

Ipke WACHSMUTH, Osnabrück

Entwicklung des Bruchzahlverständnisses bei Kindern -

Bericht über ein klinisches Unterrichtsexperiment in den USA 1982-83

Das "Rational Number Project" ist ein in Zusammenarbeit von Forschungsgruppen an verschiedenen US-amerikanischen Universitäten vorangetriebenes Forschungsprojekt, das bis 1983 von der National Science Foundation gefördert wurde (eine Fortsetzung ist zur Zeit in der Planung). Im Anschluß an ein 1980/81 durchgeführtes Pilotprojekt hat der Verfasser zusammen mit M. Behr (Northern Illinois University) und T. Post (University of Minnesota) von 1981 bis 1983 eine Langzeitentwicklungsstudie über den Erwerb von Rationalzahlkonzepten vorbereitet und durchgeführt. In dem vorliegenden Bericht soll der Forschungsansatz vorgestellt und ein Ausblick auf Ergebnisse gegeben werden.

Im einzelnen sollten Einsichten gewonnen werden darüber: (1) wie verschiedene Teilkonzepte von rationalen Zahlen (z.B. Brüche, Verhältnisse, Quotienten) beim Schüler allmählich differenziert werden und zu einem entwickelten Verständnis von rationalen Zahlen integriert werden; (2) wie verschiedene Repräsentationsformen (z.B. didaktisches Material, Abbildungen, Realweltsituationen, gesprochene und geschriebene Symbole) während der allmählichen Entwicklung von Rationalzahlvorstellungen zusammenwirken; (3) wie eine Reihe von theoriegestützten pädagogischen Interventionen diese Entwicklung beeinflussen kann.

Verteilt über das 4. und 5. Schuljahr wurden von Januar 1982 bis Januar 1983 zwei Schülergruppen an Elementary Schools in DeKalb/Illinois und in Minneapolis/Minnesota von den Projektdurchführenden selbst täglich unterrichtet. Die Gruppe in DeKalb bestand aus 8 ausgewählten Schülern von sehr niedrigem bis sehr hohem mathematischen Leistungsvermögen. Die Gruppe in Minneapolis war ein "normaler" Klassenverband von 34 Schülern mit relativ homogenem Leistungsbild (die mittlere von drei leistungsdifferenzierenden Parallelklassen). Unterricht und Testprozeduren in beiden Lerngruppen wurden weitestgehend koordiniert. Die Lernprozesse wurden mit den Methoden der klinischen Unterrichtsforschung aufgezeichnet.

DER "KLINISCHE ANSATZ" IM RATIONAL NUMBER PROJECT

Eine Grundlage für die kontrollierte Beobachtung von Lernprozessen bietet das sog. Unterrichtsexperiment. Diese Methode hat ihren Ursprung in der sowjetischen Unterrichtspsychologie und soll Aufschlüsse erlauben über

die kognitiven Strukturen des Probanden, während sie konstruiert werden. Das Ziel ist die systematische Rekonstruktion von Lernprozessen, die unter dem Einfluß pädagogischen Handelns auftreten. Die Daten werden in "klinischer" Manier gesammelt, durch tagebuchartiges Registrieren von schriftlichen und verbalen Äußerungen der Schüler während des Unterrichts, und später nach qualitativen Gesichtspunkten ausgewertet. Grundsätzlich ist ein solches Unterrichtsexperiment langzeitlich und umfaßt die fortwährende Modifikation von Unterrichtsplänen während des Ablaufs, um Erkenntnisse und Hypothesen aus gesammelten Beobachtungen einfließen lassen zu können. Dieses Vorgehen erlaubt dem Experimentator die Aufdeckung der kognitiven Veränderungen, die unter dem Einfluß des Unterrichts auftreten, und bietet zugleich die Möglichkeit, dieselben Schüler in der weiteren Entwicklung ihrer Denkprozesse verfolgen zu können. Der angebotene Unterricht soll dabei dem Schüler vielfältige Möglichkeiten bieten, die neu gelernten Dinge zu durchdenken und mit dem bisherigen Wissen zu verknüpfen.

In Verfolgung von Dienes' Variations-(multiple embodiment)-Prinzip beinhaltet der theoriegestützte experimentelle Unterricht [1] den sorgfältig geplanten Einsatz von vielfältigem didaktischen Material. Eine besondere Rolle spielten Übersetzungen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen von rationalen Zahlen, die die Schüler häufig vorzunehmen hatten. Gemäß des Prinzips der mathematischen Variabilität von Dienes waren dabei die folgenden Rationalzahl-Teilkonzepte eingeschlossen: Teil-Ganzes, Quotient, Maß und Verhältnis. Über den gesamten Unterrichtszeitraum hinweg hatten die Schüler ausführliche Erfahrungen mit Bruchäquivalenzen und der Ordnung von Bruchzahlen sammeln können [2].

Die Tagebuchaufzeichnungen über das Verhalten der acht Probanden aus DeKalb werden ergänzt durch sämtliche Arbeitsblätter und intime Kenntnis der Schüler aus dem täglichen Unterricht. Neben einer Reihe von schriftlichen und psychologischen Tests für sämtliche Probanden beider Gruppen bildeten sie den Hintergrund zur Konzipierung und Auswertung der hauptsächlichsten Form der Datenerhebung, des klinischen Interviews. Diese Methode geht auf Piaget zurück und wurde mit dem Anliegen entwickelt, die beim Lernen auftretenden kognitiven Prozesse des individuellen Schülers - die Ursachen für sein Handeln - in gewissen Umfang erfassen zu können. Während der gesamten Laufdauer des Unterrichtsexperiments wurden im Abstand von drei bis vier Wochen solche Interviews mit sämtlichen acht Probanden in DeKalb und mit (immer den gleichen) acht der 34 Schüler in Minneapolis durchgeführt, jeweils im Anschluß an schriftliche Tests.

Es wurde überwiegend das strukturierte Interview benutzt, d.h. eine semi-standardisierte Interviewform, bei der unter Verwendung eines "Drehbuchs" alle Probanden mit gleichen Aufgabenstellungen, gleichem Material und möglichst gleichen Fragen konfrontiert werden. Durch Kategorisierung der Antworten erlaubt diese Form einen relativ präzisen Vergleich zwischen den Probanden. Mehr Freiheit zur Auslotung von idiosynkratischen Denkstrukturen bot das in einigen Fällen angewendete problemorientierte ("task-based") Interview, in dessen Verlauf ein meist komplexeres Problem zu lösen ist. Dabei besteht die Vereinbarung, daß der Proband nach Möglichkeit ihm in den Sinn kommende Dinge laut ausspricht und Erklärungen über sein Handeln angibt. Durch überlegte Interviewtechniken wird versucht, die unvermeidbaren Nebenwirkungen aus der Interaktion mit dem Interviewer möglichst gering zu halten.

Zur Beurteilung der Interviewdaten steht neben dem Drehbuch und schriftlichen Niederlegungen von Proband und Interviewer eine Videoaufzeichnung der Geschehnisse zur Verfügung, die zunächst - unter Einbeziehung nicht-verbaler Verhaltens - transkribiert und später formatiert wurde. Hinzu kommen die Erinnerung des Interviewers, Probanden und des Beobachters am Videomonitor an die Episode. Die aus dem "Experimentieren im Klassenraum" erlangte umfassende Kenntnis der einzelnen Schüler und die Tagebuchaufzeichnungen führten dazu, daß Mehrdeutigkeiten in der Auslegung von Interviewantworten häufig unmittelbar ausgeräumt werden konnten.

AUSBLICK AUF ERGEBNISSE VON STUDIEN ZUM BRUCHZAHLVERSTÄNDNIS

Ausgangspunkt dafür, wann man das Bruchzahlverständnis eines Schülers als "gut" bezeichnen kann, war der folgende pragmatische Ansatz: Nur von Schülern, die in einer Vielzahl unterschiedlicher Anwendungssituationen konsistenten Erfolg zeigen, kann angenommen werden, daß das von ihnen entwickelte Bruchzahlverständnis hinreichend allgemein ist, um darüber hinausgehenden Erfolg in einer noch breiteren Klasse von Situationen erwarten zu lassen.

In der vergleichenden Analyse einer Serie von Projektstudien wurde jeweils der Erfolg der Probanden zu den bei ihnen beobachtbaren Fähigkeitscharakteristika in Beziehung gesetzt. Quer zu den Studien wurden die folgenden Teilaspekte als kritisch für Erfolg in Situationen, bei denen ein quantitatives Verständnis von Brüchen gefordert ist, identifiziert [4]: "Bruchäquivalenz", "Bruchzahlordnung" und "Schätzen" (von Bruchgrößen).

Schüler mit durchweg hoher Leistung sind gekennzeichnet durch spontanes und flexibles Anwenden von Bruchäquivalenz und Bruchzahlordnung, sowie durch Verwendung von erkennbaren Schätzstrategien (Benutzung von selbstgewählten Referenzpunkten); bei geringer Leistung wurde Anwendung von Ordnungs- und Äquivalenzkonzepten nur in sehr beschränktem Umfang festgestellt und fast kein Versuch, durch Vergleich mit Referenzpunkten Schätzungen vorzunehmen [3]. Bei der Umsetzung solchen Wissens in Anwendungssituationen ist auffällig die nahezu automatische Erkennung bzw. Benutzung von Äquivalenzen zur flexiblen Bezugnahme auf die Dichteigenschaften rationaler Zahlen im Handeln hochleistender Probanden und im Gegensatz dazu bei Probanden mit geringem Erfolg das "latente", zwar abfragbare, aber das Handeln nicht leitende Wissen über Äquivalenz. Daneben gibt es Hinweise, daß die frühzeitige Beschäftigung mit Verhältnissen und dem Zusammenhang von Verhältnis (Teil-Teil)- und Teil-Ganzes-Aspekt im Unterricht wichtiger zu sein scheint als bisher angenommen [5].

LITERATURAUSWAHL

- [1] Behr, M.J., Post, T.R., Silver, E.A. und Mierkiewicz, D.B. Theoretical foundations for instructional research on rational numbers. In R. Karplus (Ed.) Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley, Ca., 1980.
- [2] Behr, M.J., Wachsmuth, I., Post, T.R. und Lesh, R.R. Children's acquisition of order and equivalence concepts for rational numbers: Report on a clinical teaching experiment. Angenommen zur Veröffentlichung (pending revision) im Journal of Research in Mathematics Education.
- [3] Behr, M., Wachsmuth, I. und Post, T. On children's quantitative concept of rational number: Construct-and-estimate-the-sum. Eingereicht zur Veröffentlichung.
- [4] Wachsmuth, I., Behr, M. und Post, T. Children's quantitative notion of rational number. Auf der 1983er Tagung der American Educational Research Association präsentiertes Paper, Montreal, Canada, April 1983.
- [5] Wachsmuth, I., Behr, M.J. und Post, T.R. Children's perception of fractions and ratios in Grade 5. In R. Herskowitz (Ed.) Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Rehovot, Israel, 1983 (ausführliche Fassung in Vorbereitung).