Jber. d. Dt. Math.-Verein. 85 (1983) 86–105
AMS subject classification: 16 A 46, 16 A 64

Unzerlegbare Darstellungen endlich-dimensionaler Algebren*)

C. M. Ringel, Bielefeld

Im folgenden Bericht möchte ich die Grundzüge der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren skizzieren, wie sie in den letzten zehn Jahren entwickelt wurde. Ich erinnere daran, daß das Grundproblem der Darstellungstheorie die Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen einer Algebra ist. Dabei gehen wir von folgender Situation aus: Gegeben ist ein Körper k, oft werden wir voraussetzen, daß k algebraisch abgeschlossen ist, und dann genügt es für alle Überlegungen, an den Körper **C** der komplexen Zahlen zu denken. Wenn hier von k-Algebren die Rede ist, so handelt es sich immer um assoziative Algebren, fast immer werden wir voraussetzen, daß sie endlich-dimensional sind, und endlich-dimensionale Algebren sollen ein Einselement besitzen. Ist eine solche Algebra A gegeben, so fragen wir nach allen möglichen Darstellungen von A, nach den A-M o d u l n , das sind k-Vektorräume, auf denen A von links operiert, mit den üblichen Distributivgesetzen. Bei Moduln werden wir immer voraussetzen, daß sie endlich-dimensional sind. Unter einer direkten Zerlegung des A-Moduls M versteht man eine Vektorraumzerlegung $M = M' \oplus M''$, wobei M' und M'' beides A-Untermoduln sind; sie heißt trivial, falls $M' = 0$ oder $M'' = 0$. Ist $M \neq 0$, und besitzt M keine nicht-trivialen Zerlegungen, so spricht man von einem u n z e r l e g b a r e n Modul. Natürlich kann jeder (endlich-dimensionale) Modul als direkte Summe unzerlegbarer Moduln geschrieben werden, und der klassische Satz von Krull-Schmidt besagt, daß eine solche Zerlegung bis auf Isomorphie eindeutig ist. Um also alle Moduln zu kennen, genügt es, die unzerlegbaren Moduln zu beschreiben. Im allgemeinen wird es unendlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln geben, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei I das von den Polynomen X^2, XY, Y^2 erzeugte Ideal des Polynomrings $\mathbf{C}[X, Y]$, und $A_0 = \mathbf{C}[X, Y]/I$. Dann ist A_0 eine 3-dimensionale kommutative Algebra, und wir erhalten für jede komplexe Zahl λ einen 2-dimensionalen A_0-Modul M_λ, indem wir als zugrundeliegenden Vektorraum $\mathbf{C}^2$ wählen, und die Operation von X auf $\mathbf{C}^2$ durch die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, die von Y auf $\mathbf{C}^2$ durch $\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ festsetzen (offensichtlich liefert dies eine Operation von $\mathbf{C}[X, Y]$ auf $\mathbf{C}^2$, und man rechnet leicht nach, daß I den Modul annulliert). Alle diese Moduln M_λ sind unzerlegbar, und sie sind paar-

*) Dies ist der ziemlich wörtliche Text eines Vortrages, gehalten auf der DMV-Tagung in Dortmund, 1980. Eingearbeitet wurde lediglich der Satz von Ovsienko [17], und Hinweise auf die neuen Arbeiten [4], [7], [12], [19].

weise nicht-isomorph. Besitzt eine endlich-dimensionale Algebra nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln, so nennen wir sie d a r s t e l l u n g s e n d l i c h. Ein wichtiger Satz von Rojter [23] besagt nun, daß eine endlich-dimensionale Algebra entweder darstellungsendlich ist, oder aber unzerlegbare Darstellungen beliebig großer Dimension besitzt. Die entsprechende Vermutung war in den vierziger Jahren von Brauer und Thrall formuliert worden [21]. Für unsere Algebra A_0 erhalten wir große unzerlegbare Moduln, indem wir X und Y auf $\mathbf{C}^{2n}$ vermöge der Matrizen

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{und} \quad \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

operieren lassen. Ich sollte betonen, daß ein A_0-Modul offensichtlich nichts anderes ist als ein $\mathbf{C}$-Vektorraum, mit zwei Endomorphismen α, β, für die $\alpha^2 = \beta^2 = \alpha\beta = \beta\alpha = 0$ gilt – dabei ist α durch die Operation von X, und β durch die von Y gegeben, die ja die entsprechenden Relationen erfüllen. Die vollständige Klassifikation aller unzerlegbaren A_0-Moduln geht zurück auf Kronecker, sie folgt direkt aus seiner Klassifikation aller Matrizenbüschel [15], [10], also der Paare von nicht-notwendig quadratischen Matrizen. Wir schreiben dafür symbolisch

$$\circ \rightrightarrows \circ$$

um auszudrücken, daß zwei Vektorräume V, W und zwei lineare Abbildungen $\gamma, \delta : V \to W$ gegeben sind, also

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & W, \end{tikzcd}$$

und daß wir nun geeignete Basen in V und W suchen, um γ und δ in eine relativ einfache Form zu bringen. Die Probleme der Darstellungstheorie sind Matrizenprobleme, auch wenn im allgemeinen ein basisfreier Zugang gewählt wird.

Ich möchte im weiteren besonders das folgende Beispiel diskutieren:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "\alpha"] & \circ \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

wir haben es mit zwei Vektorräumen U, V, einer Abbildung $\alpha : U \to V$, und einem Endomorphismus $\beta : V \to V$ zu tun. Dabei können wir voraussetzen, daß α eine Inklusionsabbildung ist, denn andernfalls spalten wir den Kern von α ab (die einzige unzerlegbare Darstellung, für die α nicht injektiv ist, ist $k \to 0 \circlearrowleft$). Zu untersuchen haben wir deshalb einen Vektorraum V, mit einem Endomorphismus β und einem Unterraum U. Wenn wir keine weiteren Voraussetzungen machen würden, so wäre dies ein ziemlich hoffnungsloses Unterfangen: Es gibt viel zu viele unzerlegbare Darstellungen, als daß man eine Klassifikation erwarten könnte. (Man kann recht leicht zeigen, daß es zu jeder endlich-dimensionalen Algebra A einen Vektorraum V, einen Endomorphismus $\beta : V \to V$ und einen Unterraum U von V gibt, so daß A isomorph zum Ring aller Endomorphismen von V, die mit β kommutieren, und U in sich abbilden, ist; man sagt daher, daß man es mit einem „wilden" Problem der Darstellungstheorie zu tun hat [6]). Wir werden zusätzlich noch voraussetzen, daß die Relationen

$$\beta^4 = 0 \quad \text{und} \quad \beta^2\alpha = 0$$

gelten: Gesucht sind also Tripel (V, U, β), mit V ein Vektorraum, β ein nilpotenter Endomorphismus von V mit Nilpotenzindex $\leqslant 4$, und U ein Unterraum von V, der im Kern von β^2 enthalten ist. In diesem Fall, so werden wir sehen, gibt es 27 unzerlegbare derartige Tripel, also, zusammen mit $k \to 0 \circlearrowright$, erhalten wir genau 28 unzerlegbare Moduln, wir sind im darstellungsendlichen Fall. – Ich sage „Moduln", und sollte noch einmal herausarbeiten, daß die Quadrupel

$$U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowright \beta \quad \text{mit } \beta^4 = \beta^2\alpha = 0$$

gerade den Moduln über einer 7-dimensionalen Algebra A_1 entsprechen, die man auf folgende Weise erhält: man betrachtet die „Wege-Algebra" zum Köcher $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \circlearrowright \beta$, und faktorisiert das von den Relationen β^4 und $\beta^2\alpha$ erzeugte Ideal heraus [8]; in unserem Fall besitzt A_1 eine kanonische k-Basis, nämlich zwei Idempotente, die den beiden Punkten des Köchers entsprechen, und die (Restklassen der) Wege $\alpha, \beta, \beta^2, \beta^3, \beta\alpha$ – die übrigen Monome liegen in dem von β^4 und $\beta^2\alpha$ erzeugten Ideal und sind daher null gesetzt. Der $U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowright \beta$ zugeordnete A_1-Modul ist gegeben durch den Vektorraum $U \oplus V$, mit der offensichtlichen Operation von A_1 auf $U \oplus V$.

Wenn man die unzerlegbaren Moduln einer Algebra klassifizieren möchte, so braucht man „Etiketten", mit denen man sie bezeichnen kann, also irgendwelche Invarianten, die man einerseits leicht bestimmen kann, die andererseits den Modul bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen. Als erste und wichtigste Invariante erweist sich der sogenannte Dimensionsvektor $\underline{\dim}$ M. Eine endlich-dimensionale Algebra A hat nur endlich viele Isomorphieklassen einfacher (= irreduzibler) Moduln, etwa $S_1, \ldots, S_n$. Für einen A-Modul M bezeichnet $\underline{\dim}$ M das n-Tupel, dessen i-te Koordinate $(\underline{\dim}\, M)_i$ angibt, wie oft S_i in einer Kompositionsreihe von M als Faktor auftritt. Nach dem klassischen Satz von Jordan-Hölder sind diese Anzahlen Invarianten des Moduls. Im Fall der Algebra A_1 gibt es die beiden einfachen Moduln

$$S_1 = (k \to 0 \circlearrowright) \quad \text{und} \quad S_2 = (0 \to k \circlearrowright),$$

und es ist

$$\underline{\dim}\,(U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowright \beta) = (\dim U, \dim V).$$

Im allgemeinen wird der Dimensionsvektor nicht ausreichen, um die unzerlegbaren Moduln zu klassifizieren, selbst wenn wir es mit einer darstellungsendlichen Algebra zu tun haben. So gibt es im Fall der Algebra A_1 drei Isomorphieklassen von unzerlegbaren Moduln mit Dimensionvektor (2, 6), nämlich die folgenden:

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^6 \circlearrowleft \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k^6 \circlearrowleft \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} k^6 \circlearrowleft \left[\begin{array}{cccc:cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

Es stellt sich also das Problem, für welche Algebren die unzerlegbaren Moduln durch ihren Dimensionsvektor charakterisiert werden, und wir werden sehen, daß jedem Modul M über einer darstellungsendlichen Algebra ein Modul $\tilde{M}$ über einer verwandten Algebra zugeordnet werden kann, der durch seinen Dimensionsvektor charakterisiert wird, und der viele Eigenschaften von M widerspiegelt.

Soweit zu den Fragestellungen. Als erstes, grundlegendes Hilfsmittel der neueren Darstellungstheorie möchte ich den sogenannten Auslander-Reiten-Köcher vorstellen.

1 Der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$

Ein Köcher, dieser Sprachgebrauch hat sich eingebürgert, ist nichts anderes als eine Sammlung von Punkten und Pfeilen, wobei jedem Pfeil sein Anfangs- und sein Endpunkt zugeordnet ist (also ein orientierter Graph, möglicherweise mit Doppelpfeilen und Schleifen). Unser Interesse gilt der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren A-Moduln einer vorgegebenen endlich-dimensionalen Algebra A, und wir werden sogleich sehen, wie wir diese Menge als Punktmenge eines Köchers auffassen können, der vielfach Aufschluß über die Struktur sowohl von A als auch der A-Moduln gibt. Wir brauchen dazu den Begriff einer irreduziblen Abbildung, wie er von Auslander und Reiten [2] eingeführt wurde: Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *irreduzibel*, wenn f einerseits weder zerfallender Monomorphismus, noch zerfallender Epimorphismus ist, und wenn f andererseits nur triviale Faktorisierungen besitzt. (Natürlich kann man f immer auf folgende Weisen faktorisieren

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "{[1\ \ 0]}"'] & & N \\ & M \oplus Z \arrow[ur, "{\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "{[f\ \ h]}"'] & & N \\ & N \oplus Z \arrow[ur, "{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}"'] & \end{tikzcd},$$

wobei Z ein beliebiger Modul, und $g : Z \to N$, $h : M \to Z$ beliebige Abbildungen sind, und man sagt, daß eine Faktorisierung $f = f'f''$ trivial ist, falls f' ein zerfallender Monomorphismus oder f'' ein zerfallender Epimorphismus ist.) Der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ von A hat als Punkte die Isomorphieklassen [M] der unzerlegbaren A-Moduln M, und es gibt einen Pfeil $[M] \to [N]$ genau dann, wenn es eine irreduzible Abbildung $M \to N$ gibt (Oft notiert man noch über den Pfeilen entsprechende Vielfachheiten [21], doch werden wir im folgenden darauf verzichten). Die Existenz genügend vieler irreduzibler Abbildungen ist nur für darstellungsendliche Algebren offensichtlich: wenn wir eine vorgegebene nicht-invertierbare Abbildung f zwischen zwei unzerlegbaren Moduln immer weiter faktorisieren, es aber nur endlich viele Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln gibt, so sieht man leicht, daß dieser Vorgang stationär wird, daß sich also f als Summe von Produkten von irreduziblen Abbildungen schreiben läßt. Im allgemeinen ist dies keineswegs so. Allerdings gibt es auch dann immer noch viele irreduzible Abbildungen. Zu jedem unzerlegbaren Modul Z gibt es nämlich eine sogenannte *minimale rechts-fast-zerfallende* Abbildung $g : Y \to Z$ (das soll folgendes heißen: Erstens, g ist kein zerfallender Epimorphismus; zweitens, ist $g' : Y' \to Z$ eine Abbildung, die kein zerfallender Epimorphismus ist, so gibt es g'' mit $g' = g''g$; und drittens hat Y für alle derartigen Abbildungen $g : Y \to Z$ die kleinst-mögliche Länge), und eine solche Abbildung ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt – ein wichtiger, grundlegender Satz von Auslander und Reiten. Wie ist nun der Zusammenhang mit irreduziblen Abbildungen? Zerlegen wir $Y = \oplus Y_i$ als Summe von unzerlegbaren Moduln, und schreiben wir $g = (g_i)_i$ mit $g_i : Y_i \to Z$, so sind diese Abbildungen g_i irreduzibel, und man erhält auf diese Weise im wesentlichen alle irreduziblen Abbildungen mit Ziel Z und unzerlegbarer Quelle. Es gilt auch das Duale: Zu jedem unzerlegbaren Modul X gibt es eine, und bis auf Isomorphie auch nur eine, minimale links-fast-zerfallende Abbildung $f : X \to Y$, und zerlegen wir $Y = \oplus Y_i$ mit unzerlegbaren Moduln Y_i und $f = (f_i)_i$, so sind die Abbildungen $f_i : X \to Y_i$ irreduzibel, und dies sind im wesentlichen alle irreduziblen Abbildungen mit Quelle X und unzerlegbarem Ziel. Wir sehen also, daß der Auslander-Reiten-Köcher lokal-endlich ist (jeder Punkt ist Ziel oder Quelle von nur endlich vielen Pfeilen), insbesondere sind die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma(A)$ endlich oder abzählbar. Endliche Zusammenhangskomponenten treten nur im darstellungsendlichen Fall auf, wie die folgende Verschärfung des Satzes von Rojter zeigt:

Satz (Auslander [1]) *Sei* A *zusammenhängend (also nicht direktes Produkt zweier echter Unteralgebren). Sind die Moduln einer Zusammenhangskomponente von* $\Gamma(A)$ *von beschränkter Länge, so ist* A *darstellungsendlich und* $\Gamma(A)$ *ist zusammenhängend.*

Wir wollen noch etwas genauer nach den minimalen fastzerfallenden Abbildungen fragen. Ist Z unzerlegbar und projektiv (also ein unzerlegbarer direkter Summand der regulären Darstellung ${}_AA$), so hat Z genau einen maximalen Untermodul Y, und die Inklusionsabbildung $Y \to Z$ ist gerade die minimale rechts-fast-zerfallende Abbildung mit Ziel Z. Ist Z unzerlegbar, aber nicht projektiv, so ist die minimale rechts-fast-zerfallende Abbildung $g : Y \to Z$ surjektiv, der Kern X von g ist wieder unzerlegbar, und die Inklusionsabbildung $f : X \to Y$ ist minimal links-fast-zerfallend. Wir erhalten also eine (nicht zerfallende) exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0,$$

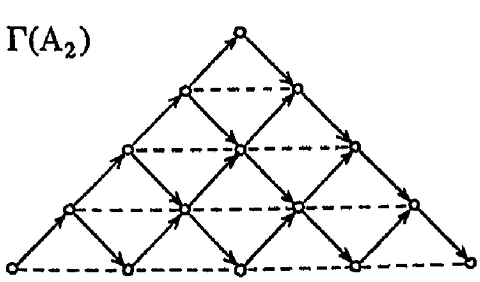
mit unzerlegbaren Moduln X, Z, einer minimalen links-fast-zerfallenden Abbildung f, und einer minimalen rechts-fast-zerfallenden Abbildung g, eine sogenannte Auslander-Reiten-Sequenz. Im Auslander-Reiten-Köcher führt dies zu folgender Pfeilkonfiguration (einer „Masche"):

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & {[Y_1]} \arrow[dr] & \\
{[X]} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & {[Y_2]} \arrow[r] & {[Z]} \\
 & \vdots & \\
 & {[Y_r]} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

wobei $Y_1, \ldots, Y_r$ eine maximale Menge paarweise nicht-isomorpher unzerlegbarer direkter Summanden von Y ist. Wie wir oben gesehen haben, ist [X] eindeutig durch[Z] bestimmt (und umgekehrt), wir schreiben $[X] = \tau[Z]$, und nennen τ die Auslander-Reiten-Translation. Sie ist auf der Menge der Isomorphieklassen nicht-projektiver unzerlegbarer Moduln definiert, und hat als Bild die Menge der Isomorphieklassen der nicht-injektiven unzerlegbaren Moduln. Wie wir ebenfalls schon gesehen haben, gilt folgendes: die Anfangspunkte der Pfeile mit Endpunkt [Z] sind gerade die Endpunkte der Pfeile mit Anfangspunkt $\tau[Z]$; der Auslander-Reiten-Köcher ist ein sogenannter Translationsköcher.

Es sollen nun einige Beispiele von Auslander-Reiten-Köchern betrachtet werden. Sei A_2 die Algebra der oberen 5×5-Dreiecksmatrizen über dem Körper k. Als Auslander-Reiten-Köcher erhalten wir

$\Gamma(A_2)$



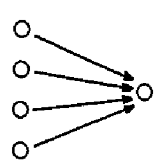
Die Auslander-Reiten-Translation τ ist gestrichelt angegeben (jeweils von rechts nach links). Die Moduln am linken Rand sind die unzerlegbar projektiven Moduln, die am rechten Rand die unzerlegbar injektiven (ein einziger Modul ist sowohl projektiv als auch injektiv). Die Moduln am unteren Rand sind die einfachen Moduln, und offensichtlich kann man hier für jeden Punkt die Kompositionsfaktoren des zugehörigen Moduls ablesen, indem man die entsprechenden Auslander-Reiten-Sequenzen verwendet.

Gabriel und Riedtmann haben vorgeschlagen, Translationsköcher als 2-dimensionale Simplizialkomplexe aufzufassen: Als 0-Simplizes nimmt man die Punkte des Köchers, als 1-Simplizes nimmt man neben den Pfeilen zusätzlich noch die Elemente des Graphen der Translation τ, und als 2-Simplizes (= Dreiecke) nimmt man die Tripel $(\tau z, y, z)$, wobei z ein Punkt ist, für den τ definiert ist, und $y \to z$ ein Pfeil. Wie man sieht, ist die geometrische Realisierung des Simplizialkomplexes $\Gamma(A_2)$ gerade ein großes Dreieck.

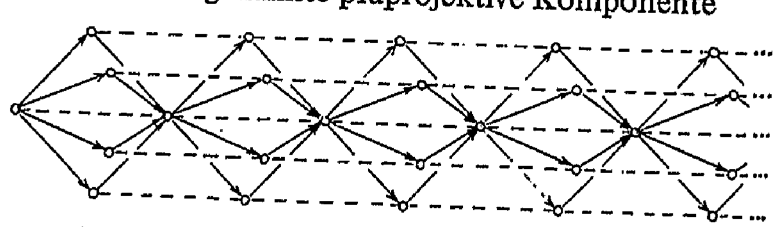
Als zweites Beispiel betrachten wir eine Unteralgebra von A_2, nämlich

$$A_3 = \begin{bmatrix} k & k & k & k & k \\ & k & & & \\ & & k & & \\ & & & k & \\ & & & & k \end{bmatrix}$$

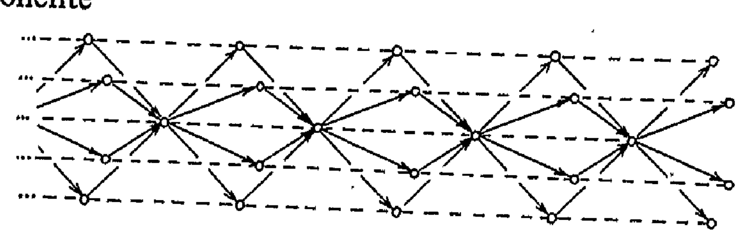
(also die Algebra aller 5 x 5-Matrizen, die höchstens an den angegebenen Stellen Koeffizienten $\neq 0$ haben). Die A_3-Moduln entsprechen gerade den Darstellungen des Köchers



sie sind also gegeben durch Vektorräume U_1, U_2, U_3, U_4, V und lineare Abbildungen $\alpha_i : U_i \to V$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. Wir können wieder voraussetzen, daß die Abbildungen α_i alles Inklusionsabbildungen sind, das heißt, wir untersuchen Vektorräume mit vier Unterräumen. Dieses Klassifikationsproblem wurde von Nazarova [16] und von Gelfand-Ponomarev [11] gelöst. Die Algebra A_3 ist nicht mehr darstellungsendlich, alle Komponenten von $\Gamma(A_3)$ müssen also abzählbar sein. Es gibt zwei spezielle Komponenten: die sogenannte präprojektive Komponente

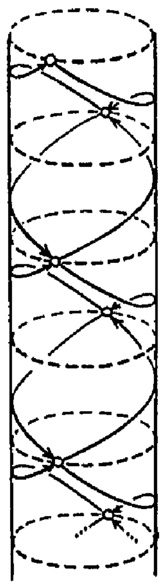


enthält ganz links die fünf unzerlegbaren projektiven Moduln, die präinjektive Komponente

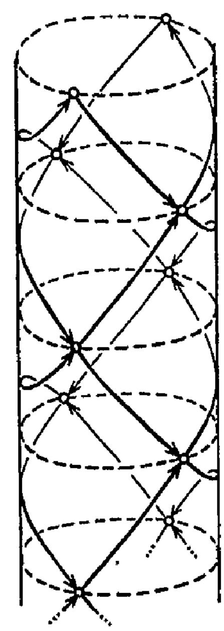


enthält ganz rechts die unzerlegbaren injektiven Moduln. Die übrigen Komponenten sind (für algebraisch abgeschlossenes k) durch die Elemente λ der projektiven Geraden $\mathbf{P}_1(k)$ indiziert, es sind alles Röhren, die im allgemeinen einen einzigen Modul auf dem Rand liegen haben, nur für drei spezielle Werte von λ liegen jeweils zwei Moduln auf dem Rand:

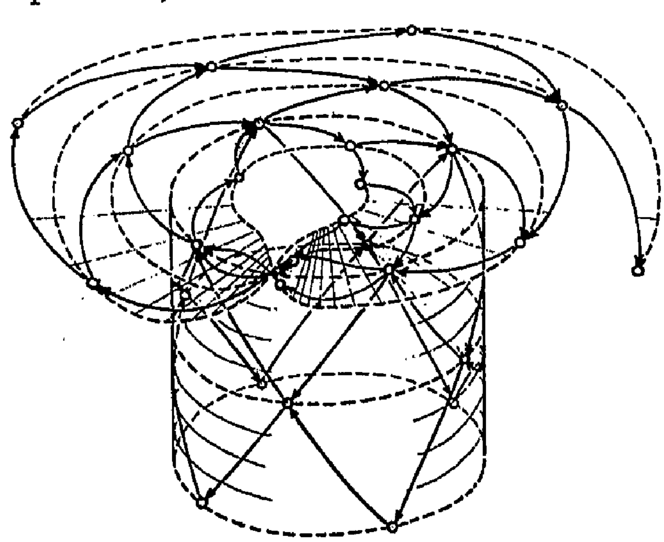
für $\lambda \in k\setminus\{0, 1\}$:



für $\lambda = 0, 1, \infty$:



Als letztes Beispiel zeige ich Ihnen noch den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A_1)$ unseres Ausgangsproblems $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \circlearrowleft \beta$, $\beta^4 = \beta^2\alpha = 0$. (Dieser Auslander-Reiten-Köcher wurde von G. D'Este berechnet, noch bevor die Überlagerungstechniken zur Verfügung standen; für die Überlassung dieses Beispiels bin ich ihr zu Dank verpflichtet.)



Hier also sind die 28 unzerlegbaren A_1-Moduln. Man sieht einen Zylinder, dessen Oberkante mit der Mittellinie eines Möbiusbandes (mit Auswüchsen) verheftet ist. Woher kommen die Auswüchse? Ist M ein unzerlegbarer Modul, so erhält man im allgemeinen zwei neue Moduln τM, $\tau^{-1}M$, und so weiter:

$$\tau^i M, \ldots, \tau M, M, \tau^{-1}M, \ldots, \tau^{-j}M.$$

Das Verfahren bricht links ab, wenn $\tau^i M$ projektiv ist, und rechts, wenn $\tau^{-j}M$

injektiv ist. Im darstellungsendlichen Fall gibt es nun nur zwei Möglichkeiten für M: entweder, das Verfahren bricht sowohl rechts, als auch links nach endlich vielen Schritten ab, dann heißt M t r a n s j e k t i v , oder aber $\tau^i M$ ist isomorph zu M für ein i, dann heißt M p e r i o d i s c h. Offensichtlich verschwinden die Auswüchse, wenn wir nur den periodischen Teil von $\Gamma(A_1)$ betrachten, und wir werden dies gleich noch genauer untersuchen.

Zuvor sollte aber noch angemerkt werden, daß sich die transjektiven Moduln einer Algebra (jedenfalls im Prinzip) effektiv berechnen lassen: wir gehen davon aus, daß die Algebra A und damit auch die unzerlegbaren projektiven Moduln (als direkte Summanden von $_AA$) und entsprechend die unzerlegbaren injektiven Moduln (als duale Moduln von direkten Summanden des Rechtsmoduls A_A) bekannt sind. Ist nun M unzerlegbar und nicht projektiv, so berechnet man τM wie folgt: nimm eine minimale projektive Auflösung

$$P_1 \xrightarrow{p} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

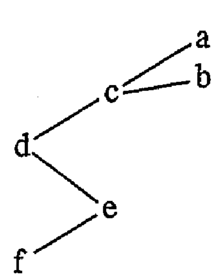
von M, dann ist

$$\tau M = \mathrm{Hom}(\mathrm{Cok}(\mathrm{Hom}_A(p, {_AA})), k),$$

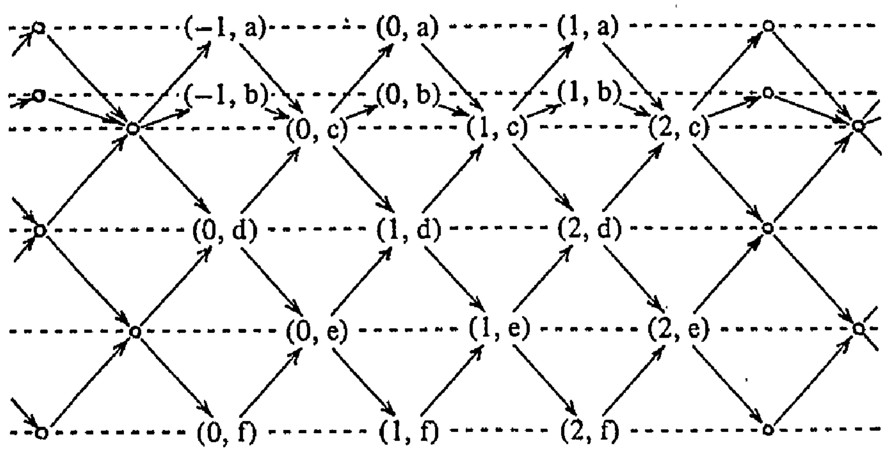
wie Auslander und Reiten [2] gezeigt haben. Eine entsprechende Formel erhält man auch für τ^{-1}. Die Auslander-Reiten-Translation τ und ihr Inverses τ^{-1} sind sicher das wichtigste Hilfsmittel zur Konstruktion neuer unzerlegbarer Moduln, wenn schon andere unzerlegbare Moduln bekannt sind.

2 Periodische Moduln

Wir haben gesehen, daß die transjektiven Moduln einer Algebra A (jedenfalls im Prinzip) konstruierbar sind, da die entsprechenden τ-Orbiten projektive und injektive Moduln enthalten. Für die periodischen Moduln gibt es kein so einfaches Konstruktionsverfahren. Andererseits stellt sich heraus, daß der volle Unterköcher $\Gamma_p(A)$ des Auslander-Reiten-Köchers, der aus den periodischen Moduln besteht, eine besonders einfache Struktur besitzt. Dazu wollen wir geeignete Modelle von Translationsköchern bereitstellen. Für jeden Baum Δ konstruieren wir einen Translationsköcher $\mathbf{Z}\Delta$ wie folgt: Als Punkte von $\mathbf{Z}\Delta$ nehmen wir die Paare (z, a), mit $z \in \mathbf{Z}$ und a Punkt von Δ. Um die Pfeile von $\mathbf{Z}\Delta$ zu definieren, wählen wir zuerst eine feste Orientierung auf Δ, und nehmen dann für jeden Pfeil $a \to b$ in Δ Pfeile der Form $(z, a) \to (z, b)$ und $(z, b) \to (z + 1, a)$, für alle $z \in \mathbf{Z}$. Schließlich setzen wir $\tau(z, a) = (z - 1, a)$, für alle $z \in \mathbf{Z}$ und alle a. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathbf{Z}\Delta$ nicht von der auf Δ gewählten Orientierung abhängt. Wenn wir zum Beispiel mit dem Baum

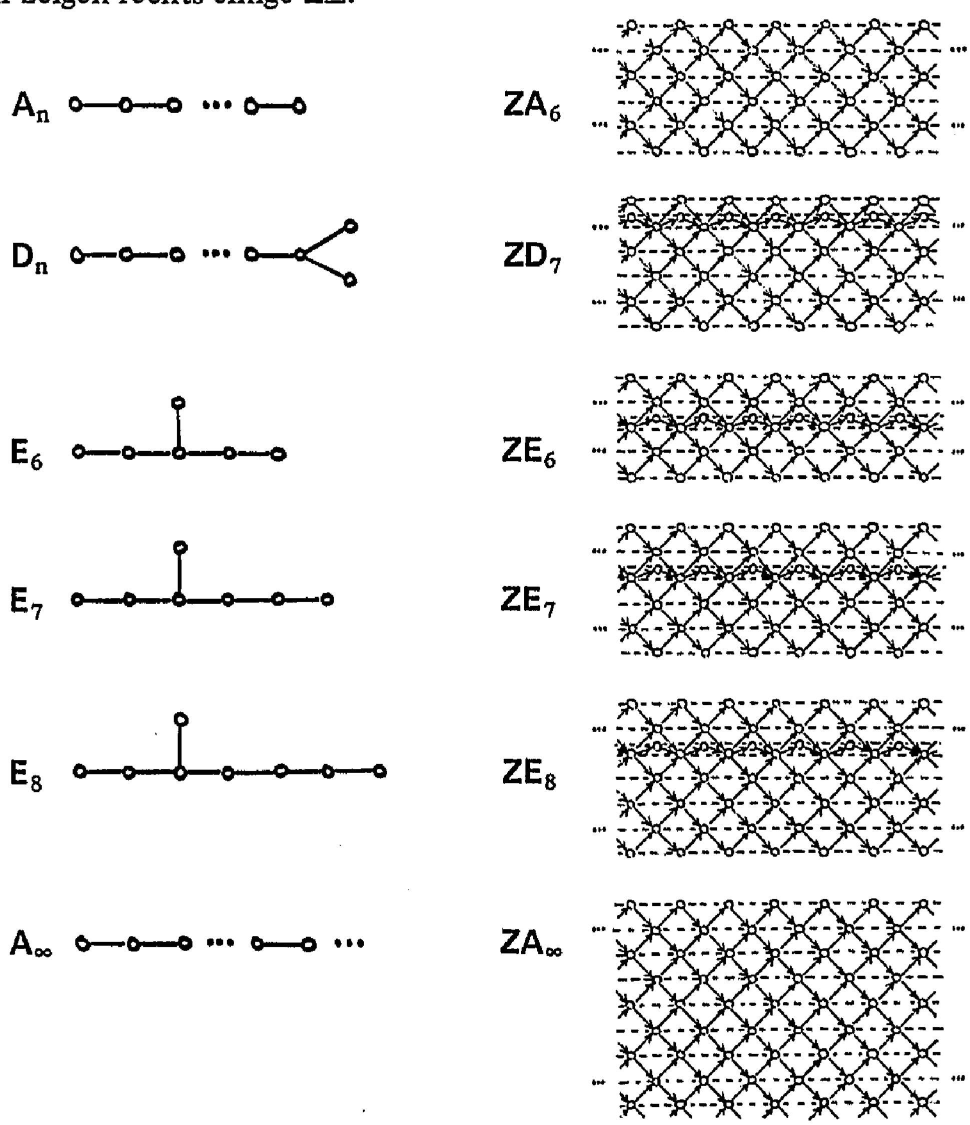


beginnen, so erhalten wir als $\mathbb{Z}\Delta$ den folgenden Translationsköcher:



Satz *Sei* A *eine endlich-dimensionale Algebra. Jede Zusammenhangskomponente von* $\Gamma_p(A)$ *ist von der Form* $\mathbb{Z}\Delta/G$, *wobei* G *eine nicht-triviale Automorphismengruppe von* $\mathbb{Z}\Delta$ *ist, und* Δ *einer der Bäume* A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, *oder* A_∞.

Dabei sind A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 die wohlbekannten Dynkin-Diagramme, und wir zeigen rechts einige $\mathbb{Z}\Delta$:

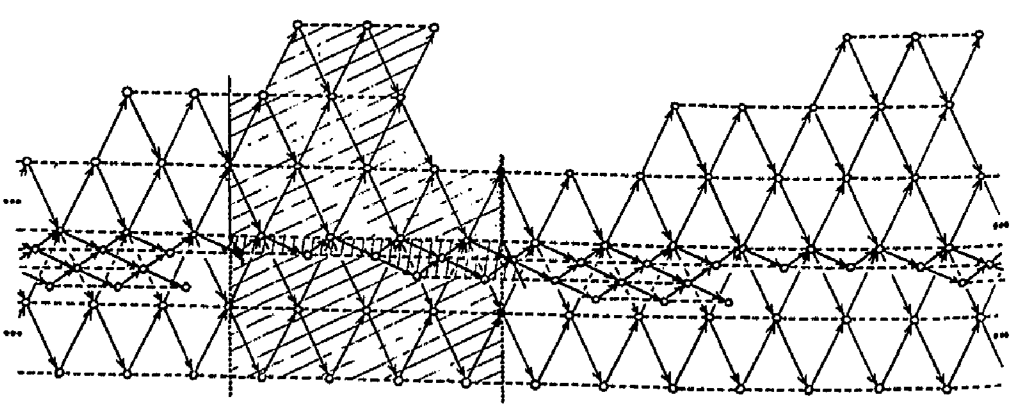


Ist A darstellungsendlich, so kann natürlich der Fall $\mathbf{A}_\infty$ nicht auftreten. In unserem Beispiel A_1 ist $\Gamma_p(A_1)$ zusammenhängend und von der Form $\mathbf{Z}\mathbf{D}_5/G$. Beim Vier-Unterraum-Problem A_2 entsteht $\Gamma_p(A_2)$ aus $\Gamma(A_2)$ durch Weglassen der präprojektiven und der präinjektiven Komponente; die Komponenten von $\Gamma_p(A_2)$ sind von der Form $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty/\langle\tau\rangle$ oder $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty/\langle\tau^2\rangle$.

Die Konstruktion von $\mathbf{Z}\Delta$, und der Satz im Fall einer darstellungsendlichen Algebra gehen auf Riedtmann [18] zurück; der allgemeine Fall wurde zuerst von Todorov [24] betrachtet, das vollständige Ergebnis ist einer gemeinsamen Arbeit mit Happel und Preiser [13] entnommen. Der Beweis des Satzes kann rein kombinatorisch geführt werden. Betrachtet werden sogenannte additive oder subadditive Funktionen auf Bäumen, und man erhält auf diese Weise eine Charakterisierung sowohl der Dynkin-Diagramme als auch der erweiterten Dynkin-Diagramme.

3 Universelle Überlagerung

Wir haben implizit schon Überlagerungen verwendet: es ist klar, daß $\mathbf{Z}\Delta$ gerade die universelle Überlagerung von $\mathbf{Z}\Delta/G$ ist. Ich erinnere daran, daß wir jeden Translationsköcher als Flächenkomplex auffassen können. Zu jedem zusammenhängenden Flächenkomplex C gibt es einen einfach-zusammenhängenden Flächenkomplex $\tilde{C}$, die universelle Überlagerung von C, auf dem die Fundamentalgruppe G von C operiert, sodaß $C = \tilde{C}/G$ gilt. Falls nun C zu einem Translationsköcher gehört, so ist klar, daß man auch $\tilde{C}$ wieder als Translationsköcher auffassen kann, so daß die Überlagerungsabbildung $\tilde{C} \to C$ eine Abbildung von Translationsköchern wird [18], [5]. Ist also A eine endlich-dimensionale Algebra, so können wir die universelle Überlagerung $\tilde{\Gamma}(A)$ des Auslander-Reiten-Köchers $\Gamma(A)$ konstruieren. Im Fall der Algebra A_1 erhalten wir für $\tilde{\Gamma}(A_1)$



Links ist ein Fundamentalbereich angedeutet. Es gilt nun:

Satz (Bongartz-Gabriel) *Ist* A *eine darstellungsendliche Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ist* $\tilde{\Gamma}(A)$ *der Auslander-Reiten-Köcher einer lokal-beschränkten Algebra* $\tilde{A}$.

Dabei verstehen wir unter einer lokal-beschränkten Algebra B eine Algebra mit einer Menge $\{e_i \mid i \in I\}$ von Idempotenten, so daß $B = \bigoplus_{i,j \in I} e_i B e_j$ gilt, und daß alle Ideale Be_iB $(i \in I)$ endlich-dimensional sind. Offensichtlich besitzt B nur dann ein Einselement, wenn B selbst endlich-dimensional ist. Für einen B-Modul M setzen wir voraus, daß $M = \bigoplus_{i \in I} e_i M$ gilt (und natürlich, daß M endlich-dimensional ist). Es ist nicht schwer zu sehen, daß auch für lokal-beschränkte Algebren die Auslander-Reiten-Verschiebung τ definiert ist, so daß man auch hier den Auslander-Reiten-Köcher betrachten kann.

Wir setzen jetzt voraus, daß A eine darstellungsendliche Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist. Wie erhält man nun $\tilde{A}$ aus $\tilde{\Gamma}(A)$? Für jeden Translationsköcher Γ kann man nach Riedtmann die sogenannte Maschenkategorie $k(\Gamma)$ definieren: Objekte der Kategorie seien die Punkte von Γ. Wir bilden zuerst die Wegekategorie zu Γ, hier ist die Menge der Morphismen vom Punkt a zum Punkt b durch den k-Vektorraum mit Basis die Menge aller Wege von a nach b gegeben. Für jede Masche

$$\begin{tikzcd}
 & y_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
\tau z \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_r"'] & \vdots & z \\
 & y_r \arrow[ur, "\alpha_r"'] &
\end{tikzcd}$$

betrachten wir die Maschenrelation $\sum_{i=1}^{r} \beta_i \alpha_i = 0$. Die Maschenkategorie $k(\Gamma)$ entsteht nun aus der Wegekategorie, in dem wir alle Maschenrelationen herausfaktorisieren. Für eine darstellungsendliche Algebra A hat die Maschenkategorie $k(\Gamma(A))$ offensichtlich sehr viel Ähnlichkeit zur Kategorie ind(A) der unzerlegbaren A-Moduln; allerdings sind Beispiele (in Charakteristik 2) bekannt, wo die Kategorien $k(\Gamma(A))$ und ind(A) nicht äquivalent sind [19]. Es ist leicht zu sehen, daß $k(\Gamma(A))$ und ind(A) zumindest dann äquivalent sind, wenn es keine orientierten Kreise in $\Gamma(A)$ gibt. Um $\tilde{A}$ zu konstruieren, nimmt man nun Idempotente e_a für alle projektiven Punkte a von $\tilde{\Gamma}(A)$ (dabei heißt ein Punkt eines Translationsköchers projektiv, falls für ihn τ nicht definiert ist), und setzt für $e_a \tilde{A} e_b$ den Raum aller Homomorphismen von a nach b in $k(\Gamma(A))$. Dies definiert, mit der offensichtlichen Multiplikation, eine Algebra $\tilde{A} = \bigoplus e_a \tilde{A} e_b$, und man muß nun zeigen, daß $\tilde{A}$ lokal-endlich-dimensional ist, und daß wirklich $\tilde{\Gamma}(A) = \Gamma(\tilde{A})$ gilt.

Ein direktes Verfahren, um $\tilde{A}$ aus A zu gewinnen, ist kürzlich von Bretscher und Gabriel [7] vorgestellt worden. Falls A die Wegealgebra eines Köchers Σ modulo eines von Monomen erzeugten Ideals ist, so erhält man $\tilde{A}$ ganz einfach dadurch, daß man die universelle Überlagerung $\tilde{\Sigma}$ von Σ bildet, und mit den entsprechenden Relationen versieht [9]. Dies können wir im Fall unserer Algebra A_1 anwenden: sie ist die Wegealgebra des Köchers $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \circlearrowright \beta$ modulo des von den Monomen β^4 und $\beta^2\alpha$ erzeugten Ideals, also ist $\tilde{A}$ die Wegealgebra der universellen Überlagerung

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \\
 & \circ & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \circ \arrow[l, "\beta"] & \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

mit den Relationen $\beta^4 = \beta^2\alpha = 0$.

Was passiert mit einem unzerlegbaren A-Modul M beim Übergang zur universellen Überlagerung? Wohlgemerkt, wir haben ja nur den Translationsköcher $\Gamma(A)$ überlagert, dem Modul M entspricht in $\Gamma(A)$ ein einziger Punkt, nämlich [M], und unter der Überlagerungsabbildung $\pi:\tilde{\Gamma}(A) \to \Gamma(A)$ ist [M] das Bild einer Reihe von Punkten, nämlich gerade der Punkte in einer Bahn der Überlagerungsgruppe, also der Fundamentalgruppe von $\Gamma(A)$. Jedes solche Urbild kann, nach dem Satz von Bongartz und Gabriel, wieder als Isomorphieklasse eines unzerlegbaren Moduls, nämlich eines $\tilde{A}$-Moduls, aufgefaßt werden, und wir wählen nun einen derartigen unzerlegbaren $\tilde{A}$-Modul $\tilde{M}$, also mit $\pi([\tilde{M}]) = [M]$. Wir wollen nun die beiden Moduln M und $\tilde{M}$ miteinander vergleichen. Es erscheint vorteilhaft, feste Repräsentanten der Isomorphieklassen unzerlegbarer Moduln zu wählen, und als Punkte der Auslander-Reiten-Köcher diese Moduln selbst zu nehmen; wenn wir im weiteren von unzerlegbaren Moduln sprechen, meinen wir diese Repräsentanten. Ist nun neben M ein weiterer unzerlegbarer A-Modul N gegeben, so gibt es funktorielle Isomorphismen

$$\bigoplus_X \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(X, \tilde{M}) \to \mathrm{Hom}_A(N, M), \quad \text{und}$$

$$\bigoplus_X \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M}\ X) \to \mathrm{Hom}_A(M, N),$$

wobei links die Summe jeweils über alle Urbilder X von N unter π zu bilden ist. Wir wollen den ersten Isomorphismus im Fall, daß N projektiv ist, näher betrachten. Wir können, entsprechend den klassischen Morita-Sätzen, voraussetzen, daß sowohl ${}_AA$, als auch ${}_{\tilde{A}}\tilde{A}$ direkte Summen von paarweise nicht-isomorphen unzerlegbaren Moduln sind. Sei etwa ${}_AA = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, mit P_i unzerlegbar (und projektiv). Dann sind die Urbilder der verschiedenen P_i unter π gerade die projektiven Punkte von $\tilde{\Gamma}(A) = \Gamma(\tilde{A})$, also die unzerlegbaren projektiven $\tilde{A}$-Moduln. Wir können M mit $\mathrm{Hom}_A({}_AA, M) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_A(P_i, M)$ identifizieren, also erhalten wir Vektorraum-Isomorphismen

$$M \approx \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_A(P_i, M) \approx \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\pi(X)=P_i} \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(X, \tilde{M}) \approx \tilde{M}.$$

Die Räume $\mathrm{Hom}_A(P_i, M)$ sind die sogenannten isotypischen Komponenten des Moduls M, ihre Dimension ist nichts anderes als $(\underline{\dim}\, M)_i$, wenn wir mit S_i den einfachen Restklassenmodul von P_i bezeichnen. Wir sehen also, daß M als Vektorraum mit $\tilde{M}$ identifiziert werden kann, und daß dabei jede isotypische Komponente von M der direkten Summe gewisser isotypischer Komponenten von $\tilde{M}$ entspricht.

Betrachten wir als Beispiel die drei in der Einleitung angegebenen unzerlegbaren A_1-Moduln mit Dimensionsvektor (2, 6). Urbilder dieser drei Moduln unter der Überlagerungsabbildung π sind, in der angegebenen Reihenfolge, die $\tilde{A}_1$-Moduln

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & k \arrow[d, "{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}"] & k \arrow[d, "{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l] & k^2 \arrow[l] & k^2 \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}"'] & k \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] & k \arrow[l, "{[1]}"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & k \arrow[d, "{[1]}"] & k \arrow[d, "{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l] & k \arrow[l] & k^2 \arrow[l, "{[1\ 0]}"'] & k^2 \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}"'] & k \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & k \arrow[d, "{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}"] & k \arrow[d, "{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}"] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l] & k \arrow[l] & k^2 \arrow[l, "{[1\ 0]}"'] & k^2 \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}"'] & k \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Wir sehen, daß die drei $\tilde{A}_1$-Moduln schon durch ihre Dimensionsvektoren unterschieden sind. Wie erhält man aus einem unzerlegbaren $\tilde{A}_1$-Modul $\tilde{M}$ den A_1-Modul $\pi(\tilde{M})$? Der Modul $\tilde{M}$ ist gegeben durch Vektorräume und lineare Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
 & U_{-1} \arrow[d, "\alpha_{-1}"] & U_0 \arrow[d, "\alpha_0"] & U_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & U_2 \arrow[d, "\alpha_2"] & \\
\cdots & V_{-1} \arrow[l] & V_0 \arrow[l, "\beta_{-1}"'] & V_1 \arrow[l, "\beta_0"'] & V_2 \arrow[l, "\beta_1"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

wobei natürlich nur endlich viele dieser Vektorräume $\neq 0$ sind. Bilde $U = \oplus U_i$, $V = \oplus V_i$, $\alpha = \oplus \alpha_i : U \to V$, und $\beta : V \to V$ sei die durch die verschiedenen β_i definierte Abbildung. Wir erhalten auf diese Weise $U \xrightarrow{\alpha} V \circlearrowright \beta$, und dies ist natürlich ein A_1-Modul.

Wir wollen abschließend eine ziemlich offensichtliche, aber äußerst wichtige Eigenschaft der universellen Überlagerung $\tilde{\Gamma}(A)$ herausstellen: $\tilde{\Gamma}(A)$ besitzt keine orientierten Kreise, ist also gerichtet. Die Untersuchung einer darstellungsendlichen Algebra A hat uns zu einer Algebra $\tilde{A}$ geführt, deren Auslander-Reiten-Köcher gerichtet ist. Nun ist zwar $\tilde{A}$ selbst nicht endlich-dimensional, aber beim Studium einzelner $\tilde{A}$-Moduln $\tilde{M}$ können wir statt $\tilde{A}$ die sogenannte Trägeralgebra $\tilde{A}(\tilde{M}) = \tilde{A}/\langle e \mid e^2 = e, e\tilde{M} = 0\rangle$ von $\tilde{M}$ betrachten, die endlich-dimensional und darstellungsendlich ist, und deren Auslander-Reiten-Köcher wie der von $\tilde{A}$ gerichtet ist. Die Trägeralgebra der beiden ersten soeben betrachteten $\tilde{A}_1$-Moduln ist die Wegealgebra des Köchers

$$
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[d] & \circ \arrow[d] & & \\
\circ & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

(ohne Relationen), die des dritten ist gegeben durch den Köcher

$$
\begin{tikzcd}
& \circ \arrow[d] & \circ \arrow[d, "\alpha"] & \\
\circ & \circ \arrow[l, "\beta_1"] & \circ \arrow[l, "\beta_2"] & \circ \arrow[l]
\end{tikzcd}
\quad \text{mit } \beta_1\beta_2\alpha = 0.
$$

4 Algebren mit gerichtetem Auslander-Reiten-Köcher

Wir betrachten eine endlich-dimensionale darstellungsendliche Algebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, und setzen nun zusätzlich voraus, daß der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ gerichtet ist, also keine orientierten Kreise besitzt. Als erstes sehen wir, daß in diesem Fall jeder unzerlegbare A-Modul durch seinen Dimensionsvektor $\underline{\dim}$ M, also die Vielfachheiten der einzelnen Kompositionsfaktoren eindeutig charakterisiert ist:

Satz *Sind* M, M′ *unzerlegbare* A-*Moduln mit* $\underline{\dim}\, M = \underline{\dim}\, M'$, *so sind* M *und* M′ *isomorph.*

Dies wurde gemeinsam mit Happel [14] mit Hilfe der sogenannten Kipptheorie bewiesen; ein analoges Ergebnis steht bei Bautista-Larrion [3]. Mittlerweile gibt es einen direkten Beweis von Happel [12].

Wir wollen nun die Menge der Dimensionsvektoren der unzerlegbaren A-Moduln kombinatorisch beschreiben, und daraus Folgerungen über die Struktur der unzerlegbaren Moduln ziehen. Wir gehen davon aus, daß unsere Algebra A genau n einfache Moduln $S_1, \ldots, S_n$ besitzt, die Dimensionsvektoren sind also n-Tupel ganzer Zahlen. Die Menge $\mathbf{Z}^n$ aller ganzzahligen n-Tupel können wir als die Grothendieck-Gruppe $G_0(A)$ auffassen, die folgendermaßen definiert ist: wir bilden die freie abelsche Gruppe F mit Basis die Menge aller A-Moduln, und betrachten die von den Elementen $M' - M + M''$, mit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Folge von A-Moduln, erzeugte Untergruppe R. Es ist $G_0(A) = F/R$, und nach dem Satz von Jordan-Hölder bilden die Restklassen $S_i + R$ der einfachen Moduln eine Basis von $G_0(A)$. Unter Verwendung dieser Basis wollen wir $G_0(A)$ mit $\mathbf{Z}^n$ identifizieren; die Restklasse des Moduls M in $G_0(A)$ ist dann gerade $\underline{\dim}$ M. Die nicht-trivialen n-Tupel nicht-negativer ganzer Zahlen nennen wir positiv, es sind dies die Dimensionsvektoren der Moduln $\neq 0$. Da wir voraussetzen, daß A einen gerichteten Auslander-Reiten-Köcher besitzt, hat A endliche globale Dimension gl. dim A, und wir können auf $G_0(A)$ eine Bilinearform vermöge

$$\langle \underline{\dim}\, M, \underline{\dim}\, N \rangle = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(M, N)$$

definieren (dabei steht Ext^0 für Hom, und die langen exakten Hom-Sequenzen zeigen, daß dieses Produkt wohldefiniert und bilinear ist). Wir bezeichnen mit q_A die zugehörige quadratischen Form, also $q_A(x) = \langle x, x\rangle$. Für die im letzten Abschnitt betrachteten Trägeralgebren notieren wir deren quadratische Form: zur Wegealgebra des Köchers (ohne Relationen)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & & \\ 3 & 4 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & 6 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

gehört die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 - X_1X_3 - X_2X_4 - X_3X_4 - X_4X_5 - X_5X_6,$$

zum Köcher

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d, "\alpha"] & \\ 3 & 4 \arrow[l, "\beta_1"'] & 5 \arrow[l, "\beta_2"'] & 6 \arrow[l] \end{tikzcd} \quad \text{mit } \beta_1\beta_2\alpha = 0$$

gehört die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{6} X_i^2 - X_1X_4 - X_2X_5 - X_3X_4 - X_4X_5 - X_5X_6 + X_2X_3.$$

Da wir voraussetzen, daß $\Gamma(A)$ gerichtet ist, ist offensichtlich für jeden unzerlegbaren Modul M einerseits $\mathrm{End}(M) = k$, andererseits $\mathrm{Ext}^i(M, M) = 0$ für $i \geqslant 1$, also ist $\underline{\dim}\, M$ eine positive Wurzel von q_A (dabei nennen wir jede Lösung von $q_A(x) = 1$ eine Wurzel von q_A). Im allgemeinen ist nicht jede positive Wurzel auch Dimensionsvektor eines unzerlegbaren Moduls. Setzen wir jedoch einschränkend voraus, daß die globale Dimension von A klein ist, so haben wir:

Satz *Falls* gl. dim. $A \leqslant 2$, *so ist* q_A *schwach positiv, und die Dimensionsvektoren der unzerlegbaren Moduln sind genau die positiven Wurzeln von* q_A.

Dabei heißt eine quadratische Form q schwach positiv, falls für alle positiven x gilt $q(x) > 0$. Der Beweis dieses Satzes aus [14] soll hier kurz angedeutet werden. Sei ein positives $x \in \mathbf{Z}^n$ gegeben. Wähle einen Modul X mit $\underline{\dim}\, X = x$ und kleinst-möglicher Dimension von End(X). Sei $X = \oplus X_i$, mit X_i unzerlegbar. Nach [20] gilt wegen der Minimalität von dim End(X), daß $\mathrm{Ext}^1(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$. Da wir auch wissen, daß $\mathrm{Ext}^1(X_i, X_i) = 0$ für alle i gilt, haben wir $\mathrm{Ext}^1(X, X) = 0$. Also ist

$$q_A(x) = \dim \mathrm{End}(X) + \dim \mathrm{Ext}^2(X, X) > 0,$$

und aus $q_A(x) = 1$ folgt, daß $\mathrm{End}(X) = k$ (und $\mathrm{Ext}^2(X, X) = 0$) gilt, also ist X unzerlegbar.

Die Voraussetzung des Satzes ist nicht so einschneidend, wie sie erscheinen mag. Es gilt nämlich:

Lemma *Falls* A *einen unzerlegbaren Modul* M *besitzt, der jeden einfachen Modul als Kompositionsfaktor enthält (einen sogenannten aufrichtigen Modul), so ist* gl. dim. $A \leqslant 2$.

B e w e i s. Angenommen, $\mathrm{Ext}^3(X, Y) \neq 0$ für gewisse unzerlegbare Moduln X, Y. Wähle exakte Sequenzen $0 \to X' \to P \to X \to 0$ und $0 \to Y \to I \to Y' \to 0$ mit P projektiv, I injektiv. Dann ist $\mathrm{Ext}^1(X', Y') = \mathrm{Ext}^3(X, Y) \neq 0$, also gibt es eine nichtzerfallende exakte Sequenz $0 \to Y' \to Z \to X' \to 0$. Es ist nun leicht, einen orientierten Kreis in $\Gamma(A)$ zu konstruieren, indem man Abbildungen

$$M \to I \to Y' \to Z \to X' \to P \to M$$

betrachtet, und zu geeigneten direkten Summanden der angegebenen Moduln übergeht, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\Gamma(A)$ gerichtet ist.

Wir sehen also, daß man beim Studium einzelner unzerlegbarer A-Moduln M immer voraussetzen kann, daß gl. dim. $A \leqslant 2$ gilt, indem man A durch die Trägeralgebra A(M) ersetzt.

Wir können nun den folgenden, ziemlich überraschenden Satz von Ovsienko [17] über ganze quadratische Formen anwenden (dabei heißt eine quadratische Form q auf $\mathbf{Z}^n$ ganz, falls sie ganzzahlige Werte annimmt, und zusätzlich die kanonischen Basisvektoren von $\mathbf{Z}^n$ Wurzeln sind; unsere quadratische Form q_A ist natürlich ganz, denn die kanonischen Basisvektoren von $\mathbf{Z}^n$ sind gerade die Dimensionsvektoren der einfachen Moduln):

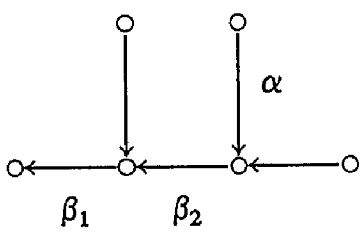
Satz (Ovsienko) *Ist* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *positive Wurzel einer schwach positiven ganzen quadratischen Form, so gilt* $x_i \leqslant 6$ *für alle* i.

Daß der Wert 6 wirklich angenommen wird, sieht man an der längsten Wurzel der quadratischen Form zum Dynkin-Diagramm $\mathbf{E}_8$.

Folgerung *Ist* M *ein unzerlegbarer* A*-Modul, so ist die Vielfachheit jedes einfachen* A*-Moduls als Kompositionsfaktor von* M *durch* 6 *nach oben beschränkt.*

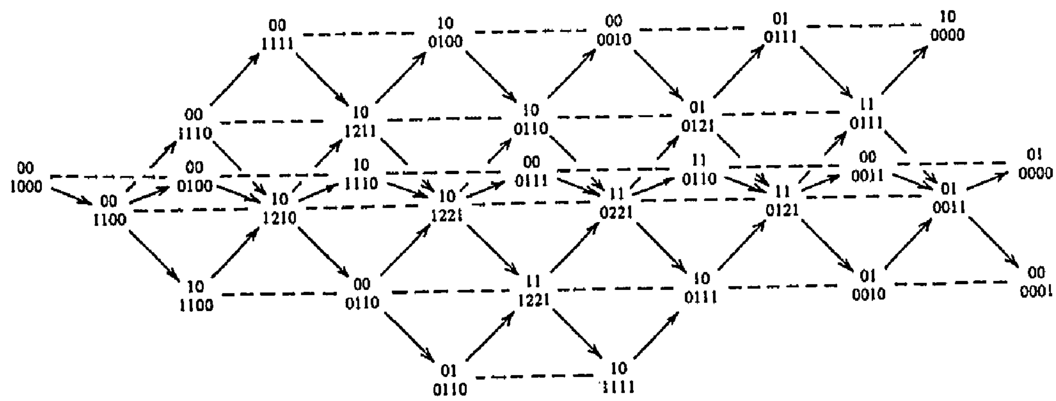
Ohne Verwendung des Satzes von Ovsienko wurde dies von Bongartz in [4] bewiesen. Es folgt ziemlich unmittelbar, daß es zu vorgegebenem n nur endlich viele Morita-Äquivalenzklassen endlich-dimensionaler darstellungsendlicher Algebren mit gerichtetem Auslander-Reiten-Köcher und n einfachen Moduln geben kann [5], denn einerseits ist eine solche Algebra durch ihren Auslander-Reiten-Köcher bis auf Morita-Äquivalenz eindeutig bestimmt, andererseits gibt es nur endlich viele Translationsköcher mit höchstens 7^n Punkten.

Abschließend bemerken wir, daß sich der Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ sehr einfach berechnen läßt, man kann ihn von links nach rechts mühelos „stricken". Dabei bildet man induktiv für jede Masche den entsprechenden Cokern, und fügt, falls ein gerade neu konstruierten Modul direkter Summand des Radikals eines unzerlegbaren projektiven Moduls P ist, diesen Modul P ein. Begonnen wird mit den einfachen projektiven Moduln, dies sind gerade die Quellen von $\Gamma(A)$. Da die unzerlegbaren Moduln schon durch ihren Dimensionsvektor eindeutig charakterisiert sind, genügt es, statt mit Moduln mit Dimensionsvektoren zu arbeiten; die Cokernbildung wird also ersetzt durch eine leichte Subtraktionsaufgabe. Zum Beispiel erhalten wir für



mit $\beta_1 \beta_2 \alpha = 0$

den folgenden Auslander-Reiten-Köcher:



und man sieht, daß dies ein voller Unterköcher von $\mathbf{Z}\mathbf{E}_6$ ist.

5 Ausblick

Ich fasse zusammen: ausgehend von einer endlich-dimensionalen darstellungsendlichen Algebra A über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k konstruiert man eine lokal-beschränkte Algebra $\tilde{A}$, auf der eine Gruppe G operiert, so daß man den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(A)$ als $\Gamma(\tilde{A})/G$ erhält. Da man den Auslander-Reiten-Köcher $\Gamma(\tilde{A})$ von $\tilde{A}$ völlig mühelos berechnen kann, erhält man auf diese Weise ein effektives Hilfsmittel zur Bestimmung auch von $\Gamma(A)$ selbst. Jedem unzerlegbaren A-Modul M entspricht auf diese Weise eine G-Bahn unzerlegbarer $\tilde{A}$-Moduln $\tilde{M}$, und man kann an $\tilde{M}$ viele Eigenschaften des Moduls M ablesen. Um $\tilde{M}$ zu studieren, wird man üblicherweise zur Trägeralgebra $\tilde{A}(\tilde{M})$ übergehen, und es zeigt sich, daß die möglichen Trägeralgebren $\tilde{A}(\tilde{M})$ vollständig klassifiziert werden können [4].

In diesem Bericht habe ich versucht, einen kleinen Einblick in die Methoden und Ergebnisse der neueren Darstellungstheorie zu geben. Ich habe mich dabei im wesentlichen auf darstellungsendliche Algebren über algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern beschränkt, doch auch hier mußte ich vieles ausklammern, was von Interesse gewesen wäre, wie weitergehende Strukturaussagen für die Auslander-Reiten-Köcher, das Zurückführen der Moduln über Algebren mit gerichtetem Auslander-Reiten-Köcher auf Moduln über erblichen Algebren, und die Frage nach multiplikativen Basen für Algebren und Moduln. Auch ist für spezielle Klassen von darstellungsendlichen Algebren, zum Beispiel für die selbstinjektiven, mittlerweile eine vollständige Klassifikation sowohl der Algebren, als auch ihrer Moduln bekannt. Nicht erwähnt habe ich die Probleme, die auftreten, wenn der Grundkörper nicht algebraisch abgeschlossen ist, oder wenn man allgemeiner Moduln über artinschen Ringen betrachtet: hier spielen Schiefkörpererweiterungen vom Index 2 und 3 eine wichtige Rolle. Entfernt man sich vom darstellungsendlichen Fall, so treten völlig andersartige Phänomene auf, die gegenwärtig intensiv studiert werden. Doch auch hier ist die Struktur des Auslander-Reiten-Köchers von größtem Interesse, auch hier reduzieren sich viele Fragestellungen letztendlich auf kombinatorische Probleme.

Literaturverzeichnis

[1] Auslander, M.: Applications of morphisms determined by objects. Proc. Conf. Rep. Theory, Philadelphis 1976. Marcel Dekker 1978, 245–327

[2] Auslander, M.; Reiten, I.: Representation theory of artin algebras. III. Comm. Algebra 3 (1975) 239–294; IV. Comm. Algebra 5 (1977) 443–518

[3] Bautista, R.; Larrion, F.: Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. Erscheint in J. London Math. Soc.

[4] Bongartz, K.: Treue einfach zusammenhängende Algebren I. Comment. Math. Helv. 57 (1982) 282–330

[5] Bongartz, K.; Gabriel, P.: Covering spaces in representation theory. Invent. math. 65 (1982) 331–378

[6] Brenner, S.: Decomposition properties of some small diagrams of modules. Symposia Math. Ist. Naz. Alta Mat. 13 (1974) 127–141

[7] Bretscher, O.; Gabriel, P.: The standard form of a representation finite algebra. Prepr.

[8] Gabriel, P.: Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras. Representation theory I. Springer 1980. = LNM 831, 1–71

[9] Gabriel, P.: The universal cover of a representation finite algebra. Representations of algebras, Springer 1982. = LNM 903, 68–105

[10] Gantmacher, F. R.: Matrizenrechnung II. Berlin 1966

[11] Gelfand, I. M.; Ponomarev, V. A.: Problems of linear algebra and classification of quadruples in a finite dimensional vector space. Coll. Math. Soc. Bolyai 5, Tihany (1970) 163–237

[12] Happel, D.: Composition factors for indecomposable modules. Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982) 29–32

[13] Happel, D.; Preiser, U.; Ringel, C. M.: Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to DTr-periodic modules. Representation theory II. Springer 1980. = LNM 832, 280–294

[14] Happel, D.; Ringel, C. M.: Tilted algebras. Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.

[15] Kronecker, L.: Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen. Sitzungsber. Akad. Berlin (1890), 1225–1237

[16] Nazarova, L. A.: Representations of quadruples. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 31 (1967) 1361–1377

[17] Ovsienko, S. A.: Integral weakly positive forms. Schur matrix problems and quadratic forms. Preprint Kiev 1978, 3–17

[18] Riedtmann, Chr.: Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück. Comment. Math. Helv. 55 (1980) 199–224

[19] Riedtmann, Chr.: Many algebras with the same Auslander-Reiten quiver. Preprint.

[20] Ringel, C. M.: The rational invariants of tame quivers. Invent. math. 58 (1980) 217–239

[21] Ringel, C. M.: Report on the Brauer-Thrall conjectures: Rojter's theorem and the theorem of Nazarova and Rojter. Representation theory I. Springer 1980. = LNM 831, 104–136

[22] Ringel, C. M.: Tame algebras. Representation theory I. Springer 1980. = LNM 831, 137–287

[23] R o j t e r , A. V.: The unboundedness of the dimension of the indecompasable representation of algebras that have an infinite number of indecomposable representations. Izv. Acad. Nauk SSR **32** (1968) 1275–1282
[24] T o d o r o v , G.: Almost split sequences for TrD-periodic modules. Representation Theory II. Springer 1980. = LNM 832, 600–631

Claus Michael Ringel
Fakultät für Mathematik
Universität
Postfach 8640
D-4800 Bielefeld

(*Eingegangen*: 16. 7. 1982)