

Verfahren zur Quantifizierung betriebswirtschaftlicher

Zu - und Abgangsfolgen

Peter Naeve, Berlin

In einer dynamischen Theorie der betrieblichen Planung ergibt sich die Aufgabe, gewisse Stromgrößen an Hand zeitlich früherer Stromgrößen zu prognostizieren. Die Problemstellung findet man beispielsweise in zwei in der Zeitschrift für Betriebswirtschaft erschienenen Aufsätzen Langens [2, 3]. Ausgehend von seinen Überlegungen wird in dieser Arbeit ein geeignet erscheinendes Prognoseverfahren entwickelt. Dabei wird nach Möglichkeit die Terminologie Langens übernommen. Im ersten Abschnitt wird die dem Verfahren zugrunde liegende Theorie unter möglichst sparsamer Verwendung mathematischer Formeln dargelegt. Es folgt eine knappe mathematisch gehaltene Zusammenfassung, die beim ersten Lesen ohne Schaden übersprungen werden kann. Danach werden die einzelnen Schritte des Prognoseverfahrens skizziert. Der letzte Abschnitt erörtert einige bei der praktischen Anwendung auftretende Probleme.

I Darstellung des Prognoseverfahrens

Da für eine empirische Untersuchung Daten über Umsätze und Zahlungseingänge oft am leichtesten zugänglich sind, sei das Verfahren exemplarisch für diese Phasen erläutert. Es liegen also die Phasen Verkaufsumsatz und Bareinnahmen vor. Von der Sache her ist es einleuchtend, daß ein irgendwie gearteter kausaler Zusammenhang zwischen diesen beiden Phasen besteht. Man kann daher in der Phasenrichtung fortschreitend den Verkaufsumsatz zur Prognose der Bareinnahmen heranziehen. Am Ende jeden Tages lassen sich der fakturierte Umsatz und die Bareinnahmen feststellen. Mit einer Phase ist also eine Zeitreihe verbunden, d.h. die Folge der Tageswerte der fakturierten Umsätze und die der Bareinnahmen. (Natürlich braucht man sich nicht auf Tageswerte zu beschränken, man kann auch z.B. Wochen- oder Monatswerte wählen.) Für beide Phasen gilt nun, daß sich die jeweiligen Tageswerte nicht genau vorhersagen lassen, sondern

es handelt sich jeweils um Zufallsgrößen. Für die aus ihnen gebildeten Zeitreihen ergibt sich daraus, daß es keine Folgen mit einem festen Bildungsgesetz sind, sondern daß auch diese Folgen stochastisch sind. Eine Folge von beobachteten Tagesumsätzen bzw. Bareinnahmen wird Realisation der entsprechenden Zufallsfolge genannt. Für Folgen und ihre Realisationen wird nur ein Symbol verwandt, aus dem Zusammenhang wird immer deutlich werden, was gemeint ist. Aus der Zufallsfolge der fakturierten Umsätze - sie sei mit $\{u_t\}$ bezeichnet, u_t gibt den Umsatz am Tag t an - soll die Bareinnahme b_{t+s} des Tages $t+s$ vorhergesagt werden, $\{b_t\}$ bedeutet die Folge der Bareinnahmen.

Der Vorgang der Prognose läßt sich auch wie folgt interpretieren. Nach welchem Verfahren auch immer die Prognose erstellt wird, das, was die Prognose erzeugt, soll kurz System genannt werden. Damit gelangt man zu einer anschaulichen Sprechweise, man sagt, die der Prognose zugrunde liegende Zeitreihe bildet den Eingang des Systems, die Prognose den Ausgang. Die Aufgabe besteht nun darin, das noch völlig unbestimmte System so festzulegen, daß die Prognose in irgendeinem bestimmten Sinn die zu prognostizierende Zeitreihe optimal annähert.

Da über den zeitlich-quantitativen Zusammenhang zwischen den Phasen keine gesicherte Theorie besteht, müssen zur Lösung des Problems einige Annahmen gemacht werden. Eine Zufallsvariable läßt sich zu einem Teil durch ihren Mittelwert und ihre Streuung charakterisieren, der Zusammenhang zwischen zwei Zufallsgrößen wird durch ihre Kovarianz gegeben. Diese Begriffsbildungen gehören zu den Grundlagen der Statistik. Die Elemente der stochastischen Folgen $\{u_t\}$ und $\{b_t\}$ sind für jedes t Zufallselemente. Bildet man für jedes t den Mittelwert von u_t bzw. b_t , dann erhält man die sogenannten Mittelwertfunktionen $m_u(t)$ bzw. $m_b(t)$; da die Mittelwerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten t im allgemeinen verschieden sind, ergeben sich Funktionen von t . Betrachtet man zwei Zeitpunkte t und $t-\tau$, so liegen die Paare u_t und $u_{t-\tau}$ bzw. b_t und $b_{t-\tau}$ vor. Für diese Paare von Zufallsvariablen kann man die Kovarianzen bestimmen. Errechnet man diese für alle t und alle τ , so erhält man die sogenannten

Autokovarianzfunktionen $r_u(t, t-\tau)$ und $r_b(t, t-\tau)$, die im allgemeinen von den beiden Zeitpunkten t und $t-\tau$ abhängen. So wie eine Zufallsvariable durch Mittelwert und Streuung so wird nun zu einem Teil eine stochastische Folge durch ihre Mittelwerts- und Autokovarianzfunktion beschrieben. Bildet man für alle t und τ die Kovarianzen des Paares u_t und $b_{t-\tau}$, so gelangt man zur Kreuzkovarianzfunktion $r_{ub}(t, t-\tau)$, die für stochastische Folgen die Rolle der Kovarianzen bei einzelnen Zufallsgrößen übernimmt. Auch die Kreuzkovarianzfunktion hängt im allgemeinen von t und $t-\tau$ ab.

Die erste Annahme ist nun, daß die obige Begriffsbildung für die Zufallsfolgen u_t und b_t sinnvoll ist. Es sollen also alle auftretenden Momente - wie man abkürzend für Mittelwert, Streuung und Kovarianz sagt - existieren. Weiter soll gelten, daß die Mittelwertfunktion nicht von t abhängt. Sie ist dann gleich einer Konstanten, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden kann. Die verschiedenen Kovarianzfunktionen sollen nicht von den Zeitpunkten t und $t-\tau$ sondern nur von ihrer Differenz $t-(t-\tau) = \tau$ abhängen.

Stochastische Folgen mit diesen Eigenschaften werden in der Literatur schwach stationär genannt.

Das die Prognose liefernde System war noch nicht näher festgelegt. Für das System soll angenommen werden, daß es linear und zeitinvariant ist. Die erste Forderung besagt, daß die Prognose eine lineare Funktion der Eingangsfolge $\{u_t\}$ ist. Bezeichnet p_{t+s} die Prognose zum Zeitpunkt t für den Zeitpunkt $t+s$, so ergibt sich $p_{t+s} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g_1(t) u_{t-i}$, dabei bestimmen die Koeffizienten $g_1(t)$ das System. Die Forderung der Zeitinvarianz des Systems bedeutet, daß alle Koeffizienten $g_1(t)$ nicht von t abhängen. Es ist klar, daß sich eine Prognose zum Zeitpunkt t_0 nur auf die Werte von $\{u_t\}$ mit $t \leq t_0$ stützen kann, da Werte für $t > t_0$ - die zukünftigen Umsätze - ja noch nicht bekannt sind. Damit also das System wirklich arbeiten kann, muß noch $g_1 = 0$ für alle $i < 0$ gefordert werden. Man sagt dann auch, das System sei physikalisch realisierbar. Dann erhält man für die Prognose p_{t+s} den Ausdruck $p_{t+s} = \sum_{i=0}^{+\infty} g_1 u_{t-i}$.

Nun ist im allgemeinen die Vergangenheit von beiden Folgen nicht vollständig bekannt. Es liegen nur die Werte für T Zeitpunkte $t-T+1, t-T+2, \dots, t-1, t$ vor. Dann stellt sich die Aufgabe, Zahlen g_0, \dots, g_{T-1} zu bestimmen - und damit das System festzulegen - daß der Wert p_{t+s} die Bareinnahme b_{t+s} optimal annähert. Optimal wird hier in dem Sinne verstanden, daß der Fehler $\epsilon_{t+s} = b_{t+s} - p_{t+s}$ im mittleren Quadrat minimiert wird. Die Minimierung des mittleren Fehlerquadrats statt, wie vielleicht erwartet wurde, des quadratischen Fehlers erscheint aus folgendem Grund sinnvoll. Das System soll seine Prognosen nicht nur zum Zeitpunkt t liefern sondern auch in der Zukunft. Es darf daher nicht nach der augenblicklichen Realisation der Eingangsfolge dimensioniert werden sondern zweckmäßig nach charakteristischen Größen dieser Zufallsfolge. Wie gleich gezeigt wird, bestimmen bei der Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers die oben eingeführten Kovarianzfunktionen das System. Für den mittleren quadratischen Fehler Q ergibt sich

$$Q = r_b(0) - 2 \sum_{i=0}^{T-1} g_i r_{ub}(i+s) + \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} g_i g_j r_u(i-j)$$

Es gilt Q als Funktion der g_i zu minimieren. Die Lösung erhält man nach den Regeln der Analysis für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Nach partieller Differentiation nach den g_i gelangt man durch die notwendigen Bedingungen $\partial Q / \partial g_i = 0$ zu einem Gleichungssystem in den g_i .

$$\sum_{i=0}^{T-1} g_i r_u(j-i) = r_{ub}(j+s) \quad j=0,1,\dots,T-1$$

Dessen Lösung bestimmen aber das optimale System - oder wie man auch sagt, den optimalen Filter, eine recht anschauliche Begriffsbildung, denn durch den Filter wird die in $\{u_t\}$ über $\{b_t\}$ enthaltene Information gleichsam herausgefiltert. Als Matrix der zweiten partiellen Ableitungen von Q ergibt sich gerade die aus den Kovarianzen zwischen den u_t und $u_{t-\tau}$

gebildete Matrix, die aber positiv definit ist, da nach Voraussetzung keine linearen Beziehungen zwischen den u_t bestehen, damit ist auch die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Minimums erfüllt.

In der Regel wird nur eine Realisation der Folgen $\{u_t\}$ und $\{b_t\}$ vorliegen. Zur Konstruktion des optimalen Filters werden aber die verschiedenen Kovarianzfunktionen benötigt, die man durch Mittelung der entsprechenden Produktbildungen über alle möglichen Realisationen erhält. Man spricht auch vom Ensemblemittel, dabei ist das Ensemble die Menge der möglichen Realisationen. Um dennoch zum Ziel zu gelangen, muß von den Folgen $\{u_t\}$ und $\{b_t\}$ gefordert werden, daß bei ihnen die zeitlichen Mittel gleich den entsprechenden Ensemblemitteln sind. Das bedeutet, daß wenn eine Realisation der Folgen $\{u_t\}$ und $\{b_t\}$ vorliegt, gilt

$$r_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T \sum_{t=1}^T u_t u_{t-\tau})$$

$$r_b(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T \sum_{t=1}^T b_t b_{t-\tau})$$

$$r_{ub}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T \sum_{t=1}^T u_t b_{t-\tau})$$

$$0 = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T \sum_{t=1}^T u_t) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T \sum_{t=1}^T b_t)$$

Man darf dann die benötigten Größen aus den vorhandenen Realisationen errechnen. Wenn nur genügend viele beobachtete Daten vorliegen, kann man den wahren Werten beliebig nahe kommen. Damit die errechneten Größen sich noch auf ausreichend viele Werte aus der Realisation stützen, kann man bei einer gegebenen Realisation der Länge T das Verfahren nur für ein N mit $N < T$ durchführen. Es reduziert sich also nur die Ordnung des aufzulösenden Gleichungssystems.

Ist N die Ordnung des Gleichungssystems für die g_1 , dann wird N auch als die Länge des Filters bezeichnet.

II Das mathematische Modell

Das im vorangehenden Abschnitt entwickelte Verfahren soll noch einmal kurz zusammengefaßt werden. Es liegen zwei Phasen vor, die durch sie bestimmten stochastischen Folgen seien mit $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ bezeichnet. Gesucht wird ein System \mathcal{G} , bei dem $\{x_t\}$ am Eingang $\{y_t\}$ am Ausgang hervorruft. Ist z eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $\phi(z)$, ist weiter $h(z)$ eine Funktion von z , dann wird $E[h(z)]$ durch

$$E[h(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(z) d\phi(z)$$

definiert. E heißt der Erwartungswertoperator. Die Definition von E bei mehrdimensionalen Verteilungen ist analog.

Es werden nun folgende Annahmen gemacht:

1. $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ sind schwach stationär. Für alle t und τ gelte $E[x_t] = m_x = 0$, $E[y_t] = m_y = 0$, $E[x_t x_{t-\tau}] = r_x(\tau)$, $E[y_t y_{t-\tau}] = r_y(\tau)$ und $E[x_t y_{t-\tau}] = r_{xy}(\tau)$.

2. $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ sind ergodische Folgen. Es gilt also

$$r_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t x_{t-\tau} \quad r_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t y_{t-\tau}$$

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t y_{t-\tau}$$

3. Das System \mathcal{G} ist linear und zeitinvariant.

4. Das System \mathcal{G} ist realisierbar.

Dann schreibt sich der Ausgang p des Systems zum Zeitpunkt t

$$p = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x_{t-i}$$

Die Koeffizienten g_i bestimmen das System \mathcal{G} vollständig. Sie sollen so bestimmt werden, daß der Ausdruck

$$Q = E[(y_{t+s} - \sum_{i=0}^{\infty} g_i x_{t-i})^2]$$

minimiert wird. Liegt nur eine Realisation der Länge T vor, dann geht die Summation nur bis $N-1$ mit $T > N$. Aus der notwendigen Bedingung $\partial Q / \partial g_1 = 0$ ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{N-1} g_1 r_x(j-i) = r_{xy}(j+s) \quad j=0,1,\dots,T-1.$$

Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen ist wegen $\partial^2 Q / \partial g_1 \partial g_j = r_x(j-1)$ gleich der aus den Autokovarianzen von $\{x_t\}$ gebildeten Matrix. Diese Matrix ist aber positiv definit, da

$$E \left[\left(\sum_{i=0}^{N-1} k_i x_i \right)^2 \right] = \sum_{i,j=0}^{N-1} r_x(j-i) k_i k_j \geq 0$$

mit beliebigen k_i , die nicht alle gleichzeitig verschwinden, denn es besteht nach Voraussetzung keine lineare Beziehung zwischen den x_t .

III Gang des Verfahrens

Das Ziel dieser Arbeit besteht auch darin, das Prognoseverfahren so einzurichten, daß es einer automatischen Berechnung zugänglich ist, insbesondere also auf elektronischen Rechanlagen durchgeführt werden kann. Zu diesem Zweck soll das Verfahren in einzelne Schritte zerlegt werden. Die Länge der vorhandenen Realisationen sei T , d.h. wenn T die Gegenwart bezeichnet, dann sind die Werte für die Zeitpunkte $1, 2, \dots, T$ bekannt. Das Prognoseverfahren läßt sich wie folgt gliedern.

1. Die vorhandenen Daten (hier also die fakturierten Umsätze und die Bareinnahmen der einzelnen Tage) werden daraufhin geprüft, ob der Mittelwert gleich Null ist, im anderen Falle wird der Mittelwert von den Daten abgezogen. Wegen der vorausgesetzten Ergodizität erhält man z.B. den Mittelwert für die Bareinnahmen durch $m_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T b_t$, danach wird für alle t der Ausdruck $b_t - m_0$ gebildet.

2. Nun wird ein $N < T$ bestimmt und für $0 \leq \tau \leq N$ die Autokovarianzfunktion des Umsatzes berechnet. Bezeichnet weiterhin $\{u_t\}$ die Folge der auf den Mittelwert Null reduzierten Umsätze, dann ergibt sich wegen der Ergodizität z.B. für $\tau=n$ der Wert von $r_u(\tau)$ zu $r_u(n) = \frac{1}{(T-n)} \sum_{t=n+1}^T u_t u_{t-n}$.

3. Durch Wahl eines $s \geq 0$ wird festgelegt, um wieviele Tage im voraus prognostiziert werden soll. Aus Umsatzfolge und Bar-einnahmenfolge wird dann für $s \leq \tau \leq N+s$ die Kreuzkovarianz-funktion ermittelt. Man erhält z.B. für $\tau = n$ den Wert
- $$r_{ub}(n) = 1/(T-n-s) \sum_{t=n+s+1}^T b_t u_{t-n-s} .$$
4. Aus den im 2. Schritt ermittelten Werten der Autokovarianz-funktion wird die Matrix des Gleichungssystems für die Filter-koeffizienten g_1 aufgestellt. Da für die Autokovarianzen $r_u(\tau) = r_u(-\tau)$ gilt, ist das i -te Element in der j -ten Spalte der Matrix gleich $r_u(|i-j|)$.
5. Nun wird das Gleichungssystem nach den g_1 aufgelöst. Für diesen Schritt sind verschiedene Lösungsverfahren möglich. Man kann z.B. die aufgebaute Matrix invertieren und den Lösungs-vektor $g = (g_0, \dots, g_{N-1})$ durch Multiplikation der Inversen mit dem aus den Kreuzkovarianzen gebildeten Vektor $r = (r_{ub}(s), \dots, r_{ub}(s+N))$ erhalten.
6. Mit den im 5. Schritt bestimmten Koeffizienten wird die Größe $p = \sum_{i=0}^N g_i u_{T-1}$ gebildet. Diese Größe ist die gesuchte Prognose für die Bareinnahme zum Zeitpunkt $T+s$.

Die einzelnen Schritte der obigen Aufteilung lassen sich für die praktische Durchführung leicht noch weiter so untergliedern, daß die vorhandenen Rechenhilfsmittel eingesetzt werden können.

IV Anmerkungen zur praktischen Durchführung

Bei der Anwendung des oben angegebenen Verfahrens erhebt sich als erstes die Frage, ob die gemachten Annahmen für ökonomische Zeitreihen Gültigkeit besitzen. Die stärksten Bedenken wird man gegen die Annahme der Stationarität haben. Aber wenn die vor-handenen Daten die Abweichungen von einer irgendwie bestimmten Trendlinie darstellen, dann ist die Bedingung der Stationarität im allgemeinen hinreichend gut erfüllt. Notfalls muß noch eine logarithmische Transformation durchgeführt werden.

Auf die Forderung, daß die Mittelwerte gleich Null sind, kann man auch verzichten. Wenn man die nicht auf die Mittelwerte bezogenen zweiten Momente weiter mit Kovarianzfunktion be-zeichnet, kann man obiges Schema auch auf Folgen mit einem Mittelwert ungleich Null anwenden. Die stationären Folgen,

die in der Ökonomie auftreten, sind in der Regel alle ergodisch, so daß die oben angegebenen Berechnungen von m_u , $r_u(\tau)$ usw. durchgeführt werden dürfen.

Ein weiteres Problem liegt in der Wahl von N . Wenn das zugrunde gelegte Modell zutrifft, ist es klar, daß eine Vergrößerung von N die Güte der Prognose verbessern wird, da mehr Werte der Kovarianzen, d.h. Informationen in sie eingehen. Die Kovarianzen werden aber aus einer Realisation geschätzt, für N in der Nähe von T würden dann nur wenige Daten in den Schätzwert eingehen, so daß seine Güte herabgesetzt sein wird. Die beiden eben angeführten Punkte bringen entgegengesetzte Anforderungen. Man wird einen Kompromiß suchen müssen. Eine ungefähre Schranke für N dürfte - wie die Rechnungen zeigen - bei $T/5$ - $T/6$ liegen.

Ein weiteres Problem ist das der Aggregation. Wenn man alle Größen aggregiert, ehe man den Filter konstruiert, ergeben sich keine Probleme, man hat nur andere Zufallsfolgen mit einer anderen Zeiteinheit. Aggregiert man aber nach erfolgter Filterung, so verliert man die Aussage über den Prognosefehler, denn ist

$$Y_t = \sum y_{t-1}, y_t^* = \sum g_1 x_{t-1}, Y_t^* = \sum y_{t-1}^*$$

dann ergibt sich

$$E[(Y_t - Y_t^*)^2] = E[(y_{t-1} - y_{t-1}^*)^2] + \sum_{i \neq j} E[(y_{t-1} - y_{t-1}^*)(y_{t-j} - y_{t-j}^*)]$$

wegen der Konstruktion der y_{t-1}^* verschwindet die letzte Summe im allgemeinen nicht, so daß man keine Aussage über den mittleren Fehler der nachträglich aggregierten Größen machen kann.

Die bisher durchgeführten Rechnungen bestätigen deutlich die theoretischen Erörterungen und lassen den Schluß zu, daß das hier skizzierte Verfahren mit Erfolg für die Prognose angewandt werden kann.

Literaturverzeichnis:

- [1] Wainstein L.A.
Zubakov V.D. Extraction of signals from noise
Prentice Hall, Inc. 1962
Englewood Cliffs, New Jersey
- [2] Langen H. Die Prognose von Zahlungseingängen
Z.f.B. 34. Jg.(1964) Nr.4 S. 289ff
- [3] Langen H. Betriebliche Zahlungsströme und ihre
Planung in dynamischer Sicht
Z.f.B. 35 Jg.(1965) Nr. 5 S. 261ff

Dr. Peter Naeve
Institut für Angewandte
Statistik
der Freien Universität Berlin
1 Berlin 33
Corrensplatz