

## LOGISCHE ANALYSE KOGNITIVER ORGANISATIONSSTRUKTUREN: ANWENDUNG EINES WISSENSREPRÄSENTATIONSMODELLS ZUR ERKLÄRUNG MATHEMATISCHEN VERHALTENS

Ipke Wachsmuth, Osnabrück

### 1. Einleitung

In neuerer Zeit wird in der einschlägigen Literatur vermehrt die kritische Rolle der geistigen Repräsentation des Wissens der Schüler aufgegriffen. Dabei ist von Einschränkungen des Anwendungsbereichs erworbener kognitiver Strukturen die Rede, die SEILER (1973) treffend als "Bereichsspezifität" charakterisiert hat. Thematisierungen dieses Phänomens finden sich in der Literatur z.B. als "frames" (DAVIS 1980), "microworlds" (LAWLER 1981) und - unter Einbeziehung auch sozial-interaktiver Aspekte - als "Subjektive Erfahrungsbereiche" (BAUERSFELD 1983).

Gerade im Mathematikunterricht, wo häufig unterschiedliche Wissensbereiche für die erfolgreiche Bewältigung einer mathematischen Situation koordiniert werden müssen, wird immer wieder festgestellt, daß beim Schüler eine kohärente Organisation des mathematischen Wissens fehlt. Es entwickelt sich offenbar zunächst in isolierten Bereichen, die mehr oder weniger auf den situativen Kontext ihres Erwerbs beschränkt sind (vgl. BAUERSFELD 1983 und ANDELFINGER 1984). Die unverbundene Existenz von konfligierenden Wissensbereichen bildet eine mögliche Ursache für beobachtete Diskrepanzen im Verhalten von Schulkindern in Situationen, die zwar von den gleichen mathematischen Inhalten, aber unterschiedlichen Einkleidungen und Kontextmerkmalen geprägt sind (z.B. HASEMANN 1982). Wie STEINER (1984) unter Bezug auf Ergebnisse des englischen Projekts "Concepts in Secondary Mathematics and Science" hervorhebt, zeigt sich, "wie stark auch die Lehrer Täuschungen darüber unterliegen, was und wie Kinder im Unterricht lernen (...), daß im allgemeinen die Mehrheit und nicht eine Minderheit der Schüler das Unterrichtete nicht erwartungsgemäß erfaßt hat und demgemäß auch nicht anwenden kann, daß Schüler häufig *idiosynkratische Methoden und Regeln* verwenden und beibehalten und daß die Lehrer häufig an diesen Tatsachen vorbeiuerrichten (...)."

Orientierte sich die Gestaltung der Curricula in der Vergangenheit vorrangig an einer didaktisch-methodischen Aufbereitung des "Stoffs", wobei die

Sequenzierung den logischen Aufbau der Mathematik widerzuspiegeln suchte, so stellen die oben angesprochenen Befunde das resultierende "lineare" Curriculum letztlich in Frage. Wenn das über den Zeitraum mehrerer Schuljahre erworbene Wissen eines Schülers sich zu einem kohärenten Ganzen fügen soll, ist es dringend notwendig, Einsichten zu gewinnen über die Prinzipien der Strukturierung von im Gedächtnis repräsentiertem Wissen, und über Möglichkeiten, auf die Entwicklung und Vernetzung von Wissensstrukturen gezielt Einfluß zu nehmen.

## 2. Ein Modell der Wissensrepräsentation

In der Osnabrücker Arbeitsgruppe LAKOS (*"Logische Analyse kognitiver Organisations-Strukturen"*) wird in Zusammenarbeit zwischen Mathematikdidaktik und Linguistik ein Modell zur Repräsentation und Organisation bereichsspezifischen Wissens im Gedächtnis präzisiert, das Phänomene des kognitiven Verhaltens von Schülern beim Einsatz von Fachwissen in Anwendungssituationen erklären helfen soll. Der Terminus "logische Analyse" bezieht sich auf die Erfassung von Strukturen und Mechanismen der Wissensorganisation mit Mitteln der formalen Logik. Die Präzisierung des Modells erfolgt in der aus der *Artificial Intelligence* stammenden Technik des "logischen Programmierens" als Computerimplementation in einem in Osnabrück zur Verfügung stehenden Prolog-System (GUST/GUST 1984).

Der Zweck des Modellierens von Wissensstrukturen eines Schülers ist es, Hypothesen über seine Mißkonzeptionen und suboptimale Leistung zu gewinnen, so daß korrigierend darauf Einfluß genommen werden kann. Eine erste lauffähige Modellausbaustufe liegt mit dem System LAKOS.1 vor. Dieses System kann in einer standardisierten Form Dialoge mit einem Benutzer abwickeln. Dabei übernimmt der Computer die Rolle eines modellierten Individuums und beantwortet von diesem Standpunkt aus Fragen (oder Aufforderungen) durch Ausgabe auf dem Terminal. Die Systemantworten stehen stellvertretend für die im Situationskontext geäußerten Handlungen oder Sprechhandlungen des modellierten Individuums, wobei die Reaktionen des Systems nicht in einer Wahl aus vorprogrammierten Antwortmöglichkeiten (im Sinne von Stimulus-Response-Verhalten) bestehen, sondern *ad-hoc als wissensbasierte Prozesse erzeugt* werden. Mittels Warum-Fragen kann das Modell zur Begründung seiner Antworten aufgefordert werden. Einzelheiten zur Arbeitsweise finden sich in (WACHSMUTH 1985).

Als Grundlage der Modellbildung wird angenommen, daß die als Resultat von Wissenserwerbsprozessen ausgeprägten "Wissensstrukturen" im menschlichen Gedächtnis sich in (mindestens) folgender Weise konstituieren: 1. Als in sich abgeschlossene Wissensbereiche ("Wissensinseln") und 2. Verbindungen zwischen diesen ("organisierendes Netzwerk"). Demgemäß sind die Wissens-einträge im Langzeitgedächtnis des Modells in Form eines *Wissensnetzes* organisiert.

Das Modell thematisiert zwei verschiedene Bereiche, die als zentral für das mathematische Leistungsvermögen eines Schülers eingeschätzt werden: Die *linguistische Kompetenz* und die *Handlungskompetenz*. Demgemäß enthalten die Knoten des Netzes im wesentlichen zwei Typen von Einträgen: Sprachwissen, d.h. Wörter mit zugeordneten (dem System verständlichen) Bedeutungen, und Fachwissen in Form von abstrakten Regeln, die man als Abstraktionen von Handlungs- und Denkweisen (etwa im Sinne von PIAGETs Schemata) interpretieren kann. Durch die Art der Vernetzung sind die *Wissensstrukturen* (also die Beziehungen der Schemata untereinander) festgelegt. Der Zugriff auf das Wissensnetz unterliegt dabei Beschränkungen: Nur auf in der konkreten Situation *aktiviertes Wissen* kann zugegriffen werden.

Erste Spezifikationen des Modells stützen sich auf umfangreiches empirisches Material aus einer in den USA durchgeführten Langzeitentwicklungsstudie mit Kindern des 4./5. Schuljahrs ("Rational Number Project"; näheres siehe bei WACHSMUTH 1984). Anhand von Unterrichtsprotokollen und Interviewtranskripten wurden hypothetische kognitive Strukturen einer Teilnehmerin des Unterrichtsexperiments in Form eines Wissensnetzes präzisiert, um einen momentanen psychologischen Verhaltensausschnitt im Bereich "Größenvergleich von Bruchzahlen" zu modellieren.

Der hier präsentierte Ansatz zur Erklärung mathematischen Verhaltens mittels eines kognitiven Modells richtet sich darauf, rationale ("logische") Erklärungen für scheinbar irrationales Verhalten anzubieten. Die Analyse von Prozessen des Wissensensatzes kann im begrifflichen Rahmen des Wissensrepräsentationsmodells erfolgen, wobei Einzelaspekte zwecks Präzisierung der Analyse simuliert werden. Dies soll hier exemplarisch dargestellt werden.

### 3. Ein Fall

Bei der Bearbeitung eines komplexen Problems, das die Anwendung von Bruchzahlkonzepten erforderte, vertrat die elfjährige Schülerin "Terri" (Name geändert) mehrfach wechselnde Ansichten über die Größenbeziehung zweier Bruchzahlen, jedesmal mit einer "mathematischen" Begründung für ihre Antwort. Der nachstehend dokumentierte Dialog mit Terri ermöglicht Rückschlüsse auf bei ihr vorhandene situationsspezifische Wissensbereiche, die in bezug auf die dort bewältigbaren Problemstellungen im Wettstreit stehen. Aufgrund bestimmter Kontextmerkmale der jeweils aktuellen Situation können sie jede für sich allein aktiviert werden; es mangelt jedoch an einer situationsübergreifenden "Verbindung". Als sich in der Interviewsituation in unterschiedlichem Kontext gegebene Antworten als unvereinbar erweisen, kommt es zu Konflikten.

Über die Problemaufgabe sei nur angedeutet, daß dort Bruchsymbole  $a/b$  als Rezept für wasserverdünnte Mischungen aus  $a$  Teilen schwarzer Tinte in  $b$  Teilen Gesamtlösung zu interpretieren waren, wobei zwölf Kärtchen mit Bruchsymbolen den vorgestellten Grauwerten nach (als Indikator für die Zahlwerte der Brüche) entlang einer elfstufigen Grauwertskala zunehmender Schwärze geordnet werden sollten. Tatsächlich mußten die Kinder natürlich ihr Wissen um die Äquivalenz und Größenordnung von Brüchen etc. aktivieren und koordiniert einsetzen, was einigen auch recht gut gelang. Wenig erfolgreich im Sinne der Aufgabe war Terri, deren Lösung eine "lexikalische" Ordnung der Brüche wie folgt aufwies:

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100%	
$\frac{0}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{15}$

Interessant in dem anschließenden Interview war die offensichtliche Existenz isolierter "Wissensbereiche" in Terris Denken. Vorauszuschicken ist noch, daß Terri in einer Reihe von regelmäßig wiederholten Interviews häufig die Ansicht geäußert hatte, daß zwei Brüche "gleich" seien, wenn die Nenner gleich sind (!); in diesen Interviews wurden jeweils zwei Brüche, als Symbole geschrieben und gesprochen, mit einer stereotypen Abfolge von Fragen vorgelegt wie: *1/3 und 1/4, sind die gleich oder ist einer kleiner? (Falls zweite Antwort) Welcher ist kleiner? Warum?* Da auch in der - von der stereotyp fragenden Situation wesentlich verschiedenen - Problemsituation gleichnamige Brüche vorkamen, war Terris oben abgedruckte

Lösung in diesem Punkt besonders bemerkenswert.

Der im Original englischsprachige Dialog wurde hier ins Deutsche übertragen. Terris erste Antwort bezieht sich auf die Frage, warum sie 0/20 ans weiße Feld der Grauwertskala gelegt habe; sie läßt ein bei ihr zumindest anfängliches Verständnis der Aufgabensituation annehmen:

0. TERRI: Weil da keine schwarze Tinte drin wäre, keine schwarze Tinte, also wäre es klares Wasser.

*Es folgen jetzt einige Fragen über die Lage anderer Brüche; dann fragt der Interviewer, ohne auf Terris Lösung besonders aufmerksam zu machen:*

1. INTERVIEWER: Sag mal, Terri, was meinst du über 6/15 und 12/15?
2. TERRI: Die sind gleich, gleich (*lacht*).
3. INTERVIEWER: OK, du hast sie doch aber an verschiedene Stellen gelegt, warum hast du das gemacht?
4. TERRI: Darum! So müßte das gemacht werden, hab ich gedacht! (*ruckelt und bringt Tabelle durcheinander. Kurzer Disput darüber, dann:*)
5. INTERVIEWER: Ich würde immer noch gern wissen: du sagst, sechs-fünftel und zwölf-fünftel sind gleich?
6. TERRI: Richtig.
7. INTERVIEWER: Aber du hast sie auf verschiedene Teile gelegt...
8. TERRI: Weil sechs vor zwölf kommt, da dachte ich, so macht man das...
9. INTERVIEWER: OK - hast du an Grauwerte gedacht, als du das gemacht hast?
10. TERRI: Ja, so irgendwie schon... (*nicht überzeugend*)
11. INTERVIEWER: Was wäre dunkler? Sechs-fünftel oder zwölf-fünftel?
12. TERRI: Zwölf-fünftel.
13. INTERVIEWER: OK, und welcher Bruch wäre größer?
14. TERRI: Zwölf-fünftel.
15. INTERVIEWER: Und wenn ich dich frage: Sechs-fünftel, zwölf-fünftel, sind die gleich oder ist einer kleiner?
16. TERRI: Er ist kleiner.
17. INTERVIEWER: Welcher ist kleiner?
18. TERRI: Sechs... ähm... fünftel.
19. INTERVIEWER: Und warum, sagtest du, ist er kleiner?
20. TERRI: Weil er... oh! (*schlägt die Hand vors Gesicht und seufzt*)  
Nein, sie sind gleich. Weil sie den gleichen Nenner haben.

#### 4. Ein Erklärungsansatz

Bei längerem Nachdenken über diesen auf den ersten Blick (auch für den Interviewer) überraschenden Dialog blieb schließlich die folgende Frage offen: Was geschah eigentlich mit Terri, als sie - offenbar als Folge einer auf die Interpretation durch Grauwerte gestützten Inferenz (Zeile 11-14) und nicht mehr auf der Basis ihrer "lexikalischen" Ordnungsregel - zu der Meinung gelangte,  $12/15$  sei größer als  $6/15$ ? Stabilisierte sich diese Erfahrung zu einer Einsicht, die auch bei bewußter Anspielung auf den Situationskontext, in dem Terri normalerweise diese Brüche als "gleich" bezeichnet hätte (Zeile 15), persistierte (Zeile 16-18)? Die Antwort lautet offensichtlich "nein", denn als Terri zur *Begründung* aufgefordert wird (Zeile 19), bricht diese ihre Meinung zusammen, und sie kehrt zu der früher vertretenen zurück (Zeile 20).

Das Bestreben, eine logische Erklärung für dieses scheinbar irrationale Verhalten zu finden, verdichtete sich zu der Frage: Welche Eigenarten in Terris Denken könnten dieses Verhalten produziert haben? und schließlich: Unter welchen Annahmen über Terris Wissensstruktur ließe sich dieses Verhalten mit dem Computermodell reproduzieren?

Ohne daß damit gesagt sein soll, daß Terri grundsätzlich wie ein Computer funktioniert, ergäbe die Reproduktion einiger ihrer Verhaltensweisen doch ein deutlicheres Empfinden dafür, woran es gelegen haben *könnte* (i.S.v. "learning to generate is learning to understand"). Was Terri hier tut, scheint bei näherem Hinsehen durchaus System zu haben (auch die fehlerfreie Demonstration ihrer lexikalischen Anordnung der Bruchkärtchen unterstützt diese Auffassung). Gelänge es, aufgrund der Interaktion einer bestimmaren Menge von gesetzmäßigen "Partikeln" in Terris Denken derartige Verhalten zu generieren, so würde dies sicherlich zum Verständnis von Terris Handeln beitragen.

Anhand der Beobachtungen an Terri wurden also identifizierbare Partikel in ihrem Denken formal präzisiert, z.B. wurde ihre Eigenart, Brüche mit gleichen Nennern als gleich zu bezeichnen, in folgende Regel gefaßt:

$$\text{RULE TRUE } (= (*X *Y) (*U *V)) \Leftarrow (\text{EQ } *Y *V)$$

Dies allein reicht aber noch nicht; beim Einprogrammieren der Regel in das

Wissensnetz wurde ihr ein Index hinzugefügt, der ausdrückt, in welchem Kontext ("Fokus") diese Regel benutzbar ist. Aktiviert wird der Kontext wiederum dadurch, daß die Bedeutung von situationsansteuernden *Schlüsselwörtern* (wie "gleich oder einer kleiner") nur hier und in keinem anderen Kontext verfügbar ist (im einzelnen siehe WACHSMUTH, 1985).

Es wurden also die "Wissenselemente" Terris als logische Aussagen formuliert und in indizierten "Wissensknoten" gespeichert, wobei jeweils die in einem bestimmten Kontext als zugreifbar beobachteten Wissenselemente in einem Knoten zusammengefaßt wurden. Mit dem solcherart spezifizierten Computermodell LAKOS.1 konnten dann einem diagnostischen Interview nachempfundene Dialoge wie der folgende generiert werden:

I'M TERRI > 6 / 15 AND 12 / 15 , EQUIVALENT?

DON ' T UNDERSTAND!

I'M TERRI > 6 / 15 AND 12 / 15 , EQUAL?

YES , 6 / 15 AND 12 / 15 , EQUAL! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

I'M TERRI > WHY?

BECAUSE (EQ 15 15)! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

I'M TERRI > 12 / 15 AND 6 / 15 , ARRANGE-IN-ORDER!

6 / 15 AND 12 / 15 ,! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 2:\*1)

I'M TERRI > 6 / 15 AND 12 / 15 , WHICH-ONE-LESS?

6 / 15 AND 12 / 15 , FIRST-LESS! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 2:\*1)

I'M TERRI > WHY?

BECAUSE (LESS 6 12)! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 2:\*1)

I'M TERRI > STM!

```
(! (BECAUSE TRUE (( (6 15) (12 15)) (= (LESS 6 12)))) (? (WHY))
(! (( (6 15) (12 15))) (? ((OR ( ) (6 15) (12 15))))
(! (DUMMY (6 15) (12 15))) (! (ORDER (12 15) (6 15)))
(! (BECAUSE TRUE (= (6 15) (12 15)) (= (EQ 15 15)))) (? (WHY))
```

I'M TERRI > 6 / 15 AND 12 / 15 , EQUAL OR ONE-LESS?

6 / 15 AND 12 / 15 , ONE-LESS! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

I'M TERRI > 6 / 15 AND 12 / 15 , WHICH-ONE-LESS?

6 / 15 AND 12 / 15 , FIRST-LESS! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

I'M TERRI> WHY?

<<< CONFLICT >>> (< (6 15) (12 15)>) BUT (= (6 15) (12 15))  
BECAUSE (EQ 15 15)! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

I'M TERRI> 6 / 15 AND 12 / 15 , ONE-LESS?

NO , 6 / 15 AND 12 / 15 , EQUAL! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

I'M TERRI> WHY?

BECAUSE (EQ 15 15)! \_\_\_\_\_ FOCUS (F 1:\*1)

Jede vom Computer generierte Antwort enthält einen Hinweis auf den Wissensbereich, auf dessen Grundlage die Antwort gebildet wurde. Z.B. gibt "FOCUS (F 2:\*1)" Auskunft darüber, daß ein "Unterknoten" des Wissensbereichs über Brüche (Fractions) aktiviert wurde.

Das Computermodell, während es Terri's Standpunkt vertritt (angedeutet durch die Systemmeldung "I'M TERRI"), zeigt instabiles Verhalten in einem mehrfachen Wechsel seiner Ansicht über die Größenbeziehung der Brüche 6/15 und 12/15. Etwa in der Mitte des Dialogs ist der Inhalt des Kurzzeitgedächtnisses (STM) ausgedruckt. Aus diesem ist entnehmbar (siehe 2. Zeile), daß die augenblickliche Ansicht, 6/15 sei kleiner als 12/15, in den (durch die Schlüsselworte "Equal or one less?") erneut aktivierten Kontext (F 1) persistiert. Hier ist diese Ansicht aufgrund des Wissens im Kurzzeitgedächtnis zwar *wiederholbar*, jedoch *nicht mehr begründbar* (d.h. aus dem nun aktivierten Langzeitwissen ableitbar). Die Frage wird beantwortet wie vorher, jedoch führt die anschließende Warum-Frage zu einem kognitiven Konflikt.

Die oben dokumentierte tatsächliche Situation ist komplexer und erfordert einen weitergefaßten, über den kognitiven Aspekt hinausgehenden Erklärungsrahmen; die von Terri getroffenen Handlungsentscheidungen hängen sicherlich auch vom Wechselspiel zwischen Interviewer und Probandin ab. Jedoch, was immer Terri sich zu tun entschließt - es muß auf etwas beruhen, "was ihr in den Sinn kommt", das heißt, auf ihr zur Verfügung stehendem Wissen. Terris *Handlungsmöglichkeiten* sind also durch das Repertoire ihres Wissens begrenzt; auch Fehlhandlungen beruhen auf einem - möglicherweise zweckentfremdeten - Einsatz des bei ihr vorhandenen Wissens.



Gestützt auf das Modell, könnte Terris Verhalten folgendermaßen erklärt werden: Im Kontext des "Ordnen" von Brüchen (was für sie offensichtlich nicht ein Ordnen dem Bruchzahlwert nach bedeutet), hält Terri die Brüche  $6/15$  und  $12/15$  für verschieden, da die Ordnungsbeziehungen zwischen den *ganzen* Zahlen in Zähler und Nenner hier das Entscheidungskriterium sind. Ist dies der fokussierte Kontext, ordnet Terri  $6/15$  vor  $12/15$ . Im Kontext der "gleich-oder-einer-kleiner"-Fragen hält Terri die Brüche für gleich, wobei hier die Nennergleichheit das entscheidende Kriterium ist. Bei dem Sinn nach gleichen Fragestellungen kommt Terri zu zwei unterschiedlichen Interpretationen der Situation, für die ihr verschiedene Handlungsformen zur Verfügung stehen.

Zu betonen ist die kritische Rolle der sprachlichen Dimension in dieser Episode. Wie anzunehmen ist - und das Computermodell präzisiert dies - führen bestimmte Schlüsselworte dazu, daß Terri ihre Interpretation der Situation mehrfach ändert. Das überraschende Verhalten Terris gegen Ende des Dialogexzerpts (Zeile 16-18 im Transkript) dagegen ist komplexeren Ursprungs: Vermutlich ist die unmittelbar vorher (Zeile 11-14) gebildete Ansicht,  $12/15$  sei größer als  $6/15$ , ihr noch "gegenwärtig" (im Computermodell ist sie noch im Kurzzeitgedächtnis), als sie mit absichtsvoller Wahl von Schlüsselworten an den "gleich-oder-einer-kleiner"-Kontext erinnert wird. In Einklang mit der vorhergehenden Antwort sagt sie noch,  $6/15$  sei kleiner. Jedoch fehlt ihr in diesem Kontext die Basis für eine Begründung (und die vorher durchlaufene Kette von Inferenzen kann oder will sie nicht reproduzieren). So scheint es nachgerade zwingend, daß sie wieder zu ihrer früheren - von ihr begründbaren - Ansicht findet.

##### 5. Eine vorläufige Schlußfolgerung

Auf Basis der Hypothese über Terris augenblickliche kognitive Struktur bezüglich des Größenvergleichs von Brüchen (formuliert als Spezifikation des Wissensnetzes im Computermodell) ist es möglich, eine Diagnose über den Ursprung ihres Fehlverhaltens zu stellen und Vermutungen über gezielte Maßnahmen zur Förderung ihrer kognitiven Entwicklung anzustellen. Es sollte klar sein, daß die folgenden Bemerkungen vorläufiger Natur sind und weiterer Diskussion oder Kritik bedürfen.

Das Verhalten des Modells, das aus der Kenntnis des Wissensnetzes erklärt werden kann, erhärtet die Vermutung, daß bei der Schülerin situationspezifische Wissensbereiche in bezug auf die dort bewältigbaren Problemstellungen im Wettstreit stehen. Aufgrund bestimmter Kontextmerkmale der jeweils aktuellen Situation können sie jeder für sich allein aktiviert werden; die Widersprüche lassen jedoch keine situationsübergreifende Verbindung zu. Das Resultat sind die beobachteten Instabilitäten in Terris Verhalten.

Solange ihr Wissensnetz in der augenblicklichen Form unverändert fortbesteht, kann Terris Verhalten sich nicht stabilisieren, da eine Grundlage dazu fehlt. Also muß ihr Wissensnetz eine Änderung erfahren. Am einfachsten wäre es, wenn die "falschen" Regeln sich einfach auslöschen ließen. Aufgrund (hier nicht diskutierter) zunehmender Evidenz aus der psychologischen Forschung muß angenommen werden, daß dies nicht möglich ist. Folglich muß es darum gehen, den *Einfluß* "falscher" Regeln unter Kontrolle zu bringen.

Das Modell legt den Gedanken nahe, daß das Verhalten dadurch geändert werden kann, daß ein neuer Knoten im Wissensnetz eingeführt wird, der Information darüber enthält, welcher Regeltyp in einer Situation *nicht* anzuwenden ist (d.h. die Anwendung einer solchen Regel abfängt). Tatsächlich bedarf es in Terris Fall einer differenzierenden Änderung ihrer Vorstellung (i.S. zugeordneter Handlungsformen) von dem Wort "ordnen" und dem Wort "gleich" im Kontext von Brüchen, d.h. der Einsicht, daß andere Kriterien als ein unmittelbarer Vergleich ganzer Zahlen in Nenner oder Zähler anzulegen sind.

Es wird somit der Vorschlag gemacht, daß sich der Effekt alternativer Interpretationsrahmen dadurch kontrollieren lassen könnte, daß ein neuer, "höherer" Knoten im Wissensnetz etabliert wird, der Zugang zu *allen* alternativen Möglichkeiten hat, die Daten in einer Situation zu interpretieren ("Bewußtsein über das Interpretationspektrum"), zusammen mit einer Regel, die eine angemessene Diskrimination ermöglicht (Inhibition "falscher" Interpretationen).

Man sollte bei solcher Argumentation jedoch Vorsicht walten lassen: Die Installation einer Inhibition im menschlichen Denken scheint nicht einfach im Hinzulernen einer neuen Regel zu bestehen. Die Vermutung liegt nahe,

daß Zugangsstrukturen selbst instabil sein können, also Rückfälle denkbar sind. Das Phänomen der "Bereichsspezifität" läßt erwarten, daß stabile Leistung stets an klassifizierbare Situationen gebunden und nicht ohne weiteres auf bisher nicht angetroffene Situationen verallgemeinerbar ist.

Auf der Sichtweise des Modells scheint ein möglicher Weg zur Erzielung verlässlicher Leistung in einem breiteren Bereich der folgende zu sein: Viele Knoten, die spezifische Situationen repräsentieren, für die bestimmtes Wissen relevant ist, müssen einem Knoten mit Regeln, die korrekte Leistung in dieser Klasse von Situationen garantieren, untergeordnet werden. Dann würden diese Regeln für jeden untergeordneten Knoten, der durch Situationsmerkmale aktiviert wird, "sichtbar", d.h. anwendbar werden. D.h. je mehr spezifische Situationen in Knoten repräsentiert sind, die mit einem Knoten, der eine abstrakte Handlungsform für eine Klasse von Situationen enthält, verbunden sind, desto größer die Chance, daß dieses Wissen durch eine spezifische Situation aktiviert wird. Je mehr Klassen von Situationen in dieser Weise im Wissensnetz repräsentiert sind, desto "situationsunspezifischer" das Wissen.

In der Praxis würde dies bedeuten: Der Umgang mit den "zu verstärkenden" Regeln muß in vielen Situationen erfahren werden, die die bisher bei falscher Regelanwendung angetroffenen ebenso enthalten wie - wahrnehmungsmäßig möglichst verschiedene - neue. Alternative Interpretationsrahmen müssen thematisiert, die Klassifizierung von Situationen geübt werden.

Komplementiert durch empirische Forschung, könnten Computermodelle der Artificial Intelligence bei der Präzisierung von Prinzipien des Wissenserwerbs und -einsatzes einen wichtigen Beitrag leisten. Fortgesetzt im oben angedeuteten Sinne, ließe sich der Beitrag kognitiver Modelle auf die grundsätzliche Erfassung von Strukturen in der Entwicklung von mathematischen Fähigkeiten ausweiten. Dies läßt hoffen, daß grundlegende Aufschlüsse über verbesserte Lehraktivitäten zur Stabilisierung optimalen Wissenseinsatzes in breiten Anwendungsbereichen erlangt werden können.

## Literatur

- Andelfinger, B.: Arithmetische und algebraische Lernerkonzepte. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1984, 71-74.
- Bauersfeld, H.: Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld/H. Bussmann/G. Krummheuer/J.H. Lorenz/J. Voigt (Hrsg.): Lernen und Lehren von Mathematik - Analysen zum Unterrichtshandeln II. Köln: Aulis 1983, 1-56.
- Davis, R. B.: The postulation of certain specific, explicit, commonly-shared frames. The Journal of Mathematical Behavior, 3/1980, 1, 167-199.
- Gust, B./Gust, H.: Einführung in das PROLOG-System MLOG (vorläufige Fassung). Osnabrück 1984.
- Hasemann, K.: Modelle zur Beschreibung von Denkprozessen bei Schülern der Sekundarstufe I, Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P, Heft 39, 1982.
- Lawler, R. W.: The progressive construction of mind. Cognitive Science, 5/1981, 1, 1-30.
- Seiler, T. B.: Die Bereichsspezifität formaler Denkstrukturen - Konsequenzen für den pädagogischen Prozeß. In: K. Frey/M. Lang (Hrsg.): Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht. Bern: Huber, 1973.
- Steiner, H.: "Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten" - Informationen zum Forschungshintergrund der Tagung aus der Sicht der Mathematikdidaktik. Bielefeld 1984.
- Wachsmuth, I.: Entwicklung des Bruchzahlverständnisses bei Kindern - Bericht über ein klinisches Unterrichtsexperiment in den USA 1982-83. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1984, 368-371.
- Wachsmuth, I.: LAKOS - Ein Modell der Wissensrepräsentation zur Erklärung kognitiven Verhaltens. In: H. Mandl/P.M. Fischer (Hrsg.): Lernen im Dialog mit dem Computer. München: Urban & Schwarzenberg, 1985.