ALGÈBRE. — *Anneaux balancés*. Note (*) de MM. **Vlastimil Dlab** et **Claus Michael Ringel**, présentée par M. René Garnier.

Soit R un anneau avec unité. Sauf mention expresse du contraire, tous les modules considérés seront des R-modules unitaires à gauche. Le R-module M est dit balancé, si l'homomorphisme canonique de R dans le bicommutant de M est surjectif. L'anneau R est appelé balancé si tous les R-modules sont balancés. Une des conséquences de notre caractérisation des anneaux balancés est que l'anneau R est balancé si et seulement si l'opposé de R est lui-même balancé. Il est bien connu que les anneaux unisériels introduits par T. Nakayama ([10]) sont balancés. J. P. Jans ([9]) a conjecturé que tous les anneaux balancés sont unisériels. Il a prouvé la conjecture pour les algèbres de dimension finie sur un corps commutatif algébriquement clos; S. E. Dickson et K. R. Fuller ([4]) et V. P. Camillo ([2]) ont prouvé la conjecture pour les anneaux commutatifs. Nous généralisons ces résultats pour les anneaux R qui sont des modules de type fini sur leur centre et nous montrons que dans le cas général la conjecture n'est pas vraie.

1. Anneaux exceptionnels. — Dans cette section nous étudions une classe particulière d'anneaux locaux balancés. Si R est un anneau local, nous désignons par W le radical de R et par $Q = R/W$ le corps résiduel. Si $W^2 = 0$, W est un espace vectoriel à gauche sur Q, dénoté par ${}_QW$, et un espace vectoriel à droite sur Q, dénoté par W_Q. Si $w \in W$, nous avons deux sous-anneaux :

$$T_w = \{ t \in R \mid wt \in Rw \} \qquad \text{et} \qquad S_w = \{ s \in R \mid sw \in wR \}$$

de R. Dans le cas $W^2 = 0$ il est clair que $W \subseteq T_w$ et $W \subseteq S_w$ et il est aussi clair que T_w/W et S_w/W sont des sous-corps de Q.

Définition 1.1. — *Un anneau local* R *de radical* W *est appelé exceptionnel si*

$$W^2 = 0, \qquad \dim_Q W \times \dim W_Q = 2$$

et si $\dim_Q W = 2$ *entraîne* $\dim Q_{(T_w/W)} = 2$ *et* $\dim W_Q = 2$ *entraîne* $\dim_{(S_w/W)} Q = 2$ *pour un élément* $w \neq 0$ *dans* W.

Les anneaux exceptionnels peuvent être caractérisés comme suit :

Proposition 1.2. — *Soient* R *un anneau local,* W *le radical de* R. *Supposons*

$$W^2 = 0 \quad \textit{et} \quad \dim_Q W \times \dim W_Q = 2.$$

Si $\dim_Q W = 2$, R *est exceptionnel si et seulement si tous les* R-*modules indécomposables et injectifs sont de longueur* 2. *Si* $\dim_Q W = 1$, R *est exceptionnel si et seulement si tous les* R-*modules indécomposables et injectifs sont de longueur* 3.

De l'étude du cas injectif et indécomposable résulte que les modules indécomposables sur un anneau exceptionnel peuvent se répartir en exactement trois types, à savoir les modules injectifs, les modules projectifs ou les modules simples. Cela se montre en décomposant chaque module comme somme directe de sous-modules indécomposables. Ainsi, on en déduit que tous les modules sont balancés.

Proposition 1.3. — *Les anneaux exceptionnels sont balancés.*

Il n'est pas difficile de construire des anneaux exceptionnels : Soient K un corps commutatif, φ un isomorphisme de K sur un sous-corps K′ de K tel que K, considéré comme espace vectoriel sur K′, soit de dimension 2. Sur le groupe additif produit $K \times K$, on définit une structure d'anneau en posant [1] :

$$(x, y)(x', y') = (xx', \varphi(x) y' + yx').$$

On vérifie tout de suite que cet anneau est exceptionnel. Plus généralement, il suffit de supposer que K est un corps qui est un module de type fini sur son centre.

2. Anneaux locaux balancés. — On sait que tous les anneaux unisériels et que tous les anneaux exceptionnels sont balancés. Réciproquement, on peut montrer qu'il n'y a pas d'autres anneaux locaux balancés. Nous supposerons ici que R est un anneau artinien. La proposition suivante sera utilisée un peu plus loin en vue d'établir que tout anneau balancé est artinien.

Proposition 2.1. — *Soit* R *un anneau local artinien.* R *est balancé si et seulement si* R *est unisériel ou exceptionnel.*

Voici les principales étapes de la preuve de la proposition 2.1, qui est une proposition clef. Premièrement on observe que les idéaux bilatères d'un anneau R comme dans la proposition 2.1 forment une chaîne; il suffit en effet de remarquer que pour deux idéaux bilatères $I_1 \neq 0$ et $I_2 \neq 0$, avec $I_1 \cap I_2 = 0$, il existe un module facteur indécomposable de ${}_R R \oplus {}_R R$ qui n'est pas balancé [*cf.* [4], [9]]. Deuxièmement on montre que l'intersection des socles à gauche et à droite de R est un R-module de longueur ≤ 2 en exhibant un certain module facteur de ${}_R R$. Conséquemment, on obtient l'inégalité $\dim_Q (W/W^2) \leq 2$. Troisièmement on obtient que R/W^2 est unisériel ou exceptionnel en construisant certains modules indécomposables non balancés. Finalement, on peut montrer que W^2/W^3 est zéro ou l'unique sous-module minimal de R/W^3. Mais, si $W^2/W^3 \neq 0$, R doit être unisériel.

3. La structure des anneaux balancés. — Il est bien connu [7], que les anneaux artiniens balancés sont sommes directes d'anneaux de matrices sur des anneaux locaux balancés. Si R est un anneau balancé, et si W est le radical de R, on déduit de la proposition 2.1 que W/W^2 est un R-module de type fini. Or V. P. Camillo [2] a démontré que le radical d'un anneau balancé est bi-T-nilpotent. D'après un argument de B. L. Osofsky [11] on obtient alors le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Un anneau balancé est artinien.*

Ainsi, les anneaux balancés sont somme directe d'anneaux de matrices sur des anneaux locaux balancés. En appliquant la proposition 2.1 on en déduit le

Théorème 3.2. — *Un anneau* R *est balancé si et seulement si* R *est somme directe d'un anneau unisériel et d'un nombre fini d'anneaux de matrices sur des anneaux exceptionnels.*

Comme l'opposé d'un anneau unisériel ou exceptionnel est respectivement unisériel ou exceptionnel on a le

Corollaire 3.3. — *Un anneau* R *est balancé si et seulement si l'opposé de* R *est balancé.*

4. Anneaux de type fini sur leur centre. — Nous nous proposons ici d'améliorer le théorème 3.2 dans le cas où R/W est de type fini sur son centre, en particulier, si R est de type fini sur son centre. Si R est un anneau local et si $Q = R/W$ est de dimension finie sur son centre, alors R est exceptionnel si et seulement si nous avons les conditions

$$W^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim_Q W \times \dim W_Q = 2.$$

Ceci est une conséquence de l'assertion qu'un corps K de dimension finie sur son centre, considéré comme espace vectoriel à gauche ou à droite sur un sous-corps K′, a mêmes dimensions [8].

Théorème 4.1. — *Soit* R *un anneau de radical* W. *Supposons que* R/W *est un module de type fini sur son centre. Pour que* R *soit balancé il faut et il suffit que* R *soit somme directe d'un anneau unisériel et d'un nombre fini d'anneaux de matrices sur des anneaux locaux* R_i *avec*

$$W_i = 0 \quad \textit{et} \quad \dim_{Q_i} W_i \times \dim W_{i_Q} = 2,$$

où W_i *est le radical de* R_i *et où* $Q_i = R_i/W_i$.

Comme il ne peut exister d'anneaux exceptionnels de type fini sur leur centre, on a

Théorème 4.2. — *Soit* R *un anneau qui est un module de type fini sur son centre. Pour que* R *soit balancé il faut et il suffit que* R *soit unisériel.*

Ce théorème s'applique, en particulier, aux algèbres A de dimension finie sur un corps. Il conduit à une caractérisation des algèbres balancées A de dimension finie qui a été trouvée indépendamment par V. P. Camillo et K. R. Fuller [3].

5. Remarques. — (*a*) La preuve du théorème 3.2 montre qu'un anneau artinien R est balancé si tous les R-modules de longueur finie sont balancés. Ainsi, un anneau artinien R est balancé si et seulement si tous les anneaux résiduels de R sont des anneaux QF-1 au sens de R. M. Thrall ([12]). L'exemple de l'anneau des entiers montre que l'hypothèse R artinien est nécessaire.

(*b*) On sait que la classe des anneaux balancés est préservée par passage à l'équivalence de Morita. Il s'ensuit que les anneaux balancés R doivent pouvoir se caractériser en termes de catégories de R-modules. On a en effet que tout anneau artinien R est balancé si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

(i) les facteurs de composition de tous les R-modules indécomposables sont isomorphiques;

(ii) tous les R-modules indécomposables de longueur > 3 sont unisériels;

(iii) tous les R-modules indécomposables de longueur 3 ayant des facteurs de composition isomorphiques sont isomorphiques.

(*c*) Une conséquence de la caractérisation précédente est qu'un anneau balancé n'a qu'un nombre fini de modules indécomposables (non-isomorphiques).

(*d*) Soient R un anneau balancé, M un R-module indécomposable. Alors, l'anneau des endomorphismes de M est balancé.

Les preuves des assertions de cette Note sont données dans les articles ([5]) et ([6]).

(*) Séance du 2 juin 1971.

(1) N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 8, p. 27.
(2) V. P. Camillo, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149, 1970, p. 143-153.
(3) V. P. Camillo et K. R. Fuller, à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.*
(4) S. E. Dickson et K. R. Fuller, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24, 1970, p. 667-670.
(5) V. Dlab et C. M. Ringel, *Carleton Math. Series*, nº 39, 1971.
(6) V. Dlab et C. M. Ringel, *Carleton Math. Series*, nº 45, 1971.
(7) K. R. Fuller, *Pacific J.*, 34, 1970, p. 379-383.
(8) N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer Math. Soc., Providence, 1956.
(9) J. P. Jans, *Math. Ann.*, 188, 1970, p. 85-89.
(10) T. Nakayama, *Ann. of. Math.*, 42, 1941, p. 1-21.
(11) B. L. Osofsky, *J. Algebra*, 4, 1966, p. 373-387.
(12) R. M. Thrall, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64, 1948, p. 173-183.

Department of Mathematics,
Carleton University,
Ottawa 1, Ontario, Canada.