THÉORIE DES GRAPHES. — *Représentations des graphes valués.*

Note (*) de MM. **Vlastimil Dlab** et **Claus Michael Ringel**, présentée par M. René Garnier.

Dans un article récent, I. N. Bernstein, I. M. Gelfand et V. A. Ponomarev (1) ont montré que la bijection entre les représentations indécomposables des graphes ayant une forme quadratique positive non dégénérée et les racines positives correspondantes [*cf.* (3) et (5)] peut se prouver directement. Ils y ont introduit la notion de foncteur de Coxeter et s'en sont servis pour construire toutes les représentations indécomposables de tels graphes à partir de représentations simples. Dans cette Note, nous utilisons cette méthode pour décrire les représentations de graphes ayant une forme quadratique positive dégénérée, et nous étendons la méthode aux graphes valués et aux espèces correspondantes [*cf.* (2), (3), (4), (6) et (7) pour des résultats partiels].

Soit $\Gamma = (\Gamma, \mathbf{d})$ un graphe fini (sans boucles) muni de paires de nombres naturels (d_{ij}, d_{ji}) pour chaque arête $\underset{i}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{j}{\bullet}$ [les paires (1,1) seront omises]. Soit Γ_0 l'ensemble des sommets de Γ. Nous supposerons qu'il existe des nombres naturels f_i, $i \in \Gamma_0$, tels que $d_{ij} f_j = d_{ji} f_i$ pour tout $i, j \in \Gamma_0$. Soit $\mathbf{Q}_\Gamma$ l'espace vectoriel de tous les $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \Gamma_0}$, où les x_i sont des nombres rationnels, et soit $\mathbf{i}$ le vecteur dont la i-ième coordonnée est 1 et dont toutes les autres coordonnées sont 0. Pour chaque $i \in \Gamma_0$, l'on définit une transformation linéaire $s_i : \mathbf{Q}_\Gamma \to \mathbf{Q}_\Gamma$ par $(s_i \mathbf{x})_j = x_j$ pour $j \neq i$ et

$$(s_i \mathbf{x})_i = -x_i + \sum_{j \in \mathrm{N}_i} d_{ji} x_j,$$

où N_i est l'ensemble de tous les sommets voisins de i. Les réflexions s_i, $i \in \Gamma_0$, engendrent un groupe W_Γ, appelé le groupe de Weyl de Γ. Un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}_\Gamma$ est dit une racine de Γ si $\mathbf{x} = w\,\mathbf{i}$ pour un $w \in \mathrm{W}_\Gamma$ et $i \in \Gamma_0$; $\mathbf{x}$ est dit positif si toutes ses coordonnées sont non négatives. Définissons la forme bilinéaire symétrique de Γ (invariante par W_Γ) par

$$\mathrm{B}_\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \in \Gamma_0} f_i x_i y_i - \sum_{(i, j) \in \mathrm{N}} \frac{1}{2} d_{ji} f_j x_i x_j,$$

où N est l'ensemble de toutes les paires de sommets voisins. La forme quadratique $\mathrm{B}_\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est positive non dégénérée si et seulement si Γ est un graphe de Dynkin. Dans ce cas W_Γ est un groupe fini. Et, $\mathrm{B}_\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ sera une forme positive dégénérée si et seulement si Γ est l'un des types suivants [*voir* schéma (★)].

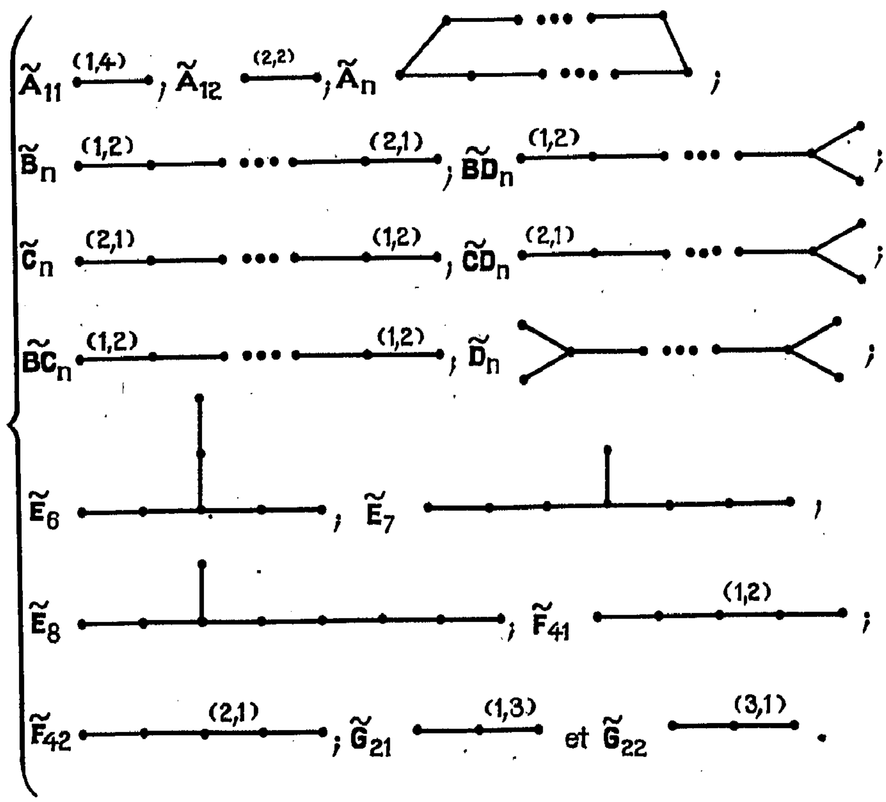
Ici, $\mathrm{N}_\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{Q}_\Gamma \mid w\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ pour tout } w \in \mathrm{W}_\Gamma \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{Q}_\Gamma \mid \mathrm{B}_\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \}$ est un sous-espace de dimension 1 engendré par un vecteur positif $\mathbf{n}_\Gamma$ ayant une coordonnée égale à 1, et le groupe $\overline{\mathrm{W}}_\Gamma$ induit par W_Γ sur $\mathbf{Q}_\Gamma/\mathrm{N}_\Gamma$ est un groupe fini. L'entier $\partial\mathbf{x}$ défini par

$$c^m \mathbf{x} = \mathbf{x} + (\partial\mathbf{x})\,\mathbf{n}_\Gamma,$$

où $c = s_{i_n}, \ldots, s_{i_2}, s_{i_1}$ et où m est l'ordre de $\bar{c} \in \overline{\mathrm{W}}_\Gamma$, s'appelle le défaut de $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}_\Gamma$ par rapport à l'énumération $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de Γ_0. Nous avons $\partial(c\,\mathbf{x}) = \partial\mathbf{x}$ et, pour tout entier t, $c^{tm}\mathbf{x} = \mathbf{x} + (t\,\partial\mathbf{x})\,\mathbf{n}_\Gamma$. De plus, si $\mathrm{B}_\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ est positive non dégénérée ou dégénérée, alors, pour une racine positive $\mathbf{y}$, ou bien $\mathbf{y} = \mathbf{i}$ pour un certain i, ou bien $s_i\,\mathbf{y}$ est positive pour tout $i \in \Gamma_0$.

Étant donné une orientation Λ du graphe Γ et $i \in \Gamma_0$, notons $s_i \Lambda$ l'orientation de Γ obtenue à partir de Λ en renversant les sens de toutes les arêtes contenant le sommet i. Un sommet $i \in \Gamma_0$ est dit (+)-admissible (par rapport à Λ) si, pour chaque $j \in N_i$, l'on a $\underset{i}{\bullet} \longleftarrow \underset{j}{\bullet}$. Une énumération $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de Γ_0 est appelée (+)-admissible si i_t est (+)-admissible par rapport à $s_{i_{t-1}} \ldots s_{i_2} s_{i_1} \Lambda$ pour chaque $1 \leqq t \leqq n$.

(*)



Une espèce $(\Gamma, \mathscr{F})$ sur un graphe valué $(\Gamma, \mathbf{d})$ est un ensemble de corps gauches F_i, $i \in \Gamma_0$, muni de bimodules ${}_iM_j = {}_{F_i}M_{F_j}$, $i, j \in \Gamma_0$ avec :

(i) les F_j-F_i-isomorphismes

$$ {}_jM_i \approx \mathrm{Hom}_{F_i}({}_iM_j, F_i) \approx \mathrm{Hom}_{F_j}({}_iM_j, F_j), $$

et avec :

(ii) les égalités $\dim ({}_iM_j)_{F_j} = d_{ij}$.

Nous avons ainsi les applications $\varepsilon_j^i : {}_jM_i \otimes {}_iM_j \to F_j$ ainsi que l'équivalence des foncteurs $- \otimes {}_jM_i$ et $\mathrm{Hom}_{F_j}({}_iM_j, -)$. Une représentation $V = (V_i, {}_j\varphi_i)$ d'une espèce orientée $(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ est une famille d'espaces vectoriels V_i à droite sur F_i de dimension finie, $i \in \Gamma_0$, et une famille d'application F_j-linéaires ${}_j\varphi_i : V_i \otimes {}_iM_j \to V_j$ pour chaque arête $\underset{i}{\bullet} \longrightarrow \underset{j}{\bullet}$. Les représentations de $(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ forment une catégorie abélienne $\mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$. Étant donné $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$, nous pouvons définir $\mathbf{dim}\, V \in Q_\Gamma$ par $(\mathbf{dim}\, V)_i = \dim V_i$.

Si i est (+)-admissible, définissons le foncteur $S_i^+ : \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda) \to \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, s_i \Lambda)$ par $S_i^+ V = W = (W_i, {}_j\psi_i)$, où $W_j = V_j$ pour $j \neq i$, et

$$ 0 \to W_i \to \bigoplus_{j \in N_i} (V_j \otimes {}_jM_i) \xrightarrow{({}_i\varphi_j)} V_i $$

et

$$\psi_{ji} : \; W_i \otimes {}_iM_j \to V_j \otimes {}_jM_i \otimes {}_iM_j \xrightarrow{1\otimes\varepsilon_j^i} V_j \otimes F_j \to V_j.$$

Nous pouvons déduire sans peine que si i est $(+)$-admissible et si $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ est indécomposable, alors, ou bien $V = (V_i, {}_j\varphi_i)$, où $V_j = 0$ pour $j \neq i$ et $V_i = F_i$, ou bien $({}_j\varphi_i)$ est surjective et donc $\operatorname{End} V \approx \operatorname{End}(S_i^+ V)$ et $\mathbf{dim}(S_i^+ V) = s_i(\mathbf{dim}\, V)$. Si $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une énumération $(+)$-admissible de Γ_0, nous définissons le foncteur de Coxeter $C^+ : \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda) \to \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ par $C^+ V = S_{i_n}^+ \ldots S_{i_2}^+ S_{i_1}^+ V$. Pour chaque entier t tel que $C^{+t} V \neq 0$, nous avons $\mathbf{dim}(C^{+t} V) = c^t(\mathbf{dim}\, V)$. Nous définissons par analogie les foncteurs S_i^-, $i \in \Gamma_0$, et C^-.

Une représentation V est dite régulière si V est une somme directe de représentations indécomposables de défaut zéro. La sous-catégorie pleine $\mathscr{R}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ de toutes les représentations régulières est abélienne. Un objet H dans $\mathscr{R}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ est dit homogène si chaque facteur principal H′ de H satisfait à $\mathbf{dim}\, H' \in N_\Gamma$.

D'après ce qui précède, nous avons aussitôt une preuve de l'assertion (1) et une preuve en partie de l'assertion (2) du

Théorème. — *Soit $(\Gamma, \mathscr{F})$ une espèce et soit Λ une orientation arbitraire de Γ permettant une énumération $(+)$-admissible.*

(1) *Le graphe sous-jacent est un graphe de Dynkin si, et seulement si, $\mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ est de type fini. De plus, l'application* $V \mapsto \mathbf{dim}\, V$ *induit une bijection entre les classes d'isomorphismes des objets indécomposables de $\mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ et des racines positives dans $\mathbf{Q}_\Gamma$.*

(2) *Si le graphe sous-jacent est de type $(\bigstar)$, alors $\mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ a deux types d'objets. Pour chaque racine positive* $\mathbf{x}$ *dans $\mathbf{Q}_\Gamma$, il y a exactement une représentation indécomposable $V \in \mathscr{L}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ avec* $\mathbf{dim}\, V = \mathbf{x}$. *Les autres représentations indécomposables sont homogènes. De plus, la catégorie de toutes les représentations régulières est un produit fini de catégories dont les objets sont unisériels et de la sous-catégorie de toutes les représentations homogènes.*

La preuve du reste du théorème est fondée sur une idée de P. Gabriel [qu'il utilisa pour donner une preuve simplifiée des résultats dans (6)], et exploite la technique des systèmes complets d'équations : Si $E_1, E_2, \ldots, E_m$ est un ensemble fini de représentations globalement invariant par C^+, un système complet d'équations pour $E_1, E_2, \ldots, E_m$ consiste en m homomorphismes $e_p : \mathbf{Q}_\Gamma \to \mathbf{Q}$, $1 \leqq p \leqq m$ tels que :

(i) $e_p(E_p) > 0$;

(ii) $\bigcap_p e_p^{-1}(0) = N_\Gamma$;

(iii) si V est régulier et si $e_p(V) > 0$ [resp. $e_p(V) < 0$], alors $E_p \subsetneq V$ (resp. $V \twoheadrightarrow E_p$).

Si un système complet d'équations pour $E_1, E_2, \ldots, E_m$ existe, alors les E_p sont précisément les objets réguliers simples non homogènes. De plus, si H est un objet simple quelconque, alors

$$\operatorname{Ext}^1(E_p, H) = \operatorname{Ext}^1(H, E_p) = \operatorname{Ext}^1(E_p, E_q) = 0,$$

excepté pour $E_q = C^+E_p$. La détermination de $\operatorname{Ext}^1(E_p, C^+ E_p)$ peut être réduite à celle de $\operatorname{Ext}^1(X, C^+ X)$ pour un certain X vérifiant $C^{+t} X = 0$. Nous avons $\operatorname{Ext}^1(X, X) = 0$ si X est indécomposable, et si, en plus, $C^+ X \neq 0$, alors $\operatorname{Ext}^1(X, C^+ X) = {}_{F_i}F_{i\,F_i}$ pour un i convenable. Ceci montre que $\mathscr{R}(\Gamma, \mathscr{F}, \Lambda)$ est le produit de la catégorie de tous les objets homogènes, et de k catégories unisérielles, où k est le nombre d'orbites de C^+ sur l'ensemble de tous les objets simples non homogènes.

(*) Séance du 17 décembre 1973.

(1) I. N. Bernstein, I. M. Gelfand et V. A. Ponomarev, *Uspechi Mat. Nauk*, 28, 1973, p. 19-33.
(2) V. Dlab et C. M. Ringel, *Comptes rendus*, 276, série A, 1973, p. 1393.
(3) V. Dlab et C. M. Ringel, *Carleton Lecture Notes*, n° 2, 1973.
(4) P. Donovan et M. R. Freislich, *Carleton Lecture Notes*, n° 5, 1973.
(5) P. Gabriel, *Manuscripta Math.*, 6, 1972, p. 71-103.
(6) I. M. Gelfand et V. A. Ponomarev, *Coll. Math. Soc. Ianos Bolyai*, Tihany, 1970, p. 163-237.
(7) L. A. Nazarova, Université de Kiev, 1973 (pré-tirés-à-part).

V. D. : *Department of Mathematics,*
Carleton University,
Ottawa KIS 5B6, *Canada;*

C. M. R. : *Mathematisches Institut,*
Universität Bonn,
Bonn, D. B. R.