $\tilde{x}_2 \in C(E_n)$.

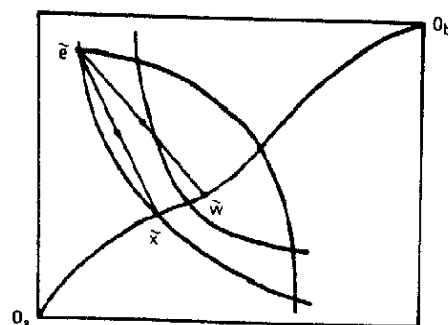


Abb. 4

Charakterisierung von WALRAS-Allokationen durch Kernallokationen der Replika-Ökonomien

Abb. 4 macht deutlich, daß eine Koalition, die sich auf ähnliche Weise gegenüber \tilde{w} verbessern will, größer sein muß. Das ist aber nur möglich für eine n -Replika mit $n > 2$. Sei also $\tilde{w} = (w_a, w_b)$. Man sieht, daß **nicht** gilt: $1/2 (w_a + e_a) P_a w_b$. Allerdings gilt für hinreichend großes k :

$$\frac{k-1}{k} w_a + \frac{1}{k} e_a P_a w_a.$$

Natürlich benötigen die k Konsumenten vom Typ a $k-1$ Partner vom Typ b, da nur so $(k-1)$ mal w_a realisiert werden kann. Man benötigt also eine n -Replika E_n mit $n \geq k$. Auf entsprechende Weise kann jedes \tilde{v} auf der Paretolinie eliminiert werden, für welches die Strecke $[\tilde{v}, \tilde{e}]$ die Indifferenzkurve von Typ a durch \tilde{v} in einem von \tilde{v} verschiedenen Punkt schneidet. Je kürzer die Distanz zwischen \tilde{v} und diesem Schnittpunkt ist, desto größer muß das n sein, damit \tilde{v}_n nicht in $C(E_n)$ liegt. Im Limes bleiben nur die WALRAS-Allokationen übrig.

Frage 5: Wieso läßt sich die Aussage des Satzes von DEBREU/SCARF in Tauschwirtschaften mit streng konvexen Präferenzen in der Form $W(E) = \bigcap_{n \geq 1} C(E_n)$ ausdrücken?

Die Illustration der Beweisidee des Satzes von DEBREU/SCARF zeigte, daß $W(E) \subset C(E_{n+1}) \subset C(E_n) \subset C(E)$. **Der Kern schrumpft also in der Tat mit wachsendem n auf die WALRAS-Allokationen zusammen.** Man erhält aus dieser Charakterisierung der WALRAS-Allokationen einer Tauschwirtschaft E als Kernallokationen aller n -Replika E_n unmittelbar die folgende Formulierung als **Grenzwertsatz für Replika-Ökonomien**:

Grenzwertsatz für Replika-Ökonomien

Sei $E : A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^L$ eine Tauschwirtschaft mit monotonen, streng konvexen Präferenzen, sei E_n für jede natürliche Zahl n die n -Replika von E . Dann gilt:

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein n_ϵ , so daß für alle $n > n_\epsilon$ und für alle $\tilde{x}_n \in C(E_n)$ ein Gleichgewichtspreissystem p_n der n -Replika E_n existiert, derart, daß für alle Konsumenten $(a, i) \in A \times \{1, \dots, n\}$ gilt: $\|\tilde{x}_n(a, i) - \varphi((a, i), p_n)\| \leq \epsilon$.

Dies ist eine **sehr starke Aussage**. Sie besagt, daß in **großen Replika-Ökonomien jede Kernallokation annähernd durch Gleichgewichtspreise dezentral organisiert werden kann**. In hinreichend großen Replika-Ökonomien läßt sich zu jeder Kernallokation ein WALRAS-Gleichgewicht finden, das allen Konsumenten nahezu dasselbe Güterbündel zuordnet wie die betrachtete Kernallokation.

V. Kontinuumsökonomien und kompetitive Folgen

Natürlich bilden Folgen von **Replika-Ökonomien** eine sehr **spezielle** Klasse von Folgen wachsender Ökonomien. Dennoch repräsentiert der **Grenzwertsatz** einen **sehr allgemeinen Sachverhalt**. Eine sehr elegante und knappe Art die Beziehung zwischen Kern und Kernallokationen in großen Ökonomien darzustellen, stammt von AUMANN (1964). Eine große Tauschwirtschaft wird dort als idealisierte Tauschwirtschaft mit einem **Kontinuum von Konsumenten** beschrieben, in der sich das Ergebnis des oben beschriebenen Schrumpfungsprozesses als „Aussage im Limes“ formulieren läßt, nämlich: $W(E) = C(E)$. HILDENBRAND (1974) gab eine Klasse von „rein kompetitiven Folgen“ von Tauschwirtschaften an, die eine solche Kontinuumsökonomie approximieren. In der Tat lassen sich diese Folgen so verallgemeinern, daß auch **jede** Kontinuumsökonomie Grenzwert einer solchen „**kompetitiven Folge**“ von Ökonomien ist (TROCKEL (1976)). Da die **Menge der Gleichgewichtspreise** im allgemeinen **nicht stetig** von exogenen Daten der Ökonomie abhängt, kann die Limes-Ökonomie WALRAS-Allokationen enthalten, die nicht durch WALRAS-Allokationen der Folgen-Ökonomien approximiert werden. Dieser Sachverhalt ist die Ursache dafür, daß **nicht für alle kompetitiven Folgen** ein so starker Grenzwertsatz wie der für Replika-Ökonomien bewiesen werden kann. Ein illustratives Beispiel hierfür, das auf BEWLEY (1973) zurückgeht, findet man auf den Seiten 869 und 870 in HILDENBRAND (1982).

Äquivalenzsatz für Kern und WALRAS-Gleichgewichte

Kompetitive Folgen

Ist aber die Limes-Ökonomie einer kompetitiven Folge von Tauschwirtschaften eine sogenannte „**reguläre Ökonomie**“, dann ist sie insbesondere **Stetigkeitspunkt der Gleichgewichtspreiskorrespondenz**, die den exogenen Daten der Ökonomie die Menge der Gleichgewichtspreise zuordnet. **In diesem Fall läßt sich ein Analogon des Grenzwertsatzes für Replika-Ökonomien beweisen! Da Ökonomien typischerweise regulär sind, beschreibt der Grenzwertsatz eine sehr allgemeine Beziehung zwischen Kern und WALRAS-Allokationen in großen Tauschwirtschaften, nämlich die annähernde Gleichheit.** Dieser Zusammenhang findet in AUMANN's **Kern-Äquivalenzsatz** eine elegante und prägnante Formulierung, die gerade durch den Grenzwertsatz ihre volle Bedeutung erhält. Eine ausführliche Behandlung regulärer Ökonomien findet man in E. DIERKER (1974) (vgl. auch E. DIERKER (1982)). Eine ausführliche Behandlung des Kerns im Kontext großer regulärer Ökonomien enthält H. DIERKER (1975).

Während die Beschäftigung mit den in diesem Abschnitt genannten Ergebnissen erhebliche mathematische Vorbildung erfordert, ist das für das Verständnis des folgenden Satzes nicht der Fall. Der Satz, der auf eine Idee von VIND (1965) zurückgeht, stammt von E. DIERKER (1975).

Abweichend von der bisherigen Regelung normieren wir die Preise so, daß $\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^L \mid \sum_{h=1}^H p_h = 1\}$

der Preisraum ist. Mit $\tilde{a}^h(a)$ bezeichnen wir die h-te Komponente der Erstausrüstung e_a . Für die Tauschwirtschaft

$$E: A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^Q \text{ sei } B(E) = \sup_{h=1, \dots, Q} \sup_{\substack{S \subset A \\ \#S=Q}} \sum_{a \in A} \tilde{a}^h(a)$$

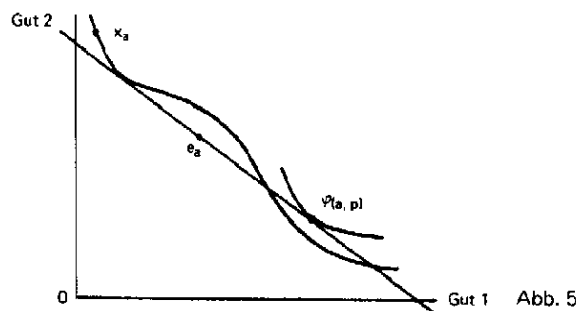
In diese Konstante, $B(E)$, gehen die **Anzahl der Güter** und die **Erstausrüstungen** der Konsumenten, **nicht** aber die **Anzahl der Konsumenten** ein.

Kern-Preissystem

Satz: Für jede Tauschwirtschaft $E: A \rightarrow P \times \mathbb{R}_+^Q$ mit monotonen Präferenzen und jede Kernallokation $\tilde{x} \in C(E)$ existiert ein Preissystem $p \in \Delta$, so daß

$$\max_{a \in A} \{ \sum p \tilde{x}(a) - p e_a \}, \sum_{a \in A} | \inf \{ p z | z R_a \tilde{x}(a) \} - p e_a | \leq 2 B(E)$$

Dieser Satz spielt eine **fundamentale Rolle bei der Herleitung allgemeiner Kern-Grenzwertsätze** im Rahmen kompetitiver Folgen. Dieses „**Kern-Preissystem**“ ist **kein** Gleichgewichtspreissystem. Es garantiert **nicht** die Verträglichkeit der individuellen Konsumpläne, d. h. Angebot gleich Nachfrage. Es sorgt nicht einmal dafür, daß die per capita-Überschußnachfrage klein wird. Es garantiert jedoch, daß bei einer **großen Anzahl von Konsumenten nur wenige einen starken Anreiz haben, von der Kernallokation abzuweichen**. Per capita erzeugt die Nachfrage bei diesem Preissystem **nahezu dieselbe Wertallokation und dieselbe Nutzenallokation** wie die Kernallokation. Man sieht das leicht mit Hilfe von Abb. 5 ein.



VI. Abschließende Bemerkungen

Verträglichkeit individueller Entscheidungen im Gleichgewicht

Ein Gleichgewichtspreissystem einer Tauschwirtschaft ermöglicht die **dezentrale Allokation** der vorhandenen Güter, indem es **Tauschraten** vorschreibt, zu dem die Konsumenten auf **Märkten** ihre **Güter austauschen** können, um auf diese Weise ihre **individuellen Nutzenmaximierungsprobleme unter Nebenbedingungen zu lösen**. Dabei sind die Nebenbedingungen, d. h. die aus der Bewertung der Erstausrüstungen mit dem Gleichgewichtspreissystem resultierenden Budget-Restriktionen gerade so, daß die **Lösungen der individuellen Optimierungsprobleme miteinander verträglich sind und somit zum Ausgleich von Angebot und Nachfrage führen**.

Die dem Gleichgewichtskonzept zugrunde liegende Verhaltensannahme unterstellt, daß die **Individuen den Preis als unbeeinflussbar vorgegeben betrachten**. Diese Annahme ist nur in großen Ökonomien bei „**vollkommener Konkurrenz**“ akzeptabel. So überzeugend und wirksam solch ein Gleichgewicht ist, es erklärt weder die Institution der Märkte noch **wie** die einzelnen Wirtschaftssubjekte miteinander **konkurrieren**. Die Beziehung zwischen Gleichgewichten und Kern erklärt, warum wir in großen Tauschwirtschaften ein Konkurrenzgleichgewicht erwarten können. Die Inklusion $W(E) \subset C(E)$ besagt, daß Kooperation keine Verbesserung gegenüber solchen Allokationen bewirken kann, die durch **dezentrale Organisation** mittels eines Gleichgewichtspreissystems erreicht werden können.

Das **Schrumpfen des Kerns** bei wachsenden Ökonomien **demonstriert den zunehmenden Wettbewerb** und die vermehrten Möglichkeiten, durch Koalitionsbildung gewisse Allokationen abzulehnen, mit dem Effekt, daß der **Einfluß der Individuen abnimmt**. Im **Grenzfall sind die beiden Konzepte äquivalent**, die einzigen akzeptablen Allokationen, die Kernallokationen, sind dann **WALRAS-Allokationen**. **Jede Kernallokation kann dann durch ein Gleichgewichtspreissystem dezentralisiert werden**.

Das Konzept des Kerns ist insbesondere für Ökonomien mit wenigen Konsumenten und überschaubaren und realisierbaren Koalitionsmöglichkeiten sinnvoll. In sehr großen Ökonomien, in denen die konkrete Realisierung von Kernallokationen problematisch wäre, ist nach dem Äquivalenzsatz eine Realisierung über Märkte und Gleichgewichtspreise möglich. In einer Tauschwirtschaft mit Privateigentum als einziger sozialer Institution führt Kooperation durch **uneingeschränkten freiwilligen effizienten Tausch** innerhalb jeder möglichen Koalition, im **Falle sehr vieler Konsumenten** gerade zu den Güterallokationen, die **dezentral, zu durch Gleichgewichtspreise festgelegten Tauschraten**, auf **Märkten** realisiert werden können. In diesem Sinne **erklärt die Äquivalenz von Kern- und WALRAS-Allokationen die Institutionen der Märkte und die vollkommene Konkurrenz**.

Literaturempfehlungen:

AUMANN, R.J.: Markets with a continuum of traders. *Econometrica*. 32/1964, S. 39–50.
 BEWLEY, T.F.: Edgeworth's conjecture. *Econometrica*. 41/1973, S. 425–454.
 BÖHM-BAWERK, E.: Positive Theorie des Kapitals. Innsbruck 1888.
 DEBREU, G.: Theory of Value. New York 1959.
 DEBREU, G.: Existence of competitive equilibrium, in: K.J. ARROW/M.D. INTRILIGATOR (Hrsg.), Handbook of Mathematical Economics, I, Amsterdam, 1982.

- DEBREU, G./SCARF, H.: A limit theorem on the core of an economy. *International Economic Review*, 4/1963, S. 235–246.
- DIERKER, E.: *Topological Methods in Walrasian Economics*. Berlin 1974.
- DIERKER, E.: Gains and losses at core allocations. *Journal of Mathematical Economics*, 2/1975, S. 119–128.
- DIERKER, E.: *Regular Economics*, in: K.J. ARROW/M.D. INTRILIGATOR (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Economics*, I, Amsterdam 1982.
- DIERKER, H.: Equilibria and core of large economies. *Journal of Mathematical Economics*, 2/1975, S. 155–169.
- EDGEWORTH, F.Y.: *Mathematical psychics*. London 1881.
- HILDENBRAND, W.: *Core and equilibria of a large economy*. Princeton 1974.
- HILDENBRAND, W.: *Core of an Economy*, in: K.J. ARROW/M.D. INTRILIGATOR (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Economics*, I, Amsterdam 1982.
- HILDENBRAND, W./KIRMAN, A.P.: *Introduction to equilibrium analysis*. Amsterdam 1976.
- SHUBIK, M.: Edgeworth market games, in: R.D. LUCE/A.W. TUCKER (Hrsg.), *Contributions to the theory of games*, IV, *Annals of Mathematical Studies*, 40, Princeton 1959.
- TROCKEL, W.: A limit theorem on the core. *Journal of Mathematical Economics*, 3/1976, S. 247–264.
- VON NEUMANN, J./MORGENSTERN, D.: *Theory of games and economic behavior*. Princeton 1944.
- WALRAS, L.: *Éléments d'Économie Politique Pure*. Lausanne 1874.

Die Beantwortung der Fragen erfolgt im WISU-Repetitorium.