

Box-Jenkins-Analyse: Von der Theorie zur Anwendung

P. Naeve, Bielefeld

Zusammenfassung: Wenn auch Box und Jenkins (1970) nur eines der dreizehn Kapitel ihres Buches explizit der Frage der Modellidentifikation widmen, so kommt doch dieser Phase bei der Anwendung der sogenannten Box-Jenkins-Technik in der Anwendung entscheidende Bedeutung zu. Dies wird einem natürlich auch beim vollständigen Lesen des Buches von Box und Jenkins deutlich, da fast jedes Kapitel implizit auch immer den Identifikationsprozeß mitbehandelt.

Die folgenden Ausführungen widmen sich daher exemplarisch - wegen der vorgegebenen Seitenrestriktionen - einigen Fragen im Zusammenhang mit dem Identifikationsprozeß.

Summary: Just one out of 13 chapters of Box and Jenkins (1970) book explicitly deals with model identification. Nevertheless this stage is of greatest importance when one tries to apply Box-Jenkins-techniques. Carefully reading of the forementioned book supports this point of view for almost every chapter implicitly is devoted to that identification process. So in a somewhat eclectic way this paper concentrates on questions arising in the identification stage.

1. Vorbemerkungen

Die sogenannte Box-Jenkins-Technik hat in der Literatur einen so breiten Niederschlag gefunden, daß es sich erübrigt, an dieser Stelle noch einmal einen Abriß zu geben. Allerdings unterscheiden sich die verschiedenen Beiträge doch in Notation und Terminologie, so daß die Festlegung eines Ausgangspunktes für diesen Beitrag angebracht ist. Getreu der Devise: "Zurück zu den Quellen" wird hier von Box und Jenkins (1970) Buch ausgegangen, d.h. Notation und Terminologie sind auf dieses Werk ausgerichtet.

Die Philosophie der sogenannten Box-Jenkins-Technik ist kurz und knapp in dem folgenden Flußdiagramm enthalten.

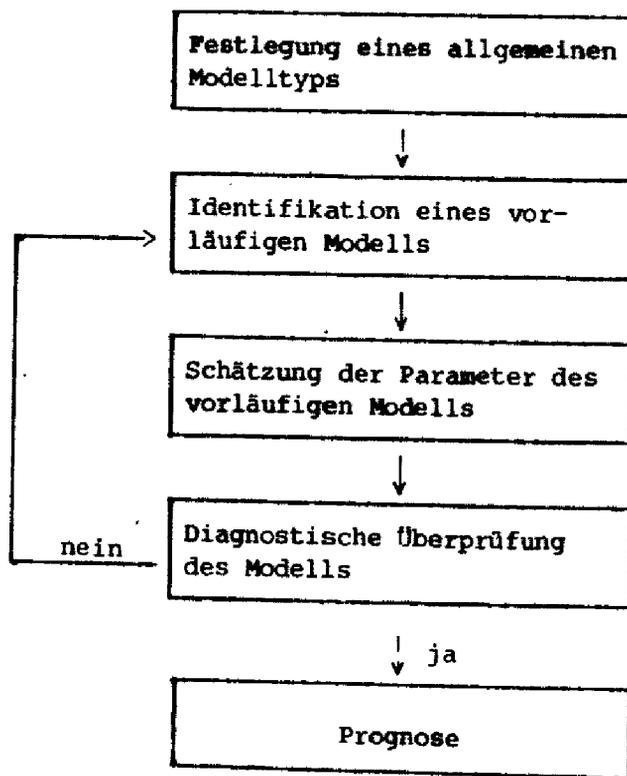


Abbildung 1: Box-Jenkins-Technik: allgemeiner Ablauf

Die Abbildung legt nahe, den Prozeß der Modellwahl sich iterativ ablaufend vorzustellen. Dies ist im Großen gesehen auch richtig. Man wird die angegebene Schleife (hoffentlich) einige Male durchlaufen. Bei jedem Durchlauf wird man aber gerade in der Phase "Identifikation eines vorläufigen Modells" ein anderes Bild als hilfreich für das anzustrebende Vorgehen empfinden. Das alte Kinderspielzeug "Jo-Jo" beschreibt sehr zutreffend die Haltung, die man in dieser Phase einnehmen sollte. Die Vielzahl der möglichen Identifikationshilfsmittel lassen das "Runter - Hoch" des Jo-Jo als viel geeigneteren Arbeitsstil erscheinen als ein sequentielles Durchlaufen dieser Phase. In dem "Runter - Hoch" mit immer neuen Identifikationswerkzeugen bildet sich erst das Bild des Modells.

Wenn man auch das beliebte Werkzeug des statistischen Testes im Zusammenhang mit der Identifikationsphase einsetzen kann, auch diese Arbeit zeigt dazu Ansätze auf - so gehört doch sicher die Identifikationsphase, wenn nicht gar der ganze Box-Jenkins-Ansatz, zu dem Zweig der Statistik den Tukey (1977) explorativ im Gegensatz zur confirmativen Statistik nennt.

Die im Rahmen des in diesem Band vorgestellten Prognosevergleiches eingereichten Prognosen wurden mit Hilfe eines von Meeker (1977) erstellten Programmpaketes auf der TR440 des Hochschulrechenzentrums der Universität Bielefeld berechnet. Hilfreich war dabei die Unterstützung, die durch das Projekt: "Statistisches System" an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Bielefeld gewährt wurde. Auf Module

- teils abgeschlossen, teils noch im Aufbau befindlich - dieses Systems, die in APL auf einer IBM 5110 implementiert werden, konnte an mehreren Stellen zurückgegriffen werden.

Die folgenden Ausführungen sollen nicht den ganzen in Abbildung 1 dargestellten Prozeß für alle 15 Zeitreihen der Vergleichsuntersuchung offenbaren. Wegen der Wichtigkeit (zumindest in der Sicht des Verfassers) des Identifikationsschrittes sollen exemplarisch einige Probleme, denen man dort begegnet, etwas näher beleuchtet werden.

Doch zuvor seien die vom Verfasser im Rahmen des Methodenvergleiches identifizierten Modelle für die Zeitreihen aufgelistet. Sicher werden viele Leser bei einer Nachanalyse zu anderen Modellen für die eine oder andere Zeitreihe kommen. Dem Verfasser liegt auch jede Vorstellung von "Optimalität" seiner Modelle fern.

<u>Reihe</u>	<u>Modelle</u>
2	$(1-\phi_2 B^2) \nabla \nabla_{12} z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
3	$(1-\phi_1 B) \nabla \ln z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B) a_t$
4	$\nabla \nabla_{12} z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
5	$(1-\phi_1 B)(1-\phi_{12} B^{12}) \nabla \nabla_{12} \ln z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
6	$\nabla_{12} z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
7	$(1-\phi_2 B^2) \nabla_{12} z_t = (1-\theta_1 B) a_t$
8	kein brauchbares Modell gefunden
9	$z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
10	$\nabla_{12} z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
11	$\nabla_{12} z_t = (1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
12	$(1-\phi_2 B^2) \nabla_{12} z_t = (1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
13	kein brauchbares Modell gefunden
14	$(1-\phi_1 B) \nabla^2 \nabla_{12} \ln z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B) a_t$
15	$(1-\phi_1 B - \phi_2 B^2) \nabla \nabla_{12} z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$
16	$(1-\phi_{12} B^{12}) \nabla \nabla_{12} z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12}) a_t$

Tabelle 1: Verwandte Modelle im Methodenvergleich

Die Ergebnisse des Methodenvergleiches lassen ihn (oder besser Box, Jenkins) nicht schlecht abschneiden. Daraus läßt sich ableiten, die Empfehlung 1: man verwende Box-Jenkins-Technik. Der teilweise erhebliche Aufwand an Zeit (sowohl Rechenzeit als auch die des Verfassers) legt für manche sicher die Empfehlung 2: Hände weg von Box-Jenkins-Technik nahe. Nach Meinung des Verfassers liegt die Wahrheit nicht in der Mitte, sondern in dem Satz: sage mir was genau das Problem ist und ich sage dir, ob Box-Jenkins in Betracht gezogen werden sollte.

2. Untersuchung des Mittelwertes

Eine der ersten Fragen wird die Überprüfung $E(z_t)=0$ sein. Dazu benötigt man eine Abschätzung für die Standardabweichung von \bar{z} , wobei $\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t$ der Mittelwert aus den beobachteten Zeitreihenwerten ist. Die Varianz von \bar{z} ist abhängig von dem jeweiligen Modelltyp. Die folgende Tabelle liefert für einige Modelle approximative Formeln für die Varianz von \bar{z} .

AR(1):	$\frac{c_o (1+r_1)}{N(1-r_1)}$	AR(2):	$\frac{c_o (1+r_1)(1-2r_1^2+r_2)}{N(1-r_1)(1-r_2)}$
MA(1):	$\frac{c_o (1+2r_1)}{N}$	MA(2):	$\frac{c_o (1+2r_1+2r_2)}{N}$
ARMA(1,1):	$\frac{c_o}{N} \left(1 + \frac{2r_1^2}{r_1-r_2}\right)$		

Tabelle 2: Approximationen für $\sigma^2(\bar{z})$

In den Formeln steht r_j für die Schätzung des Autokorrelationskoeffizienten j-te Ordnung, c_o für die Schätzung der Varianz von z_t .

Beispiel 1: Exemplarisch sei die Beziehung für MA(1) hergeleitet.

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \frac{1}{N^2} \text{Var} \sum_{i=1}^N z_i && \text{dabei steht Var für Varianz} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j \text{Cov}(z_i, z_j) && \text{mit } \text{Cov}(z_k, z_k) = \text{Var}(z_k) \\ &= \frac{1}{N^2} (N\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k)\gamma_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \frac{1}{N^2} (N\gamma_0 + 2(N-1)\gamma_1) & \gamma_j &= 0 \quad \text{für } j > 1 \\ &= \frac{\gamma_0}{N^2} (N + 2(N-1)\rho_1) \\ &\sim \frac{\gamma_0}{N} (1 + 2\rho_1)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich obige Formel, wenn man die theoretischen Autokovarianzen und Autokorrelationen γ_0, ρ_1 durch ihre Schätzwerte c_0, r_1 ersetzt.

Als Beispiel der Anwendung dieser Approximationen soll die folgende Situation analysiert werden.

Beispiel 2: 100 Werte eines simulierten Prozesses liegen vor. Es ergaben sich

$$c_0 = 2.32 \quad r_1 = -0.836 \quad \Sigma = 0.024$$

Unter der Annahme (hier motiviert durch die Tatsache, daß es sich in der Tat um einen AR(1)-Prozeß handelt) eines ARIMA(1,0,0) ergibt sich

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma^2(\bar{z})} &= \frac{2.32 \cdot 0.164}{100 \cdot 1.836} \\ &= 0.00207\end{aligned}$$

Damit liegt das gefundene $\bar{z} = 0.024$ noch innerhalb des einfachen Standardabweichungsbandes um Null, d.h. $-0.0455 \leq 0.024 \leq 0.0455$. Man kann also $E(z_t) = 0$ als Arbeitshypothese beibehalten.

3. Transformation zur Linearität

Das sogenannte Box-Jenkins-Verfahren ist eingebettet in die Theorie des allgemeinen linearen Prozesses. Für den Prozeß z_t gilt also

$$(1) \quad z_t = a_t + \sum_{j=1} \psi_j a_{t-j}$$

wobei die a_s unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen (weißes Rauschen) sind mit $E(a_s) = 0$ und $\text{Var}(a_s) = \sigma_a^2$.

Nun ist bei praktischen Anwendungen die Darstellung (1) nicht immer gegeben. Sie läßt sich aber oft durch geeignete Transformation der Daten (d.h. auch geeignete Transformation des Prozesses) erzwingen. \bar{x}_t ist der umtransformierte und daher in der Regel auch nicht lineare Prozeß.

Eine häufig angewandte Klasse von Transformationen wurde von Box und Cox (1964) angegeben.

$$z_t = \begin{cases} \frac{(\tilde{x}_t + s)^\lambda}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log(\tilde{x}_t + s) & \lambda = 0 \end{cases}$$

Der Parameter s dient zur Erzwingung nicht-negativer Daten. Im allgemeinen wird ihm in der Literatur keine darüber hinausgehende Bedeutung beigemessen. Dies wurde von Mohr (1980) in letzter Zeit in Frage gestellt.

Der Wahl des Parameter λ gilt die ganze Aufmerksamkeit. Hier soll nicht auf die "optimale" Bestimmung des Parameter λ in der Phase: Modellschätzung eingegangen werden. Einen Überblick über Verfahren und Probleme findet man beispielsweise in der erwähnten Arbeit von Mohr.

Dem explorativen Charakter der Identifikationsphase entsprechend sollen hier zwei Verfahren vorgestellt werden, die zum Auffinden eines für den vorliegenden Datensatz geeigneten Intervalls für λ führen.

Für die notwendige Festlegung auf einen bestimmten Wert für λ sollte man das folgende Zitat von Jenkins (1979, p97) bedenken: "However, ..., unusual values of λ should be avoided in order to make it easier to interpret the model and the forecasts."

Das erste Verfahren ist der Range-Mean-Plot den Jenkins in der bereits erwähnten Arbeit vorschlägt.

Die Zeitreihe wird in Abschnitte eingeteilt. Für die Länge der Abschnitte gibt es keine festen Regeln, jedoch sollte man Saisonperioden u.a. berücksichtigen. Für jeden Abschnitt berechnet man den Mittelwert (mean) und die Spannweite (range) der Zeitreihenwerte und trägt die gefundenen Paare in ein Mittelwerte (x-Achse)-Spannweiten (y-Achse)-Diagramm ein. Die folgende Abbildung zeigt einige theoretische Beziehungen zwischen Mittelwerten und Spannweiten und die zugehörigen λ -Werte.

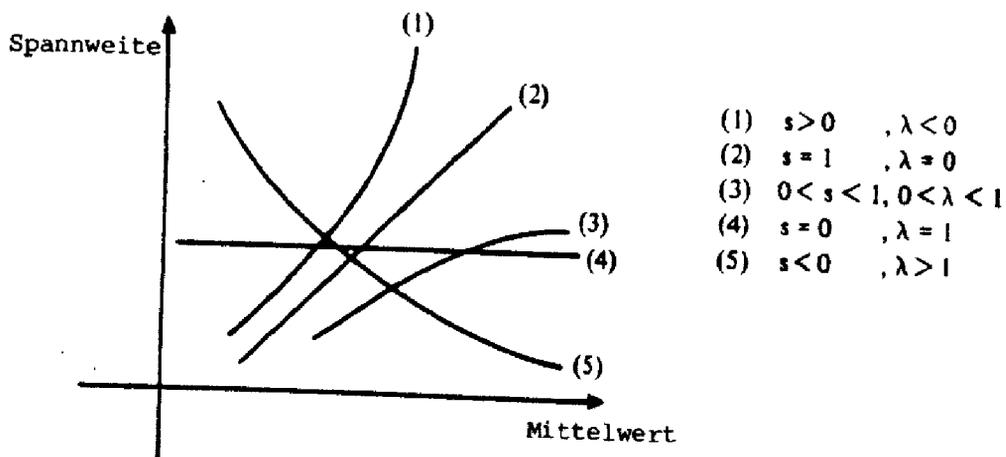


Abbildung 2: Theoretische Range-Mean-Graphen

Die aus einer Zeitreihe (Realisation des Prozesses) gewonnenen Punkte werden natürlich um die entsprechende Kurve streuen. Jenkins (1979) führt zu diesem Verfahren aus:

- (1) it is a crude device and any real relationship could be swamped by random scatter,
- (2) the objective is not to fix one precise values of λ ... but to distinguish between say $\lambda = 1, 0.5$ or 0 ,
- (3) some data sets are insensitive to the choice of λ , in which case the choice of transformation is not important. This situation can be recognized by the fact that the range-mean plots of the original and transformed data are very similar,
- (4) some data sets may be moderately sensitive to transformation, in which case the range-mean plot should give some signal as to the choice of transformation,
- (5) if it is felt that the data is very sensitive to transformation, the parameter λ can be estimated along with other model parameters at the estimation stage of model building.

Das andere Verfahren setzt dabei an, daß aus der Beziehung (1) folgt, daß auch z_t normalverteilt ist. Es gilt daher λ so zu wählen, daß die Verteilung der z_t sich möglichst gut der Normalverteilung nähert. Eine Möglichkeit, diese Annäherung zu überprüfen, besteht in der Betrachtung höherer Momente. Schiefe und Kurtosis sind zwei Maße, die sich anbieten. Bekanntlich gilt für Normalverteilungen

$$\text{Schiefe : } \mu_3 / \mu_2^{3/2} = 0$$

$$\text{Kurtosis: } \mu_4 / \mu_2^2 = 3$$

Berechnet man für alternative λ jeweils Schiefe und Kurtosis und trägt die gefundenen Werte gegen λ auf, so erhält man zwei Graphen, aus denen man den Einfluß von λ auf die "Normalität" der transformierten Daten ablesen kann.

Im Folgenden ist dieses Verfahren auf die Zeitreihe 14 angewandt worden. Wie man aus der Tabelle und der graphischen Darstellung erkennt, hat für $\lambda = 0$, d.h. Anwendung der Logarithmustransformation zwar die Schiefe fast den Wert 0 während die Kurtosis noch vom angestrebten Wert 3 abweicht. Eine solche Kurtosis würde man z.B. für $\lambda \approx .75$ erhalten, dann aber entfernt sich die Schiefe doch schon beträchtlich vom Idealwert 0 . Dieser Datensatz läßt sich offenbar nicht so mit Hilfe einer Box-Cox-Transformation bearbeiten, daß "Normalität" in Bezug auf Schiefe und Kurtosis gleichzeitig erfüllt ist.

Offentlichtlich sind derartige Schiefe-Kurtosis-Darstellungen gut geeignet, um sowohl einen Wert für den Transformationsparameter λ festzulegen als auch den Einfluß einer Wahl von λ auf die "Normalität" der Daten zu erkennen.

Die Schiefe-Kurtosis-Darstellung ist ein Vorschlag von J. Jungeilges (1982).

Skewness-Coef.	Kurtosis-Coef.	Estimator-Val.
-2.1015963601	7.2787460855	-1.0000000000
-1.6175459846	5.3611442757	-.7500000000
-1.0942900710	3.7650817950	-.5000000000
-.5710229433	2.6625395560	-.2500000000
-.0890309067	2.1230216365	.0000000000
.3302302589	2.0755948129	.2500000000
.6890599684	2.3853181467	.5000000000
1.0018552218	2.9406858786	.7500000000
1.2840319349	3.6806675867	1.0000000000

Tabelle 3: Schiefe und Kurtosis für Zeitreihe 14

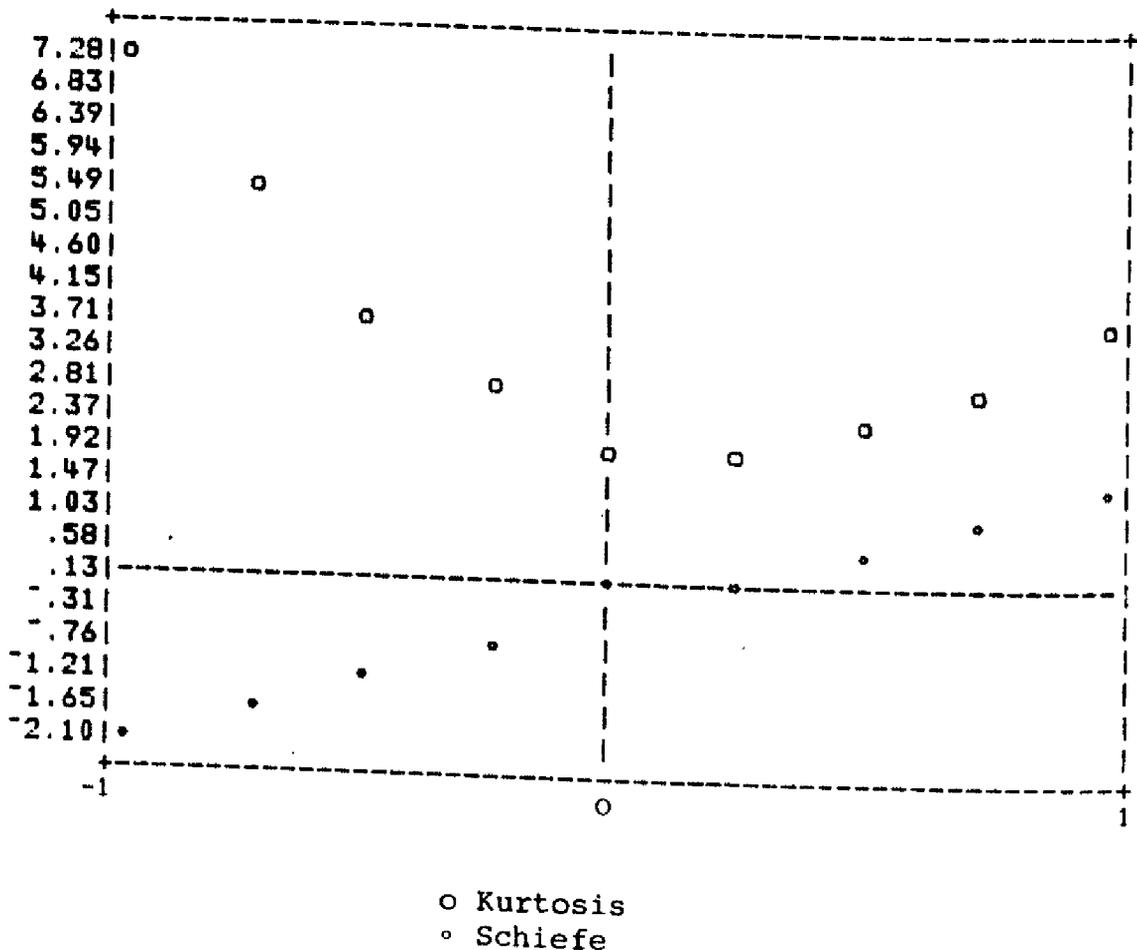


Abbildung 3: Schiefe und Kurtosis für Zeitreihe 14

4. Informationen aus der Autokorrelationsfunktion

Eine wesentliche Rolle im Identifikationsprozeß spielt die Analyse der Autokorrelationsfunktion. Die theoretische Autokorrelationsfunktion läßt sich für niedrige Modellordnungen noch einfach ermitteln. So findet man für die theoretischen Autokorrelationskoeffizienten einiger Modell das in der folgenden Tabelle zusammengefaßte Verhalten.

AR(1)	:	Für $\phi_1 > 0$ fällt ρ_k exponentiell ab für $k \rightarrow +\infty$ für $\phi_1 < 0$ fällt $ \rho_k $ exponentiell ab für $k \rightarrow +\infty$
AR(2)	:	ρ_k ist eine Mischung von exponentiellen abnehmenden Funktionen oder ein gedämpfter Sinus.
MA(1)	:	Nur ρ_1 ist von Null verschieden.
MA(2)	:	Nur ρ_1 und ρ_2 sind von Null verschieden.
ARMA(1,1)	:	ρ_k fällt ab ρ_2 exponentiell ab.

Tabelle 4: Verhalten einiger theoretischer Autokorrelationsfunktionen

Bei der Analyse einer Zeitreihe versucht man nun, durch Inspektion der geschätzten Autokorrelationsfunktion ein dem oben angegebenen ähnliches Verhalten zu erkennen und damit dann eine Modellordnung in p und q bzw. P und Q festzulegen.

Daß dieses in Praxis nicht ganz einfach ist, liegt an den oft recht großen Varianzen der Schätzer für die ρ_k und an der Möglichkeit, daß ρ_k und ρ_1 oft nur mit hoher Autokorrelation geschätzt werden können. Die folgende Tabelle faßt die Ergebnisse für eine simulierte Reihe der Länge $N=100$ zusammen. Neben den Originaldaten wurden auch die ersten drei Differenzen untersucht. Die Abbildung zeigt noch die Graphen zweier Autokorrelationsfunktionen.

LAG	ORIGINAL	1. DIFF.	2. DIFF.	3. DIFF.
1	.791	-.047	-.555	-.755
2	.608	.068	.226	.386
3	.400	-.222	-.167	-.175
4	.280	-.201	-.021	.045
5	.241	-.159	-.036	-.028
6	.277	.011	.057	.056
7	.296	.052	-.020	-.079
8	.294	.099	.134	.156
9	.256	-.100	-.188	-.222
10	.262	.079	.180	.217

Tabelle 5: Geschätzte Autokorrelationen für eine simulierte Reihe

Aus technischen Gründen wurde bei allen folgenden Abbildungen die Beschriftung der Ordinaten unterdrückt.

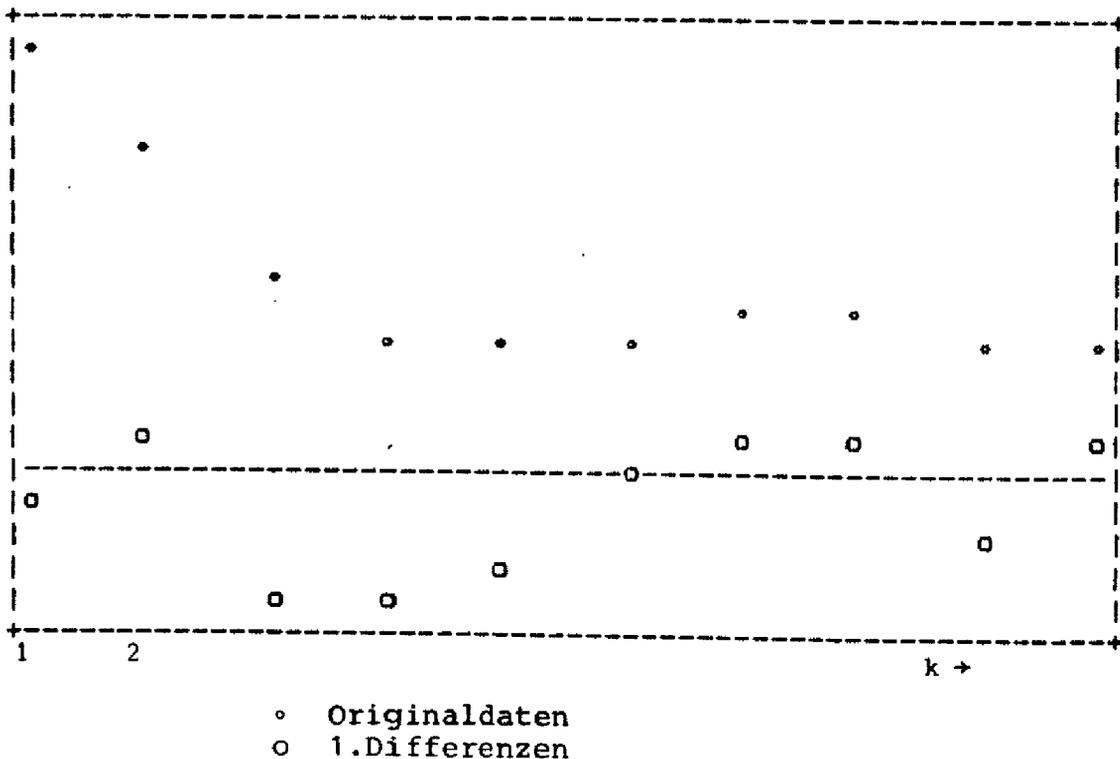


Abbildung 4: Geschätzte Autokorrelationen für eine simulierte Reihe

Bei der Originalreihe ist man auf den ersten Blick fast geneigt, die Graphen der Autokorrelation als eine gedämpfte Sinusschwingung zu identifizieren und damit auf einen AR(2)-Prozess zu tippen. Der erzeugende Prozess war aber eine AR(1) mit $\phi_1 = 0.8$.

Als Beispiel einer empirischen Reihe seien die entsprechenden Ergebnisse für die Zeitreihe Nr. 4 angeführt.

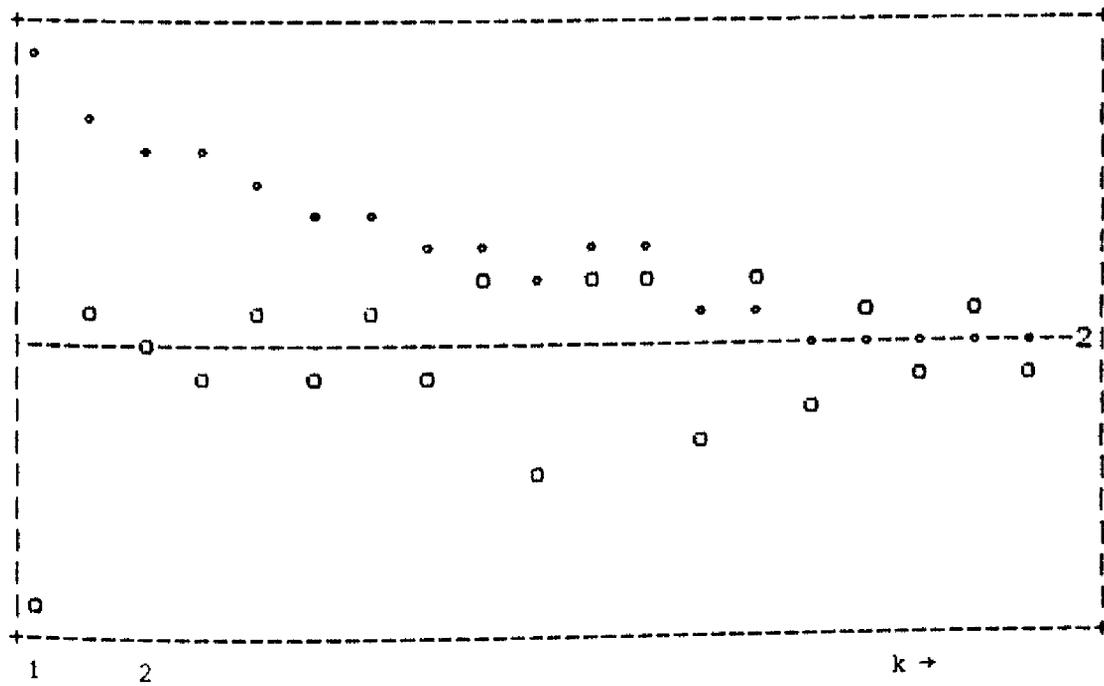
Für den Prognosevergleich war für diese Reihe ein Modell der Form

$$\nabla \nabla_{12} z_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{12} B^{12}) a_t$$

identifiziert worden.

LAG	ORIGINAL	1. DIFF.	2. DIFF.	3. DIFF.
1	.679	-.332	-.603	-.715
2	.556	-.057	.092	.240
3	.486	-.028	.012	-.007
4	.434	-.033	-.043	-.061
5	.405	.079	.097	.109
6	.339	-.069	-.105	-.129
7	.315	.063	.095	.119
8	.241	-.058	-.083	-.126
9	.204	.045	.153	.203
10	.155	-.263	-.271	-.262
11	.250	.152	.140	.126
12	.242	.193	.153	.124
13	.111	-.168	-.230	-.242
14	.093	.083	.165	.213
15	.033	-.110	-.122	-.154
16	.030	.025	.066	.104
17	.010	-.016	-.040	-.080
18	.033	.044	.076	.090
19	-.011	-.095	-.087	-.089
20	-.004	-.002	.030	.034

Tabelle 6: Geschätzte Autokorrelationen für Zeitreihe Nr. 4



◦ Originaldaten
 ○ 2.Differenzen

Abbildung 5: Geschätzte Autokorrelationen für Zeitreihe Nr.4

5. Informationen aus der partiellen Autokorrelationsfunktion

Hat man einen AR(p) vorliegen, so stellen die Yule-Walker-Gleichungen einen Zusammenhang zwischen Koeffizienten ϕ_i und den theoretischen Autokorrelationen ρ_j her. Es gilt

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ &\vdots \\ \rho_{p-1} &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich z.B. für einen AR(2)-Prozeß

$$(2) \quad \phi_{21} = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} \quad \phi_{21} \equiv \phi_1, \quad \phi_{22} \equiv \phi_2$$

Betrachtet man nun einen AR(1)-Prozeß so gilt für diesen

$$(3) \quad \rho_1 = \phi_1 \quad \rho_2 = \phi_1^2 \quad \dots \quad \rho_k = \phi_1^k$$

Vergißt man nun für einen Moment die Information $p=1$ und löst z.B. die Yule-Walker-Gleichungen für die Ordnung 2, so findet man mit Hilfe der Beziehung (2) und (3)

$$\phi_{22} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0$$

Der Koeffizient ϕ_{kk} liefert bei der Lösung der Yule-Walker-Gleichung der Ordnung k den Wert Null, wenn der "erzeugende" Prozeß ein AR-Prozeß mit einer Ordnung $< k$ ist. Für andere Modelle zeigt die partielle Autokorrelationsfunktion ein komplexeres Verhalten.

AR(1)	: nur $\phi_{11} \neq 0$
AR(2)	: nur ϕ_{11} und $\phi_{22} \neq 0$
MA(1)	: exponentielles Abnehmen
MA(2)	: Mischung aus exponentiellem Abnehmen und gedämpfter Schwingung
ARMA(1,1)	: exponentielles Abnehmen ab $k \leq 2$

Tabelle 7: Geschätzte partielle Autokorrelationsfunktion für eine simulierte Reihe

Löst man die Yule-Walker-Gleichungen mit den geschätzten Autokorrelationen r_k an Stelle der ρ_k , so erhält man eine geschätzte partielle Autokorrelationsfunktion. Durch Inspektion dieser geschätzten Funktion kann man versuchen ein dem oben angegebenen ähnliches Verhalten zu erkennen und damit dann eine Modellordnung in p und q bzw. P und Q festzulegen.

Für die bereits einmal verwandte simulierte Reihe sind die Ergebnisse wie folgt:

ORDER	ORIGINAL	1. DIFF.	2. DIFF.	3. DIFF.
1	.791	-.047	-.555	-.755
2	-.047	.066	-.119	-.428
3	-.179	-.217	-.137	-.233
4	.090	-.235	-.235	-.225
5	.145	-.174	-.250	-.303
6	.152	-.046	-.139	-.229
7	-.019	-.038	-.123	-.287
8	-.020	-.024	.059	-.027
9	.000	-.200	-.137	-.129
10	.172	.011	.006	-.079

Tabelle 8: Geschätzte partielle Autokorrelationsfunktion für eine simulierte Reihe

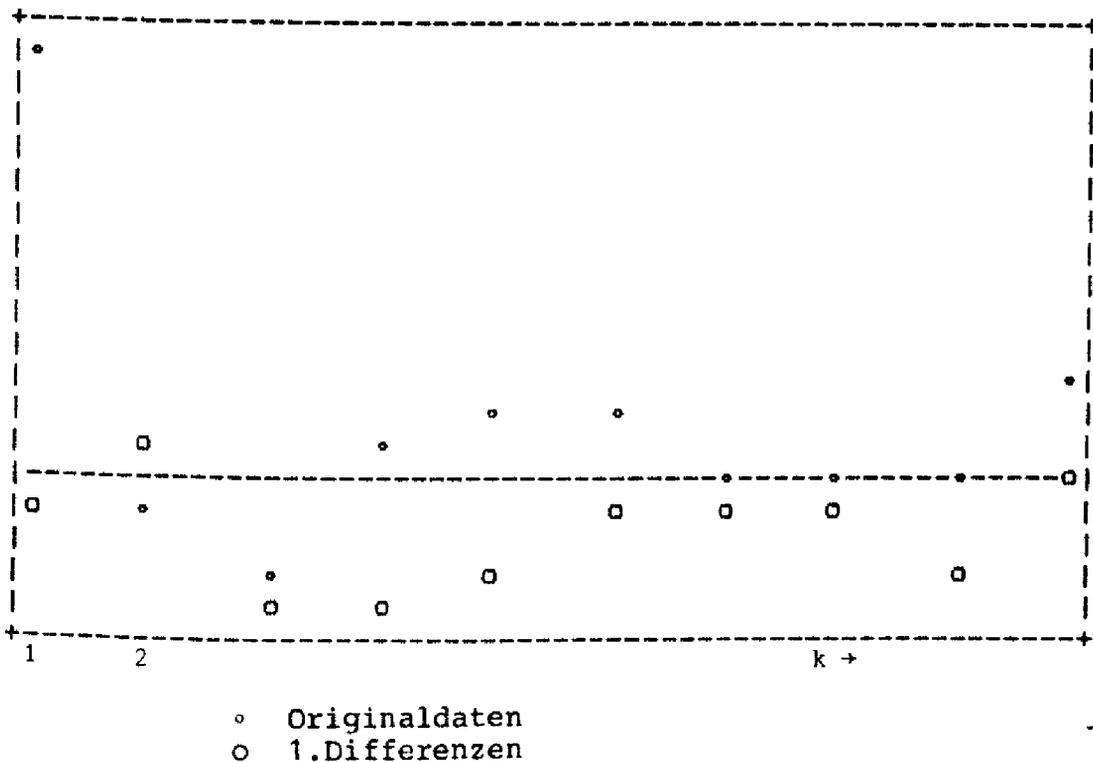


Abbildung 6: Geschätzte partielle Autokorrelationsfunktionen für eine simulierte Reihe

Die Ergebnisse deuten klarer als die geschätzte Autokorrelationsfunktion auf eine Ordnung $p=1$ hin.

Ist die Prozeß-Ordnung p so ist für $k > p$ $\hat{\phi}_{kk}$ approximativ normalverteilt mit $\sigma^2(\hat{\phi}_{kk}) \sim \frac{1}{N}$.

Im vorliegenden Fall war $N=100$. Damit ergibt sich eine Standardabweichung von 0.1. Man erkennt, daß kein Schätzwert außerhalb des 2σ -Bereiches für $k \geq 2$ liegt.

Auch für die bereits behandelte Zeitreihe Nr. 4 seien die Ergebnisse angegeben.

ORDER	ORIGINAL	1. DIFF.	2. DIFF.	3. DIFF.
1	.679	-.332	-.603	-.715
2	.177	-.188	-.427	-.553
3	.106	-.132	-.318	-.398
4	.066	-.121	-.337	-.406
5	.071	.009	-.198	-.242
6	-.029	-.062	-.239	-.238
7	.042	.028	-.137	-.108
8	-.076	-.039	-.173	-.229
9	-.004	.024	.138	.156
10	-.045	-.304	-.137	.165
11	.243	-.070	-.328	-.175
12	.002	.178	-.075	-.040
13	-.218	-.042	-.148	-.080
14	.003	.047	-.054	-.013
15	-.076	-.035	-.025	.020
16	.000	-.064	-.020	.082
17	-.003	-.072	-.096	-.051
18	.071	.006	.057	.040
19	-.079	-.155	.034	.099
20	.079	-.159	-.089	-.021

Tabelle 9: Geschätzte partielle Autokorrelationsfunktionen für Zeitreihe Nr. 4

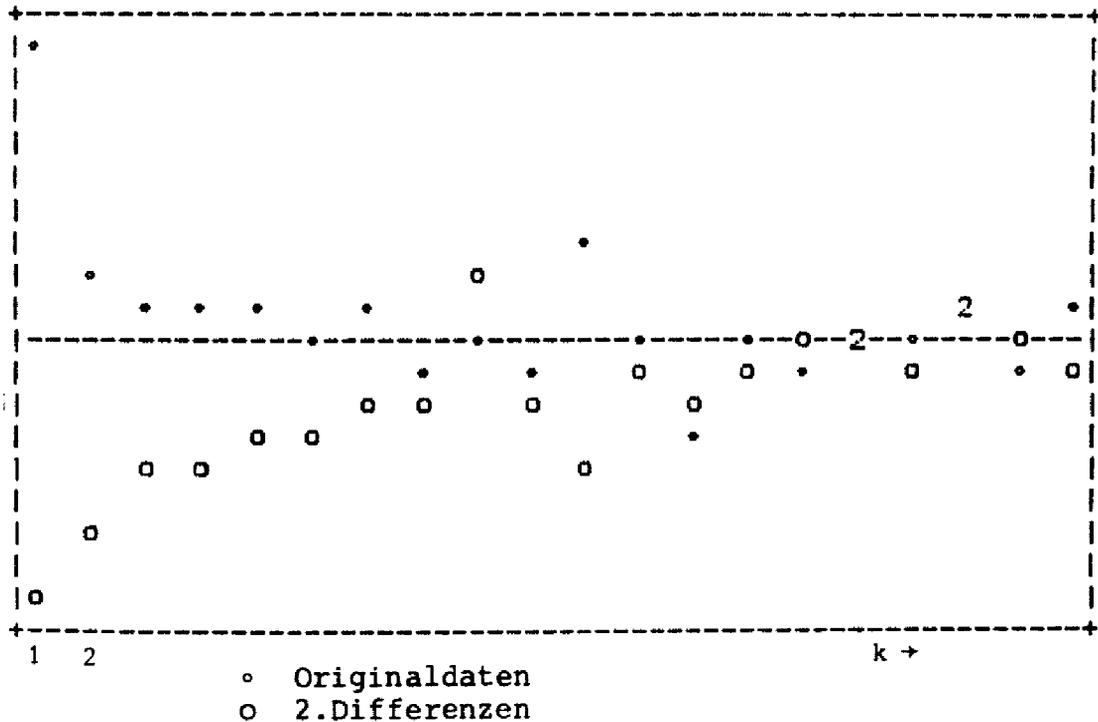


Abbildung 7: Geschätzte partielle Autokorrelationsfunktionen für Zeitreihe Nr. 4

Literaturverzeichnis

- BÄUMER, R.: Unveröffentlichte Diplomarbeit, Universität Bielefeld 1981
- BOX, G.E.P. und Cox, D.R.: An analysis of transformations, JRSS B, p 211-252 1964
- BOX, G.E.P. und Jenkins, G.M.: Time series analysis, forecasting and control, Holden Day, San Francisco 1970
- JENKINS, G.M.: Practical experiences with modelling and forecasting time series, St. Helier 1979
- JUNGEILGES, J.: Unveröffentlichte Diplomarbeit, Universität Bielefeld 1982
- MEEKER, W.Q.: TSERIES -- A user oriented computer program for identifying, fitting, and forecasting ARIMA time series models, Statistical Laboratory, Iowa State University 1977
- MOHR, W.: Der Einsatz der Box-Cox-Transformation in der Zeitreihenanalyse. Arbeiten aus dem Institut für Statistik und Ökonometrie der Christian-Albrecht-Universität Kiel, 11/1980
- STEINECKER, J.: Unveröffentlichte Diplomarbeit, Universität Bielefeld 1982
- TUKEY, J.W.: Exploratory data analysis, Addison Wesley, Reading 1977