# Numerische Ergebnisse zum Jacobischen Kettenbruchalgorithmus in rein-kubischen Zahlkörpern [1)]

Josef Naas zum 60. Geburtstag gewidmet

Von Ludwig Elsner und Helmut Hasse in Hamburg

(Eingegangen am 20. 4. 1966)

In drei kürzlich erschienenen Arbeiten [1, 2, 3] hat L. Bernstein für zahlreiche Fälle die Periodizität des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus für kubische Basen

$$E = 1, A = \sqrt[3]{w}, B = \sqrt[3]{w}^2$$

mit ganzrationalem nicht-kubischem $w$ bewiesen, und zwar für die Radikanden der folgenden Typen:

$$\begin{aligned}
w &= D^3 + d, & d|D,\ & d \leqq D,\\
w &= D^3 + 3\,d, & d|D,\ & 3\,d \leqq D,\\
w &= D^3 + 3\,D, & D > 1,\ & \\
w &= D^3 - d, & d|D,\ & 4\,d \leqq D,\\
w &= D^3 - 3\,d, & d|D,\ & 12\,d \leqq D,
\end{aligned}$$

mit natürlichen $D$, $d$.

Die Frage der Periodizität bleibt dabei jedoch unentschieden einerseits in den Fällen, wo $d$ nicht mehr der geforderten Kleinheitsbedingung gegenüber $D$ genügt, und andererseits bei Zulassung auch anderer als der natürlichen Reihenfolge der Basiselemente.

Von der Hand des Älteren unter uns ausgeführte Rechnungen ergaben für $w = 2$ nach wenigen Schritten Periodizität bei den fünf von ABE verschiedenen Reihenfolgen, während die Rechnung für ABE noch nach 20 Schritten keine Periode hervortreten ließ. Für $w = 4$ fand Bernstein schon bei der natürlichen Reihenfolge EAB trotz mühevoller Rechnung von Hand selbst nach über 100 Schritten noch keine Periode.

---

1) Die Ergebnisse wurden durch den Jüngeren von uns mittels der TR 4 im Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg errechnet.

Nachstehend bringen wir eine durch elektronische Rechnung gewonnene tabellarische Zusammenstellung von Ergebnissen, die sich außer auf die beiden eben genannten Fälle $w = 2$ und $w = 4$ noch auf eine Reihe von

| $w$ | Perm. | Genauigkeit der Rechnung (Stellenanzahl) | Länge der Vorperiode | Länge der Periode | Genauigkeit überschritten nach … Schritten | Keine Periode nach … Schritten | Periodizität durch Bernstein bewiesen: + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | EAB | 10 | 2 | 1 | | | + |
| | EBA | 10 | 1 | 2 | | | |
| | AEB | 10 | 5 | 16 | | | |
| | ABE | 80 | | | | 150 | |
| 4 | EAB | 80 | | | 138 | | |
| | EBA | 80 | | | | 150 | |
| | AEB | 80 | | | | 150 | |
| | ABE | 40 | | | 57 | | |
| | | 80 | | | 136 | | |
| $1^3 + 2$ | EAB | 10 | 2 | 2 | | | |
| | EBA | 10 | 6 | 17 | | | |
| | AEB | 10 | 12 | 17 | | | |
| | ABE | 80 | | | 82 | | |
| $2^3 + 2$ | EAB | 10 | 2 | 3 | | | |
| | EBA | 20 | 10 | 22 | | | + |
| | AEB | 20 | 5 | 22 | | | |
| | ABE | 80 | | | 120 | | |
| $3^3 + 2$ | EAB | 80 | | | 111 | | |
| | EBA | 80 | | | 70 | | |
| | AEB | 80 | | | 71 | | |
| | ABE | 80 | | | 132 | | |
| $4^3 + 2$ | EAB | 10 | 2 | 3 | | | |
| | EBA | 30 | 8 | 10 | | | + |
| | AEB | 30 | 5 | 10 | | | |
| | ABE | 80 | | | 135 | | |
| $2^3 - 2$ | EAB | 80 | | | 127 | | |
| | EBA | 80 | | | 148 | | |
| | AEB | 80 | | | | 150 | |
| | ABE | 80 | | | | 150 | |
| $3^3 - 2$ | EAB | 80 | | | 132 | | |
| | EBA | 80 | | | | 150 | |
| | AEB | 80 | | | 126 | | |
| | ABE | 80 | | | 110 | | |
| $4^3 - 2$ | EAB | 10 | 4 | 9 | | | |
| | EBA | 80 | | | 143 | | |
| | AEB | 20 | 8 | 14 | | | |
| | ABE | 80 | | | 60 | | |

NB. Bei $w = 4^3 + 2$ sind die beiden gleichlangen Perioden verschieden, bei $w = 1^3 + 2$ und $w = 2^3 + 2$ dagegen gleich.

weiteren Fällen der Typen $w = D^3 \pm d$ mit kleinen $d$ bei allen sechs Reihenfolgen beziehen. Insbesondere ist nach diesen Ergebnissen zu vermuten, daß in den genannten Fällen $w = 2$ mit ABE und $w = 4$ mit EAB wirklich keine Periodizität auftritt, ebenso auch nicht in allen den übrigen Fällen, in denen die elektronische Rechnung keine Periode erkennen ließ.

Es sei noch bemerkt, daß die Permutationen BEA und BAE nicht betrachtet zu werden brauchen, da sie nach einem Algorithmusschritt auf EAB bzw. AEB führen.

## Literatur

[1] L. Bernstein, Periodical continued fractions of degree $n$ by Jacobi's algorithm. Crelles Journal **213**, 31–38 (1964).

[2] –, Periodicity of Jacobi's algorithm for a special type of cubic irrationals. Crelles Journal **213**, 137–146 (1964).

[3] –, Periodische Jacobi-Perronsche Algorithmen. Diese Nachr. **29**, 179–200 (1965).