Topology Vol. 8, pp. 81—91. Pergamon Press, 1969. Printed in Great Britain

ÜBER INVOLUTIONEN DER 3-SPHÄRE†

FRIEDHELM WALDHAUSEN

(*Eingegangen* 30. *Oktober* 1967)

WIR ZEIGEN: *Sei M die 3-Sphäre, und sei $h: M \to M$ eine orientierungserhaltende simpliziale Abbildung der Periode 2. Dann ist h konjugiert zu einer orthogonalen Abbildung.*

Für fixpunktfreie Abbildungen stammt dies Ergebnis von Livesay [2]. Im andern Fall lagen Teilergebnisse vor, d.h. es war nachgewiesen, daß gewisse Knoten nicht als Fixpunktmenge in Frage kommen, vgl. [3], sowie [1] und die dort angegebene Literatur.

Im Beweis des Satzes arbeiten wir mit Heegaard-Zerlegungen. Die Argumentation ist ähnlich zu der in [7].

§1. DEFINITIONEN

Wir sind in der semilinearen Kategorie. Räume sind i.a. kompakt. Reguläre Umgebungen und allgemeine-Lage-Deformationen sind klein zu wählen bezüglich der vorher in der Argumentation genannten Dinge.

Eine *Brezel* ist homöomorph zu einer regulären Umgebung eines zusammenhängenden Graphen in einer orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit. Jede Brezel kann aus dem 3-Element erhalten werden durch paarweises Identifizieren von 2-Elementen im Rande des 3-Elements; diese 2-Elemente gehen dabei in ein Flächensystem über, das wir als ein *System von Meridianflächen* bezeichnen.

Eine Mannigfaltigkeit X heißt eine *Hohlbrezel*, wenn es eine Brezel V gibt und ein System x von 2-Elementen in V, $x \cap \partial V = \partial x$ ("∂" bedeutet "Rand"), so daß X homöomorph ist zu einer regulären Umgebung von $x \cup \partial V$ in V. Die Komponente ∂V von ∂X heißt *ausgezeichnete Randfläche*, das System x heißt ein *System von Meridianflächen*. (In dieser Arbeit kommt nur eine Art von Hohlbrezeln vor, nämlich die "zusammenhängende Summe am Rande" von Torus $\times$ Intervall und einer Brezel.)

Ein geordnetes Paar von Untermannigfaltigkeiten, (Y, Z), einer (orientierbaren 3-) Mannigfaltigkeit N heißt eine *Heegaard-Zerlegung*, wenn gilt: $Y \cup Z = N$; $Y \cap Z = \partial Y$; Y ist eine Brezel; Z ist eine Brezel oder eine Hohlbrezel mit $Y \cap Z$ als ausgezeichneter Randfläche. (Für berandete Mannigfaltigkeiten ist diese Definition weniger allgemein als die in [7, (4.2)] gegebene.)

† This research was supported by NSF GP 5610 at the University of Illinois.

Sei (V, W) eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht n der 3-Sphäre. Ein System $v = v_1 \cup \cdots \cup v_n$ von 2-Elementen in V, $v \cap \partial V = \partial v$, heißt ein *gutes System von Meridianflächen* in V, wenn es ein System $w = w_1 \cup \cdots w_n \cup$ von 2-Elementen in W, $w \cap \partial W = \partial w$, gibt, so daß bei geeigneter Numerierung der Komponenten von v und w gilt

$$\partial v_i \cap \partial w_i \text{ ist genau ein Schnitt- (und Durchsetzungs-)punkt}$$
$$\partial v_i \cap \partial w_j = \varnothing, \qquad \text{wenn } i > j;$$

wir nennen w *ein v zugeordnetes System.* (Die Definition weicht etwas ab von der in [7] gegebenen, und zwar in "n = Geschlecht von ∂V".) Die Definition ist symmetrisch in v und w. Diese Symmetrie außer acht lassend, denken wir uns aber die Komponenten von v und w stets so numeriert wie angegeben.

§2. PERIODISCHE ABBILDUNGEN

Sei M die 3-Sphäre, und sei $h: M \to M$ eine orientierungserhaltende simpliziale Abbildung (simplizial bezüglich einer einzigen Triangulation), so daß $h^\gamma = id.$ für ein $\gamma > 1$. Es ist bekannt [6], daß für jedes α die Fixpunktmenge von h^α ("$Fix(h^\alpha)$") eine Sphäre ungerader Dimension ist. Wir betrachten nur solche h, für die entweder

$$Fix(h^\alpha) = \varnothing \text{ für alle } \alpha,\ 0 < \alpha < \gamma, \quad \text{oder}$$
$$Fix(h^\alpha) \neq \varnothing \text{ für alle } \alpha \text{ (und deshalb } Fix(h^\alpha) = Fix(h) \text{ für } 0 < \alpha < \gamma).$$

Im folgenden unterscheiden wir die beiden Fälle durch die Hinweise "$Fix(h) = \varnothing$" und "$Fix(h) \neq \varnothing$".

Im Falle $Fix(h) \neq \varnothing$ gibt es eine Vollring-Umgebung T von $Fix(h)$, so daß $h|T$ eine Drehung um die Mittellinie von T ist. T ist zwar als fest gewählt zu denken, es wird aber gelegentlich bequem sein, zu einem kleineren T überzugehen.

2.1. LEMMA. *Es gibt eine Heegaard-Zerlegung (V, W) von M, so daß $h(V) = V$, und so daß im Falle $Fix(h) \neq \varnothing$ außerdem gilt: $T \subset \dot{W}$, und $X = W - \dot{T}$ ist eine Hohlbrezel, d.h. (V, X) ist eine Heegaard-Zerlegung von $M - \dot{T}$. Die Heegaard-Zerlegung (V, W) hat die folgende Eigenschaft:*

Es gibt ein gutes System v von Meridianflächen in V und ein v zugeordnetes System w in W, so daß $\bigcup h^\alpha(v)$ und $\bigcup h^\alpha(w)$ nicht-singulär sind in folgendem Sinne:

Für jede Komponente v_i von v und für jedes α ist

$$\text{entweder } h^\alpha(v_i) \cap v = \varnothing$$
$$\text{oder } h^\alpha(v_i) \text{ ist gleich einer Komponente von } v;$$

und das Entsprechende für w.

Beweis. Der Quotientenraum $N = M/h$ ist eine Mannigfaltigkeit; sei $p: M \to N$ die Projektion. Sei K das 1-Skelett einer Triangulation von N, so daß $p(Fix(h)) \subset K$. Wir definieren W^* als reguläre Umgebung von K in N, und $V^* = N - \dot{W}^*$.

Im Falle $Fix(h) \neq \varnothing$ definieren wir T^* als reguläre Umgebung von $p(Fix(h))$ in W^*. Es gibt ein System x^* von 2-Elementen in W^*, $x^* \cap \partial W^* = \partial x^*$, und eine reguläre Umgebung X^* von $x^* \cup \partial W^*$ in W^* (die ausnahmsweise nicht klein gewählt ist bezüglich der bereits genannten Dinge), so daß $X^* = W^* - \mathring{T}^*$. In X^* gibt es einen zu x^* disjunkten Kreisring y^*, $y^* \cap \partial X^* = \partial y^*$, dessen eine Randkurve in ∂W^* liegt und dessen andere Randkurve in ∂T^* liegt und in T^* homolog ist zur Mittellinie $p(Fix(h))$.

Wir definieren $V = p^{-1}(V^*)$ und $W = p^{-1}(W^*)$. Im Falle $Fix(h) \neq \emptyset$ ist offensichtlich, daß $h|T$ eine Drehung um die Mittellinie von $T = p^{-1}(T^*)$ ist; und das System $x = p^{-1}(x^*)$ zeigt, daß $X = p^{-1}(X^*)$ eine Hohlbrezel ist.

Nach [7, (3.1)] ist die konstruierte Heegaard-Zerlegung (V, W) die "Standard"-Zerlegung der 3-Sphäre. (Die Benutzung dieses Resultats könnte vermieden werden: nach [4] und [5] erhält man die Standard-Zerlegung, wenn man genügend viele "trivale Henkel" anfügt; dies kann in äquivarianter Weise gemacht werden.) Es gibt also ein gutes System v von Meridianflächen in V und ein v zugeordnetes System w in W. Der Rest des Beweises dient nun dazu, die Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(v)$ und die von $\bigcup h^\alpha(w)$ zu entfernen. Die Idee ist, in durch die Situation motivierter Weise durch "Henkelanhängen" zu einer Heegaard-Zerlegung höheren Geschlechts überzugehen und dabei die ärgerlichen Singularitäten einfach auszuschneiden (vgl. [7, Beweis zu (2.5)]). Das Henkelanhängen hat in äquivarianter Weise zu geschehen, was nicht weiter stört. Unangenehm ist aber, daß etwa $v \cap h(v)$ geschlossene Kurven enthalten kann und daß eine solche Kurve nicht zum Henkelanhängen benutzt werden kann; wir müssen daher die Situation zunächst soweit vereinfachen, daß solche Schnittkurven auf andere Weise entfernt werden können.

Wir behandeln explizit das Entfernen der Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(w)$ im Falle $Fix(h) \neq \emptyset$. Die Behandlung der drei andern (i.w. identischen) Fälle ergibt sich hieraus durch Vereinfachung; wir gehen zum Schluß darauf noch ein.

a. *Wir können folgendes erreichen: Es gibt ein System x von 2-Elementen in W, $x \cap \partial W = \partial x$, $x \cap Fix(h) = \emptyset$, $h(x) = x$, und eine reguläre Umgebung $U(x)$, $h(U(x)) = U(x)$, so daß gilt: $\overline{(W - U(x))}$ ist ein Vollring mit $Fix(h)$ als Mittellinie, und: Jede Komponente von w ist entweder disjunkt zu $U(x)$ oder identisch mit einer Komponente von x.*

Beweis. Sei $x = p^{-1}(x^*)$ das oben definierte System von 2-Elementen in W. Durch eine kleine Deformation von $(w, \partial w)$ in $(W, \partial W)$ erreichen wir allgemeine Lage von w in bezug auf x. Hinterher entfernen wir die geschlossenen Kurven in $x \cap w$ durch Abänderung von w bei festgehaltenem ∂w (Gibt es solche Kurven, so gibt es ein 2-Element D in $\mathring{x}$, so daß $D \cap w = \partial D$; wir ersetzen durch D das von ∂D auf w berandete 2-Element und heben ab. Usw.). Da in einer Umgebung von x die Abbildung $p: M \to N$ keine lokalen Singularitäten hat, können wir durch eine weitere isotope Deformation von $(w, \partial w)$ in $(W, \partial W)$ erreichen, daß zusätzlich gilt: Es gibt eine Umgebung von x, in der die Singularitäten von $x \cup \bigcup h^\alpha(w)$ allgemeine Lage haben.

Es ist nun $\Gamma = x \cap \bigcup h^\alpha(w)$ ein Graph; keine Komponente von Γ liegt im Innern von x. Sei $U(\Gamma)$ eine reguläre Umgebung von Γ in M, so daß $h(U(\Gamma)) = U(\Gamma)$ (eine solche Umgebung kann erhalten werden als Urbild einer regulären Umgebung im Quotientenraum.—Entsprechendes gilt für ähnliche Situationen weiter unten). Wir werden V und W durch $V \cup U(\Gamma)$ und $W - \mathring{U}(\Gamma)$ ersetzen. Wir wollen nachweisen, daß $W - \mathring{U}(\Gamma)$ eine Brezel ist (daß $V \cup U(\Gamma)$ eine Brezel ist, ist klar) und daß es ein gutes System $\tilde{v}$ von Meridianflächen in $V \cup U(\Gamma)$ gibt und ein $\tilde{v}$ zugeordnetes System in $W - \mathring{U}(\Gamma)$, das ein Teilsystem von $(x \cup w) \cap (W - \mathring{U}(\Gamma))$ ist. Wir führen diesen Nachweis, indem wir $U(\Gamma)$ Stück für Stück aus W herausnehmen und bei jedem Schritt unsere Daten überprüfen.

Wir denken uns $U(\Gamma)$ zusammengesetzt aus "Kugeln" um die mehrfachen Punkte von Γ und "Balken" um die Strecken von Γ; jedem Teilgraphen von Γ ist nun ein wohlbestimmter Teil von $U(\Gamma)$ zugeordnet.

Wir verschaffen uns einen Vorrat von 2-Elementen, $e_1, e_2, \ldots$, aus dem wir später v ergänzen werden, und zwar sei e_i ein 2-Element im i-ten Balken, so daß $e_i \cap \partial U = \partial e_i$ nicht zusammenziehbar ist in $W \cap \partial U$ und daß ∂e_i die Komponente von $\bigcup h^\alpha(w)$ und die Komponente von x, die es trifft, in nur je zwei Punkten trifft (e_i ist ein "Querschnitt" im i-ten Balken). Es ist möglich, $e = e_1 \cup e_2 \cup \cdots$ so zu wählen, daß $h(e) = e$.

Sei k eine Komponente von $x \cap w$; k liege in der Komponente w_j von w. $U(k)$ bestehe aus den k umgebenden Kugeln und Balken. Da k ein Bogen ist und da $k \cap \partial w = \partial k$, besteht $\overline{(w_j - U(k))}$ aus zwei 2-Elementen, w'_j und w'_{j+1}; von diesen sei w'_{j+1} dasjenige, das den Schnittpunkt $v_j \cap w_j$ enthält. $W' = \overline{(W - U(k))}$ ist eine Brezel (da $\overline{(W' - U(w'_j))}$ homöomorph ist zu W; wobei $U(w'_j)$ eine reguläre Umgebung von w'_j ist); $V' = V \cup U(k)$ ist sicherlich auch eine Brezel. Wir definieren

$$\begin{aligned} v'_i &= v_i, & w'_i &= w_i & &\text{für } i < j \\ v'_j &= v_j, & & & & \\ v'_{i+1} &= v_i, & w'_{i+1} &= w_i & &\text{für } i > j; \end{aligned}$$

w'_j und w'_{j+1} seien die oben so genannten 2-Elemente. Für v'_{j+1} nehmen wir eines von den oben $e_1, e_2, \ldots$ genannten 2-Elementen, das in $U(k)$ liegt (und das sowohl w'_j als auch w'_{j+1} in genau einem Punkte trifft). v' ist ein gutes System von Meridianflächen in V', und w' ist ein v' zugeordnetes System.

Auf die gleiche Art verfahren wir mit den übrigen Komponenten von $w \cap x$. Sei (V'', W'') die schließlich erhaltene Heegaard-Zerlegung, und seien v'' und w'' die konstruierten Systeme von Meridianflächen.

Sei $x'' = x \cap W''$. Es ist $w'' \cap x'' = \emptyset$ (und insbesondere $w'' \cap \Gamma = \emptyset$); jede Komponente von x'' ist ein 2-Element. Sei l ein Bogen in $\Gamma \cap W''$, so daß $l \cap \partial W'' = \partial l$. Es bestehe $U(l)$ aus den l umgebenden Kugeln und Balken. Von den 2-Elementen $\overline{(x'' - U(l))}$ seien x'_1 und x'_2 die an $U(l)$ anstoßenden. Da keine Komponente von $\Gamma \cap W''$ im Innern von x'' liegt, kann l so gewählt werden, daß $x'_1 \cap \Gamma = \emptyset$. Wir definieren nun $V''' = V'' \cup U(l)$ und $W''' = \overline{(W'' - U(l))}$. Es seien $v''_1, \ldots, v''_n$ und $w''_1, \ldots, w''_n$ die Komponenten von v'' und w''. Wir definieren $v'''_j = v''_j$ und $w'''_j = w''_j$ für $j \leq n$, und $w'''_{n+1} = x'_1$; für v'''_{n+1} nehmen wir eines von den oben $e_1, e_2, \ldots$ genannten 2-Elementen, das in $U(l)$ liegt.

Auf die gleiche Art verfahren wir mit dem Rest von $\Gamma \cap W''$. Nach Ausführung der beschriebenen Konstruktion schreiben wir wieder (V, W) für unsere Heegaard-Zerlegung und v, w für die Systeme von Meridianflächen. Der Durchschnitt des ursprünglichen x mit der neuen Brezel W hat die in (a) behaupteten Eigenschaften; im folgenden schreiben wir x für diesen Durchschnitt.

b. *Wir können folgendes erreichen: Es gibt ein System x von 2-Elementen in W, $x \cap Fix(h) = \emptyset$, $h(x) = x$, und ein System y von Kreisringen in W, $y \cap \partial(W - \mathring{T}) = \partial y$, $h(y) = y$, $y \cap x = \emptyset$, so daß keine Komponente von $W - (x \cup y)$ durch h auf sich selbst abgebildet wird und so daß für jede Komponente w_j von w gilt: Es ist entweder $w_j \subset x$ oder $h(w_j) = w_j$ oder $w_j \cap (x \cup y) = \emptyset$.*

Beweis. Sei $y = p^{-1}(y^*)$ das eingangs des Beweises definierte System von Kreisringen. Die Konstruktionen in (a) waren weit weg von y; es ist also immer noch $y \subset W$.

Beim gegenwärtigen Stand unserer Argumentation ist jede Komponente von w entweder auch eine Komponente von x oder sie ist enthalten in dem Vollring $\overline{(W - U(x))}$, dessen Mittellinie $Fix(h)$ ist. Da es in einem Vollring bis auf Isotopie nur zwei 2-Elemente gibt (nämlich ein rand-paralleles und eine Meridianfläche), können wir durch eine auf $\partial W \cup U(x)$ konstante Deformation erreichen, daß jede Komponente von w die Vollring-Umgebung T von $Fix(h)$ in höchstens einem 2-Element trifft. Da wir diese 2-Elemente vorgeben können, dürfen wir ferner annehmen: $h(w \cap T) = w \cap T$; jede Komponente von $w \cap T$ ist eine Meridianfläche in T; jede der Meridianflächen $w \cap T$ trifft jede der Kurven $y \cap \partial T$ in genau einem Punkte.

Durch eine auf T konstante Deformation von w stellen wir allgemeine Lage von w in bezug auf y her. Danach entfernen wir durch Abändern von w (bei festgehaltenem $(w \cap T) \cup \partial w$) die geschlossenen Kurven in $w \cap y$. Ist nun y_1 eine Komponente von y, und ist w_j eine T treffende Komponente von w, so besteht $y_1 \cap w_j$ aus genau einem Bogen, der in y_1 nicht rand-parallel ist, und im übrigen nur aus Bögen, deren beide Endpunkte in $y_1 \cap \partial W$ liegen. Bögen der ersten Art bezeichnen wir als "ausgezeichnete Bögen". Sei l_1 das System der ausgezeichneten Bögen in der "ersten" Komponente y_1 von y, und seien $l_2, l_3, \ldots$ die Systeme der ausgezeichneten Bögen in den übrigen Komponenten $y_2 = h(y_1), y_3, \ldots$ von y. Es gibt eine auf $y_2 \cap T$ konstante isotope Deformation auf y_2, die l_2 in $h(l_1)$ überführt, und es gibt ähnliche Deformationen auf $y_3, \ldots$. Wir induzieren diese Deformationen durch eine Deformation von $(v \cup w, \partial v \cup \partial w)$ in $(V \cup W, V \cap W)$. Danach definieren wir den Graphen Γ als Vereinigung der ausgezeichneten Bögen und der Kurven $w \cap \partial T$ und wählen eine reguläre Umgebung $U(\Gamma)$ so, daß $h(U(\Gamma)) = U(\Gamma)$.

Sei T' eine reguläre Umgebung von $Fix(h)$ in T, so daß $h(T') = T'$. Sei $\tilde{y}$ ein System von Kreisringen in $T - \mathring{T}'$, $\tilde{y} \cap \partial(T - \mathring{T}') = \partial\tilde{y}$, so daß $h(\tilde{y}) = \tilde{y}$ und $\tilde{y} \cap \partial T = y \cap \partial T$. Wir ersetzen T und y durch T' und $y \cup \tilde{y}$, schreiben aber wieder T und y. Es ist nunmehr $T \cap U(\Gamma) = \emptyset$.

Wir wollen von V und W zu $V \cup U(\Gamma)$ und $\overline{(W - U(\Gamma))}$ übergehen.

Sei U' eine Komponente von $U(\Gamma)$. Es gibt eine Komponente w_j von w, so daß U' eine reguläre Umgebung von $w_j \cap \Gamma$ ist. $\overline{(w_j - U')}$ besteht aus $(\gamma + 1)$ 2-Elementen (γ = Periode von h). Eines von diesen, w_j^0, ist disjunkt zu V und wird durch h auf sich abgebildet. Bei geeigneter Numerierung der übrigen, $w_j^1, \ldots, w_j^\gamma$, gilt folgendes: Es gibt 2-Elemente $v_j^0, \ldots, v_j^{\gamma-1}$ in $U' \cap \dot{W}$, $v_j^i \cap \partial U' = \partial v_j^i$, so daß $\partial v_j^i \cap \partial w_j^g$ genau ein Schnitt- (und Durchsetzungs-)punkt ist, wenn $g = i$ oder $= i + 1$, und leer in den übrigen Fällen, und: w_j^γ enthält den Schnittpunkt $v_j \cap w_j$. Die v_j^i können so gewählt werden, daß $v_j^i = h^{i-1}(v_j^1)$, wenn $i > 1$.

Wir definieren $V' = V \cup U'$, $W' = \overline{(W - U')}$;

$$\begin{array}{lll} v'_g = v_g, & w'_g = w_g, & \text{für } g < j, \\ v'_{g+\gamma} = v_g, & w'_{g+\gamma} = w_g, & \text{für } g > j, \\ v'_{j+\gamma} = v_j, & & \\ & w'_{j+\gamma} = w_j^\gamma, & \\ v'_{j+i} = v_j^i, & w'_{j+i} = w_j^i, & \text{für } 0 \leq i \leq \gamma - 1. \end{array}$$

$y' = \overline{(y - U')}$ ist ein System von Kreisringen. Beim Aufschneiden an $x \cup y'$ entsteht zwar aus W' nicht ein System von Vollringen, sondern ein System von Brezeln, jedenfalls wird aber keine der Komponenten von $W' - (x \cup y')$ durch h auf sich abgebildet.

Auf die gleiche Art entfernen wir die übrigen Komponenten von $U(\Gamma)$. Nachdem dies geschehen ist, schreiben wir wieder V, W, v, w, x, y für unsere Daten.

Es bezeichne w^* das System derjenigen Komponenten von w, die zu x und zu T disjunkt sind. Nach einer kleinen Deformation von w^* ist weiterhin jede Komponente von $w^* \cap y$ ein Bogen (und nicht eine geschlossene Kurve) und es gilt außerdem: Es gibt eine Umgebung von y, in der die Singularitäten von $y \cup \bigcup h^\alpha(w^*)$ in allgemeiner Lage sind.

Wir definieren $\Gamma = y \cap \bigcup h^\alpha(w^*)$ und wählen eine reguläre Umgebung $U(\Gamma)$, so daß $h(U(\Gamma)) = U(\Gamma)$. Wir gehen über von V und W zu $V \cup U(\Gamma)$ und $\overline{(W - U(\Gamma))}$. Da $\Gamma \cap T = \emptyset$, zeigt eine Argumentation, die mit der in (a) nahezu identisch ist, daß wir w ersetzen können durch $\{w \cap \overline{(W - U(\Gamma))}\} \cup \{$ein geeignetes Teilsystem von $y \cap \overline{(W - U(\Gamma))}\}$, während wir v ergänzen durch 2-Elemente in $U(\Gamma)$. Das System $(x \cup y) \cap \overline{(W - U(\Gamma))}$ hat nun die in der Behauptung (b) genannten Eigenschaften.

c. Seien x und y die in der Behauptung (b) genannten Systeme. Sei w^* das System derjenigen Komponenten von w, die zu $x \cup y$ disjunkt sind. $\bigcup h^\alpha(w - w^*)$ ist bereits nicht-singulär im Sinne der Behauptung von (2.1), und $\bigcup h^\alpha(w - w^*)$ ist disjunkt zu w^*. Seien $X_1, X_2, \ldots$ die Komponenten von $X - (x \cup y)$; die X_j lassen sich so numerieren, daß $h(X_j) = X_{j+1}$. Jede Komponente von w^* ist enthalten in einem der X_j. Also können wir in der üblichen Weise erreichen, daß die Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(w^*)$ in allgemeiner Lage sind *und daß* $w^* \cap h^\alpha(w^*)$, *für jedes* α, $0 < \alpha < \gamma$, *keine geschlossene Kurve enthält.*

Wir definieren nun Γ als den aus den Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(w^*)$ bestehenden Graphen und $U(\Gamma)$ als reguläre Umgebung von Γ, so daß $h(U(\Gamma)) = U(\Gamma)$. Wir gehen von V und W über zu $V \cup U(\Gamma)$ und $\overline{(W - U(\Gamma))}$. w wird ersetzt durch ein geeignetes Teilsystem von $\bigcup h^\alpha(w)$; die Details sind ähnlich zu denen in (a) Damit ist die Behandlung der Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(w)$ im Falle $Fix(h) \neq \emptyset$ abgeschlossen.

d. Bei der Behandlung der Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(w)$ im Falle $Fix(h) = \emptyset$ haben wir folgenden Unterschied: Statt des ganz zu Anfang gewählten Systems x^* nehmen wir ein System von Meridianflächen in W^*. Es gilt dann bereits nach dem Schritt (a), daß die Komponenten von $W - x$ durch h untereinander vertauscht werden; und nach (a) folgt sofort (c).

Das Entfernen der Singularitäten von $\bigcup h^\alpha(v)$ (nachdem die von $\bigcup h^\alpha(w)$ bereits entfernt wurden) geht ebenso; es ist nur sicherzustellen, daß es ein System z von 2-Elementen in V

gibt, $z \cap \partial V = \partial z$, $h(z) = z$, so daß keine der Komponenten von $V - z$ durch h auf sich selbst abgebildet wird. Ein solches System z gab es jedenfalls ganz zu Anfang, und es ist leicht zu verifizieren, daß nach jeder der beschriebenen ($\bigcup h^\alpha(w)$ betreffenden) Konstruktionen wieder ein solches System existiert. Ferner ist klar, daß beim Normieren von v keine Singularitäten von w geschaffen werden müssen. Denn in den Schritten (a) und (c) sind alle Deformationen der Randkurven allgemeine-Lage-Deformationen.

2.2. *Definition.* Es sei Z eine Brezel mit F als Randfläche oder eine Hohlbrezel mit F als ausgezeichneter Randfläche. Sei z ein System (paarweise disjunkter) 2-Elemente in Z, $z \cap \partial Z = z \cap F = \partial z$, und sei k ein System paarweise disjunkter einfach-geschlossener Kurven in F. Wir sagen, daß k *kurz bezüglich* z ist, wenn folgende Aussage *nicht* richtig ist:

Es gibt ein 2-Element D in Z, so daß $D \cap \partial Z = D \cap k$ ein Bogen in ∂D ist, und es gibt eine Komponente z_1 von z, so daß $D \cap z_1 = \overline{(\partial D - k)}$.

2.3. Lemma. *Sei* (V, W) *eine Heegaard-Zerlegung mit den in* (2.1) *genannten Eigenschaften. Dann können* v *und* w *so gewählt werden, daß außerdem gilt:*

$$\bigcup h^\alpha(\partial v) \text{ ist kurz bezüglich} \bigcup h^\alpha(w)$$

$$\bigcup h^\alpha(\partial w) \text{ ist kurz bezüglich} \bigcup h^\alpha(v).$$

Beweis. Angenommen, es sei etwa $\bigcup h^\alpha(\partial v)$ nicht kurz bezüglich $\bigcup h^\alpha(w)$. Wir zeigen, wie wir durch Übergang zu einem andern w die Situation vereinfachen können. Als Kompliziertheitsbegriff dient die Anzahl der Schnittpunkte $\bigcup h^\alpha(\partial v) \cap \bigcup h^\alpha(\partial w)$, jeder mit der richtigen Vielfachheit gezählt ($=\sum_{\alpha,\beta}$(Anzahl der Punkte $h^\alpha(\partial v) \cap h^\beta(\partial w)$)).

Durch Abänderung von D bei festgehaltenem ∂D erreichen wir, daß die Schnitte von D mit $\bigcup h^\alpha(w)$ einfache Kurven und Bögen sind; durch weitere Abänderung von D bei festgehaltenem ∂D entfernen wir die geschlossenen Kurven. Es ist jetzt jede Komponente von $D \cap \bigcup h^\alpha(w)$ ein Bogen, dessen beide Endpunkte in $D \cap \partial v$ liegen. Also können wir zu einem andern D übergehen, so daß gilt: $D \cap \partial W = D \cap \partial v$ ist ein Bogen in ∂D, $D \cap \bigcup h^\alpha(w) = \overline{(\partial D - (\partial D \cap \partial v))}$.

Unser nächstes Ziel ist, sicherzustellen, daß $h^\beta(D) \cap D = \emptyset$ für $0 < \beta < \gamma$ (und daß $D \cap T = \emptyset$).

$\bigcup h^\alpha(w)$ ist invariant unter h. Beim Aufschneiden an $\bigcup h^\alpha(w)$ zerfällt W in 3-Elemente. Sei E' die abgeschlossene Hülle derjenigen Komponente von $W - \bigcup h^\alpha(w)$, die D enthält (E' braucht kein 3-Element zu sein).

Ist $Fix(h) \cap E' = \emptyset$, so folgt aus einem bekannten Fixpunktsatz über das 3-Element, daß $h^\beta(\dot{E}') \cap \dot{E}' = \emptyset$ für $0 < \beta < \gamma$. Da $\partial D \cap \bigcup h^\alpha(w)$ in einer einzigen Komponente von $\bigcup h^\alpha(w)$ liegt, folgt weiter, daß $h^\beta(D) \cap D = \emptyset$ für $0 < \beta < \gamma$.

Sei also $E' \cap Fix(h) \neq \emptyset$ und deshalb $h(E') = E'$. Von den 3-Elementen, in die W beim Aufschneiden an $\bigcup h^\alpha(w)$ zerfällt, sei E dasjenige, das auf E' projiziert, und $p: E \to E'$ sei die Projektion. Wir haben eine induzierte Abbildung $E \to E$, die wir ebenfalls h nennen; $l = p^{-1}(Fix(h))$ ist ihre Fixpunktmenge. Da h periodisch ist, ist l ein einziger Bogen. Wir bezeichnen $p^{-1}(D)$ mit D^*.

Sei y das System der 2-Elemente $p^{-1}(\bigcup h^\alpha(w))$ in ∂E; y ist invariant unter h. Seien y_1 und y_2 die beiden Komponenten, die ∂l enthalten (es ist $y_1 \neq y_2$), und sei y_0 die $D^* \cap y$ enthaltende Komponente.

Sei $k = p^{-1}(\bigcup h^\alpha(\partial v))$. k ist ein System paarweise disjunkter einfacher Bögen (von denen möglicherweise einige "mehrfach zählen"); es ist $k \cap y = \partial k$, und $\partial D^* \cap (\partial E - \mathring{y})$ ist eine Komponente von k.

Wir unterscheiden zwischen den Fällen $y_0 \cap (y_1 \cup y_2) = \varnothing$ und, etwa, $y_0 = y_1$. In beiden Fällen gibt es ein 2-Element D' in ∂E mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &\partial D' \cap (\partial E - y) = D^* \cap (\partial E - y), \\ &\partial D' \cap y = D' \cap y_0 \quad \text{ist ein Bogen in } \partial D', \\ &D' \cap y_2 = \varnothing. \end{aligned}$$

Für jedes β, $0 < \beta < \gamma$, ist $h^\beta(\partial D' \cap (\partial E - \mathring{y}_0)) \cap (\partial D' \cap (\partial E - \mathring{y}_0))$ entweder $= \varnothing$ oder $= \partial D' \cap (\partial E - \mathring{y}_0)$, und ist deshalb $= \varnothing$, da in $\partial E - \mathring{y}$ keine Fixpunkte liegen. Da auch $h(y) = y$, sehen wir, daß nur dann $h^\beta(D') \cap D' \neq \varnothing$ sein kann, wenn eines der beiden 2-Elemente das andere echt enthält. Da h periodisch ist, ist das nicht möglich (insbesondere muß im Falle $y_0 \neq y_1$ auch $D' \cap y_1 = \varnothing$ sein).

Also können wir aus D' durch Abheben ein 2-Element D erhalten, so daß

$$\begin{aligned} &D \cap \partial E = \partial D, \qquad D \cap y = D \cap y_0, \\ &D \cap (\partial E - \mathring{y}) = D^* \cap (\partial E - \mathring{y}), \\ &h^\beta(D) \cap D = \varnothing \qquad \text{für} \qquad 0 < \beta < \gamma, \\ &D \cap p^{-1}(T) = \varnothing. \end{aligned}$$

Wir argumentieren nun wieder in M. Sei z die Komponente von $\bigcup h^\alpha(w)$, die den Durchschnitt mit D enthält. Wir unterscheiden zwischen den beiden Fällen $h(z) = z$ und $h(z) \neq z$ (und deshalb $h^\alpha(z) \cap z = \varnothing$, wenn $0 < \alpha < \gamma$).

1. *Fall.* $h^\alpha(z) \cap z = \varnothing$, *wenn* $0 < \alpha < \gamma$.

Sei U eine reguläre Umgebung von $z \cup D$ in M (U sei nicht nur klein bezüglich der bereits genannten Dinge, sondern auch so klein, daß $h^\alpha(U) \cap U = \varnothing$ für $0 < \alpha < \gamma$). $\partial U \cap W$ besteht aus drei 2-Elementen. Eines von diesen liegt auf der D gegenüberliegenden Seite von z und interessiert uns nicht; seien z_1 und z_2 die beiden andern. $(\partial z_1 \cup \partial z_2) \cap \bigcup h^\alpha(\partial v)$ enthält zwei Punkte weniger als $\partial z \cap \bigcup h^\alpha(\partial v)$.

Wenn nötig, permutieren wir die Namen der $h^\alpha(D)$. Wir nehmen also an, daß z eine Komponente von w ist, und zwar die Komponente w_j. Für alle bis auf höchstens ein i besteht $\partial v_i \cap (\partial z_1 \cup \partial z_2)$ aus ebensoviel Punkten wie $\partial v_i \cap \partial w_j$. Das Ausnahme-$v_i$, falls vorhanden, trifft $z_1 \cup z_2$ in zwei Punkten weniger als w_j; dieses v_i ist von v_j verschieden. Von z_1 und z_2 sei z_1 dasjenige, das den Schnittpunkt $v_j \cap (z_1 \cup z_2)$ enthält. Wir ersetzen w_j durch z_1, und die $h^\alpha(w_j)$ durch die $h^\alpha(z_1)$.

Möglicherweise war z gleichzeitig eine Komponente von einem (oder mehreren) $h^\beta(w)$. Diese Komponente war aber jedenfalls von $h^\beta(w_j)$ verschieden. Sie wird erst in einem späteren Schritt abgeändert.

2. *Fall.* $h(z) = z$.

Sei U eine reguläre Umgebung von $z \cup \bigcup h^\alpha(D)$ in M, so daß $h(U) = U$. $\partial U \cap W$ besteht aus $(\gamma + 2)$ 2-Elementen. Eines von diesen interessiert uns nicht. Für eines der übrigen gilt $h(z_0) = z_0$, und die restlichen, $z_1, \ldots, z_\gamma$, werden unter h permutiert. $(z_0 \cup z_1 \cup \cdots \cup z_\gamma) \cap \bigcup h^\alpha(\partial v)$ enthält 2γ Punkte weniger als $\partial z \cap \bigcup h^\alpha(\partial v)$. Es sei z die Komponente w_j von w. Wir ersetzen w_j durch dasjenige der $z_0, z_1, \ldots, z_\gamma$, das den Schnittpunkt mit v_j enthält.

2.4. Lemma. *In der in* (2.1) *beschriebenen Situation sei* $\bigcup h^\alpha(\partial v)$ *kurz bezüglich* $\bigcup h^\alpha(w)$. *Dann gilt: Jede Komponente von* $\bigcup h^\alpha(w)$ *trifft* ∂v_n *in höchstens einem Punkt.*

Beweis. Angenommen, die Komponente z von $\bigcup h^\alpha(w)$ trifft ∂v_n in mindestens zwei Punkten. Da $v_n \cap w$ ein einziger Punkt ist, gibt es einen zu w disjunkten Bogen k in ∂v_n, so daß $k \cap z = \partial k$. Sei U eine reguläre Umgebung von w in M. $W - \mathring{U}$ ist ein 3-Element, das $z \cup k$ enthält, und das von z in zwei 3-Elemente zerlegt wird. Also gibt es ein 2-Element D in W, so daß $D \cap \partial W = \partial D \cap \partial W = k$, und $D \cap z = \partial D - k$.

§3. INVOLUTIONEN

Wir kommen nun zum Beweis des eingangs formulierten Satzes. Wir nehmen entgegen der Behauptung an, es gebe eine exotische Involution $h: M \to M$.

Es sei (V, W) eine Heegaard-Zerlegung, die die in (2.1) genannten Eigenschaften hat und die außerdem so gewählt sei, daß ihr Geschlecht, n, möglichst klein ist. Unter allen exotischen Involutionen sei h so gewählt, daß n möglichst klein ist.

Nach (2.3) und (2.4) dürfen wir annehmen, daß ∂v_n von jedem der $h(w_j)$ in höchstens einem (Durchsetzungs-) Punkt getroffen wird. Sei m der kleinste Index, so daß $h(w_m) \cap \partial v_n \neq \emptyset$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

3.1. *Der Fall* $m < n$.

$v_n \cap w$ ist ein einziger Punkt in w_n. Da jede die Fixpunktmenge von h treffende Komponente von w durch h auf sich selbst abgebildet wird, sind die ∂v_n treffenden $h(w_j)$, $j \leq n - 1$, zu $Fix(h)$ punktfremd.

a. Wenn noch nicht gilt $h(w_m) = w_n$ und $h(v_m) = v_n$, dann ersetzen wir das alte w_n durch $h(w_m)$ (und $h(w_n)$ durch w_m), und wir ersetzen das alte v_m durch $h(v_n)$ (und $h(v_m)$ durch v_n). v bleibt dabei ein gutes System von Meridianflächen, w bleibt ein v zugeordnetes System, und unsere Normierungen bleiben erhalten.

b. Wir nehmen an, es gibt außer $h(w_m) \cap \partial v_n$ noch einen weiteren Punkt in $h(w) \cap \partial v_n$. (Im folgenden Argument nutzen wir aus, daß h die Periode 2 hat.) Es gibt dann einen Bogen k in ∂v_n, so daß $\partial k = k \cap h(w) = (k \cap h(w_m)) \cup (k \cap h(w_j))$, für ein j, $m < j < n$. Sei U eine reguläre Umgebung von $h(w_m) \cup k \cup h(w_j)$ in M. $W \cap \partial U$ besteht aus drei 2-Elementen. Je eines von diesen ist in W isotop zu $h(w_m)$ bzw. $h(w_j)$; sei z das dritte. Es ist $z \cap w = \emptyset$ und $z \cap h(w) = \emptyset$. Da auch $(w_m \cup w_j) \cap v_n = \emptyset$, ist

$$(h(w_m) \cup h(w_j) \cup \partial v_n) \cap (w_m \cup w_j \cup h(\partial v_n)) = \emptyset,$$

daher $z \cap h(z) = \emptyset$. Die Schnittpunkte von z mit irgendeinem $h(v_i)$ entsprechen denen von $h(w_m) \cup h(w_j)$ mit $h(v_i)$. Also bleibt w ein v zugeordnetes System, und wir schaffen keine Schnitte von w und $h(w)$, wenn wir w_j durch $h(z)$ und $h(w_j)$ durch z ersetzen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erreichen wir, daß $h(w) \cap \partial v_n = h(w_m) \cap \partial v_n$.

c. Sei U_1 eine reguläre Umgebung von $v_n \cup w_n = h(v_m) \cup h(w_m)$, und sei $U_2 = h(U_1)$ (U_1 sei nicht nur klein bezüglich der bereits genannten Dinge, sondern auch so klein, daß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$). U_2 ist eine reguläre Umgebung von $v_m \cup w_m = h(v_n) \cup h(w_n)$.

Sei $\tilde{V} = V - (\mathring{U}_1 \cup \mathring{U}_2)$ und $\tilde{W} = W \cup U_1 \cup U_2$. Im Falle $Fix(h) \neq \emptyset$ ist $\tilde{X} = X \cup U_1 \cup U_2$ wieder eine Hohlbrezel (da $(U_1 \cup U_2) \cap Fix(h) = \emptyset$ und deshalb auch $(U_1 \cup U_2) \cap T = \emptyset$).

$\tilde{v} = v - (v_n \cup v_m)$ und $\tilde{w} = w - (w_n \cup w_m)$ haben die in (2.1) genannten Eigenschaften. Da $\partial\tilde{V}$ kleineres Geschlecht hat als ∂V, haben wir einen Widerspruch zu unserer Wahl von (V, W).

3.2. *Der Fall* $h(w_j) \cap v_n = \emptyset$ *für* $j \leq n-1$.

Sei U eine reguläre Umgebung von $\bigcup h^\alpha(w_1 \cup \cdots \cup w_{n-1})$ in W, so daß $h(U) = U$. Wegen unserer Voraussetzung (3.2) ist eine der Komponenten von $\overline{(W - U)}$ ein Vollring; sie heiße Y. $Z = M - Y$ ist ein Knotenaußenraum; wegen der Existenz von v_n ist dieser Knotenaußenraum ein Vollring. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. *Fall.* $Fix(h) = \emptyset$.

In diesem Falle werden die Komponenten von $Z - \bigcup h^\alpha(v_n)$ unter h permutiert; Z/h ist daher ein Vollring. Ähnliches gilt für die Komponenten von $Y - \bigcup h^\alpha(w_n)$ und für Y/h. Also besitzt M/h eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1, nämlich $(Y/h, Z/h)$, und ist ein Linsenraum.

2. *Fall.* $Fix(h) \neq \emptyset$; $Fix(h) \cap Z = \emptyset$.

$W - \mathring{T}$ ist eine Hohlbrezel. Wegen unserer Voraussetzung $Fix(h) \cap Z = \emptyset$ trifft $\bigcup h^\alpha(w_1 \cup \cdots \cup w_{n-1})$ nur die ausgezeichnete Randfläche ∂W dieser Hohlbrezel. Daher können wir schließen, daß auch $Y - \mathring{T}$ eine Hohlbrezel ist. Da die Randflächen von $Y - \mathring{T}$ Tori sind, ist $Y - \mathring{T}$ homöomorph zu Torus $\times$ Intervall. Folglich ist $Fix(h)$ unverknotet, also [3] h eine Drehung.

3. *Fall.* $Fix(h) \cap Z \neq \emptyset$.

Sei E die abgeschlossene Hülle einer Komponente von $Z - (v_n \cup h(v_n))$. $Fix(h) \cap E$ ist ein einziger, zu $v_n \cup h(v_n)$ disjunkter, Bogen in E.

a. Wir nehmen an, es sei $Fix(h) \cap E$ eine verknotete Sehne in E. Wir definieren $h' \mid \overline{(M - E)}$ als die Standard-Involution mit einem unverknoteten Bogen als Fixpunktmenge und $h' \mid E = h \mid E$; dies ist möglich, da $h \mid \partial E$ eine Standard-Involution ist. $Fix(h')$ ist verknotet. Wir definieren ferner $V' = V \cap E$, $W' = \overline{(M - V')}$, $v' = (v - v_n) \cap E$ und $w' = (w - w_n) \cap E$. Diese Daten genügen der in Lemma (2.1) gegebenen Beschreibung. Das Geschlecht von (V', W') ist kleiner als das von (V, W); wegen unserer Minimalbedingung über h ist also $Fix(h')$ doch nicht verknotet.

b. h bildet die Homologieklasse von ∂v_n in ∂Y auf ihre inverse ab. Daher gilt dasselbe für ∂w_n. Da andererseits $Fix(h) \cap w_n$ höchstens ein Punkt ist und da entweder $h(w_n) = w_n$ oder $h(w_n) \cap w_n = \emptyset$, muß $h(w_n) \cap w_n = \emptyset$ sein. Es ist klar, daß die beiden Bögen $Fix(h) \cap Y$ von w_n und $h(w_n)$ getrennt werden. Jeder dieser Bögen ist eine unverknotete Sehne in der ihn enthaltenden Komponente von $Y - \bigcup h^\alpha(w_n)$; dies folgt unmittelbar daraus, daß $W - \mathring{T}$ eine Hohlbrezel ist. Wir fassen zusammen:

Es gibt eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1 von M, nämlich (Y, Z), und Meridianflächen v_n und $h(v_n)$ in Y und w_n und $h(w_n)$ in Z, so daß $v_n \cap h(v_n) = \emptyset$, $w_n \cap h(w_n) = \emptyset$ und daß $h^\alpha(v_n) \cap h^\beta(w_n)$ genau ein Punkt ist für $\alpha, \beta = 0, 1$. $Fix(h)$ ist disjunkt zu $\bigcup h^\alpha(v_n \cup w_n)$, und der Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle jeder Komponente von $M - (\partial Y \cup \bigcup h^\alpha(v_n \cup w_n))$ ist eine unverknotete Sehne.

Durch diese Beschreibung ist die Isotopieklasse von $Fix(h)$ festgelegt. Da die Beschreibung auf den Kreisknoten paßt, ist $Fix(h)$ unverknotet.

LITERATUR

1. R. H. Fox: Two theorems about periodic transformations of the 3-sphere, *Mich. math. J.* **14** (1967), 331–334.
2. G. R. Livesay: Fixed-point-free involutions on the 3-sphere, *Ann. Math.* **72** (1960), 603–611.
3. D. Montgomery and H. Samelson: A theorem on fixed points of involutions in S^3, *Can. J. Math.* **7** (1955), 208–220.
4. K. Reidemeister: Zur dreidimensionalen Topologie, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), 189–194.
5. J. Singer: Three-dimensional manifolds and their Heegaard-diagrams, *Trans. Am. math. Soc.* **35** (1933), 88–111.
6. P. A. Smith: Transformations of finite period, *Ann. Math.* **39** (1938), 127–164.
7. F. Waldhausen: Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, *Topology* **7** (1968), 195–203.