*Topology* Vol. 7, pp. 195–203. Pergamon Press, 1968. Printed in Great Britain

# HEEGAARD-ZERLEGUNGEN DER 3-SPHÄRE

FRIEDHELM WALDHAUSEN

(*Eingegangen* 28. *August* 1967)

**WIR ZEIGEN,** daß es nur die bekannten gibt.

## § 1. DEFINITIONEN

Im Folgenden sind wir durchweg in der semilinearen Kategorie. (3-)Mannigfaltigkeiten und Flächen sind zusammenhängend, orientierbar, und i.a. kompakt. Mit $U(\ldots)$ bezeichnen wir eine reguläre Umgebung von $(\ldots)$; wir vereinbaren, daß eine reguläre Umgebung immer klein gewählt wird bezüglich aller vorher in der Argumentation genannten Dinge.

Eine *Brezel* ist homöomorph zu einer regulären Umgebung eines zusammenhängenden (endlichen) Graphen in der 3-Sphäre.

Sei $M$ eine orientierte geschlossene 3-Mannigfaltigkeit, und $F$ eine orientierte geschlossene Fläche in $M$. Ist die abgeschlossene Hülle jeder Komponente von $M - F$ eine Brezel, dann nennen wir das Paar $(M, F)$ eine *Heegaard-Zerlegung* von $M$. Als *Geschlecht* der Heegaard-Zerlegung bezeichnen wir das Geschlecht von $F$.

Eine Heegaard-Zerlegung $(M, F')$ heißt *äquivalent* zu $(M, F)$, wenn es einen zur identischen Abbildung isotopen Homöomorphismus $h: M \to M$ gibt, der eine orientierungserhaltende Abbildung von $F'$ auf $F$ induziert; wir schreiben $(M, F') \approx (M, F)$.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $(S^3, T)$ "die" Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre vom Geschlecht 1 (es gibt nur eine Äquivalenzklasse; insbesondere ändert Umorientierung von $T$ nicht die Äquivalenzklasse von $(S^3, T)$). Sei $E$ ein 3-Element in $S^3$, so daß $E \cap T$ eine 2-Element ist und so daß gilt $\partial E \cap T = \partial(E \cap T)$, ("$\partial$" bedeutet "Rand"). Sei $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung, und sei das 3-Element $E'$ in $M$ ebenso gewählt wie $E$ in $S^3$. Wir bilden die *zusammenhängende Summe* von $(M, F)$ und $(S^3, T)$, indem wir die Randflächen von $M - \dot{E}'$ und $S^3 - \dot{E}$ unter einem orientierungsumkehrenden Homöomorphismus in der Weise identifizieren, daß auch $\partial E' \cap F$ und $\partial E \cap T$ unter einem orientierungsumkehrenden Homöomorphismus identifiziert werden. Das erhaltene Raumpaar ist wieder eine Heegaard-Zerlegung; wir bezeichnen sie mit $(M, F) \# (S^3, T)$. Da es eine ausgezeichnete Isotopieklasse von Homöomorphismen von $M \# S^3$ zu $M$ gibt, ist die Äquivalenzklasse von $(M, F) \# (S^3, T)$ durch die von $(M, F)$ eindeutig festgelegt.

Wir definieren eine *minimale Heegaard-Zerlegung* wie folgt: Eine Heegaard-Zerlegung $(M, F)$ heißt *nicht minimal*, wenn es eine Heegaard-Zerleging $(M, F')$ gibt, so daß

$$(M, F) \approx (M, F') \# (S^3, T).$$

(Vorsicht: Es folgt *nicht* aus dieser Definition, daß je zwei minimale Heegaard-Zerlegungen von $M$ gleiches Geschlecht haben.)

Zur Abkürzung definieren wir rekursiv

$$(M, F) \# n(S^3, T) \approx ((M, F) \# (n-1)(S^3, T)) \# (S^3, T).$$

Wir nennen zwei Heegaard-Zerlegungen $(M, F)$ und $(M, F')$ *stabil äquivalent*, wenn es Zahlen $m$ und $n$ gibt, so daß

$$(M, F) \# m(S^3, T) \approx (M, F') \# n(S^3, T).$$

Es gilt der Satz von Reidemeister und Singer: *Seien $(M, F)$ und $(M, F')$ Heegaard-Zerlegungen von $M$. Dann sind $(M, F)$ und $(M, F')$ stabil äquivalent*, ([4], [6], vgl. auch [8], S.56). (Zwar verwendet Singer, von Unterschieden der Terminologie ganz abgesehen, als Äquivalenzbegriff Homöomorphie statt Homöomorphie in einer ausgezeichneten Isotopieklasse. Aber der zitierte Satz ist in [6], S. 107–111 bewiesen.)

## §2. ÄQUIVALENZ UND STABILE ÄQUIVALENZ

Als *Meridianpaar* in der Heegaard-Zerlegung $(M, F)$ bezeichnen wir ein Paar von 2-Elementen, $x$ und $y$, in $M$, wenn $x \cap F = \partial x$ und $y \cap F = \partial y$, und wenn $x \cap y = \partial x \cap \partial y$ aus genau einem Schnitt- (und Durchsetzungs-) punkt besteht; $x$ und $y$ liegen notwendig zu verschiedenen Seiten von $F$.

Es gibt ein Meridianpaar in $(S^3, T)$. Da das 3-Element $E$ (s. oben) zu diesem Meridianpaar disjunkt gewählt werden kann, gibt es auch ein Meridianpaar in $(M, F'') \approx (M, F') \# (S^3, T)$.

Ist umgekehrt $x$, $y$ ein Meridianpaar in $(M, F'')$, und ist $U = U(x \cup y)$ eine reguläre Umgebung von $x \cup y$ in $M$, dann ist das Paar $(U, U \cap F'')$ homöomorph zu dem Paar $(S^3 - \mathring{E}, (S^3 - \mathring{E}) \cap T)$, (s. oben); also ist $(M, F'') \approx (M, F') \# (S^3, T)$ für eine Heegaard-Zerlegung $(M, F')$ (deren Eindeutigkeit *nicht* behauptet ist).

Entsprechend ist die Aussage $(M, F'') \approx (M, F') \# n(S^3, T)$ gleichwertig damit, daß es in $(M, F'')$ $n$ disjunkte Meridianpaare gibt. — Aber ein "System von $n$ disjunkten Meridianpaaren" ist ein recht unhandlicher Begriff. Ein wesentlich flexibleres Hilfsmittel definieren und untersuchen wir im Rest dieses Paragraphen.

**(2.1)** Sei $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung; seien $V$ und $W$ die Untermannigfaltigkeiten, in die $M$ von $F$ zerlegt wird. Ein System von $n$ disjunkten 2-Elementen in $V$, $v = v_1 \cup \cdots \cup v_n$, $v \cap \partial V = \partial v$, heißt ein *gutes System von n Meridianflächen in V*, wenn es ein System von $n$ disjunkten 2-Elementen in $W$ gibt, $w = w_1 \cup \cdots \cup w_n$, $w \cap \partial W = \partial w$, so daß (bei geeigneter Numerierung der Komponenten von $v$ und $w$) gilt:

$$\partial v_j \cap \partial w_j \text{ ist genau ein Schnitt- (und Durchsetzungs-) punkt}$$
$$\partial v_i \cap \partial w_j = \varnothing, \quad \text{wenn} \quad i > j;$$

wir nennen *$w$ ein $v$ zugeordnetes System.*

Ist $v$ ein gutes System von Meridianflächen in $V$, und $w$ ein $v$ zugeordnetes System, dann ist (mit der gleichen Definition) $w$ ein gutes System von Meridianflächen in $W$, und $v$ ein $w$ zugeordnetes System.

**(2.2)** LEMMA. *Sei $v$ ein gutes System von $n$ Meridianflächen in $V$, und $w$ ein $v$ zugeordnetes System.*

(1) *Es gibt ein $v$ zugeordnetes System $\tilde{w}$, so daß $\partial v_j \cap \partial \tilde{w}_j$ genau ein Schnitt- (und Durchsetzungs-) punkt ist, und daß $\partial v_i \cap \partial \tilde{w}_j = \emptyset$, wenn $i \neq j$.*

(2) *Sei $\tilde{U} = U(F \cup v \cup w)$ eine reguläre Umgebung von $F \cup v \cup w$ in $M$, und sei $\tilde{F} = \partial \tilde{U} \cap V$. Dann ist $\tilde{U}$ homöomorph zu $\tilde{F} \times I$.* ($I$ ist das Einheitsintervall.)

*Beweis zu* (1): Wir werden das System $\tilde{w}$ aus $w$ konstruieren.

Sei $i$ der kleinste Index, so daß es einen Schnittpunkt $q \subset \partial v_i \cap \partial w_j$, $j > i$, gibt. Sei $k$ einer der beiden Bögen in $\partial v_i$, der $q$ mit dem Schnittpunkt $\partial v_i \cap \partial w_i$ verbindet. Sei $q$ so gewählt, daß $\mathring{k} \cap w = \emptyset$. Sei $U(w_i \cup k \cup w_j)$ eine reguläre Umgebung von $w_i \cup k \cup w_j$ in $M$. $W \cap \partial U(w_i \cup k \cup w_j)$ besteht aus drei 2-Elementen. Von diesen ist je eines in $W$ isotop zu $w_i$ bzw. $w_j$; sei $w_j'$ das dritte. Für jedes $h \neq i$ besteht $\partial v_h \cap \partial w_j'$ aus ebensoviel Punkten wie $\partial v_h \cap \partial w_j$; aber $\partial v_i \cap \partial w_j'$ enhält einen Punkt weniger als $\partial v_i \cap \partial w_j$. Wir ersetzen $w_j$ durch $w_j'$. Wir wiederholen das Verfahren so oft wie möglich. Das schließlich aus $w$ erhaltene System hat die von $\tilde{w}$ behaupteten Eigenschaften.

*Beweis zu* (2): a) Wir prüfen zunächst nach, daß sich bei der in (1) beschriebenen Änderung von $w$ der Homöomorphietyp von $U(F \cup v \cup w)$ nicht ändert.

Sei $U^*$ eine reguläre Umgebung von $F \cup v \cup w_1 \cup \cdots \cup w_i$; ($U^*$ sei klein bezüglich der in (1) genannten Dinge). Sei $W^* = (W - \mathring{U}^*)$. Es ist dann $U(F \cup v \cup w)$ homöomorph zu der Vereinigung von $U^*$ und einer regulären Umgebung von

$$X^* = (U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \cdots \cup (w_n \cap W^*)$$

in $W^*$. Aber $X^*$ ist in $W^*$ isotop zu

$$(U^* \cap W^*) \cup (w_{i+1} \cap W^*) \cup \cdots \cup (w_j' \cap W^*) \cup \cdots \cup (w_n \cap W^*).$$

b) Im Beweis unserer Behauptung dürfen wir also $w$ durch $\tilde{w}$ ersetzen. Sei $U_j$ eine reguläre Umgebung von $v_j \cup \tilde{w}_j$ (in $M$). $U_j$ ist ein 3-Element; $\partial U_j \cap V$ und $\partial U_j \cap W$ sind je ein 2-Element; $U_j \cap F$ ist ein gelochter Torus. Da die $U_j$ paarweise disjunkt sind, und da $U(F \cup v \cup \tilde{w})$ homöomorph ist zu einer regulären Umgebung von $F \cup \cup U_j$, folgt die Behauptung.

**(2.3)** Sei $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung; seien $V$ und $W$ die Untermannigfaltigkeiten, in die $M$ von $F$ zerlegt wird. Sei $v$ ein gutes System von $n$ Meridianflächen in $V$, und sei $w$ ein $v$ zugeordnetes System; seien $U(v)$ und $U(w)$ reguläre Umgebungen von $v$ und $w$ in $M$. Sei

$$\tilde{V} = V - \mathring{U}(v), \quad \tilde{W} = \overline{(M - \tilde{V})}$$

$$W^* = W - \mathring{U}(w), \quad V^* = \overline{(M - W^*)}$$

$V$ wird von $v$ nicht zerlegt, daher ist $\tilde{V}$ eine Brezel, [9, Korollar 1]; dasselbe gilt für $W^*$. Andererseits sind nach (2.2) die Untermannigfaltigkeiten $\tilde{V}$ und $V^*$ isotop in $M$. Ist also $\tilde{F}$ die mit einer Orientierung versehene Fläche $\partial\tilde{V}$, so ist $(M, \tilde{F})$ eine Heegaard-Zerlegung. Ist

$(M, \bar{F}) \approx (M, -\bar{F})$, dann ist sicherlich die Äquivalenzklasse von $(M, \bar{F})$ durch $(M, F)$ und $v$ oder durch $(M, F)$ und $w$ bereits festgelegt. Ist $(M, \bar{F}) \not\approx (M, -\bar{F})$, dann ist aber von den beiden Orientierungen von $F$ eine ausgezeichnet, nämlich durch die folgende Vorschrift: Ist $V$ die durch die Orientierungen von $M$ und $F$ bestimmte "erste" der Teilmannigfaltigkeiten $V$ und $W$, dann sei $\bar{V}$ die durch die Orientierungen von $M$ und $\bar{F}$ bestimmte "erste" der Teilmannigfaltigkeiten $\bar{V}$ und $\bar{W}$.

Es ist also in jedem Falle durch $(M, F)$ und $v$ *oder* durch $(M, F)$ und $w$ eine Heegaard-Zerlegung $(M, \bar{F})$ bis auf Äquivalenz festgelegt; wir bezeichnen sie als eine Heegaard-Zerlegung, die aus $(M, F)$ durch *Reduktion an* $v$ (bzw. durch Reduktion an $w$) hervorgeht, und wir schreiben

$$(M, \bar{F}) \approx (M, F(v)), \quad \text{bzw.} \quad (M, \bar{F}) \approx (M, F(w)).$$

(Vorsicht: Es ist zwar $(M, (-F)(v)) \approx (M, -(F(v)))$; aber aus $(M, F) \approx (M, -F)$ kann *nicht* geschlossen werden, daß $(M, F(v)) \approx (M, -F(v))$.)

Aus der vorstehenden Diskussion ziehen wir die Folgerung:

**(2.4)** Lemma. *Sei $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung; $M$ werde von $F$ in die Teile $V$ und $W$ zerlegt. Seien $v$ und $v'$ gute Systeme von Meridianflächen in $V$ (wobei möglicherweise $v \cap v' \neq \emptyset$). Es gebe ein System $w$ in $W$, das sowohl ein $v$ zugeordnetes, als auch ein $v'$ zugeordnetes System ist. Dann ist $(M, F(v)) \approx (M, F(v'))$.*

Als Korollar aus unseren Definitionen erhalten wir den ersten Teil des folgenden Lemmas:

**(2.5)** Lemma. *Seien $(M, F_1)$ und $(M, F_2)$ stabil äquivalente Heegaard-Zerlegungen.*

(1) *Dann gibt es eine Heegaard-Zerlegung $(M, F)$, und es gibt gute Systeme $v$ und $x$ von Meridianflächen in $V$, ein $v$ zugeordnetes System $w$, und ein $x$ zugeordnetes System $y$ in $W$, (wobei $V \cup W = M$, $V \cap W = F$), so daß $(M, F(v)) \approx (M, F_1)$ und $(M, F(x)) \approx (M, F_2)$,*

(2) *und so daß gilt $v \cap x = \emptyset$ und $w \cap y = \emptyset$.*

*Beweis zu* (2): Seien die Daten $(M, F)$, $v$, $w$, $x$, $y$ gegeben wie in (1) beschrieben. Wir zeigen, wie wir neue Daten erhalten können, für die auch (2) richtig ist.

Wir dürfen annehmen, daß wir (gegebenenfalls nach einer kleinen Deformation von $(x \cup y, (x \cup y) \cap F)$ in $(M, F)$) folgende "allgemeine Lage" haben:

$$x \cap y \cap (v \cup w) = \emptyset; \quad v \cap w \cap (x \cup y) = \emptyset;$$

$v \cap x$ und $w \cap y$ sind Systeme von paarweise disjunkten einfachen Kurven und Bögen, so daß

$$v \cap x \cap F = \partial(v \cap x) \quad \text{und} \quad w \cap y \cap F = \partial(w \cap y).$$

a) Es gebe geschlossene Kurven in $v \cap x$. Dann gibt es ein 2-Element $D$ in $\mathring{v}$, so daß $D \cap x = \partial D$. $\partial D$ berandet ein 2-Element $D'$ auf $x$. Wir konstruieren $x'$ aus $x$, indem wir $D'$ durch $D$ ersetzen und dann $D$ von $v$ abheben. Nach (2.4) ist

$$(M, F(x')) \approx (M, F(x)).$$

b) Es gebe einen Bogen $k$ in $v \cap x$. Die Komponenten $v_1, \ldots, v_n$ von $v$ und $w_1, \ldots, w_n$ von $w$ seien so numeriert, daß $\partial v_h \cap \partial w_i$ genau ein Schnitt- (und Durchsetzungs-) punkt ist, wenn $h = i$, und leer, wenn $h > i$. $k$ liege in $v_j$. Sei $U(k)$ eine reguläre Umgebung von $k$ in $M$. Sei $\bar{w}$ ein 2-Element in $U(k) \cap \mathring{V}$, so daß $\bar{w} \cap \partial U(k) = \partial\bar{w}$ in $\partial U(k) \cap V$ nicht zusammenziehbar ist und $v_j$ in nur zwei Punkten trifft. Es ist offensichtlich, daß $W' = W \cup U(k)$ eine Brezel ist; dasselbe gilt für $V' = V - \mathring{U}(k)$, da der Bogen $k$ in dem 2-Element $v_j$ lag. Wir definieren $F' = V' \cap W'$, und nehmen für $F'$ die von $F' \cap F$ induzierte Orientierung. Wir definieren ferner

$$v_i' = v_i \quad \text{und} \quad w_i' = w_i, \quad \text{für} \quad i < j$$

$$v_{i+1}' = v_i \quad \text{und} \quad w_{i+1}' = w_i, \quad \text{für} \quad i > j,$$

Von den beiden 2-Elementen $v_j \cap V'$ bezeichnen wir mit $v_j'$ dasjenige, das den Schnittpunkt mit $w_j$ enthält, und mit $v_{j+1}'$ das andere. Schließlich setzen wir

$$w_j' = w_j \quad \text{und} \quad w_{j+1}' = \bar{w}.$$

$v'$ ist ein gutes System von $(n + 1)$ 2-Elementen in $V'$, und $w'$ ist ein $v'$ zugeordnetes System; es ist klar, daß

$$(M, F'(v')) \approx (M, F(v)).$$

Ebenso wie $v'$ und $w'$ aus $v$ und $w$, konstruieren wir $x'$ und $y'$ aus $x$ und $y$; (dabei nehmen wir für die neue Komponente von $y'$ ein ebensolches 2-Element wie $\bar{w}$, das aber zu $\bar{w}$ disjunkt ist).

Bei jedem der Schritte (a) und (b) wird die Anzahl der Komponenten von $(v \cap x) \cup (w \cap y)$ mindestens um 1 kleiner; nach endlich vielen Schritten ist also $v \cap x = \emptyset$. Auf die gleiche Weise erreichen wir, daß $w \cap y = \emptyset$.

## §3. HEEGAARD-ZERLEGUNGEN DER 3-SPHÄRE

**(3.1)** SATZ. *Sei $(M, G)$ eine minimale Heegaard-Zerlegung der 3-Sphäre. Dann hat $G$ das Geschlecht* 0.

Es ist wohl nie bezweifelt worden, daß dieser Satz richtig ist. Einige Zeit galt er anscheinend für offensichtlich richtig (vgl. [4, Fußnote S. 193]). Daß doch etwas zu beweisen ist, wird von Reidemeister angedeutet, [4, S. 192]. Hinweise aus letzter Zeit sind eher vorsichtig, [2, (16.4)], [7, Conjecture A].

In [4, S. 192] ist ein Beweisansatz skizziert. Es scheint aber fraglich, ob die vorgeschlagene Methode (Untersuchung von Taillenschnitten) sich zu einem Beweis ausbauen läßt. Denn auf diesem Wege nutzt man nicht wirklich aus, daß die unterliegende Mannigfaltigkeit die 3-Sphäre ist, eigentlich vergleicht man nur eine unbekannte Heegaard-Zerlegung mit einer Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht $\leqslant 1$; es besteht also die Gefahr, daß man gleichzeitig versucht, das in (4.4.1) beschriebene Beispiel zu widerlegen.

*Beweis von* (3.1): Sei $(M, G')$ die Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 0. Nach Reidemeister und Singer sind $(M, G)$ und $(M, G')$ stabil äquivalent. Daher gibt es nach (2.5) eine Heegaard-Zerlegung $(M, F)$ mit den folgenden Eigenschaften:

Seien $V$ und $W$ die Untermannigfaltigkeiten $V \cup W = M$, $V \cap W = F$; sei $n$ das Geschlecht von $F$. Es gibt ein gutes System $v = v_1 \cup \cdots \cup v_n$ in $V$, und ein $v$ zugeordnetes System $w = w_1 \cup \cdots \cup w_n$ in $W$. Es gibt ein gutes System $x = x_1 \cup \cdots \cup x_m$ in $V$, und ein $x$ zugeordnetes System $y$ in $W$, so daß $(M, G) \approx (M, F(x))$. Es ist $v \cap x = \emptyset$ und $w \cap y = \emptyset$.

Wir nehmen an, unter allen Heegaard-Zerlegungen mit diesen Eigenschaften sei $(M, F)$ so gewählt, daß $n$ möglichst klein ist. Wir nehmen ferner, an daß $n > 0$. Wir zeigen, daß eine dieser Annahmen falsch ist.

Nach einer kleinen Deformation von $(x \cup y, (x \cup y) \cap F)$ in $(M, F)$, falls notwendig, gilt zusätzlich, daß $\partial v \cap \partial y$ und $\partial x \cap \partial w$ nur aus isolierten (Durchsetzungs-) Punkten bestehen. Die Komponenten von $v, w, x, y$ seien so numeriert, daß $\partial v_i \cap \partial w_j$, bzw. $\partial x_i \cap \partial y_j$ genau ein Schnitt- (und Durchsetzungs-) punkt ist, wenn $i = j$, und leer, wenn $i > j$.

**(3.2)** *Durch Abänderung von $y$ allein erreichen wir, daß $y \cap v_n$ aus höchstens einem Punkt besteht,* (und daß weiterhin $y \cap w = \emptyset$). Beweis durch Induktion über die Anzahl der Punkte $y \cap v_n$.

1. *Fall: Die Komponente $y_j$ von $y$ trifft $v_n$ in mindestens zwei Punkten.* Da $v_n \cap w$ ein einziger Punkt ist, gibt es einen zu $w$ disjunkten Bogen $k$ in $\partial v_n$, so daß $k \cap y_j = \partial k$. Sei $U(w)$ eine reguläre Umgebung von $w$ in $M$; es ist $y_j \cup k$ in $W - U(w)$ enthalten. $W - \mathring{U}(w)$ ist ein 3-Element und wird von $y_j$ in zwei 3-Elemente zerlegt, (an dieser Stelle nutzen wir aus, daß $M$ die 3-Sphäre ist). Daher gibt es ein 2-Element $D$ in $W - U(w)$, so daß $D \cap \partial W = k$, und $D \cap y_j = \partial D \cap y_j = \overline{(\partial D - k)}$. Nach einer auf $\partial D$ konstanten Deformation von $D$ (und nachdem eventuell auftretende geschlossene Schnittkurven in der üblichen Weise entfernt wurden) ist außerdem $D \cap y$ ein System disjunkter einfacher Bögen, von denen keiner auf $D \cap y_j$ endet; folglich dürfen wir annehmen (nachdem wir gegebenenfalls zu einer andern Komponente $y_j$ von $y$ übergegangen sind), daß $D \cap y_j = D \cap y$.

Sei $U(D \cup y_j)$ eine reguläre Umgebung von $D \cup y_j$ in $M$. $W \cap \partial U(D \cup y_j)$ besteht aus drei 2-Elementen. Eines von diesen schneidet $v_n$ in ebensoviel Punkten wie $y_j$ und ist in $W$ isotop zu $y_j$. Seinen $y_j^1$ und $y_j^0$ die beiden andern. $y_j^1 \cup y_j^0$ und $v_n$ schneiden einander in 2 Punkten weniger als $y_j$ und $v_n$. Für jedes $i$ besteht $(y_j^1 \cup y_j^0) \cap x_i$ aus ebensoviel Punkten wie $y_j \cap x_i$. Insbesondere ist $(y_j^1 \cup y_j^0) \cap x_j$ genau ein Punkt; der liege in $y_j^1$. Wir ersetzen $y_j$ durch $y_j^1$.

2. *Fall: Jede Komponente von $y$ trifft $v_n$ in höchstens einem Punkt; aber $y \cap v_n$ besteht aus mindestens zwei Punkten.* Dann gibt es einen zu $w$ disjunkten Bogen $k$ in $\partial v_n$, so daß

$$\partial k = k \cap y = (k \cap y_i) \cup (k \cap y_j);$$

sei etwa $i < j$. Sei $U(y_i \cup k \cup y_j)$ eine reguläre Umgebung von $y_i \cup k \cup y_j$ in $M$. $W \cap \partial U(y_i \cup k \cup y_j)$ besteht aus drei 2-Elementen. Je eines von diesen ist in $W$ isotop zu $y_i$ bzw. $y_j$; sei $y_j'$ das dritte. Es ist $y_j' \cap v_n = \emptyset$. Die Schnittpunkte von $y_j'$ mit irgendeinem $x_h$ entsprechen denen von $y_i \cup y_j$ mit $x_h$. Also bleibt $y$ ein $x$ zugeordnetes System, wenn wir $y_j$ durch $y_j'$ ersetzen.

**(3.3)** 1. *Fall: Es ist $y \cap v_n \neq \emptyset$,* also nach (3.2) genau ein Punkt; der liege in $y_j$.

a) Wir ersetzen $x$ und $y$ durch $x'$ und $y'$, wie folgt:

$$x'_m = v_n \quad \text{und} \quad y'_m = y_j,$$
$$x'_i = x_i \quad \text{und} \quad y'_i = y_i, \quad \text{wenn} \quad i < j,$$
$$x'_{i-1} = x_i \quad \text{und} \quad y'_{i-1} = y_i, \quad \text{wenn} \quad j < i \leqslant m.$$

$x'$ ist ein gutes System von Meridianflächen, und $y'$ ist ein $x'$ zugeordnetes System; nach (2.4) ist

$$(M, F(x')) \approx (M, F(x)) \approx (M, G).$$

b) Wir behalten $x'$ und gehen von $y'$ zu $y''$ über, indem wir

$$y''_m = w_n$$

setzen, und $y''_i = y'_i$, für $i < m$; $y''$ ist ebenfalls ein $x'$ zugeordnetes System.

c) Sei $U(v_n \cup w_n)$ eine reguläre Umgebung von $v_n \cup w_n = x'_m \cup y''_m$ in $M$. Sei $\tilde{V} = V - \mathring{U}(v_n \cup w_n)$ und $\tilde{W} = W \cup U(v_n \cup w_n)$; sei $\tilde{F} = \tilde{V} \cap \tilde{W}$, mit der von $\tilde{F} \cap F$ induzierten Orientierung.

Da $v_n \cap w = v_n \cap w_n$, und $v_n \cap y'' = v_n \cap y''_m$, ist

$$w_i \cap \partial\tilde{W} = \partial w_i \quad \text{für} \quad i < n \quad \text{und}$$
$$y''_i \cap \partial\tilde{W} = \partial y''_i \quad \text{für} \quad i < m.$$

Also ist $\tilde{v} = \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{n-1} = v_1 \cap \tilde{V}, \ldots, v_{j-1} \cap \tilde{V}$ ein gutes System von $n-1$ Meridianflächen in $\tilde{V}$, und $\tilde{w} = w_1, \ldots, w_{n-1}$ ist ein $\tilde{v}$ zugeordnetes System.

Entsprechendes gilt für

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{m-1} = x'_1 \cap \tilde{V}, \ldots, x'_{m-1} \cap \tilde{V} \text{ und } \tilde{y} = y''_1, \ldots, y''_{m-1}.$$

Es ist $(M, \tilde{F}(\tilde{x})) \approx (M, F(x))$; ferner ist $\tilde{v} \cap \tilde{x} = \varnothing$ und $\tilde{w} \cap \tilde{y} = \varnothing$. Da $\tilde{F}$ kleineres Geschlecht als $F$ hat, haben wir einen Widerspruch zu unserer Wahl von $(M, F)$.

2. *Fall: Es ist* $y \cap v_n = \varnothing$. Wir definieren

$$x^*_{m+1} = v_n \quad \text{und} \quad y^*_{m+1} = w_n$$
$$x^*_i = x_i \quad \text{und} \quad y^*_i = y_i \quad \text{für} \quad i \leqslant m.$$

$x^*$ ist ein gutes System von $m+1$ Meridianflächen in $V$, und $y^*$ ist ein $x^*$ zugeordnetes System.

Es folgt $(M, G) \approx (M, F(x)) \approx (M, F(x^*)) \# (S^3, T)$, im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $(M, G)$ minimal ist.

## §4. BEMERKUNGEN

**(4.1)** Haken [1, §7] hat gezeigt: Sei $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung; es gebe in $M$ eine 2-Sphäre, die kein 3-Element berandet. Dann gibt es eine ebensolche 2-Sphäre, die $F$ in nur einer Kurve trifft. — Hieraus und aus (3.1) folgt, daß auch die Mannigfaltigkeiten $S^1 \times S^2 \# \cdots \# S^1 \times S^2$ nur die bekannten Heegaard-Zerlegungen besitzen.

**(4.2)** Sei $N$ eine Brezel, und sei $D$ ein System von 2-Elementen in $N$, das nur durch die Bedingung $D \cap \partial N = \partial D$ eingeschränkt ist. Eine Mannigfaltigkeit, die homöomorph ist zu einer regulären Umgebung von $D \cup \partial N$ in $N$, heißt eine *Hohlbrezel*, und die $\partial N$ entsprechende Randfläche heißt ihre *ausgezeichnete Randfläche*.

Sei $M$ eine orientierte Mannigfaltigkeit, und sei $F$ eine orientierte geschlossene Fläche im Innern von $M$, die $M$ in zwei Teile, $V$ und $W$, zerlegt, deren jeder eine Brezel ist oder eine Hohlbrezel mit $F$ als ausgezeichneter Randfläche; von $V$ und $W$ sei $V$ der durch die Orientierungen von $M$ und $F$ bestimmte "erste" Teil. Dann nennen wir $(M, F)$ eine *Heegaard-Zerlegung von M bezüglich der Partition* $(V \cap \partial M, W \cap \partial M)$ *von* $\partial M$. "Äquivalenz" wird definiert wie bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten; ebenso die Operation "$\#(S^3, T)$" und "stabile Äquivalenz".

Der Satz von Reidemeister und Singer gilt in der Form: Seien $(M, F)$ und $(M, F')$ Heegaard-Zerlegungen von $M$ bezüglich der Partition $(G_1, G_2)$ von $\partial M$, dann sind $(M, F)$ und $(M, F')$ stabil äquivalent. Der Paragraph 2 gilt nahezu wörtlich (von all den 2-Elementen muß natürlich verlangt werden, daß sie im Innern der Mannigfaltigkeit liegen).

**(4.3)** Das in (4.1) genannte Ergebnis von Haken gilt auch für Heegaard-Zerlegungen berandeter Mannigfaltigkeiten (in der Formulierung ist "nur" durch "höchstens" zu ersetzen); der Beweis ist ähnlich. Auf die gleiche Art zeigt man: Sei $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung; es gebe in $M$ ein 2-Element $D$, so daß $D \cap \partial M = \partial D$ auf $\partial M$ nicht ein 2-Element berandet. Dann gibt es ein ebensolches 2-Element, das $F$ in nur einer Kurve trifft. — Hieraus und aus (3.1) folgt: Ist $(M, F)$ eine minimale Heegaard-Zerlegung einer Brezel, dann ist $F$ parallel zu $\partial M$.

**(4.4)** Wir definieren einen andern Äquivalenzbegriff als den bisher benutzten, nämlich Homöomorphie von Paaren, mit Erhaltung beider Orientierungen; bei berandeten Mannigfaltigkeiten soll auch die Partition des Randes respektiert werden. (Ob oder wie weit die beiden Äquivalenzbegriffe übereinstimmen, ist völlig unbekannt.) Die zusammenhängende Summe macht dann die Äquivalenzklassen von Heegaard-Zerlegungen zu Elementen eines (kommutativen und assoziativen) Monoids.

(1) In diesem Monoid gilt *nicht* die Kürzungsregel. Sei z.B. $(M, F)$ eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1 eines Linsenraumes $\neq S^3$. $(M, F)$ ist (unter unserem neuen Äquivalenzbegriff) durch ein Paar teilerfremder ganzer Zahlen $(\alpha, \beta)$, $0 < \beta < \alpha$, charakterisiert. Da $(M, -F)$ charakterisiert ist durch $(\alpha, \beta')$, wobei $\beta\beta' \equiv 1 \bmod \alpha$, sind $(M, F)$ und $(M, -F)$ i.a. nicht äquivalent. Andererseits ist $(M, F) \# (S^3, T) \approx (M, -F) \# (S^3, T)$. Denn sei $D$ ein 2-Element in $F$, sei $U(F - \mathring{D})$ eine reguläre Umgebung von $F - \mathring{D}$ in $M$, und sei $G = \partial U(F - \mathring{D})$. Bei geeigneter Orientierung von $G$ ist $(M, G)$ ein Repräsentant sowohl für $(M, F) \# (S^3, T)$ als auch für $(M, -F) \# (S^3, T)$.

(2) Seien $(M, F)$ und $(M', F')$ Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 1 der Linsenräume (5, 2) und (7, 2). Durch Summenbildung erhalten wir vier Heegaard-Zerlegungen der orientierten Mannigfaltigkeit $M \# M'$: $(M, F) \# (M', F')$, $(M, F) \# (M', -F')$, usw. Es sind zwei Fälle denkbar: 1. Diese vier Heegaard-Zerlegungen fallen unter mehr als zwei

Äquivalenzklassen. 2. Sie fallen unter höchstens zwei Äquivalenzklassen. — Der erste Fall ist ein bißchen wahrscheinlicher als der zweite.

## LITERATUR

1. W. Haken: Some results on surfaces in 3-manifolds, erscheint in: *MAA Studies in Mathematics*, Vol. 5.
2. C. D. Papakyriakopoulos: Some problems on 3-dimensional manifolds, *Bull. Am. math. Soc.* **64** (1958), 317–335.
3. H. Poincaré: Cinquième complément à l'analysis situs, *Rc. Circ. mat. Palermo* **18** (1904), 45–110.
4. K. Reidemeister: Zur dreidimensionalen Topologie, *Abh. math. Semin. Univ. Hamburg* **9** (1933), 189–194.
5. H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.
6. J. Singer: Three-dimensional manifolds and their Heegaard-diagrams, *Trans. Am. math. Soc.* **35** (1933), 88–111.
7. J. Stallings: How not to prove the Poincaré conjecture. Topology Seminar Wisconsin 1965, *Ann. Math. Stud.* No. 60.
8. J. H. C. Whitehead: On certain sets of elements in a free group, *Proc. Lond. math. Soc.* **41** (1936), 48–56.
9. H. Zieschang: Über einfache Kurven auf Vollbrezeln, *Abh. math. Semin. Univ. Hamburg* **25** (1962), 231–250.