ALGÈBRE. — *Sur la conjecture de Brauer-Thrall.* Note (*) de MM. **Vlastimil Dlab** et **Claus Michael Ringel**, présentée par M. René Garnier.

La conjecture de Brauer-Thrall est établie pour les K-structures, les K-espèces et, pour deux classes de K-algèbres, nommément les K-algèbres héréditaires et les K-algèbres ayant un radical de carré nul. Pour la terminologie et les notations employées dans cette Note voir (¹).

Une catégorie additive $\mathcal{A}$ sera dite une catégorie dimensionnelle s'il existe une application $\dim : \mathcal{A} \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ satisfaisant à la condition

$$\dim (X \oplus Y) = \dim X + \dim Y \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathcal{A}.$$

La catégorie $\mathcal{S}(\mathbf{S})$ de tous les $\mathbf{S}$-espaces munie de la dimension pondérée, la catégorie $\mathcal{R}(\mathbf{Q})$ de toutes les représentations d'une K-espèce $\mathbf{Q}$ munie de la dimension définie par $\dim (V_i, {}_i\varphi_j) = \sum_i \dim (V_i)_K$ et la catégorie $\mathcal{M}_\mathbf{A}$ de tous les modules à droite sur une K-algèbre $\mathbf{A}$ munie de la dimension définie par $\dim M_\mathbf{A} = \dim M_K$ sont des exemples de catégories dimensionnelles. Généralisant des notions qui précèdent, nous définissons une catégorie dimensionnelle $\mathcal{A}$ de *type fini* comme étant une catégorie avec un nombre fini d'objets indécomposables de dimension finie dans $\mathcal{A}$. Nous définissons aussi une catégorie $\mathcal{A}$ de *type fortement non borné* si $\mathcal{A}$ possède les trois propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{A}$ contient des objets indécomposables de dimension finie arbitrairement grande;

(ii) Si $\mathcal{A}$ contient un objet de dimension finie avec un anneau d'endomorphismes infini, alors il existe un nombre infini de dimensions finies d telles que pour chaque d, $\mathcal{A}$ contienne un nombre infini d'objets indécomposables (non isomorphes) de dimension d;

(iii) $\mathcal{A}$ contient des objets indécomposables de dimension infinie.

R. Brauer et R. M. Thrall ont conjecturé (³) qu'une K-algèbre est, soit de type fini, soit de type fortement non borné [sauf, peut-être, la condition (iii)]. A. V. Roiter (⁶) a prouvé la propriété (i) pour la catégorie $\mathcal{M}_\mathbf{A}$, où $\mathbf{A}$ est une K-algèbre de type non fini; et, dans ce cas, L. A. Nazarova et A. V. Roiter ont annoncé, dans (⁴), une preuve de (ii) pourvu que K soit, de plus, un corps parfait. La preuve est fondée sur leurs résultats dans (⁵), à savoir que toute K-structure classique $\mathbf{S}$ pour un corps infini est ou bien de type fini ou bien telle que $\mathcal{S}(\mathbf{S})$ possède les propriétés (i) et (ii). Étendant ces résultats, nous démontrons le théorème suivant :

Théorème. — (1) *Une* K-*structure est ou bien de type fini ou bien de type fortement non borné.*

(2) *Une K-espèce est ou bien de type fini ou bien de type fortement non borné.*

(3) *Une K-algèbre héréditaire ou une K-algèbre ayant un radical de carré nul est ou bien de type fini ou bien de type fortement non borné.*

Ainsi, la conjecture de Brauer-Thrall est établie pour deux classes particulières de K-algèbres. Utilisant les idées mentionnées dans [1], il devrait être possible d'étendre au cas général la troisième partie du théorème.

La preuve complète du théorème est donnée dans l'article [2]. Dans les cas critiques de K-structures et les K-espèces de type infini, ou bien nous avons construit directement des objets indécomposables d'une dimension aussi grande que l'on veut, ou bien nous avons pu réduire le problème à une situation classique par identification d'une sous-catégorie pleine à une catégorie de modules de type infini. Pour les preuves des assertions concernant les catégories de type fortement non borné, nous avons utilisé quelques résultats de la géométrie algébrique à propos de l'action des groupes sur les variétés affines.

(*) Séance du 9 avril 1973.

[1] V. Dlab et C. M. Ringel, *Comptes rendus*, 276, série A, 1973, p. 1393.
[2] V. Dlab et C. M. Ringel, *Carleton Lecture Notes*, n° 2, 1973.
[3] J. P. Jans, *Ann. of Math.*, 66, 1957, p. 418-429.
[4] L. A. Nazarova et A. V. Roiter, *Amer. Math. Soc.*, 1971.
[5] L. A. Nazarova et A. V. Roiter, Université de Kiev, 1971, près-tiré-à-part.
[6] A. V. Roiter, *Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, Ser. Mat., 32, 1968, p. 1275-1282.

Department of Mathematics,
Carleton University,
Ottawa K1S 5B6, Ontario, Canada
et
Mathematisches Institut,
Universität Tübingen,
Tübingen 74, DBR.