ALGÈBRE. — *Représentations indécomposables des algèbres.* Note (*) de MM. **Vlastimil Dlab** et **Claus Michael Ringel**, présentée par M. René Garnier.

Dans cette Note K désigne un corps commutatif fixé. Soit F un corps (non nécessairement commutatif) contenant K dans son centre et de dimension finie sur K. Un ensemble fini (partiellement) ordonné **S** muni d'une application isotone de **S** dans le treillis des sous-corps de F contenant K est dit une K-*structure* (pour F). Ainsi à chaque $i \in \mathbf{S}$ correspond un sous-corps F_i de F contenant K tel que $K \subseteq F_i \subseteq F_j$ pour chaque $i \leq j$ dans **S**. Étant donné un sous-corps G de F contenant K et un nombre naturel n, l'on désigne par $\mathbf{I}_n(G)$ la K-structure définie par la chaîne $\mathbf{S} = \{1 < 2 < \ldots < n\}$ et par l'application constante $F_i = G$ pour tout $i \in \mathbf{S}$. De plus, $\mathbf{N}(G)$ désigne la K-structure définie par un ensemble ordonné à quatre éléments de la forme $\{i < j > k < l\}$ muni de l'application constante $F_i = F_j = F_k = F_l = G$. Par chaque K-structure **S**, la *largeur pondérée* de **S** est définie comme étant le maximum de toutes les sommes $\sum_{j \in J} [F : F_j]$, où J est un sous-ensemble de **S** constitué entièrement d'éléments mutuellement non comparables.

Par **S**-*espace* (W, W_i), l'on entend un espace vectoriel à droite W_F sur F muni d'une famille de F_i-sous-espaces W_i $(i \in \mathbf{S})$ telle que $i < j$ entraîne $W_i \subseteq W_j$. La *dimension pondérée de* (W, W_i) sera le maximum des dim W_{F_i}, i parcourant **S**. Étant donné une K-structure **S**, les **S**-espaces forment une catégorie additive où les morphismes $(W, W_i) \to (W', W'_i)$ sont les applications F-linéaires $\varphi : W \to W'$ telles que $\varphi\, W_i \subseteq W'_i$ pour tout $i \in \mathbf{S}$. Il en résulte les notions de somme directe de **S**-espaces et de **S**-espace indécomposable. Une K-structure **S** sera dite de *type fini* si il n'y a qu'un nombre fini de **S**-espaces indécomposables de dimension finie. L. A. Nazarova et A. V. Roiter ([6]) et M. M. Kleiner ([5]) ont caractérisé les K-structures **S** de type fini dans le cas classique, c'est-à-dire, le cas où l'on a $F_i = F$ pour tout $i \in \mathbf{S}$. Leurs résultats peuvent s'étendre comme suit.

Théorème A. — *Soit* **S** *une* K-*structure pour* F. *Pour que* **S** *soit de type fini il faut et il suffit que la largeur pondérée de* **S** *ne dépasse pas* 3 *et que* **S** *ne contienne aucune des* K-*structures suivantes (munies de l'ordre induit par* **S**) :

(i) $\mathbf{I}_2(F) \sqcup \mathbf{I}_2(F) \sqcup \mathbf{I}_2(F)$;
(ii) $\mathbf{I}_1(F) \sqcup \mathbf{I}_3(F) \sqcup \mathbf{I}_3(F)$;
(iii) $\mathbf{I}_1(F) \sqcup \mathbf{I}_2(F) \sqcup \mathbf{I}_5(F)$;

(iv) $\mathbf{I}_4(F) \sqcup \mathbf{N}(F)$;
(v) $\mathbf{I}_2(G) \sqcup \mathbf{I}_2(F)$ *avec* $[F:G] = 2$;
(vi) $\mathbf{I}_3(G) \sqcup \mathbf{I}_1(F)$ *avec* $[f:G] = 2$;
(vii) $\mathbf{I}_2(G)$ *avec* $[F:G] = 3$.

(Ici $\sqcup$ *dénote l'union disjointe d'ensembles ordonnés.) En outre, si la structure* $\mathbf{S}$ *est de type fini, alors tout* $\mathbf{S}$*-espace indécomposable* W *est de dimension pondérée* ≤ 6.

Suivant P. Gabriel [6], une K-*espèce* $(K_i, {}_iM_j)_{i,j\in I}$ est une famille finie de corps K_i de dimension finie sur un sous-corps central commun K et une famille double de K_i-K_j-bimodules ${}_iM_j$ telles que K opère centralement sur ${}_iM_j$ (c'est-à-dire, tel que $km = mk$ quels que soient $k \in K$ et $m \in {}_iM_j$) et telles que tout ${}_iM_j$ soit de dimension finie sur K. Le *diagramme* d'une K-espèce $(K_i, {}_iM_j)_{i,j\in I}$ aura comme ensemble de sommets l'ensemble fini I et

$$\dim_{K_i}({}_iM_j) \times \dim({}_iM_j)_{K_j} + \dim_{K_j}({}_jM_i) \times \dim({}_jM_i)_{K_i}$$

arêtes entre les sommets i et j. Pour exprimer que ${}_jM_i = 0$ et que $\dim_{K_i}({}_iM_j) < \dim({}_iM_j)_{K_j}$ nous utiliserons la flèche $\underset{i}{\cdot}\!\Rrightarrow\!\underset{j}{\cdot}$. Une ***représentation*** d'une K-espèce $(K_i, {}_iM_j)$ est une famille d'espaces vectoriels V_i sur K_i et une famille double d'applications K_j-linéaires ${}_j\varphi_i : V_i \otimes_{K_i} {}_iM_j \to V_j$, $i, j \in I$. Les représentations d'une K-espèce $(K_i, {}_iM_j)$ forment une catégorie abélienne où les morphismes $(V_i, {}_j\varphi_i) \to (V'_i, {}_j\varphi'_i)$ sont donnés par une famille d'applications K_i-linéaires $\alpha_i : V_i \to V'_i$ telles que ${}_j\varphi'_i(\alpha_i \otimes 1) = \alpha_j\, {}_j\varphi_i$. A nouveau, nous avons les notions de somme directe et d'objet indécomposable. Nous dirons qu'une K-espèce est de *type fini* s'il n'y a qu'un nombre fini de représentations indécomposables de dimension finie. P. Gabriel a caractérisé une K-espèce de type fini telle que tous les K_i soient égaux à un corps fixe F et telle que ${}_F({}_iM_j)_F = ({}_FF_F)^{n_{ij}}$ pour un certain entier n_{ij} [3]. Son résultat peut s'étendre comme suit.

Théorème B. — *Pour qu'une* K-*espèce soit de type fini il faut et il suffit que son diagramme soit une union disjointe finie de graphes de Dynkin.*

Étant donné un graphe de Dynkin il est aisé de construire une K-espèce correspondante. P. Gabriel a montré que les nombres de représentations indécomposables de K-espèces correspondant aux graphes de Dynkin de type $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_8$ sont respectivement $1/2\, n(n+1)$, $n(n-1)$, 36, 63 et 120. Nous pouvons prouver qu'il y a n^2 représentations indécomposables de K-espèces correspondant aux graphes de Dynkin de type $\mathbf{B}_n$ ou $\mathbf{C}_n$ et qu'il y a respectivement 24 et 6 représentations indécomposables de K-espèces correspondant aux graphes de Dynkin de type $\mathbf{F}_4$ et $\mathbf{G}_2$. Nous observons ainsi que les nombres que nous avons trouvés, comme les nombres trouvés par P. Gabriel, ne sont que les nombres des racines positives de formes quadratiques correspondantes [*cf.* [1]].

A chaque K-espèce $\mathbf{Q} = (\mathrm{K}_i, {}_i\mathrm{M}_j)_{i, j \in \mathrm{I}}$ nous pouvons associer l'algèbre tensorielle $\mathbf{T}(\mathbf{Q}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{M}^{(n)}$, où $\mathrm{M}^{(0)} = \coprod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{K}_i$, $\mathrm{M}^{(1)} = \prod_{i,j} {}_i\mathrm{M}_j$ et où $\mathrm{M}^{(n)}$ est une puissance tensorielle d'ordre n sur $\mathrm{M}^{(0)}$, $\mathrm{M}^{(1)} \otimes \mathrm{M}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathrm{M}^{(1)}$; ici, la multiplication dans l'algèbre $\mathbf{T}(\mathbf{Q})$ est induite par le produit tensoriel. Il s'ensuit que la catégorie $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$ des représentations de $\mathbf{Q}$ est équivalente à la catégorie de tous les $\mathbf{T}(\mathbf{Q})$-modules à droite.

Une K-algèbre $\mathbf{A}$ (associative, à élément unité et de dimension finie sur K) est dite de *type fini*, s'il n'y a qu'un nombre fini de A-modules indécomposables de dimension finie. Deux classes de K-algèbres, l'une forme de K-algèbres héréditaires et l'autre de K-algèbres de radical de carré nul, seront caractérisées dans la présente Note.

THÉORÈME C. — *Une* K-*algèbre* $\mathbf{A}$ *est une algèbre héréditaire de type fini si et seulement si* $\mathbf{A}$ *est Morita-équivalente à l'algèbre tensorielle* $\mathbf{T}(\mathbf{Q})$, *où* $\mathbf{Q}$ *est une* K-*espèce de type fini.*

Nous pouvons associer aisément à chaque K-algèbre $\mathbf{A}$ une K-espèce. Soit B l'algèbre basique de $\mathbf{A}$; nous avons que $\mathbf{B}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$ est un produit fini de corps $\mathrm{K}_1 \times \mathrm{K}_2 \times \ldots \times \mathrm{K}_n$ et que

$$\mathrm{Rad}\,\mathbf{B}/(\mathrm{Rad}\,\mathbf{B})^2 = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq n} {}_i\mathrm{M}_j,$$

où ${}_i\mathrm{M}_j$ est un K_i-K_j-bimodule. La K-espèce $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}} = (\mathrm{K}_i, {}_i\mathrm{M}_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est appelée la K-espèce de $\mathbf{A}$. Le fait que B soit bien souvent un anneau quotient de $\mathbf{T}(\mathbf{Q}_{\mathbf{A}})$ permet d'appliquer le théorème C dans une direction.

Étant donné une K-espèce $(\mathrm{K}_i, {}_i\mathrm{M}_j)_{i, j \in \mathrm{I}}$ l'on définit son *diagramme séparé* comme suit. L'ensemble fini $\mathrm{I} \times \{0, 1\}$ est l'ensemble des sommets; entre les sommets $(i, 0)$ et $(j, 1)$ il y a $\dim_{\mathrm{K}_i}({}_i\mathrm{M}_j) \times \dim({}_i\mathrm{M}_j)_{\mathrm{K}_j}$ arêtes; de plus, il y a une flèche $\underset{i}{\cdot} \Longrightarrow \underset{j}{\cdot}$ pourvu que $\dim_{\mathrm{K}_i}({}_i\mathrm{M}_j) < \dim({}_i\mathrm{M}_j)_{\mathrm{K}_j}$. L'on observera qu'il n'y a ni d'arête entre $(i, 0)$ et $(j, 0)$ ni d'arête entre $(i, 1)$ et $(j, 1)$.

THÉORÈME D. — *Soit* $\mathbf{A}$ *une* K-*algèbre ayant un radical de carré nul. Alors* $\mathbf{A}$ *est de type fini si et seulement si le diagramme séparé de sa* K-*espèce* $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}$ *est un union disjointe de graphes de Dynkin.*

Si la K-espèce $(\mathrm{K}_i, {}_i\mathrm{M}_j)$ associée à $\mathbf{A}$ a tous ses K_i égaux à un corps fixe F et si ${}_{\mathrm{K}_i}({}_i\mathrm{M}_j)_{\mathrm{K}_j} = ({}_{\mathrm{F}}\mathrm{F}_{\mathrm{F}})^{n_{ij}}$ pour un certain entier n_{ij}, les caractérisations données dans les théorèmes C et D sont dues à P. Gabriel [(5), (6)], qui a amélioré des résultats antérieurs dus à T. Yoshii (10) [*voir* aussi S. A. Krugljak (8)]. P. Gabriel a montré aussi que la structure d'une K-algèbre A de type fini ayant un radical de carré nul découle de résultats déjà établis dans le cas où le corps K est un corps parfait. Dans cette direction, il a déterminé, par exemple, toutes les R-algèbres de type fini. Cependant la méthode qu'il utilise ne semble pas s'appliquer au cas général.

Ce travail a pour origine une série de leçons sur *Les représentations indécomposables des algèbres artiniennes* données par P. Gabriel au cours de l'été de 1972 à Carleton University. Il prolonge des travaux antérieurs des auteurs [(2), (3)]. Les preuves des assertions de cette Note sont données dans l'article (4).

(*) Séance du 9 avril 1973.

(1) N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4, 5 et 6.
(2) V. Dlab et C. M. Ringel, *Math. Ann.*, 195, 1972, p. 279-291.
(3) V. Dlab et C. M. Ringel, *Math. Z.*, 129, 1972, p. 207-230.
(4) V. Dlab et C. M. Ringel, *Carleton Lecture Notes*, n° 2, 1973.
(5) P. Gabriel, *Manuscripta Math.*, 6, 1972, p. 71-103.
(6) P. Gabriel (à paraître).
(7) M. M. Kleiner, Université de Kiev, 1971, prè-tirés-à-part.
(8) S. A. Krugljak, Université de Kiev, 1971, prè-tirés-à-part.
(9) L. A. Nazarova et A. V. Roiter, Université de Kiev, 1971, prè-tirés-à-part.
(10) T. Yoshii, *Osaka Math., J.*, 8, 1956, p. 51-105.

Department of Mathematics,
Carleton University,
Ottawa K1S 5B6, Ontario, Canada

et

Mathematisches Institut,
Universität Tübingen,
Tübingen 74, DBR.