Kalküle, Spiele und Lernen

von Ipke Wachsmuth

„Der Mensch ist nur dort ganz Mensch, wo er spielt."

Friedrich von Schiller

1. Spiel: „MU-Puzzle"

Ein Spiel mit Worten (man braucht dazu Papier und Bleistift)

Gespielt wird mit einer Menge von Buchstaben, einem „Alphabet", das hier aus nur drei Buchstaben bestehen soll.

Alphabet: {M, I, U}

Ein mit den Buchstaben dieses Alphabets gebildetes „Wort" ist zum Spielbeginn vorzugeben; wir nehmen als

vorgegebenes Wort: M I

In diesem Spiel geht es darum, ausgehend von bereits vorhandenen Worten (im Moment nur M I) neue Worte zu bilden. Dabei muß man sich streng an die folgenden Spielregeln halten (und man darf sie wirklich nur „vorwärts", also vom Wenn-Teil zum Dann-Teil anwenden).

Regeln:

R1 Wenn in einem Wort der letzte Buchstabe ein I ist, dann kann man ein U hinten anfügen.
(Beispiel: Aus M I bilde M I U.)

R2 Wenn ein Wort mit M beginnt, z. B. M x (x irgendeine Buchstabenfolge), dann kann man den „Schwanz" x verdoppeln: M x x
(Beispiel: Aus M I U bilde M I U I U, denn x ist hier I U.)

R3 Wenn ein Wort drei aufeinanderfolgende I's enthält, dann kann man dieses „Teilwort" I I I durch U ersetzen.
(Beispiel: Aus M I I I bilde M U.)

R4 Wenn ein Wort zwei aufeinanderfolgende U's enthält, dann kann man dieses Teilwort U U weglassen.
(Beispiel: Aus M U U U bilde M U.)

Zusatzregeln. Ein Zug besteht darin, daß genau eine der Regeln angewendet wird.

Fangen wir gleich an. Aus M I kann man M I U ableiten, gemäß R1, wie schon gesagt. Aus M I kann man auch M I I ableiten, gemäß R2. „Kann", sagen die Regeln, nicht „muß". Das macht gerade den Reiz des Spiels aus. Verfolgen wir die zweite Möglichkeit weiter. Für „kann man ableiten" schreiben wir jetzt kurz „$\vdash$", das wird übersichtlicher.

1. M I $\vdash$ M I I $\vdash$ M I I I I $\vdash$ M I U (aufgrund von R2, R2, R3) M I I I I ist ein neues Wort, M I U hatten wir schon einfacher; es gibt offenbar mehrere Möglichkeiten, das Wort M I U zu bilden. Spielen wir noch einmal:

2. M I $\vdash$ M I I $\vdash$ M I I I I $\vdash$ M U I (R2, R2, R3)
M U I ist ein neues Wort; wir können es in unsere Sammlung „bildbarer" oder ableitbarer Worte einreihen. Da M U I nun vorhanden ist, können wir es beim nächsten Durchgang als vorgegebenes Wort nehmen (und uns damit die Schritte des zweiten Durchgangs sparen):

3. M U I $\vdash$ M U I U $\vdash$ M U I U U I U $\vdash$ M U I I U (R1, R2, R4)
oder

4. M U I $\vdash$ M U I U I $\vdash$ M U I U I U I U I $\vdash$ . . . (R2, R2, . . .)

Lauter neue Worte! Es sei jetzt dem Leser überlassen, selbst weiterzuspielen und die Möglichkeiten auszuloten. Beim Spielen wird man nach und nach Einsichten in die Natur dieses Spiels gewinnen und Fragen beantworten können wie die folgenden:
Läßt sich M I U I U I U I U ableiten? (Wie?)
Läßt sich M I I U U ableiten? (Wie?)
Läßt sich U M ableiten? (Warum nicht?)
Läßt sich M I A U ableiten? (Warum nicht?)
Läßt sich M I I I I I I I I I I I I I I I I ableiten?
Schließlich, und das ist das Spielziel des M U-Puzzles:
Läßt sich M U *ableiten?*

1 Kalküle

Das MU-Puzzle fand ich in Douglas Hofstadters Buch „Gödel, Escher, Bach". Es ist nicht nur ein unterhaltsames Spiel, sondern in der Tat ein gutes Beispiel dafür, was man unter einem „Kalkül" im allgemeinsten Sinne versteht: Ein System zur Umformung von Zeichenreihen (Worten) mit Hilfe von Regeln. Ein bekanntes Beispiel sind die Logik-Kalküle, in denen man einen Ausdruck xyz (xyz steht stellvertretend für eine bestimmte Zeichenreihe) dadurch zu *beweisen* sucht, daß man ausgehend von „vorgege-

benen Worten" (Axiomen) und auch anderen bereits „vorhandenen Worten" (Theoremen) unter Anwendung der gegebenen Regeln solange neue Worte bildet, bis schließlich der gewünschte Ausdruck xyz erscheint (oder auch nicht). Im positiven Fall hat man dann aus den Axiomen ein neues Theorem abgeleitet, anders ausgedrückt: bewiesen, daß der Ausdruck zu der Menge der aus den Axiomen mittels der Regeln „bildbaren" Worte gehört – nicht viel anders als im M U-Puzzle (M I I U U ist in der Tat ein „Theorem";
Beweis: M I $\vdash$ M I I $\vdash$ M I I I I $\vdash$ M I I I I I I I I $\vdash$ M I I I I I U $\vdash$ M I I U U aufgrund von R2, R2, R2, R3, R3. Ist M I I I U U U ein Theorem im M U-Kalkül?)

Als „Buchstaben" in Logik-Kalkülen können auch Zeichen vorkommen wie $\forall$ oder $\exists$, und es mag Regeln geben, die aus mehreren Worten statt nur einem ein neues Wort ableiten, aber das ändert nichts am Prinzip: Hier wird mit Zeichen hantiert – „gespielt" – ohne Bezug auf eine *Bedeutung* der Zeichen. Ein formaler Beweis besteht aus nichts weiterem als einer Kette von Worten, Zeichenreihen, die mittels zulässiger Regelanwendungen von vorgegebenen Worten (Axiomen oder schon abgeleiteten Theoremen) zu einem Zielwort, dem zu beweisenden Ausdruck führt. Natürlich kann man dort jedes auftretende Wort „interpretieren", ihm eine Bedeutung zuordnen, und hat so eine Vorstellung davon, was vorgeht. Darauf kommen wir später noch zu sprechen. Als ein weiteres Beispiel können wir den Gleichungskalkül nennen; in der folgenden Ableitung wird wirklich nur mit Zeichen hantiert (die Regeln werden dem Leser vertraut sein):

$$X+3 = 0 \vdash X+3-3 = 0-3 \vdash X+0 = 0-3 \vdash X = 0-3 \vdash X = -3$$

Hier wird die (fünfbuchstabige) Zeichenreihe $X + 3 = 0$ als vorgegebenes Wort genommen, und es läßt sich das (vierbuchstabige) Wort $X = -3$ ableiten; das Ergebnis schließlich zu interpretieren, nach dem vollkommen mechanischen Manipulieren der Zeichen, ist ein Ding auf anderer Ebene. Hierbei wollen wir es vorerst belassen.

2 Spiele

Was nun haben Kalküle genauer mit Spielen zu tun? Listen wir zunächst einige Merkmale von Spielen auf:
In einem Spiel kann man sich „frei" engagieren, i. a. losgelöst von realen Lebenssituationen, möglichen Interpretationen und ihren Folgen.
Ein Spiel ist eine Herausforderung durch eine Aufgabe (M U ableiten!) oder einen Gegenspieler.
Ein Spiel unterliegt einer festen Menge von endlich vielen Regeln. Die Regeln sind „gerichtet" dergestalt, daß wenn ein Spieler einen Zug ausgeführt hat, die entstandene Spielsituation nicht rückgängig gemacht werden darf, es sei denn durch einen späteren zulässigen Zug, oder in einem späteren Spiel. (Regeln darf man nur „vorwärts" anwenden.)
Die exakten während des Spiels auftretenden Situationen sind zu Beginn des Spiels nicht bekannt.

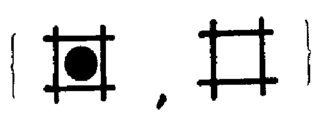
Ein Spieldurchgang endet nach einer endlichen Anzahl von Zügen (möglicherweise durch eine Zusatzregel für zirkuläre, periodische, Pattsituationen: Im Go-Spiel beispielsweise gestattet eine solche Zusatzregel das Spiel zu beenden, wenn beide Spieler dazu übereinkommen; im M U-Puzzle besteht die Möglichkeit, an beliebiger Stelle die Anwendung von Regeln nicht fortzusetzen (und ein neues Spiel mit einem verheißungsvollen Anfangswort zu beginnen).

Diese Liste läßt sich sicher fortsetzen; eins aber wird schon deutlich geworden sein: Spiele sind im Prinzip Systeme von Regeln: Kalküle; ein Spiel, genauer Spieldurchgang, besteht darin, daß Spieler Regeln *anwenden* (Züge vornehmen) und dadurch Veränderungen in der jeweils gegenwärtigen Situation herbeiführen. Streng wird darauf geachtet, ob ein Zug gemäß der Spielregeln zulässig ist oder nicht: Der Ausruf „gilt nicht!" nimmt deutlich bezug darauf. Daß ein Spielverlauf wirklich interessant und unvorhersagbar (nicht determiniert) ist, liegt im allgemeinen – aber nicht immer – daran, daß das gegebene Regelsystem in vielen Fällen mehrere Möglichkeiten einer Regelanwendung zuläßt (nicht-deterministisch ist); zur Erinnerung: $\mathrm{MI} \vdash \mathrm{MIU}$ gemäß R1, oder $\mathrm{MI} \vdash \mathrm{MII}$ gemäß R2. Die meisten bekannten Spiele haben nicht-deterministische Regeln, d. h. für den Spieler gilt es abzuwägen, welche Regelanwendung – welcher Zug – den größten Spielerfolg verspricht. Daß auch ein deterministisches Spiel seinen Reiz haben kann, werden wir jetzt kennenlernen.

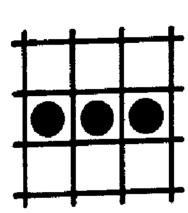
2. Spiel: „Life"

Ein Spiel mit Mustern

Gespielt wird auf einem möglichst großen Quadratrasterfeld mit einer größeren Anzahl gleichartiger Spielsteine (geeignet ist ein Go-Brett mit den schwarzen Steinen o. ä.). Während des Spiels werden die einzelnen „Zellen" des Feldes besetzt oder leer sein können:



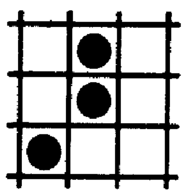
Ein mit diesen Möglichkeiten gebildetes „Muster" wird zum Spielbeginn (etwa in der Mitte des Feldes) vorgegeben, z. B. das folgende Muster:



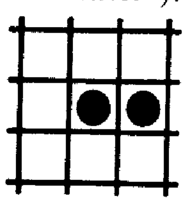
In diesem Spiel geht es darum, ein solches Muster, wieder streng nach den Spielregeln, zu verändern und seine Entwicklung zu beobachten und zu verstehen. Was geschehen wird, ist dabei von der Zusammensetzung des Ausgangsmusters bestimmt: Wie nämlich mit jeder einzelnen Zelle des Spielfeldes verfahren wird, ob sie besetzt wird, bleibt, oder geräumt werden muß, hängt vom jeweiligen Zustand – leer □ oder besetzt ▣ – der ihr unmittelbar benachbarten Zellen ab (diagonal angrenzende eingeschlossen). Es entspricht der Spielidee, wenn wir eine besetzte Zelle *lebend*, eine unbesetzte *tot* nennen; entsprechend sind auch die Regeln formuliert.

Regeln:

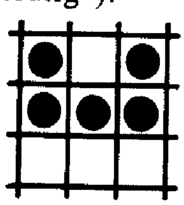
R1 Wenn eine lebende Zelle zwei oder drei lebende Nachbarzellen hat, dann *überlebt* sie.

Beispiel:  Hier überlebt die zentrale Zelle den nächsten Zug.

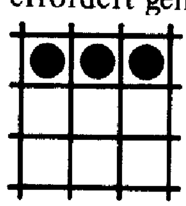
R2 Wenn eine lebende Zelle eine oder keine lebende Nachbarzelle hat, dann *stirbt* sie („an Einsamkeit").

Beispiel:  Hier stirbt die zentrale Zelle beim nächsten Zug.

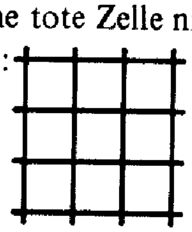
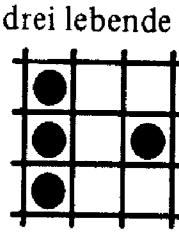
R3 Wenn eine lebende Zelle mehr als drei lebende Nachbarn hat, dann *stirbt* sie („an Übervölkerung").

Beispiel:  Die zentrale Zelle stirbt beim nächsten Zug.

R4 Wenn eine tote Zelle genau drei lebende Nachbarn hat, dann *wird sie lebendig* („Geburt erfordert genau drei Eltern").

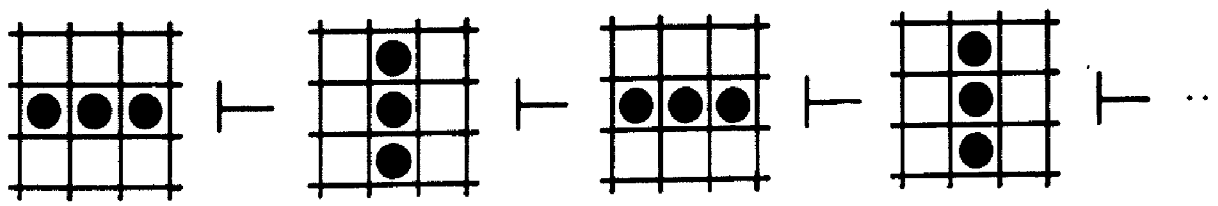
Beispiel:  Die zentrale Zelle wird beim nächsten Zug lebendig.

R5 Wenn eine tote Zelle nicht genau drei lebende Nachbarn hat, dann *bleibt sie tot.*

Beispiele:   In beiden Fällen bleibt die zentrale Zelle tot.

Zusatzregel. Ein Zug besteht darin, daß *simultan* an allen Zellen des Spielfeldes die anwendbaren Regeln zur Ausführung kommen.

Beobachten wir als erstes die Entwicklung des oben vorgegebenen Musters; zur Anwendung kommen die Regeln R4, R1, R2 (und natürlich R5):



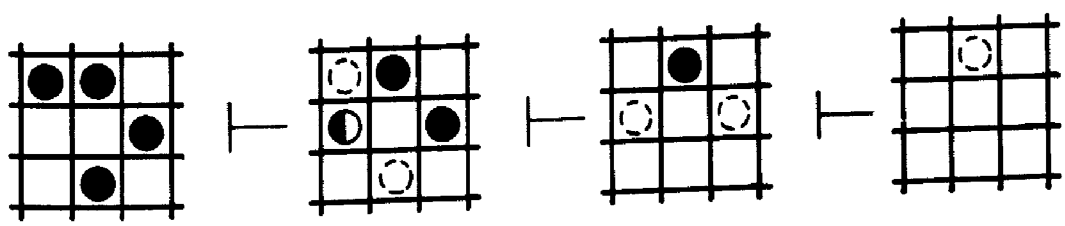
Dieses Muster zeigt ein periodisches Verhalten – das ist doch interessant? Einen Zug führt man übrigens am besten wie folgt aus:

1. Checke alle toten Zellen in der Nähe lebender Zellen (warum?), ob sie mit diesem Zug lebendig werden (R4). Es ist zweckmäßig, diese Zellen zunächst mit weißen Hilfssteinen zu besetzen, um auszudrücken, daß sie während des aktuellen Zuges noch nicht mitzählen (in den folgenden Abbildungen als ◐ markiert).

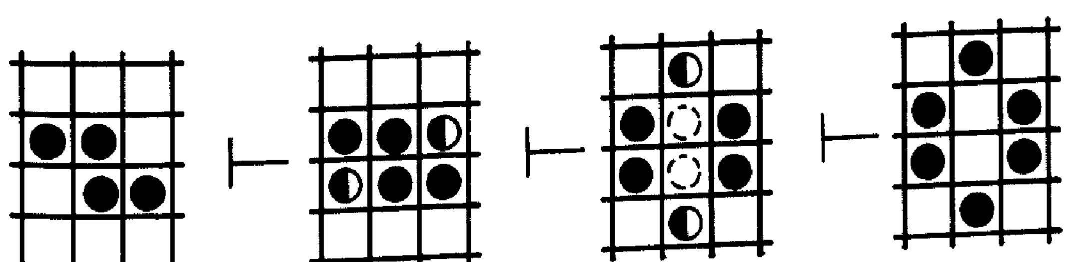
2. Checke dann alle lebenden Zellen, ob sie den Zug überleben (R1) oder sterben (R2 bzw. R3); falls sie mit diesem Zug sterben, nehme sie weg. (In den folgenden Abbildungen soll ◌ darauf hinweisen, wo eine Zelle gerade gestorben ist.)

3. Der Zug ist beendet, nachdem bei allen „neugeborenen" Zellen die weißen Hilfssteine durch schwarze ersetzt worden sind.

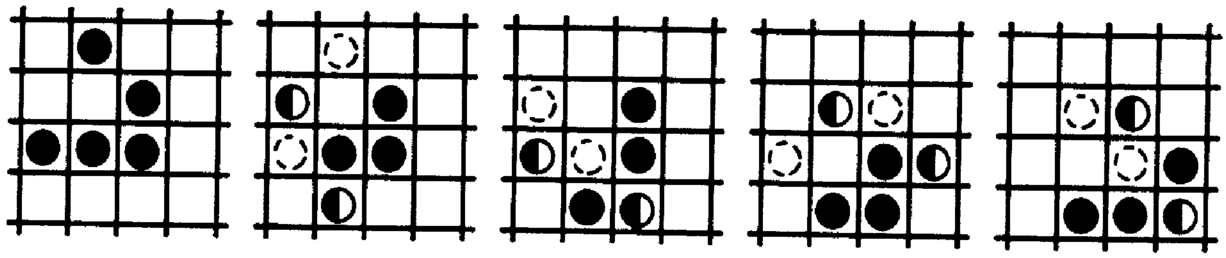
Geben wir gleich noch ein Muster vor:



In der vierten Generation stirbt es ab! Es ist suggestiv, sich die Muster als „Mikroorganismen" vorzustellen und ihr Verhalten und ihre „Überlebensfähigkeit" unter den gegebenen „Naturgesetzen" (R1–R5) kennenzulernen, und gerade darum geht es. Das Spiel heißt wie gesagt „LIFE" (Leben). Das erste Muster war offenbar überlebensfähig. Kann man einem Muster das von vornherein ansehen? Wenn ja, wie? Wenn es nicht gelingt, bleibt immer die Möglichkeit es durchzuspielen – also gleich zum nächsten Beispiel:



Hier sterben das erstemal Zellen wegen Überbevölkerung (R3), und dann wird das Muster stabil, wie ein Benzolring! (R1, R5) Mehr sollte eigentlich nicht vorgespielt werden, selber spielen macht viel mehr Spaß. Ein Beispiel zum Abschluß:



Nach vier Generationen erhält man wieder das Ausgangsmuster, oder? Beim genaueren Hinsehen entdeckt man: Dieses Muster hat sich fortbewegt! Und in der Tat, spielt man weiter, „purzelt" das Muster in dieser Weise über das ganze Spielfeld, von links oben nach rechts unten. (Frage: Welches Muster purzelt von *rechts* oben nach *links* unten?) Mehr wird aber nicht verraten. Eine der nächsten Fragen lautet: Gibt es wachsende Muster? (Es gibt.) Nur soviel noch: Beim ersten Mal Spielen vertut man sich bestimmt (die diagonalen Nachbarn übersieht man leicht). Das korrekte Anwenden der Regeln erfordert ein wenig Übung. Aller Erfahrung nach wird man es aber „spielend" lernen . . .

Übrigens: Auch bei diesem Spiel handelt es sich um einen Kalkül. Die Regeln gestatten hier die Umformung von in der Ebene angeordneten Zeichenmengen: *Mustern,* das ist der Unterschied zum ersten Spiel; dort waren es Zeichen*reihen.* Nun, unabhängig von dieser Verallgemeinerung des Kalkülbegriffs, die überdies die Beschreibung aller Arten von Brettspielen als Kalküle gestattet, kann man hier für andere Wesensmerkmale von Kalkülen sensitiv werden:
Kam es im ersten Spiel darauf an, was für Worte sich aus einem vorgegebenen *erzeugen* lassen („worterzeugender Kalkül"), geht es im LIFE-Spiel darum zu verfolgen, wie beliebig vorgegebene Worte unter den Regeln *verarbeitet* werden („wort- bzw. musterverarbeitender Kalkül"). Allerdings wird man auch im M U-Puzzle zeitweise unter diesem zweiten Gesichtspunkt arbeiten: Nach einigen Versuchen, M U zu erzeugen, wird man bald auf die Idee kommen, „rückwärts" zu arbeiten, d. h. ein bisher nicht erzeugtes Wort als Hypothese vorzugeben, um dann festzustellen, ob es sich zu M U verarbeiten läßt. Beispiel: M I I I $\vdash$ M U. Die Frage ist nun: Läßt sich dieser Vorgänger von M U, M I I I erzeugen? Ein solches Vorgehen ist bekanntlich auch beim Beweisen (Ableiten) mathematischer Theoreme, d. h. beim Arbeiten in den „theoremerzeugenden" Logik-Kalkülen gebräuchlich, und da es immer nur endlich viele Möglichkeiten für unmittelbare „Vorgänger" eines Ausdrucks geben kann (warum?), ist es auch sehr nützlich.

Ein anderer wesentlicher Unterschied zwischen M U -Puzzle und LIFE-Spiel: Die Regeln des LIFE-Spiels sind deterministisch! Im Gegensatz zum M U -Puzzle besteht keine Freiheit in der Auswahl anzuwendender Regeln. Das bedeutet aber auch: Das „Schicksal" eines Musters im LIFE-Spiel ist von Anfang an „vorherbestimmt"; mehrere Spieldurchgänge mit dem gleichen Muster müssen jedesmal zum gleichen Resultat führen. Erneut daher die Frage: Kann man einem Muster sein „Schicksal" von vornherein ansehen, d. h. kann man aufgrund bestimmter Merkmale vorhersagen, ob und wie es überlebt?

Des weiteren unterscheiden sich die beiden Spiele in der *Zusatzregel*, die die Ausführung eines Zugs beschreibt (genaugenommen eine Regel über die Anwendung der Regeln): Im MU-Puzzle darf immer nur eine Regel auf einmal angewendet werden (ebenso ist es in den Logik-Kalkülen). Im LIFE-Spiel werden in jedem Zug an allen Zellen *simultan* die Regeln angewendet. Mit der ersten Zusatzregel LIFE zu spielen, wäre auch denkbar. Jedoch erhielte man dann ein völlig anderes Spiel; der Leser kann sich selbst überzeugen. Es wäre in diesem Fall übrigens nicht-deterministisch, solange nichts über die Reihenfolge der Regelanwendungen ausgesagt wird (durch eine weitere Zusatzregel).

3 Lernen

„Homo ludens", hat der holländische Historiker *Huizinga* gesagt, sollten wir uns besser nennen statt „homo sapiens". In der Tat hat die Art und Weise, in der wir uns mit der Welt auseinandersetzen um sie verstehen zu lernen, vieles mit Spielen zu tun: Bevor wir handeln, „spielen" wir alle Möglichkeiten einer Situation durch, um die beste zu finden. Das Entwerfen von Strategien und Plänen gelingt leichter auf der Ebene von abstrakten Modellsituationen, wo keine Einzelheiten und Eigenarten den Blick für das Wesentliche verstellen. Spiele sind Abstraktionen, sind Modelle von Situationen des wirklichen Lebens, wo wir die Regeln kennen und unser Können austesten, ohne die Konsequenzen wie im wirklichen Leben auf uns nehmen zu müssen (man denke an Schach oder Monopoly, um nur zwei Beispiele zu nennen). „Spielend lernen", auf der anderen Seite, ist unser Ausdruck dafür, daß es auch Möglichkeiten zu geben scheint, ohne Anstrengung, wie nebenbei zu lernen – „im entspannten Feld", wie Kurt *Lewin* vielleicht gesagt hätte. Auf diesen Punkt wollen wir nun zu sprechen kommen und auch ein, zwei Spiele dazu ansehen. Zuvor jedoch ein schneller Exkurs in die Theorie:

Im Sinne des oben Gesagten lernen wir, um zu *verstehen* was wir erfahren, und um aus gemachten Erfahrungen *Handlungspläne* für zukünftige ähnliche, jedoch nicht identische Situationen abzuleiten. Das bedeutet: Es gilt, aus speziellen Situationen das allgemeine Schema kausaler Zusammenhänge zu entnehmen, das unabhängig von Einzelheiten und Eigenarten die erlebte Situation mit ähnlichen Merkmalen erlebt haben, uns daran erinnern und sie miteinander in Verbindung bringen. Anders gesprochen: Lernen beinhaltet, daß wir gleichartige Erfahrungsmuster aus einzelnen, wirklichen Begebenheiten herauslösen, an die wir uns erinnern (man nennt das „episodisches Wissen"), jedoch mit einem Verständnis für das „Wie und Warum", für die Bedeutung der Zusammenhänge. Dieses Verständnis betrifft Zusammenhänge innerhalb der Situation *und* ihre Bezüge zu dem, was wir sonst noch „über die Welt wissen" (man nennt das „semantisches Wissen", wie „episodisches Wissen" ein Begriff der modernen Lern- und Gedächtnistheorie). Eine neue Situation zu „verstehen" bedeutet dann, daß wir in ihr ein solches Muster oder Schema von Zusammenhängen wiedererkennen. Pläne zu machen und auszuführen bedeutet, daß wir das abstrahierte Handlungsmuster in der speziellen Situation konkretisieren. Dazu ein Beispiel:

Oben haben wir M U -Puzzle und Logik-Kalküle verglichen mit dem Ziel, den Leser ein weiteres Verständnis für das Beweisen mathematischer Theoreme „spielend lernen" zu lassen. *Selbst der Transfer von Erkenntnissen über das M U -Puzzle* (Was bedeutet „Worte erzeugen"? . . .) *zu einem recht ähnlichen Feld* (Was bedeutet „Theoreme beweisen" im Logik-Kalkül? . . .) *erfordert, daß wir zunächst abstrahieren* (. . . „das Anwenden von Umformungsregeln auf vorgegebene oder bereits erzeugte Zeichenreihen") *und dann rekonkretisieren* (. . . „das Anwenden der Regeln des Logik-Kalküls auf Axiome oder schon abgeleitete Ausdrücke: Theoreme"). Wer es bisher nicht kannte, kann nun die im M U -Puzzle erlernte Technik des „Rückwärts-Schließens" auch beim Beweisen mathematischer Sätze anzuwenden suchen. Damit genug der Theorie.

Eine ganze Serie von mehr als zwanzig Spielen, die hier unbedingt erwähnt werden muß, kommt aus den USA und wurde tatsächlich mit dem Anliegen des „spielenden Lernens" entwickelt. Dies geschah im Rahmen eines didaktischen Projekts zum „beschleunigten Lernen der Logik" (ALL-Projekt: Accelerated Learning of Logic), übrigens unter der Leitung eines Rechtswissenschaftlers, Laymann Allen. Die Spielserie heißt WFF'N PROOF (sprich „wiffn pruf"), was soviel bedeutet wie „wohlgeformter Ausdruck (well-formed formula) und Beweis (proof)", und darum geht es auch. Im ersten Spiel, SHAKE-A-WFF, lernt und trainiert man zunächst „Lesen und Schreiben", genauer: das Bilden, Erkennen und Hantieren von korrekt geformten Ausdrücken der Aussagenlogik. (Für Kenner: Es werden Notationen der Logiker *Lukasiewicz* und *Fitch* benutzt.) Abwechselnd oder gleichzeitig um die Wette würfeln zwei Spieler mit mehreren Würfeln, die teils mit kleinen Buchstaben (für Satzvariable), teils mit großen (für die logischen Junktoren UND, ODER etc.) bedruckt sind, um dann möglichst lange WFF's aus den gewürfelten Buchstaben zu legen (manche Würfelflächen zeigen auch „Nieten"). Wer damit zuerst fertig ist, ruft „WFF!" (sprich „wuf") und beendet so den Spieldurchgang; dann wird gegenseitig kontrolliert und gepunktet. Hierbei lernt man die grammatische Seite der Logik, die Regeln des „Satzbaus" (Syntax) zu verinnerlichen. Losgelöst von ihrer Bedeutung wird mit den Zeichen hantiert, etwa so wie man den deutschen Satz „Logik ist ganz einfach." bilden bzw. auf grammatische Korrektheit prüfen kann, ohne darauf bezug zunehmen, was er bedeutet, ob er wahr oder falsch ist.

Die WFF'N-PROOF-Serie enthält daneben u. a. Spiele zu Mengenlehre, Zahlentheorie, Gleichungen, projektiver Geometrie und Topologie. Auf sie alle einzugehen, reicht der Platz bei weitem nicht aus; auch das erste Spiel ist oben nur angerissen. Forschungen mit Kindern des 6./7. Schuljahrs haben gezeigt, daß die Spiele zur symbolischen Logik und das Gleichungsspiel ihre Fähigkeit zu „divergentem Denken" begünstigt; so fallen ihnen etwa zu vorgegebenen Aussageformen bzw. Gleichungen ohne Schwierigkeiten viele äquivalente Ausdrücke ein – in Problemsituationen ein Vorteil! WFF'N PROOF schult daneben auch das Umgehen mit logisch verzwickten Situationen, wie im in der Einführung zur Spielserie genannten „Tardy Bus Problem" („Busverspätungsproblem"):

(P1) Wenn Bill den Bus nimmt, dann verpaßt Bill seinen Termin, wenn der Bus Verspätung hat.

(P2) Bill sollte nicht nach Hause gehen, wenn (a) Bill seinen Termin verpaßt und (b) Bill sich niedergeschlagen fühlt.

(P3) Wenn Bill den Job nicht bekommt, dann (a) fühlt Bill sich niedergeschlagen, und (b) Bill sollte nach Hause gehen.

Diese drei Aussagen seien jetzt (als Prämissen) vorgegeben; ist es dann richtig, in der folgenden Weise zu schließen:

(Q1) wenn Bill den Bus nimmt, dann bekommt Bill den Job, wenn der Bus Verspätung hat?

(Q2) Bill bekommt den Job, wenn (a) Bill seinen Termin verpaßt und (b) Bill nach Hause gehen sollte?

(Q3) wenn der Bus Verspätung hat, dann (a) nimmt Bill den Bus nicht oder Bill verpaßt seinen Termin nicht, wenn (b) Bill den Job nicht bekommt?

(Q4) Bill nimmt den Bus nicht, wenn (a) der Bus Verspätung hat und (b) Bill den Job nicht bekommt?

Und so weiter; wir haben diese Beispiele hier nur wiedergegeben, um deutlich werden zu lassen, wie hilflos man sich fühlt, wenn man versucht, aufgrund der Bedeutung der Teilaussagen der Sätze eine Antwort zu geben (und dann erfährt, daß sie allen vier Fällen „ja" lauten müßte). Das Schließen entlang der *Bedeutung* der Teilaussagen erzeugt in uns leicht zusätzliche Annahmen, die wir in einem solchen Bedingungsrahmen *erwarten* würden, die in diesem Fall tatsächlich aber nicht gegeben sind. Es ist hier also eher hinderlich und kann zu Trugschlüssen (aufgrund von Fehlinterpretationen) führen; nur eine Analyse der logischen Konstruktion, in der man die Teilaussagen durch „Buchstaben" (Satzvariable) ersetzt und so die Wirkung ihrer Bedeutungen „ausschaltet", kann dann noch weiterhelfen (und damit wäre man wieder beim Hantieren von Zeichenreihen im Kalkül).

Es ist nicht ungewöhnlich, daß in den USA auch fortgeschrittenere Studenten diese Spiele als Intensivkurs benutzen (ich habe selbst erlebt, wie eine Studentin atemlos ins Office kam mit dem dringend geäußerten Wunsch, sofort ein solches Spiel auszuleihen). An vielen Schulen im Bereich von Detroit und Chicago werden die Spiele im Rahmen des Programms „Teams, Games, Tournaments" eingesetzt, das den Kindern *Spaß am Mathematikunterricht* bringen soll; es verfolgt aber auch das ebenso ernsthafte Anliegen, daß die Schüler z. B. in Dreiergruppen (aus je einem höher-, mittel- und weniger begabten Schüler) sich selbst Mathematik beibringen („peer teaching", im 7.–9. Schuljahr; „peer" heißt soviel wie „Schulkamerad").

Ein hochinteressantes (nicht einfaches!) Spiel der WFF'N-PROOF-Serie ist QUERIES'N THEORIES („Fragen und Theorien"), das auf der Basis moderner Linguistik entwickelt wurde und Ideen des Linguisten *Noam Chomsky* benutzt. Kurz gesagt soll es die Fähigkeit, kluge Fragen zu stellen, ausbilden und schulen. In QUERIES'N THEORIES ist bekannt, daß bestimmte Regeln (Ersetzungsregeln einer formalen Sprache) „im Spiel" sind; welche jedoch im einzelnen das aktuelle Spielgeschehen beeinflussen, gilt es herauszufinden. Die Spiel(durchführungs)regeln lassen es nicht zu, direkte Fragen über die Ersetzungsregeln zu stellen, wohl aber kann über die *Auswirkungen von Regeln* gefragt werden.

Die Methoden dieses Spiels lassen sich in vieler Hinsicht mit den wissenschaftlichen Methoden zur Erforschung von Naturgesetzen vergleichen: Ein Physiker etwa wird niemals Experimente anstellen können, die ihm Aufschluß geben über die exakten Gesetze, welche die physikalischen Phänomene beherrschen. Er hat immer nur die Möglichkeit, das Eintreten oder Nichteintreten von *Konsequenzen der Naturgesetze* zu beobachten. Bevor jedoch Konsequenzen im Experiment getestet werden können, müssen Hypothesen über die Gesetze („Regeln") präzisiert werden. (Mehr zu diesem Thema hat Karl Popper geschrieben.) Es werden also vorläufige Theorien formuliert und getestet; aufgrund der Testergebnisse, die Auswirkungen der wirklichen Gesetze darstellen, werden die Theorien revidiert usf. Eben darum geht es auch in QUERIES'N THEORIES. Im Gegensatz zur wirklichen Welt ist es hier möglich, eine Theorie über die Regeln völlig zu bestätigen, da im Spiel nur endlich viele verschiedene Möglichkeiten zu testen sind. Jedoch können die Regeln nicht im üblichen Sinn bewiesen, d. h. durch eine Kette von logischen Schlüssen aus bestimmten Annahmen abgeleitet werden („deduktives Schließen"), sondern das System der das Spiel beherrschenden Regeln (der Kalkül) muß während des Spiels gefunden werden. Ein solches Vorgehen, von speziellen Fällen auf allgemeine Gesetze zu schließen, nennt man *„induktives Schließen"*.

Ein Spiel ums induktive Schließen, das nicht so ganz kompliziert ist wie das obige und das auch in einer Mathematikstunde spannendes Spiel mit Lernen kombinieren kann, ist ELEUSIS. In unserer Sprechweise geht es dabei um wort- oder mustererzeugende Kalküle mit deterministischen oder nicht-deterministischen Regeln. Mit diesem Spiel wollen wir schließen.

3. Spiel: „ELEUSIS"

Ein Spiel „ohne Regeln" – die kennt zunächst nur der Spielleiter (Material: 52 Spielkarten)

Jeder Mitspieler bekommt gleich viele Karten, eine kommt offen auf den Tisch („Starter"). Der Reihe nach darf jeder Spieler eine seiner Karten auswählen

und	*anlegen,*	falls der Spielleiter „richtig" sagt
	vor sich hinlegen,	falls der Spielleiter „falsch" sagt

Aus der entstehenden Kartenschlange – und aus den „Irrtumsreihen" bei den Spielern – ist auf die vom Spielleiter angewendeten Regeln zu schließen. (Die Irrtumskarten werden erneut benutzt, wenn alle Karten aufgebraucht sind.) Gewinner ist, wer zuerst alle Karten angelegt hat, oder (erst recht) wer die Regeln nennen kann.

Beispiele für Regeln:

1. Wenn die letzte Karte rot ist, dann spiele schwarz.
Wenn die letzte Karte schwarz ist, dann spiele rot.
(einfach)

2. Wenn die letzte Karte gerade ist, dann spiele rot.
Wenn die letzte Karte ungerade ist, dann spiele schwarz.
(schon komplizierter)

3. Wenn die letzte Karte rot ist, dann spiele schwarz. –
(nicht-deterministisch)

Es wird beliebig kompliziert. Viel Spaß beim „Hypothesen-Testen"!

Literaturhinweise

Wer mehr über das M U -Puzzle und damit in Zusammenhang stehende Dinge erfahren möchte, dem sei folgendes Buch empfohlen:
Hofstadter, D.: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid, New York: Basic Books, Inc., 1979

Das LIFE-Spiel hat der Mathematiker *Conway* erdacht; es ist eigentlich ein Beispiel für einen „Zellularraum", ein von John *von Neumann* entwickeltes Konzept zur Modellierung biologischer und kybernetischer Probleme. Eine Vielzahl von Hinweisen auf das Spiel findet sich in den Jahrgängen des *„Scientific American"*, ab Okt. 1970 (Artikel „Mathematical Games" von Martin Gardner). oder auch im folgenden Buch:

Eigen, M., Winkler, R.: Das Spiel, München/Zürich: R. Piper & Co., 1975

Das ALL-Projekt wird erstmals erwähnt in:
Allen, L.E., Brooks, R.B.S., Dickhoff, J.W., James, P.A.: The ALL Project (Accelerated Learning of Logic), 69 American Monthly 497 (1961).
Das WFF'N-PROOF-Spielmaterial kann bezogen werden von:
WFF'N PROOF, 1111 Maple Avenue, Turtle Creek, PA 15145, USA

Mehr über die formale Seite von Kalkülen erfährt man in dem Buch:
Cohors-Fresenborg, E.: Mathematik mit Kalkülen und Maschinen, Braunschweig: Vieweg 1977

Die wissenschaftstheoretische Seite des Hypothesen-Testens wird behandelt in:
Popper, K.: The Logic of Scientific Discovery, New York: Science Editions, Inc., 1961

Das Spiel ELEUSIS hat Robert *Abbott* erfunden; ich fand es in dem folgenden Buch (das u. a. auch kurz auf WFF'N PROOF eingeht):
Hochkeppel, W.: Denken als Spiel, München: dtv 1979 (5. Auflage)

Anschrift des Verfassers:

Dr. Ipke Wachsmuth
Assistant Professor
Dept. of Mathematical Sciences
Northern Illinois University
DeKalb IL 60115
Privat: 836 S First Street
DeKalb IL 60115
USA