© Boldt Verlag Boppard Zeitschrift für Bevölkerungswissenschaft, Jg. 9, 4/1983, S. 427–446

Herwig Birg

Ein dynamisches demo-ökonomisches Modell mit regionaler Differenzierung*

A Dynamic Demo-Economic Model with Regional Differentiation*

Un modèle dynamique démographico-économique avec différenciation régionale*

Zusammenfassung

Die Bevölkerungsentwicklung einer Region hängt nicht nur von der natürlichen Wachstumsrate, sondern in viel stärkerem Maße von den Wanderungen über die Regionsgrenzen ab. Die Wanderungen bilden das entscheidende Bindeglied zwischen der Bevölkerungsentwicklung und der Wirtschaftsentwicklung einer Region. Die Interaktion von natürlicher Bevölkerungsentwicklung, Wanderungen und Arbeitsplatzentwicklung wird durch ein Modell mit dynamischen Beziehungen mathematisch beschrieben und analytisch gelöst. Eine Erweiterung des Modells auf den Zwei-Regionen-Fall bzw. für ein System von mehr als zwei Regionen wird diskutiert, wobei für das Zwei-Regionen-Modell wichtige Eigenschaften der Lösung abgeleitet werden. Das vorgestellte Zwei-Regionen-Modell stellt eine Erweiterung der von KEYFITZ und ROGERS entwickelten Modelle dar. Es erlaubt die Ableitung wichtiger Aussagen über die Bevölkerungsentwicklung bzw. -verteilung in einem System von Regionen.

1. Einführung

In der Entwicklung quantitativ-formaler Bevölkerungsmodelle bildet sich gegenwärtig ein Trend in Richtung auf eine regionale Differenzierung heraus. Dieser Trend gründet sich auf das zunehmende Interesse von Regionalplanern und Sozialwissenschaftlern an den demographischen Aspekten der sozio-ökonomischen Entwicklung. Aber auch die Demographen schätzen die Bedeutung von regionalen Differenzierungen für die Erklärung und Interpretation von demographischen Phänomenen immer höher ein. Die Berücksichtigung ökonomischer, demographischer und regionaler Aspekte bei der Modellbildung hat zum Entstehen einer neuen Art von Modellen geführt, den sogenannten demo-ökonomischen Modellen mit regionaler bzw. multiregionaler Differenzierung.

Die multiregionalen demo-ökonomischen Modelle sind nicht identisch mit den multiregionalen Modellen der demographischen Gesamtrechnung („multiregional accounting models"), die von *Rees, Wilson* und anderen entwickelt wurden. Multiregionale Modelle der demographischen Gesamtrechnung dienen dazu, große interregionale Systeme von Bevölkerungsdaten analog zum Vorgehen der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung zu ordnen, Datenlücken durch Schätzverfahren zu schließen und regionale Bevölkerungspro-

* Der Verfasser dankt Herrn Dipl.-Math. *Detlef Filip*, Berlin, für seine Beratung bei der Lösung mathematischer Probleme.

gnosen durchzuführen. Mit den multiregionalen demo-ökonomischen Modellen werden dagegen vor allem Erklärungsziele verfolgt. Ausgangspunkt dieser Modelle sind theoretische Hypothesen über die Interaktion von demographischen und ökonomischen Faktoren einschließlich ihrer Wirkungen auf die Bevölkerungsentwicklung einer Region bzw. auf die regionale Verteilung der Bevölkerung in einem System von Regionen. Die Bausteine der Modelle – die Variablen und deren Verknüpfung durch mathematische Funktionen – sind, der Natur der untersuchten Probleme entsprechend, dynamisch. In dem vorliegenden Beitrag werden ebenso wie in der zitierten Literatur für alle dynamischen Funktionen kontinuierliche Formen verwendet, um die effizienten Instrumente der Differential- und Integralrechnung zur Lösung der Probleme einsetzen zu können. Das hier vorgestellte Modell kann jedoch auch in diskreter Form formuliert werden.

2. Die dominierende Rolle der Wanderungen für die regionale Wirtschafts- und Bevölkerungsentwicklung

Die Wanderungen sind das entscheidende Bindeglied zwischen der ökonomischen und der demographischen Entwicklung einer Region; ihre Bedeutung kann kaum überschätzt werden. In entwickelten Ländern haben die Wanderungen oft das gleiche Gewicht für die Bevölkerungsveränderung wie die Geburten und Sterbefälle. Für die Bundesrepublik als ganzes beträgt die jährliche Zahl der Zuzüge aus dem Ausland 580 000 Personen, die jährliche Zahl der Geburten 590 000 (Durchschnittswerte der Jahre 1975–1979). Das relative Gewicht der bevölkerungsvermehrenden Komponenten „Zuzüge" und „Geburten" ist also in der fraglichen Periode schon auf nationaler Ebene etwa gleich. Auf regionaler Ebene steigt die Relation zwischen Zuzügen und Geburten stark an, und zwar in Abhängigkeit vom Grund der regionalen Differenzierung. Ähnliche Relationen existieren auch zwischen den bevölkerungsvermindernden Komponenten „Sterbefälle" und „Fortzüge". Die Geburten-Zuzugs-Relation variiert wie folgt mit dem regionalen Disaggregationsgrad (*Birg,* 1979, S. 91; 1981):

Regionale Disaggregation	*Geburten-Zuzugs-Relation*
Nationale Ebene	1 : 1 bis 1 : 1,3
79 Planungsregionen	1 : 1,4
450 Stadt- und Landkreise	1 : 5,5
Gemeinden	bis 1 : 10

Die meisten Erwerbstätigen, die einen Umzug in eine andere Region planen, können ihre Pläne nur dann realisieren, wenn am neuen Wohnort ein Arbeitsplatz zur Verfügung steht, es sei denn, daß die Pendelentfernung zum bisherigen Arbeitsplatz gering ist. Wanderungen hängen daher in starkem Maße von den arbeitsplatzschaffenden ökonomischen Wachstumsdeterminanten der Regionen ab. Auf der anderen Seite werden die ökonomischen Wachstumskräfte, zumindest in langfristiger Betrachtung, auch stark von den Wanderungen beeinflußt, denn der regionale Bestand an Humankapital, der für die regionale Produktion und Innovation von großer Bedeutung ist, hängt entscheidend von den Fähigkeiten und Fertigkeiten ab, die durch die interregionalen Bevölkerungsbewegungen sozusagen im- bzw. exportiert werden.

3. Ein demo-ökonomisches dynamisches Modell unter expliziter Berücksichtigung von Wanderungen

In jeder Region sind folgende 4 demo-ökonomische Prozesse simultan miteinander verknüpft:

(1) Das Wachstum der Produktion bewirkt Veränderungen in der Zahl und in der Art der Arbeitsplätze.

(2) Die Zahl und die Art der Arbeitsplätze beeinflußt die Wanderungen, und zwar sowohl die Zuzüge in die Region als auch die Fortzüge aus der Region.

(3) Durch die Wanderungen verändert sich die Bevölkerungszahl und -struktur.

(4) Die Bevölkerungsveränderung bewirkt im Wege der Rückkopplung auf Prozeß (1) eine Veränderung der Produktionstätigkeit.

Die Variablen dieser 4 Prozesse sind durch simultane Beziehungen miteinander direkt oder indirekt verknüpft. Um die Eigenschaften der 4 demo-ökonomischen Prozesse mittels dynamischer Gleichungen beschreiben zu können, muß die Kompliziertheit der wirklichen Welt, ihre sogenannte „Komplexität", durch Modellbildung vereinfacht werden.

Wir beginnen mit dem arbeitsplatzschaffenden Prozeß (1) und unterscheiden zwei Arten von Arbeitsplätzen, nämlich Arbeitsplätze in den Basic-Sektoren A_1 und Arbeitsplätze in den Non-basic-Sektoren A_2. Unter Basic-Sektoren verstehen wir die Gruppe jener Produktionssektoren bzw. Wirtschaftsbranchen, die Güter für den überregionalen Markt herstellen. Unter den Non-basic-Sektoren werden jene Produktionssektoren zusammengefaßt, die ihre Produkte innerhalb der Region absetzen. Die Gesamtzahl der Arbeitsplätze in der Region zum Zeitpunkt t ist dann definitionsgemäß

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t)\,. \tag{1}$$

Da die Absatzmöglichkeiten und damit die Produktion und die dafür benötigte Zahl der Arbeitsplätze in den Basic-Sektoren von der Nachfrage in allen übrigen Regionen abhängen, soll angenommen werden, daß die Zahl der Basic-Arbeitsplätze exogen durch folgende Exponentialfunktion bestimmt wird (mit a als konstanter Wachtums- bzw. Schrumpfungsrate):

$$A_1(t) = A_1(0)e^{at}\,. \tag{2}$$

a konstant

Im Unterschied zu den Basic-Sektoren sei die Zahl der Arbeitsplätze in den Non-basic-Sektoren von den Verhältnissen in der Region abhängig, also endogen bestimmt, denn die Non-basic-Sektoren produzieren für den Bedarf in der Region. Dabei kann es sich um Konsumgüter für die Bevölkerung handeln, insbesondere um Dienstleistungen, aber auch um Güter, die in den Basic-Sektoren bei der Produktion der Exportgüter für andere Regionen weiterverarbeitet werden. Die Zahl der Einwohner P und die Zahl der Arbeitsplätze in den Basic-Sektoren werden daher als die beiden Bestimmungsgründe für die Zahl der Non-basic-Arbeitsplätze angenommen, wobei von einer einfachen linearen Beziehung ausgegangen wird:

$$A_2(t) = b_1P(t) + b_2A_1(t)\,. \tag{3}$$

$0 < b_1, b_2 < 1$

b_1, b_2 konstant

Um den zweiten Prozeß, den Einfluß der Arbeitsplatzzahl auf die Wanderungen, abzubilden, werden Zuzüge und Fortzüge getrennt betrachtet. Für die Zuzüge werden zwei verschiedene Variablen eingeführt: Wir unterscheiden die Zahl der potentiellen Zuzüge $IN^*(t)$ von der Zahl der tatsächlichen Zuzüge $IN(t)$. Diese Unterscheidung dient dazu, die Wirkung, die hohe Mieten, hohe Grundstückspreise und andere Faktoren auf die Zuzüge haben, zu berücksichtigen. Die tatsächliche Zahl der Zuzüge ist stets kleiner als die potentielle, und es sei angenommen, daß sich die restriktiven Wirkungen der zuzugshemmenden Faktoren in der Variablen $R(t)$ niederschlagen, deren zeitliche Entwicklung nicht im Modell erklärt, sondern als exogen gegeben betrachtet wird:

$$R(t) = R(0)e^{ht} . \tag{4}$$

h konstant

Die tatsächliche Zahl der Zuzüge ist dann definitionsgemäß die Differenz zwischen den potentiellen Zuzügen $IN^*(t)$ und der nicht realisierten Zahl der Zuzüge $R(t)$

$$IN(t) = IN^*(t) - R(t) . \tag{5}$$

Da die tatsächliche Zahl der Zuzüge $IN(t)$ nur positive Werte (einschließlich 0) annehmen kann, muß die Differenz $IN^*(t) - R(t)$ stets größer gleich Null sein. Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn die Wachstumsrate h der Restriktionen $R(t)$ kleiner ist als die Wachstumsrate der potentiellen Zuzüge $IN^*(t)$, deren Bestimmungsgründen wir uns nun zuwenden wollen.

Bei den potentiellen Zuzügen unterscheiden wir zwei Gruppen von Personen mit unterschiedlichen Wanderungsmotiven. Gruppe 1 besteht aus Personen, die außerökonomische Motive für den Zuzug haben, Gruppe 2 enthält Personen, die aus ökonomichen Motiven, insbesondere aus dem Arbeitsplatzmotiv, zuziehen wollen. Die Gesamtzahl der potentiellen Zuzüge ist definitionsgemäß die Summe aus beiden Gruppen:

$$IN^*(t) = IN_1^*(t) + IN_2^*(t) . \tag{6}$$

Die Zahl der zuzugswilligen Personen mit außerökonomischen Motiven (Studenten, Rentner usw.) entwickele sich mit einer konstanten Wachstumsrate w:

$$IN_1^*(t) = IN_1^*(0)e^{wt} . \tag{7}$$

w konstant

Die Zahl der arbeitsplatzorientierten potentiellen Zuzüge sei eine lineare Funktion der Zahl der besetzbaren Stellen (= unbesetzte Arbeitsplätze), die mit $Q(t)$ bezeichnet wird. Die Zahl der besetzbaren Stellen $Q(t)$ selbst sei ein bestimmter Bruchteil c der Arbeitsplätze insgesamt:

$$IN_2^*(t) = gQ(t) . \tag{8}$$

$0 < g < 1$ konstant

$$Q(t) = cA(t)\,. \tag{9}$$

$0 < c < 1$ konstant

Die Variable $Q(t)$, die die Zahl der besetzbaren Stelle im Zeitpunkt t mißt, ist eine der zentralen Größen des Modells. In den meisten Wanderungsmodellen wird der Einfluß des Arbeitsmarktes nicht durch die Zahl der besetzbaren Stellen gebildet, sondern durch die Arbeitslosenquote bzw. durch die Differenz zwischen Angebot und Nachfrage nach Arbeitsplätzen. Der empirische Test von Wanderungsmodellen hat aber gezeigt, daß die Differenz zwischen dem Angebot und der Nachfrage nach Arbeitsplätzen bzw. die Arbeitslosenquote nicht den erwarteten negativen Einfluß, sondern einen positiven Einfluß auf die Zuzüge hat – ein Ergebnis, das die meisten Wanderungsmodelle dieser Art falsifiziert. Sowohl für die USA (*Rogers*, 1968, S. 80) als auch für die Bundesrepublik (*Birg*, 1979, S. 102) hatte die Arbeitslosenquote bei empirischen Tests das falsche Vorzeichen, wobei das falsche Vorzeichen sogar statistisch signifikant gesichert war. *Rogers* stellt dazu fest: „Since . . . the unemployment rate . . . is highly significant, this result is disturbing." Bei näherer Überlegung ist dieses negative Ergebnis keineswegs überraschend. Denn für eine zuzugswillige Person ist es nicht wichtig, wie groß die Arbeitslosenquote bzw. wie groß die Differenz zwischen dem Angebot und der Nachfrage nach Arbeitsplätzen ist, sondern wichtig ist, wie viele Arbeitsplätze besetzbar sind und wie erfolgreich die betreffene Person mit anderen Personen um die freien Stellen zu konkurrieren vermag. Die Zahl der offenen Stellen kann groß sein, *ohne* daß die Differenz zwischen dem Angebot und der Nachfrage nach Arbeitsplätzen klein ist, m.a.W.: Zwischen den offenen Stellen und dem Saldo der Arbeitsmarktbilanz besteht keine strenge Beziehung. In jedem Zeitpunkt gibt es zahlreiche Arbeitsplätze, die durch die Arbeitsplatzfluktuation unbesetzt sind. Diese Fluktuation wird beständig aufrecht erhalten durch das Ausscheiden älterer Arbeitskräfte, durch Arbeitsplatzumbesetzungen (hervorgerufen durch berufliche Verbesserungen) und durch die infolge von Fortzügen freigewordenen Arbeitsplätze. In der Bundesrepublik ist die Arbeitsplatzfluktuation so groß, daß ein Fünftel bis ein Drittel aller Arbeitsplätze jedes Jahr neu besetzt werden: Auf 5 Millionen innerbetriebliche Arbeitsplatzwechsel kommen weitere 5 Millionen zwischenbetriebliche Arbeitsplatzwechsel bei einem Gesamtbestand von rd. 25 Millionen Arbeitsplätzen (*Reyher; Mertens*, 1977; *Birg*, 1983).

Ebenso wie die Zuzüge sind auch die arbeitsplatzorientierten Fortzüge nicht eine Funktion des Arbeitsmarktsaldos, sondern eine Funktion der Zahl der offenen Stellen, und zwar in der Zielregion. Da hier zunächst ein Ein-Regionen-Modell betrachtet wird, ist es nicht nötig (und nicht möglich), die Zahl der offenen Stellen in der Zielregion explizit als Erklärungsgröße für die Fortzüge einzuführen. In Abschnitt 6 wird das Ein-Regionen-Modell in ein Zwei-Regionen-Modell erweitert, und die adäquate Spezifikation der Fortzugsfunktion soll dort eingehender diskutiert werden. Für das hier betrachtete Ein-Regionen-Modell wird die einfache Annahme zugrunde gelegt, daß die Fortzüge $OUT(t)$ eine lineare Funktion des Bevölkerungsbestandes sind. Trotz der simplen Annahme hat diese Funktion selbst in regionalen Querschnittstests eine hohe Erklärungskraft ($r^2 > 0{,}9$; siehe *Birg*, 1979, S. 93):

$$OUT(t) = kP(t)\,. \tag{10}$$

$0 < k < 1$

k konstant

Um das Modell zu vervollständigen, fügen wir eine weitere Gleichung hinzu, durch die die Veränderung der Bevölkerung im Zeitintervall *dt* als Summe von Geburtenüberschuß bzw. -defizit und Wanderungssaldo (Zuzüge abzüglich Fortzüge) beschrieben wird. Unter der modell-theoretischen Annahme, daß der Geburtenüberschuß (bzw. das Geburtendefizit) ein konstanter Anteil *r* des Bevölkerungsbestandes ist, ist die Definitionsgleichung für die Bevölkerungsveränderung

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) + IN(t) - OUT(t)\,. \tag{11}$$

Die Summe aller Bevölkerungsveränderungen im Zeitraum $[0,t]$ zuzüglich dem Anfangsbestand ist identisch mit dem Bevölkerungsbestand am Ende des Zeitraums. Durch Integration von Gleichung (11) im Intervall $[0,t]$ erhält man folgende Gleichung für den Bevölkerungsbestand im Zeitpunkt t

$$P(t) = P(0) + r\int_0^t P(\tau)d\tau + \int_0^t IN(\tau)d\tau - \int_0^t OUT(\tau)d\tau\,. \tag{12}$$

Für empirische Analysen im Rahmen von Bevölkerungsprognosen empfiehlt es sich, an Stelle der Gleichung (12) folgende Gleichung zu verwenden:

$$P(t) = P_n(t) + \int_0^t IN(\tau)d\tau - \int_0^t OUT(\tau)d\tau\,. \tag{12a}$$

In Gleichung (12a) gibt die Variable $P_n(t)$ die Zahl der Einwohner im Zeitpunkt t an, die aus dem natürlichen Wachstum (ohne Wanderungen) der bereits in Zeitpunkt $t = 0$ ansässigen Bevölkerung $P(0)$ resultiert. Nimmt man für das natürliche Wachstum von $P(0)$ eine konstante Rate r an, so ist

$$P_n(t) = P(0)e^{rt}\,. \tag{13}$$

r konstant

Gleichung (12a) beruht auf der Annahme, daß das Wachstum der zu- bzw. fortgezogenen Bevölkerungsgruppen Null ist (Geburten = Sterbefälle), und daß das *natürliche* Wachstum des Anfangsbestandes von den Wanderungen unabhängig ist. Nimmt man auch für die Zu- bzw. Fortgezogenen ein natürliches Bevölkerungswachstum an, so müssen die entsprechenden Integralterme in Gleichung (12a) durch Parameter multipliziert werden, die die Höhe des Wachstums quantifizieren.

Der Vorteil, der sich aus der Verwendung von Gleichung (12a) an Stelle von Gleichung (12) im Rahmen von Prognosemodellen ergibt, liegt darin, daß die Variable $P_n(t)$ außerhalb des Prognosemodells durch eine alters- und geschlechtsspezifische Bevölkerungsfortschreibung berechnet werden kann, die sich wegen ihres hohen Daten- und Rechenaufwandes nur schwer innerhalb des eigentlichen Prognosemodells durchführen läßt. Die Möglichkeit, $P_n(t)$ außerhalb des Prognosemodells zu berechnen, beruht darauf, daß $P_n(t)$ in Gleichung (12a) von den beiden Integralausdrücken unabhängig ist.

Der Ausdruck

$$r \int_0^t P(\tau)dt$$

in Gleichung (12) ist dagegen von den Integral-termen in dieser Gleichung abhängig, so daß das natürliche Bevölkerungswachstum in Gleichung (12) nicht unabhängig von den Wanderungen (den beiden Integral-termen) berechnet werden kann. Beispiele für eine Anwendung von Gleichung (12a) im Rahmen interregionaler Bevölkerungsprognosemodelle finden sich in *Birg* (1979) und *Birg* (1981).

4. Ableitung der analytischen Lösung des Modells

Das in Abschnitt 3 dargestellte Modell besteht aus den Gleichungen (1) bis (12). Gleichung (12) ist nicht unabhängig von Gleichung (11). Insgesamt enthält das Modell 11 voneinander unabhängige Gleichungen und 11 Variablen. Eine Liste der Variablen des Ein-Regionen-Modells und des weiter unten behandelten Zwei-Regionen-Modells findet sich in der folgenden Übersicht.

Eine Lösung des Modells zu finden, bedeutet, die Gleichungen so umzuformen, daß jede Variable nur von der Zeit abhängt. Eine Substitution von (2) und (3) in (1) und von (7), (8) und (9) in (6) ergibt:

$$A(t) = [A_1(0) + b_2A_1(0)]e^{at} + b_1P(t)\,. \tag{14}$$

$$IN^*(t) = IN_1^*(0)e^{wt} + gcA(t)\,. \tag{15}$$

Durch Substitution von (14) in (15) ergibt sich

$$IN^*(t) = IN_1^*(0)e^{wt} + gc[A_1(0) + b_2A_1(0)]e^{at} + gcb_1P(t)\,. \tag{16}$$

Liste der Variablen

$A(t)$	Zahl der Arbeitsplätze
$A_1(t)$	Zahl der Arbeitsplätze in den Basic-Sektoren
$A_2(t)$	... in den Non-basic-Sektoren
$Q(t)$	Zahl der besetzbaren Stellen
$IN^*(t)$	Potentielle Zahl der Zuzüge
$IN_1^*(t)$	... aus außerökonomischen Motiven
$IN_2^*(t)$	... aus arbeitsplatzorientierten Motiven
$R(t)$	Teilmenge der potentiellen Zuzüge $IN^*(t)$, die auf Grund von hohen Mieten etc. nicht realisiert werden
$IN(t)$	tatsächliche Zahl der Zuzüge
$QUT(t)$	Zahl der Fortzüge
$P(t)$	Zahl der Einwohner
$P_n(t)$	Zahl der Einwohner im Zeitpunkt t, die aus dem natürlichen Bevölkerungszuwachs (ohne Wanderungen) des Anfangsbestandes im Zeitpunkt $t = 0$ resultiert
$NET(t)$	Wanderungssaldo = $IN(t)$ − QUT (t)
$M_{ij}(t)$	zielgerichteter Wanderungsstrom von Region i nach Region j

Durch Verwendung von (4) und (16) erhalten wir folgende Zuzugsgleichung (5):

$$IN(t) = IN_1^*(0)e^{wt} + gc[A_1(0) + b_2A_1(0)]e^{at} + gcb_1P(t) - R(0)e^{ht} \,. \tag{17}$$

Substituieren wir die Zuzugsfunktion (17) und die Fortzugsfunktion (10) in (11), so erhalten wir folgende Formulierung für die Differentialgleichung (11):

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t) + IN_1^*(0)e^{wt} + gc[A_1(0) + b_2A_1(0)]e^{at} + gcb_1P(t) - R(0)e^{ht} - kP(t) \,. \tag{18}$$

Verwenden wir in Gleichung (18) die Definition

$$V(t) := IN_1^*(0)e^{wt} + gc[A_1(0) + b_1A_1(0)]e^{at} - R(0)e^{ht} \,, \tag{19}$$

so erhalten wir nach Umformung

$$\frac{dP(t)}{dt} + (k - gcb_1 - r)P(t) = V(t) \,. \tag{20}$$

Gleichung (20) hat die gleiche Struktur wie die folgende allgemeine Form:

$$y' + \phi(x)y = \psi(x) \,. \tag{21}$$

Die Übereinstimmung von (20) und (21) läßt sich durch folgende Definitionen erkennen:

$$\begin{aligned} &P(t) := y \\ &(k - gcb_1 - r) := \phi(x) \\ &V(t) := \psi(x) \,. \end{aligned} \tag{22}$$

Die Lösung für die Differentialgleichung (21) lautet (*Bronstein; Semedjajew,* 1980, S. 472):

$$y = e^{-\int \phi(x)dx}[\int \psi(x)e^{\int \phi(x)dx} + C] \,. \tag{23}$$

Auf der Basis von (23) kann die Lösung von Gleichung (18) unter Verwendung der Definitionen (19) und (22) wie folgt angegeben werden:

$$\begin{aligned} P(t) = {} & P(0)e^{(\eta + r)t} \\ & + \frac{IN_1^*(0)}{w - (\eta + r)}[e^{wt} - e^{(\eta + r)t}] \\ & + \frac{gc[A_1(0) + b_2A_1(0)]}{a - (\eta + r)}[e^{at} - e^{(\eta + r)t}] \\ & - \frac{R(0)}{h - (\eta + r)}[e^{ht} - e^{(\eta + r)t}] \,, \end{aligned} \tag{24}$$

wobei $\eta := gcb_1 - k$.

Die Lösung für die zweite Version des Modells, das nicht Gleichung (12), sondern (12a) enthält, lautet:

$$\begin{aligned}P(t) = P(0)&\left(\frac{r}{r-\eta}e^{rt} - \frac{r}{r-\eta}e^{\eta t} + e^{\eta t}\right)\\ &+ \frac{IN_1^*(0)}{w-\eta}(e^{wt} - e^{\eta t})\\ &+ \frac{gc[A_1(0) + b_2A_1(0)]}{a-\eta}(e^{at} - e^{\eta t})\\ &- \frac{R(0)}{h-\eta}(e^{ht} - e^{\eta t})\,.\end{aligned} \tag{25}$$

Für den Spezialfall $r = 0$ (keine natürliche Bevölkerungsveränderung) sind die beiden Lösungen identisch.

5. Hauptergebnisse und numerische Illustrationen

Das Bevölkerungswachstum, beschrieben in den Gleichungen (24) bzw. (25), hat folgende Charakteristika:

(a) Die Wachstumsrate ist nicht konstant, sondern zeitabhängig. Dieses Ereignis läßt sich auf folgende Weise ableiten: Eine konstante Wachstumsrate, beispielsweise λ, hätte als Lösungsform eine Exponentialgleichung folgender Art zur Voraussetzung:

$$y(t) = y(0)e^{\lambda t}\,.$$

Wir haben dagegen als Lösung eine Summe von Exponentialfunktionen ermittelt. Eine Summe von Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Wachstumsraten ist aber keine Exponentialfunktion des obigen Typs.

(b) Die Wachstumsrate des Bevölkerungsbestandes hängt nicht nur von der natürlichen Rate r ab und von den Parametern, die in den Zu- und Fortzugsfunktionen enthalten sind, sondern von sämtlichen Parametern in den 11 Gleichungen des Modells. Die Parameter des Modells können in zwei Gruppen eingeteilt werden: in Parameter, die Multiplikationsfaktoren sind, und in Parameter, die Exponenten (Wachstumsraten) sind:

Parameter in der Form von Multiplikationsfaktoren		eingeführt in Gleichung . . .
g	Wettbewerbskoeffizient	(8)
c	Arbeitsplatz-Fluktuationskoeffizient[1])	(9)
b_1	bevölkerungsbezogener Non-basic-Koeffizient	(3)
b_2	produktionsbezogener Non-basic-Koeffizient	(3)
k	Fortzugskoeffizient	(10)
Parameter in dern Form von Exponenten (Wachstumsraten)		
r	natürliche Wachstumrate der Bevölkerung	(12), (13)
a	Wachstumsrate der Arbeitsplätze in den Basic-Sektoren	(2)
w	Wachstumsrate der nicht ökonomisch induzierten Zuzüge	(7)
h	Wachstumsrate der Zuzugsrestriktionen	(4)

[1]) Im Englischen als „matching-coefficient" bezeichnet. Vgl. *H. Birg*, 1983.

(c) Die sensitivsten Parameterkonstellationen sind durch die beiden folgenden Fälle definiert:

$\eta > 0$ und $\eta < 0$,

wobei $\eta := gcb_1 - k$.

Wenn die Wachstumsrate w der durch außerökonomische Gründe motivierten Zuzüge und die Wachstumsrate a der Zahl der Basic-Arbeitsplätze beide mindestens Null sind, dann wächst (schrumpft) die Bevölkerung, wenn η größer (kleiner) Null ist (vorausgesetzt, daß h entsprechend (5.1) beschränkt ist):

<u>$P(t)$ wächst, wenn</u>

$\eta > 0$
$r > 0$ oder $r = 0$
$a, w > 0$ oder $a, w = 0$

<u>$P(t)$ schrumpft, wenn</u>

$\eta < 0$
$r < 0$ oder $r = 0$
$a, w < 0$ oder $a, w = 0$

Folgendes Ergebnis ist interessant: $P(t)$ wächst bei $\eta > 0$ auch dann, wenn die natürliche Veränderungsrate r, die Wachtumsrate der basic-Arbeitsplätze a und die Wachstumsrate w der nicht arbeitsplatzorientierten Zuzüge Null sind.

(d) Numerische Sensitivitätsanalysen zeigen, daß die Wirkung der Parameter, die die Form von Multiplikationsfaktoren haben, größer ist als die Wirkung der Parameter, die Exponenten (Wachstumsraten) sind, jedenfalls dann, wenn die numerischen Werte für die Parameter nicht willkürlich, sondern wenigstens der Größenordnung nach den wirklichen Verhältnissen entsprechend gewählt werden.

(e) Einer der wichtigsten Parameter ist der Fluktuationsparameter c, mit dem die Zahl der besetzbaren Arbeitsplätze aus der Gesamtzahl der Arbeitsplätze abgeleitet wird [Gleichung (9)]:

$$c = Q(t)/A(t) = 0{,}25\,. \qquad (26)$$

Tab. 1: Die zeitlichen Entwicklungspfade der Modellvariablen (Gleichungen 1–12)
The time paths of development of the model variables (equations 1–12)

Periode	Variablen											
t	P	P_n	A	A_1	A_2	Q	IN_1^*	IN_2^*	IN^*	R	IN	OUT
0	100	100	50	20	30	13	4	6	10	5	5	5
5	106	105	53	21	32	13	4	7	11	5	6	5
10	113	111	56	22	34	14	4	7	11	6	6	6
15	120	116	59	23	36	15	5	7	12	6	6	6
20	127	122	62	24	38	16	5	8	13	6	7	6
25	134	128	66	26	40	16	5	8	13	6	7	7
30	142	135	69	27	42	17	5	9	14	7	7	7
35	150	142	73	28	45	18	6	9	15	7	8	7
40	158	149	77	30	47	19	6	10	16	7	8	8
45	167	157	81	31	50	20	6	10	16	8	9	8
50	176	165	85	33	52	21	7	11	17	8	9	9

Erhöht man den Parameter c von 0,25 auf 0,375 (Anhebung um 50%), so beträgt die Bevölkerungszahl imZeitpunkt $t = 50$ nicht 176, sondern 369, falls der Anfangsbestand der Bevölkerung in $t = 0$ auf 100 festgesetzt wird. Die Elastizität der Bevölkerungsveränderung für $t = 50$ in bezug auf die Veränderung von c beträgt 2,20:

$$\varepsilon_{P(50),c} = \frac{\dfrac{\Delta P(50)}{P(50)}}{\dfrac{\Delta c}{c}} = \frac{\dfrac{193}{176}}{\dfrac{0{,}125}{0{,}250}} = 2{,}20\,. \tag{27}$$

(f) Die Elastizität von $P(50)$ in bezug auf den Wettbewerbskoeffizient g ist gleich der Elastizität des Arbeitsplatz-Fluktuationsparameters c:

$$\varepsilon_{P(50),g} = \varepsilon_{P(50),c} = 2{,}20\,. \tag{28}$$

Die Gleichheit beider Elastizitäten beruht darauf, daß die Parameter c und g in Gleichung (24) stets als Faktoren eines Produkts eingehen. Zwar ist auch der Parameter b_1 ein Faktor innerhalb des Produkts gcb_1, das in (24) eingeht, aber im Zähler des Bruchs in der dritten

Tab. 2: Die Wirkung von Parameteränderungen auf die Entwicklungspfade der Modellvariablen
The effect of parameter changes on the development paths of the model variables

Ursprünglicher Wert des Parameters		Wert ausgewählter Variablen in Periode $t = 50$ bei einer Anhebung des Parameterwertes in der Vorspalte um 50%							
		P	P_n	NET_c^* 1)	A	A_1	A_2	A/P 2)	A_1/A_2 3)
$c = 0{,}25$	Fluktuationskoeffizient	369	165	204	133	33	100	0,36	0,33
$g = 0{,}50$	Wettbewerbskoeffizient	369	165	204	133	33	100	0,36	0,33
$b_1 = 0{,}25$	bevölkerungsbezogener Non-basic-Koeffizient	274	165	109	144	33	111	0,53	0,30
$b_2 = 0{,}25$	produktionsbezogener Non-basic-Koeffizient	189	165	24	93	33	60	0,49	0,55
$k = 0{,}05$	Fortzugskoeffizient	101	165	− 64	66	33	33	0,66	1,00
$r = 0{,}01$	natürliche Wachstumsrate der Bevölkerung	209	212	− 3	93	33	60	0,45	0,55
$a = 0{,}01$	Arbeitsplatzwachstumsrate in den Basic-Sektoren	199	165	34	103	42	60	0,52	0,70
$w = 0{,}01$	Wachstumsrate der nicht ökonomisch induzierten Zuzüge	205	165	40	93	33	60	0,45	0,55
$h = 0{,}01$	Wachstumsrate der Zuzugsrestriktionen	139	165	− 26	76	33	43	0,55	0,77
		Variablenwerte für die ursprünglichen Parameterwerte							
		176	165	11	85	33	52	0,48	0,63

1) Summe der Primär- und Sekundäreffekte der Wanderungen.
2) A/P = Erwerbstätigenquote.
3) A_1/A_2 = Basic/Non-basic-Relation.

Zeile von (24) erscheint auch einmal das Produkt *gc* ohne den Faktor b_1. Daher unterscheidet sich die Elastizität von b_1 von der Elastizität bezüglich *g* und *c*.

(g) Für Demographen ist das Ergebnis von Interesse, daß der Wanderungssaldo von der Geburtenbilanz abhängt. Aus Tabelle 2 ist zu ersehen, daß ein *Anstieg* der natürlichen Wachstumsrate *r* zu einem *Fallen* des kumulierten Wanderungssaldos führt, und zwar von 11 auf −3. Aber der Einfluß der Arbeitsmarkt-Parameter *c* und *g* auf den Wanderungssaldo ist noch größer als der Einfluß von *r*. Ein Anstieg dieser Parameter *erhöht* den Wanderungssaldo.

Die *Wanderungen* haben zwei verschiedene Wirkungen auf den Bevölkerungsbestand, einen Primäreffekt und einen Sekundäreffekt. Der Primäreffekt ist gleich dem kumulierten Wanderungssaldo $NET_c(t)$:

$$NET_c(t) = \int_0^t NET(\tau)d\tau = \int_0^t IN(\tau)d\tau - \int_0^t OUT(\tau)d\tau \,. \tag{29}$$

Der Sekundäreffekt ist die Summe der Wirkungen der Wanderungen auf die Zahl der Geburten und Sterbefälle. Die Summe dieser Wirkungen sei mit $x(t)$ bezeichnet (= Sekundäreffekt). Die Bevölkerungszahl im Zeitpunkt *t* ist dann identisch mit der Summe aus Primär- und Sekundäreffekt zuzüglich dem aus der natürlichen Bevölkerungsentwicklung des Anfangsbestandes resultierenden Bevölkerungsbestand [Gleichung (13)]:

$$P(t) = P_n(t) + NET_c(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau \,. \tag{29.1}$$

Bezeichnet man die Summe aus Primär- und Sekundäreffekt der Wanderungen mit NET_c^*, so ist auf Grund von (29.1)

$$\begin{aligned} NET_c^* &= NET_c(t) + \int_0^t x(\tau)d\tau \,. \\ &= P(t) - P_n(t) \end{aligned} \tag{29.2}$$

Da der Primäreffekt der Wanderungen, die Differenz aus Zu- und Fortzügen, auf der Basis der in (24) gegebenen analytischen Lösung berechnet werden kann, läßt sich der Sekundäreffekt auf einfache Weise aus (29.2) ermitteln:

$$\int_0^t x(\tau)d\tau = P(t) - P_n(t) - NET_c(t) \,. \tag{29.3}$$

Gleichung (29.3) ist besonders für empirische Berechnungen des Sekundäreffekts nützlich.

6. Erweiterung des Modells für zwei bzw. mehrere Regionen

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den Zwei-Regionen-Fall. Zwei-Regionen-Modelle sind von allgemeiner Bedeutung als es den Anschein hat. Untergliedert man ein Land in zwei große flächendeckende Regionen, deren Bevölkerungsentwicklung durch ein Zwei-Regionen-Modell beschrieben bzw. erklärt werden kann, dann lassen sich die beiden

Regionen in je zwei weitere Regionen unterteilen usf., so daß sich durch eine sukzessive Anwendung des Zwei-Regionen-Modells die Möglichkeit ergibt, ein n-Regionen-Modell zu bilden. Diese Bemerkung sei den folgenden Ausführungen vorangestellt, weil sich zeigen wird, daß die analytische Lösung bereits für ein Zwei-Regionen-Modell so schwierig ist, daß es als unmöglich erscheint, die Lösung für ein allgemeines n-Regionen-Modell zu ermitteln.

Einer der wichtigsten Bausteine aller Zwei-Regionen-Modelle ist die Wanderungsfunktion. Im Hinblick auf die Art der Wanderungsfunktion können die in der Literatur diskutierten Zwei-Regionen-Modelle in drei Klassen gegliedert werden:

(a) Das Keyfitz-Modell

Keyfitz (1980) entwickelte folgendes Zwei-Regionen-Modell:

$$P_1(1) = P_1(0) + \int_0^t rP_1(\tau)d\tau - \int_0^t mP_1(\tau)d\tau \,, \tag{30}$$

wobei $P_1(t)$ die Bevölkerungszahl in Region 1 darstellt, r die natürliche Wachstumsrate angibt und m den Anteil der Bevölkerung bestimmt, der (netto) von Region 1 nach Region 2 wandert (Differenz zwischen Zu- und Fortzügen). Falls $m > 0$ ist, bedeutet dies, daß Region 1 einen negativen und Region 2 einen positiven Wanderungssaldo hat. Das Keyfitzsche Modell hat folgende Lösung:

$$P_1(t) = P_1(0)e^{(r-m)t} \,. \tag{31}$$

Das Modell beruht auf der Annahme, daß die natürliche Wachstumsrate in beiden Regionen gleich ist. Auf Grund dieser Annahme läßt sich die Lösung für Region 2 einfach als Differenz zwischen der Gesamtbevölkerungsentwicklung und der Bevölkerungsentwicklung in Region 1 ermitteln:

$$P_2(t) = [P_1(0) + P_2(0)]e^{rt} - P_1(0)e^{(r-m)t} \,. \tag{32}$$

In (32) ist die Summe $P_1(0) + P_2(0)$ die Gesamtbevölkerung am Anfang der Periode $[0,t]$, die sich annahmegemäß mit der gleichen Wachstumsrate r entwickelt wie die Bevölkerung in den beiden Regionen.

Das Hauptcharakteristikum des Keyfitz-Modells beseht darin, daß der Wanderungssaldo von Region 1 in bezug auf Region 2, bezeichnet mit $NET_1(t)$, eine Funktion der Bevölkerungszahl in der Region 1 ist, nicht dagegen der Bevölkerungszahl in Region 2:

$$NET_1(t) = -mP_1(t) \,. \tag{33}$$

$$m > 0$$

Realistischer wäre es, anzunehmen, daß die Wanderungen von Region 1 nach Region 2 (bezeichnet mit M_{12}) und die Wanderungen von Region 2 nach Region 1 (M_{21}), deren Differenz den Wanderungssaldo von Region 1 ergibt

$$NET_1(t) = M_{21}(t) - M_{12}(t) = -mP_1(t) \,, \tag{33.1}$$

sowohl eine Funktion der Herkunfts- als auch der Zielregion sind. Kritisch anzumerken ist ferner, daß das Modell keine getrennten Funktionen für die Zu- und Fortzüge enthält, sondern nur eine Funktion für den Wanderungssaldo. In diesem Punkt geht das Rogers-Modell über das Keyfitz-Modell einen entscheidenden Schritt hinaus.

(b) Das Rogers-Modell

Rogers (1968) entwickelte ein Zwei-Regionen-Modell („components-of-change" model), das von *Ledent* (1978a, b und c) umformuliert wurde. Das reformulierte Modell enthält sowohl eine Zuzugsfunktion als auch eine Fortzugsfunktion.

Die Wanderungshypothese lautet: Die Fortzüge von Region 1 nach Region 2 sind eine lineare Funktion der Bevölkerungszahl in der Herkunftsregion 1:

$$M_{12}(t) = m_{12}P_1(t)\,. \qquad m_{12} > 0 \tag{34}$$

$$M_{21}(t) = m_{21}P_2(t)\,. \qquad m_{21} > 0 \tag{35}$$

In diesem Modell wird die Annahme, daß die natürliche Wachstumsrate der Bevölkerungsentwicklung in beiden Regionen gleich ist, aufgegeben. Wenn die natürlichen Wachstumsraten mit r_1 bzw r_2 bezeichnet werden ($r_1 \neq r_2$), lauten die beiden Grundgleichungen:

$$P_1(t) = P_1(0) + \int_0^t r_1P_1(\tau)d\tau + \int_0^t m_{21}P_2(\tau)d\tau - \int_0^t m_{12}P_1(\tau)d\tau\,. \tag{36}$$

$$P_2(t) = P_2(0) + \int_0^t r_2P_2(\tau)d\tau + \int_0^t m_{12}P_1(\tau)d\tau - \int_0^t m_{21}P_2(\tau)d\tau\,. \tag{37}$$

Das Modell hat folgende analytische Lösung, die von *Ledent* (1978b, S. 25) ausführlich diskutiert wird:

$$P_1(t) = Ae^{x_1t} - Be^{x_2t}\,. \tag{38}$$

$$P_2(t) = Ce^{x_1t} - De^{x_2t}\,. \tag{39}$$

Hierin sind A, B, C, D, x_1 und x_2 Konstante.

Aus (34) und (35) lassen sich die Funktionen für die Wanderungssalden der beiden Regionen wie folgt ableiten:

$$NET_1(t) = M_{21}(t) - M_{12}(t) = m_{21}P_2(t) - m_{12}P_1(t)\,. \tag{40}$$

$$NET_2(t) = -\,NET_1(t) = m_{12}P_1(t) - m_{21}P_2(t)\,. \tag{41}$$

Vergleicht man diese Funktionen für den Wanderungssaldo mit der entsprechenden Funktion im Keyfitz-Modell (33), wird klar, daß das Rogers-Modell insofern realistischer und allgemeiner ist, als der Wanderungssaldo von der Bevölkerungszahl in *beiden* Regionen abhängt.

Das Rogers-Modell ist allerdings in einem wichtigen Punkt zu kritisieren: Der Wanderungs*saldo* hängt zwar von den Bevölkerungsbeständen beider Regionen ab, aber die Wanderungsströme, die Zu- bzw. Fortzüge selbst, sind nach wie vor lediglich eine Funktion der Bevölkerungszahl *einer* Region.

(c) Ein erweitertes Modell

Die Modelle von *Keyfitz* und *Rogers* lassen sich durch den Einbau realistischerer Wanderungsfunktionen erweitern. Dazu dienen die folgenden Überlegungen.

(1) Eine notwendige Bedingung für jede freiwillige Wohnortverlagerung von Region i nach Region j ist ein Vergleich der relativen Vor- bzw. Nachteile der beiden konkurrierenden Regionen. Daher bildet die maximale Anzahl der überhaupt möglichen Vergleiche, bezeichnet mit $COMP_{ij}$, die Obergrenze für die Zahl der Wanderungen von i nach j:

$$M_{ij} \leq COMP_{ij} \,. \tag{42}$$

(2) Die Zahl der Vergleiche pro Zeiteinheit hängt von zwei Größen ab, erstens von der Zahl der Individuen in Region i, die diese Vergleiche anstellen, und zweitens von der Zahl der alternativen Lebenssituationen in der potentiellen Zielregion j. Die erste Größe sei eine Funktion f_i der Zahl der Einwohner P_i. Die zweite Größe sei eine Funktion der Zahl der Arbeitsplätze in Region j, die in den Vergleich einbezogen werden, denn die meisten Menschen verdienen ihren Lebensunterhalt durch Arbeit und benötigen nach einem Umzug einen Arbeitsplatz in der Zielregion (abgesehen von den erwähnten Ausnahmen, beispielsweise Pendlern, Studenten, nicht erwerbstätigen Familienangehörigen usw.). Die Zahl der Arbeitsplätze in der Zielregion, die in den Vergleich einbezogen werden, sei eine Funktion q_j der Zahl der freien Arbeitsplätze Q_j. Die freien bzw. besetzbaren Arbeitsplätze Q_j entstehen durch Schaffung neuer Arbeitsplätze, vor allem aber sind sie besetzbar infolge der hohen Zahl der permanenten Arbeitsplatzfluktuationen. Arbeitsplatzfluktuationen sind zurückzuführen auf das Ausscheiden älterer Menschen aus dem Arbeitsprozeß und auf Stellenwechseln im Rahmen von Berufskarrieren. Es wurde bereits erwähnt, daß es in der Bundesrepublik bei einem Gesamtbestand von 25 Millionen Arbeitsplätzen 5 Millionen Arbeitsplatzwechsel innerhalb von Betrieben und weitere 5 Millionen zwischenbetriebliche Arbeitsplatzwechsel pro Jahr gibt. Jeder fünfte bis dritte Arbeitsplatz wird also Jahr für Jahr neu besetzt und kommt damit prinzipiell auch für Bewerber außerhalb der betreffenden Region als potentieller Arbeitsplatz in Betracht.

Um die Zahl der endogenen Variablen möglichst klein zu halten, soll an Stelle der Variablen Q_j die Bevölkerungsvariable P_j verwendet werden, indem unterstellt wird, daß Q_j, wie in Gleichung (9) angenommen, von der Zahl der Arbeitsplätze abhängt, und daß die Zahl der Arbeitsplätze wiederum eine Funktion der Bevölkerungszahl ist:

$$q_j[Q_j(t)] = q_j[c_jA_j(t)] \,. \tag{43.1}$$

In Gleichung (43.1) ist c_j der Fluktuationskoeffizient, der in Gleichung (9) eingeführt wurde. Indem angenommen wird, daß $A_j(t)$ eine lineare Funktion von $P_j(t)$ ist, kann die Erwerbstätigenquote $\xi_j(t)$:

$$\xi_j(t) := A_j(t)/P_j(t) \tag{43.2}$$

$$\xi_j > 0$$

verwendet werden, um (43.1) als Funktion von $P_j(t)$ darzustellen:

$$q_j[Q_j(t)] = q_j[c_j\xi_j P_j(t)] = q_j[\gamma_j P_j(t)] \qquad (43.3)$$
$$\xi_j \text{ konstant}$$

wobei γ_j eine Abkürzung für das Produkt $c_j\xi_j$ ist. Da γ_j vom Fluktuatonsparameter c_j abhängt, soll auch für γ_j der Ausdruck Fluktuationsparameter verwendet werden, um unnötige Begriffshäufungen zu vermeiden.
Die beiden Funktionen f_i und q_j sollen durch folgende Annahmen weiter spezifiziert werden:

$$f_i[P_i(t)] := P_i(t)^{\beta^*}. \qquad (43.4)$$
$$\beta^* > 0$$

$$q_j[\gamma_j P_j(t)] := [\gamma_j P_j(t)]^{\alpha^*}. \qquad (43.5)$$
$$\alpha^* > 0$$

In beiden Fällen soll es sich also um Exponentialfunktionen handeln. Mit diesen Annahmen kann die Zahl der Vergleiche $COMP_{ij}$ durch folgende Funktion 4 dargestellt werden:

$$COMP_{ij} = \psi\,[\gamma_j P_j(t)^{\alpha^*}, P_i(t)^{\beta^*}]\,. \qquad (43.6)$$

Die Form der Funktion ψ ist multiplikativ, denn die Zahl der Vergleiche ist das Produkt aus der Zahl der Individuen, die Vergleiche anstellen, mit der Zahl der Alternativen, die verglichen werden:

$$COMP_{ij}(t) = [\gamma_j P_j(t)]^{\alpha^*} P_i(t)^{\beta^*}. \qquad (44)$$

Mit (42) ist

$$M_{ij}(t) \leq [\gamma_j P_j(t)]^{\alpha^*} P_i(t)^{\beta^*}. \qquad (45)$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Werte der Parameter α^* und β^* so angepaßt (reduziert) werden können, daß in (45) zumindest näherungsweise das Gleichheitszeichen verwendet werden kann. Dann erhalten wir die *Wanderungsfunktion*

$$M_{ij}(t) = [\gamma_j P_j(t)]^{\alpha} P_i(t)^{\beta} \qquad (46)$$
$$\alpha, \beta > 0\,,$$

die eine große strukturelle Ähnlichkeit mit dem *Grativitationsmodell* aufweist:

$$M_{ij}(t) = \frac{P_j(t)^{\pi_1} P_i(t)^{\pi_2}}{(D_{ij})^{\pi_3}}\,, \qquad (46.1)$$

wobei D_{ij} die geographische und/oder ökonomische Distanz zwischen der Regionen i und j angibt. Da die Distanz im Zwei-Regionen-Modell eine Konstante ist, sei angenommen, daß die Reduktion

$$\alpha^* \rightarrow \alpha \quad \text{und} \quad \beta^* \rightarrow \beta$$

so durchgeführt werden könne, daß auf den Nenner in (46.1) verzichtet werden kann. Der einzige Unterschied zwischen der Wanderungsfunktion (46) und dem Gravitationsmodell (46.1) besteht dann darin, daß die Wanderungsfunktion (46) den Fluktuationsparameter (46) enthält.

Auf der Basis der Wanderungsfunktion (46) läßt sich ein alternatives Modell zu den von *Keyfitz* und *Rogers* entwickelten Zwei-Regionen-Modellen bilden. Die beiden Grundgleichungen des erweiterten Modells lauten:

$$P_1(t) = P_1(0) + \int_0^t r_1 P_1(\tau) d\tau + \int_0^t [\gamma_1 P_1(\tau)]^\alpha P_2(\tau)^\beta d\tau - \int_0^t [\gamma_2 P_2(\tau)]^\alpha P_1(\tau)^\beta d\tau \,. \qquad (47)$$

$$P_2(t) = P_2(0) + \int_0^t r_2 P_2(\tau) d\tau + \int_0^t [\gamma_2 P_2(\tau)]^\alpha P_1(\tau)^\beta d\tau - \int_0^t [\gamma_1 P_1(\tau)]^\alpha P_2(\tau)^\beta d\tau \,. \qquad (48)$$

Das Differentialgleichungssystem (47) und (48) läßt sich nur schwer analytisch lösen, jedenfalls waren die Bemühungen des Verfassers nicht von Erfolg gekrönt. Aber unter der Annahme, daß die natürlichen Bevölkerungswachstumsraten beider Regionen gleich sind ($r_1 = r_2$), ist es möglich, wichtige Eigenschaften der Lösung anzugeben, und zwar im Hinblick auf folgende beiden Fragen:

a) In welcher der beiden Regionen wächst und in welcher sinkt die Bevölkerungszahl?
b) Falls ein stabiles Gleichgewicht der Bevölkerungsverteilung existiert: Welche Bevölkerungsanteile haben die beiden Regionen an der Gesamtbevölkerung?

Zunächst soll gezeigt werden, daß eine Gleichgewichtslösung existiert. Falls ein Gleichgewicht existiert, müssen die Bevölkerungswachstumsraten der beiden Regionen gleich sein:

$$\frac{\frac{dP_1(t)}{dt}}{P_1(t)} = \frac{\frac{dP_2(t)}{dt}}{P_2(t)} \,. \qquad (49)$$

Da die Bevölkerungsveränderung die Summe aus den Veränderungen auf Grund von natürlichem Wachstum und auf Grund von Wanderungen ist, kann (49) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{r_1 P_1(t) + NET_1(t)}{P_1(t)} = \frac{r_2 P_2(t) + NET_2(t)}{P_2(t)} \,. \qquad (50)$$

Im Falle von $r_1 = r_2$ reduziert sich (50) zu

$$\frac{NET_1(t)}{P_1(t)} = - \frac{NET_1(t)}{P_2(t)} \,, \qquad (50.1)$$

da $NET_1(t) = -NET_2(t)$. Die Gleichgewichtsbedingung (50.1) ist nur erfüllt, wenn der Wanderungssaldo Null ist. Mit (46) bedeutet dies:

$$NET_1(t) = \gamma_1^\alpha P_1(t)^\alpha P_2(t)^\beta - \gamma_2^\alpha P_2(t)^\alpha P_1(t)^\beta = 0 \,. \qquad (50.2)$$

In (50.2) kann $P_2(t)$ durch die Differenz $P_0(t) - P_1(t)$ ersetzt werden, wobei $P_0(t)$ die Gesamtbevölkerung darstellt: $P_0(t) = P_1(t) + P_2(t)$. Dann ist

$$NET_1(t) = \gamma_1^{\alpha}[P_0(t) - P_1(t)]^{\alpha}\{\gamma^{\alpha}[P_0(t) - P_1(t)]^{\beta-\alpha} - \gamma_2^{\alpha}P_1(t)^{\beta-\alpha}\} = 0\,. \tag{50.3}$$

Die Frage, ob ein stabiles Gleichgewicht existiert, reduziert sich also auf die Frage, ob es Bedingungen gibt, unter denen (50.3) erfüllt ist. Die Variable $NET_1(t)$ ist gleich Null, wenn die erste oder die zweite Klammer in (50.3) gleich Null ist. Die erste Klammer ist Null, wenn $P_1(t) = P_0(t)$ ist. Die zweite Klammer ist Null, wenn

$$\gamma_1^{\alpha}[P_0(t) - P_1(t)]^{\alpha-\beta} - \gamma_2^{\alpha}P_1(t)^{\beta-\alpha} = 0\,. \tag{51}$$

Die Lösung von (51) ist:

$$P_1(t) = \lambda P_{0(t)} \tag{52}$$

wobei

$$\lambda := \frac{1}{(\gamma_2/\gamma_y)^{\alpha/(\beta-\alpha)} + 1} = \frac{\gamma_1^{\alpha/(\beta-\alpha)}}{\gamma_1^{a/(\beta-\alpha)} + \gamma_2^{\alpha/(\beta-\alpha)}}\,.$$

Das bedeutet, daß der Wanderungssaldo so lange positiv (negativ) ist, so lange das Verhältnis der Bevölkerung in Region 1 zur Gesamtbevölkerung kleiner (größer) als λ ist:

wenn $P_1(t) < \lambda P_0(t)$, dann ist $NET_1(t) > 0$,
wenn $P_1(t) > \lambda P_0(t)$, dann ist $NET_1(t) < 0$.

Dieser Sachverhalt ergibt sich aus einer Analyse des Wertes der Klammerausdrücke in (50.3). Die erste Klammer ist immer positiv, wenn $P_1 \neq P_0$. Der Wert der zweiten Klammer nimmt zu, wenn $P_1(t)$ abnimmt; daher ist der Wanderungssaldo positiv für kleine Werte von $P_1(t)$, negativ für einen großen Wert von $P_1(t)$ und Null für $P_1(t) = \lambda P_0(t)$.
Die Eigenschaften des Modells können wie folgt zusammengefaßt werden:
(1) Es existiert eine stabile langfristige Bevölkerungsverteilung für $t = t^*$ mit folgenden Anteilen der Regionen an der Gesamtbevölkerung:

$$\frac{P_1(t^*)}{P_0} = \lambda\,, \quad \frac{P_2(t^*)}{P_0} = 1 - \lambda\,. \tag{53}$$

Die Anteile λ und $1\text{-}\lambda$ der Regionen an der Gesamtbevölkerung sind, wie sich aus (52) ergibt, ausschließlich eine Funktion der Parameter der Wanderungsfunktionen, und sie sind unabhängig von den anfänglichen Bevölkerungsbeständen $P_1(0)$ und $P_2(0)$ (beide ungleich Null).
(2) Die Gleichgewichtsverteilung hängt ab von dem Verhältnis der Arbeitsplatz-Fluktuationsparameter γ_1 und γ_2:

$$\frac{P_1(t^*)}{P_2(t^*)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}^{\alpha/(\beta-\alpha)}\,. \tag{54}$$

Das bedeutet, daß der Anteil des Bevölkerungsbestandes einer Region am Gesamtbevölkerungsbestand im Gleichgewicht um so größer ist, je größer der Arbeitsplatz-Fluktuationsparameter γ ist.

(3) In dem speziellen Fall $\alpha = \beta$ und $\gamma_1 = \gamma_2$ ist der Wanderungssaldo gleich Null. Nur unter diesen besonderen Bedingungen sind die Anteile der Bevölkerungszahlen der Regionen an der Gesamtbevölkerungszahl konstant, so daß die Bevölkerungsverteilung im Gleichgewicht identisch mit der anfänglichen Bevölkerungsverteilung ist. In allen anderen Fällen ändert sich die Bevölkerungsverteilung in Richtung auf einen stabilen Gleichgewichtszustand, der vor allem vom Verhältnis der Arbeitsplatz-Fluktuationsparameter der Regionen bestimmt wird.

Insgesamt läßt sich als Fazit festhalten, daß die regionale Bevölkerungsverteilung in einem System von Regionen entscheidend von den Wanderungen bzw. von den Bedingungen auf den regionalen Arbeitsmärkten abhängt.

Summary

The population development of a region is determined not only by the natural rate of growth, but to a much greater extent by the migration across the borders of the region. Migration is the essential link between population development and economic development of a region. The interaction between the natural movement of the population, migration and job creation is mathematically described by a model with dynamic relations, applying an analytical solution. The authors discusses an extension of the model to the two-region case and for a system of more than two regions, respectively, deriving for the two-region model major characteristics of the solution. The two-region model presented is an extension of the models developed by KEYFITZ and ROGERS. It permits to derive important information concerning the population development/distribution in a system of regions.

Résumé

L'évolution démographique d'une région no dépend pas seulement du taux d'accroissement naturel, mais dans une bien plus grande mesure des migrations passant les frontières régionales. Les migrations représentent le lien décisif entre l'évolution démographique et le développement économique d'une région. L'interaction de l'évolution naturelle de la population, des migrations et de l'évolution de l'emploi est décrite mathématiquement et résolue d'une façon analytique à l'aide d'un modèle aux rapports dynamiques. Une extension du modèle sur le cas de deux régions resp. pour un système de plus de deux régions est discutée, des propriétés importantes de la solution étant dérivées pour le modèle de deux régions. Le modèle de deux régions présenté est une extension des modèles développés par KEYFITZ et ROGERS. Il permet de dériver des rapports importants sur l'évolution démographique resp. sur la répartition de la population dans un système de régions.

Literaturverzeichnis

Birg, H.: Zur Interdependenz der Bevölkerungs- und Arbeitsplatzentwicklung – Berlin: Dunker & Humblot, 1979

Birg, H.: An Interregional Population-Employment Model for the Federal Republic of Germany: Methodology and Forecasting Results for the Year 2000; in: Papers of the Regional Science Association, 47, 1981

Birg, H.: Demographic Aspects of Labour Market Efficiency, in: Economic Consequences of Population Change in Industrialized Countries; Steinmann, G. (Hrsg.), Heidelberg u. New York, 1984 (in Vorbereitung). Vorabdruck in: Materialien des Instituts für Bevölkerungsforschung und Sozialpolitik, Nr. 9, Universität Bielefeld, 1983

Keyfitz, N.: Do Cities Grow by Natural Increase or by Migration? Research Report RR-80-24 of the International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1980

Ledent, J.: The Dynamics of Two Demographic Models of Urbanisation. Research Memorandum RM-78-56 of the International Institute for Applied Analysis, Laxenburg, Austria, 1978a

Ledent, J.: The Factors and Magnitude of Urbanisation under Unchanged Natural Increase and Migration Patterns. Research Memorandum RM-78-57 of the International Institute for Applied Analysis, Laxenburg, Austria, 1978b

Ledent, J.: The Forces of Urbanisation under Varying Natural Increase and Migration Rates. Research Memorandum RM-78-58 of the International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria, 1978c

Reyher, L.; Mertens, D.: Zum Beschäftigungsproblem in den nächsten Jahren; Gewerkschaftliche Monatshefte 11, 1977

Rogers, A.: Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution – Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1968

(Anschrift d. Verf.: Prof. Dr. Herwig Birg, Universität Bielefeld, Institut für Bevölkerungsforschung und Sozialpolitik, Universitätsstraße, 4800 Bielefeld 1)