Topology Vol. 6, pp. 505-517. Pergamon Press, 1967. Printed in Great Britain

GRUPPEN MIT ZENTRUM UND 3-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN

FRIEDHELM WALDHAUSEN

(*Eingegangen* 24 *Februar* 1967)

SEI M eine orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit. Ist M homöomorph zu einem Seifertschen Faserraum mit orientierbarer Zerlegungsfläche, dann besitzt $\pi_1(M)$ ein nichttriviales Zentrum (sofern nicht $\pi_1(M)$ selbst trivial ist). Wir zeigen, daß hiervon auch die Umkehrung gilt, (4.1) — unter folgenden zusätzlichen Voraussetzungen: (1) M ist irreduzibel; (2) Es ist entweder $H_1(M)$ nicht endlich oder $\pi_1(M)$ ein nichttriviales freies Produkt mit Amalgamation (oder beides). Mit der Voraussetzung (1) umgehen wir in der üblichen Weise die Poincarésche Vermutung. Die Voraussetzung (2) ist vermutlich ebenfalls überflüssig; sie ist für eine irreduzible Mannigfaltigkeit äquivalent zu der Bedingung, daß es in M eine Fläche F gebe, $F \cap \partial M = \partial F$, die keine 2-Sphäre ist, nicht rand-parallel, und für die $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$, (1.2). Sobald man diese Fläche F hat, verläuft der Beweis von (4.1) nicht viel anders als der des entsprechenden Resultats für Knoten, [1]; andererseits beruht aber unser Beweis wesentlich auf der Existenz einer solchen Fläche, er läßt sich also sicher nicht auf irreduzible Mannigfaltigkeiten übertragen, in denen es keine solche Fläche gibt. — In §2 zeigen wir an einem Beispiel, daß eine in diesem Sinne "zu einfache" Mannigfaltigkeit nicht notwendig eine endliche Fundamentalgruppe haben muß. Die Fundamentalgruppe der angegebenen Mannigfaltigkeit enthält sogar eine Torusgruppe als Untergruppe; dies Beispiel zeigt daher auch, daß es eine Verallgemeinerung des Sphärensatzes auf geschlossene Flächen positiven Geschlechts nicht gibt.

§0. NOTATIONEN

Eine "Mannigfaltigkeit" hat eine feste semilineare Struktur; "Abbildungen" (insbesondere Einbettungen etc.) sind semilinear.

Alle 3-Mannigfaltigkeiten sind orientierbar. 2-Mannigfaltigkeiten (oder "Flächen") sind orientierbar, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist.

Fast alle Objekte sind kompakt; in den Ausnahmefällen ist das Gegenteil entweder ausdrücklich zugelassen oder aus einer Konstruktion ersichtlich.

∂X ist der Rand der Mannigfaltigkeit X.

Wird von einer Fläche F in der Mannigfaltigkeit M gesprochen, und geht nicht aus dem Zusammenhang das Gegenteil hervor, dann ist $F \cap \partial M = \partial F$.

"Homologie" oder "Homotopie" von Kurven bezieht sich auf die Homologie oder Homotopie eines die Kurven enthaltenden Raumes, der angegeben wird, wenn dies notwendig ist; dabei ist i.a. von der Orientierung der Kurven abgesehen. — Homologiegruppen haben ganzzahlige Koeffizienten, wenn keine andern angegeben werden.

Das Symbol $[\partial F]$ bezeichnet das Bild des von der (orientierten) Fläche $F, (F \cap \partial M = \partial F)$ in der Mannigfaltigkeit M dargestellten 2-Zykels unter dem Randhomomorphismus.

Ebenfalls mit eckigen Klammern bezeichnen wir Literaturhinweise und abgeschlossene Intervalle.

$I = [0, 1]$ ist das Einheitsintervall; D und E bezeichnen 2- und 3-Element.

Die abgeschlossene Hülle von $X - Y$ wird mit $\overline{(X - Y)}$ bezeichnet.

Definitionen, die Seifertsche Faserräume betreffen, finden sich in §3.

§1. EXISTENZ INKOMPRESSIBLER FLÄCHEN

LEMMA 1.1. *Sei K ein (nicht notwendig endliches) Polyeder. L sei ein (nicht notwendig zusammenhängender) Unterkomplex von K. Es gebe eine Einbettung von $L \times I$ in K, so daß $L = L \times 1/2$, daß $L \times I$ in K abgeschlossen ist, und daß $L \times I$ Umgebung ist von jedem $L \times \alpha$, $\alpha \in \mathring{I}$. Ferner sei*

$$ker(\pi_j(L) \to \pi_j(K)) = 0, j = 1, 2, \text{ und}$$
$$\pi_2(K - L) = \pi_3(K) = 0.$$

M sei eine orientierbare kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. $f: M \to K$ sei eine Abbildung.

Dann gibt es eine zu f homotope Abbildung g mit den Eigenschaften:

(1) *g ist transversal bzgl. L, d.h. es gibt eine Umgebung $g^{-1}(L) \times I'$ von $g^{-1}(L)$, so daß $g(x, y) = (g(x), y)$, für $x \in g^{-1}(L)$, $y \in I' \subset I$.*

(2) *$g^{-1}(L)$ ist eine orientierbare kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, und es ist $g^{-1}(L) \cap \partial M = \partial(g^{-1}(L))$.*

(3) *Sei F eine Komponente von $g^{-1}(L)$; dann ist $ker(\pi_j(F) \to \pi_j(M)) = 0, j = 1, 2$.*

(4) *War $f \mid \partial M$ transversal bzgl. L, dann kann die Homotopie von f zu g so gewählt werden, daß sie auf ∂M konstant ist.*

Dies Lemma stammt i.w. von J. Stallings ([14], Beweis zu Satz 1).

Beweis zu (1) *und* (2): Es gibt eine Triangulation von K und (endliche) Triangulationen von M und I, so daß $f^{-1}(L \times I)$ Unterkomplex von M ist, und daß sowohl die Abbildung $f^{-1}(L \times I) \to L \times I$, als auch die zusammengesetzte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} & L \times I & \\ f^{-1}(L \times I) \nearrow & \longrightarrow & \searrow I \end{array}$$

simplizial ist ($L \times I \to I$ ist die natürliche Projektion). Wir wählen $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ so, daß $[\alpha, \gamma]$ kein 0-Simplex enthält. Dann können wir induktiv über die Simplizes von

$f^{-1}(L \times I)$ in $f^{-1}(L \times [\alpha, \gamma])$ eine Struktur als Linienbündel definieren (und zwar so, daß jede Faser in einem Simplex liegt und in dessen affiner Struktur eine Gerade ist); dies Linienbündel ist ein Produktbündel $G' \times [\alpha, \gamma]$, mit $G' = f^{-1}(L \times \alpha)$; insbesondere ist G' eine orientierbare 2-Mannigfaltigkeit.

$g : M \to K$ werde definiert als f außerhalb $G' \times [\alpha, \gamma]$; für $x \in G'$ $y \in [\alpha, \gamma]$ sei

$$g(x, y) = \begin{cases} (f(x, \alpha), y); \text{ (mit } L \times \alpha \ni f(x, \alpha) \to L); & \text{wenn } y \leq \beta \\ f(x, y'); \text{ wobei } (\gamma - \beta)(\gamma - y') = (\gamma - \alpha)(\gamma - y); & \text{wenn } \beta \leq y. \end{cases}$$

$G = G' \times (\alpha + \beta)/2$ und $G \times I' = G' \times [\alpha, \beta]$ sind die gesuchten Urbilder. G ist kompakt, da $L \times (\alpha + \beta)/2$ abgeschlossen in K ist; es ist $G \cap \partial M = \partial G$, da $G \times I'$ Umgebung von G ist. — Schließlich ersetzen wir noch g durch $h \circ g$; dabei ist $h : K \to K$ die Identität außerhalb $L \times I$, und $h \mid L \times I$ bildet jede Faser homöomorph so auf sich ab, daß $[\alpha, \beta]$ linear in $[(1 + \alpha - \beta)/2, (1 - \alpha + \beta)/2]$ übergeht.

Beweis zu (3): Wir nehmen im Folgenden an, eine der beiden Behauptungen aus (3) sei nicht richtig, und zeigen, daß wir dann g so abändern können, daß $G = g^{-1}(L)$ einfacher wird.

1. *Fall.* Sei $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) \neq 0$ für eine Komponente F von G. Es folgt aus dem Schleifensatz und dem Dehnschen Lemma, daß es ein 2-Element D in M gibt, so daß $D \cap F = \partial D$ und $\partial D \not\simeq 0$ in F. Eine einfache Argumentation zeigt, daß wir annehmen dürfen, $D \cap G = D \cap F = \partial D$, (dabei müssen wir evtl. zu einer andern Komponente F von G übergehen). — Wir deformieren D so, daß $D \subset \dot{M}$, daß $D \cap (G \times I) = D \cap (F \times I)$, und daß $D \cap (F \times I)$ ein aus "Halbstrecken" bestehender Kreisring ist: $D \cap (F \times I) = \partial D \times (I/2)$. Sei $\tilde{D}$ das 2-Element $\overline{(D - (D \cap F \times I))}$. Das 3-Element E in $\dot{M}$ sei eine Umgebung von D, und zwar sei $\overline{(E - (E \cap (G \times I)))}$ ein 3-Element, $E \cap F$ eine Kreisring-Umgebung von ∂D in F, und $E \cap (G \times I) = (E \cap F) \times I$. — Unser Ziel ist, den Kreisring $E \cap F$ zu ersetzen durch zwei 2-Elemente, die i.w. $\overline{(\partial E - (\partial E \cap F \times I))}$ sind.

Es ist $g(\partial D) \simeq 0$ in L, da $\ker(\pi_1(L) \to \pi_1(K)) = 0$. Also gibt es eine bzgl. L transversale Homotopie von g (d.h. eine Homotopie über lauter transversale Abbildungen), so daß hinterher der Kreisring $E \cap F$ durch g in den Punkt $z \in L$ abgebildet wird; $g(\partial \tilde{D})$ ist dann ebenfalls ein Punkt, $z_0 \in L \times \partial I$, und etwa $z_0 \in L \times 0$. $g \mid \tilde{D} : (\tilde{D}, \partial \tilde{D}) \to (K - L, z_0)$ definiert nun eine singuläre 2-Sphäre: Da $\pi_2(K - L) = 0$, können wir g so deformieren, daß $g^{-1}(L \times \dot{I})$ ungeändert bleibt, und daß $\overline{(E - (E \cap F \times I))}$ durch g in z_0 abgebildet wird.

Also haben wir eine induzierte Abbildung $g \mid E : E \to I$, mit $(g \mid E)^{-1}(1/2) = E \cap F$ und $(g \mid E)(\overline{(E - (E \cap F \times I))}) = 0$. Sei g' der Graph dieser Abbildung; g' ist eine Einbettung

$$g' : E \to E \times I \subset E \times R^+.$$

Sei α ein innerer Punkt von E, und sei β eine große positive Zahl. Sei E' der Kegel von $\alpha \times \beta$ zu $g'(E)$; wenn β groß genug ist, dann ist E' ein 4-Element mit $g'(E)$ als "unterer Hälfte" des Randes. Wir ersetzen nun $g'(E)$ durch

$$\partial(E' \cap (E \times I)) - g'(\dot{E}).$$

Damit ist eine neue Abbildung $g \mid E : E \to I$ definiert. Sie ist homotop zur ursprünglichen

Abbildung und stimmt mit dieser auf ∂E überein. $(g\,|\,E)^{-1}(1/2)$ besteht nun aus zwei 2-Elementen. Transversalität ist leicht wiederherzustellen.

2. *Fall.* Sei $\ker(\pi_2(F) \to \pi_2(M)) \neq 0$ für eine Komponente F von G. F ist eine 2-Sphäre. Da $\pi_2(M)$ keine Elemente endlicher Ordnung hat, [13], ist F zusammenziehbar in M. Daher berandet F ein Homotopie-3-Element E_1 in M; (in der universellen Überlagerung von M muß ein über F liegendes Exemplar beranden; [17]). Durch Dehnen von E_1 erhalten wir ein Homotopie-3-Element E_2, so daß $F \subset E_2$, und, etwa, $\partial E_2 \subset F \times 0$.

Da $\ker(\pi_2(L) \to \pi_2(K)) = 0$, gibt es eine transversale Homotopie von g, so daß hinterher F durch g in einen Punkt $z \in L$ abgebildet wird. Es ist dann auch $g(\partial E_2)$ ein Punkt z_2 in $L \times 0$. Unsere neue Abbildung g bildet E_2 in z_2 ab; sie ist homotop zur ursprünglichen Abbildung, da $\pi_3(K) = 0$. Sie ist bereits transversal. Und aus $g^{-1}(L)$ ist (mindestens) F verschwunden.

Beweis zu (4): a) Sei $V(\partial M) = \partial M \times I$ ein Kragen von ∂M. Nach einer auf ∂M konstanten Deformation von f ist $f(x, y) = f(x, 0)$, $x \in \partial M$, $y \in I$. $f\,|\,V$ ist nun transversal bzgl. L.

b) Wir betrachten weiterhin die Mannigfaltigkeit $M' = \overline{(M - V)}$. $f\,|\,\partial M'$ ist transversal bzgl. L, etwa mit einem Intervall $[\alpha', \beta']$, vgl. (1). Bei der Konstruktion in (1) wählen wir $[\alpha, \gamma]$ als Teilintervall von $[\alpha', \beta']$. Das Produktbündel $G' \times [\alpha, \gamma]$ kann dann so konstruiert werden, daß in $\partial M'$ die Fasern sich vertragen mit den dort bereits vorhandenen. Die Deformation, mit der die Abbildung $g\,|\,M'$ in (1) definiert wird, ist konstant auf $\partial M'$. Und schließlich kann die Homotopie von $g\,|\,M'$ am Schluß von (1) ausgedehnt werden zu einer Homotopie von $g : M$, die eine fasernweise Homotopie ist, da wo sie nicht konstant ist, und die konstant ist auf ∂M.

c) Die Deformationen in (3) sind konstant auf ∂M.

SATZ 1.2. *Sei M eine irreduzible orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit.*

(1) *Ist $H_1(M)$ nicht endlich, dann gibt es in M eine nicht-zerlegende (orientierbare, kompakte) Fläche F, so daß $F \cap \partial M = \partial F$ und $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$. Ist zusätzlich $\partial M \neq \varnothing$,* dann kann F so gewählt werden, daß $H_1(\partial M) \ni [\partial F] \neq 0$.

(2) *Ist $\pi_1(M)$ ein nichttriviales freies Produkt mit Amalgamation, $\pi_1(M) \approx A \underset{C}{*} B$, dann gibt es in M eine Fläche F, die keine 2-Sphäre ist, so daß $F \cap \partial M = \partial F$, $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$, und daß $\pi_1(F)$ in $\pi_1(M)$ konjugiert ist zu einer Untergruppe von C.*

(3) *Gibt es eine nicht-zerlegende (etc.) Fläche in M, dann ist $H_1(M)$ nicht endlich.*

(4) *Ist M geschlossen, und ist F eine zerlegende Fläche in M, so daß $\pi_1(F) \neq 0$ und $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$, dann ist $\pi_1(M)$ ein nichttriviales freies Produkt mit Amalgamation, $\pi_1(M) \approx A \underset{C}{*} B$,* mit $C \approx \pi_1(F)$.

KOROLLAR. *Sei M wie in* (1.2); *sei x ein Punkt in M.*

Genau dann, wenn $H_1(M)$ nicht endlich ist oder $\pi_1(M) \approx A \underset{C}{*} B$ in nichttrivialer Weise, gibt es *in M eine orientierbare kompakte Fläche F, $F \cap \partial M = \partial F$, $ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$, so daß $(F, \partial F) \to (M, \partial M)$ nicht homotop ist zu einer Abbildung $(F, \partial F) \to (x \cup \partial M, \partial M)$.*

Denn ist M wie in (1.2), $\partial M \neq \varnothing$, und $H_1(M)$ endlich, dann ist M das 3-Element.

Bemerkungen. a) Es ist in (2) nicht behauptet, daß F zerlegend gewählt werden kann. b) Die Aussage in (2) "$\pi_1(F)$ ist in $\pi_1(M)$ konjugiert zu einer *Unter*gruppe von C" kann nicht verschärft werden. Denn seien F', F'' disjunkte Flächen in N, deren jede N zerlegt, so daß $\ker(\pi_1(F') \to \pi_1(N)) = \ker(\pi_1(F'') \to \pi_1(N)) = 0$. Seien N_1, N_2, N_3 die Teile, in die N von $F' \cup F''$ zerschnitten wird; die Numerierung sei so, daß $F' \cup F'' \subset \partial N_2$. Dann its $\pi_1(N) \approx A \underset{C}{*} B$, mit $A \approx \pi_1(N_1 \cup N_2)$, $C \approx \pi_1(N_2)$, $B \approx \pi_1(N_2 \cup N_3)$.

Den unten gegebenen Beweis zu (2) verdanke ich D. B. A. Epstein, der ihn wiederum J. Stallings zuschreibt.

Beweis von (1.2).

zu (1): Es gibt einen nichttrivialen Homomorphismus

$$\pi_1(M) \to H_1(M) \to Z \approx \pi_1(S^1).$$

Da S^1 asphärisch ist, gibt es eine Abbildung $f: M \to S^1$, die diesen Homomorphismus induziert. Sei y ein Punkt in S^1. Nach (1.1) dürfen wir annehmen, daß $G = f^{-1}(y)$ ein System orientierbarer Flächen ist, und daß $\ker(\pi_j(F) \to \pi_j(M)) = 0$, $j = 1, 2$, für jede Komponente F von G. Sind M und S^1 orientiert, dann läßt sich G so orientieren, daß der Homomorphismus $H_1(M) \to \pi_1(S^1)$ durch die Schnittzahl mit G gegeben ist. Daher gibt es eine Komponente von G, die nicht zerlegt.

Da M irreduzibel ist, und $\pi_1(M) \neq 0$, gibt es in ∂M keine 2-Sphäre. Es folgt, daß $\text{Bild}(H_1(\partial M) \to H_1(M))$ nicht endlich ist, wenn $\partial M \neq \varnothing$; denn andernfalls zerfiele die Homologiefolge von M mit rationalen Koeffizienten in die beiden exakten Folgen

$$0 \to H'_3(M, \partial M) \to H'_2(\partial M) \to H'_2(M) \to H'_2(M, \partial M) \to H'_1(\partial M) \to 0$$

$$0 \leftarrow H'_0(M) \leftarrow H'_0(\partial M) \leftarrow H'_1(M, \partial M) \leftarrow H'_1(M) \leftarrow 0.$$

Jede der vier Gruppen der unteren Folge ist isomorph zu der darüberstehenden Gruppe der oberen Folge; also würde folgen, daß $H'_1(\partial M) = 0$ wäre.

Daher können wir in der obigen Konstruktion den Homomorphismus $H_1(M) \to \pi_1(S^1)$ so wählen, daß auch der zusammengesetzte Homomorphismus $H_1(\partial M) \to H_1(M) \to \pi_1(S^1)$ nichttrivial ist. Da $H_1(\partial M) \to \pi_1(S^1)$ via Schnittzahl von $[\partial G] \in H_1(\partial M)$ induziert wird, ist dann $[\partial G] \neq 0$; daher auch $[\partial F] \neq 0$ für eine Komponente F von G.

zu (2): Da M irreduzibel und orientierbar ist, ist nach dem Sphärensatz $\pi_2(M) = 0$. Da $\pi_1(M)$ nicht endlich ist, folgt mit Hurewicz, daß M asphärisch ist. — Seien M_A, M_B, M_C die zu den Untergruppen A, B, C von $\pi_1(M)$ gehörenden Überlagerungsräume; sie sind sämtlich asphärisch. Wir bilden die Abbildungszylinder zu den zu den Inklusionen $A \leftarrow C$ und $C \to B$ gehörenden Projektionen $M_A \leftarrow M_C$ und $M_C \to M_B$ und kleben sie an M_C zusammen zu dem Komplex M'. Die Mayer-Vietoris-Folge in der universellen Überlagerung von M' zeigt, daß M' asphärisch ist; da auch $\pi_1(M') \approx \pi_1(M)$, ist M' homotopieäquivalent zu M. ([2]). Sei $f: M \to M'$ eine Abbildung, die eine Homotopieäquivalenz induziert. Nach (1.1) dürfen wir annehmen, daß $f^{-1}(M_C) = G$ ein System orientierbarer Flächen ist, und daß $\ker(\pi_j(F) \to \pi_j(M)) = 0$, $j = 1, 2$, für jede Komponente F von G. Es ist $G \neq \emptyset$. Denn nach Voraussetzung ist weder $C \to A$ noch $C \to B$ surjektiv; daher ist eine Untergruppe von A bzw. B eine echte Untergruppe von $A \underset{C}{*} B$, und eine solche kann nicht zu $A \underset{C}{*} B$ konjugiert sein.

zu (4): Es genügt zu zeigen: Ist N eine orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit genau einer Randfläche, F, und ist $\pi_1(F) \to \pi_1(N)$ bijektiv, dann ist F eine 2-Sphäre.

Da der Hurewicz-Homomorphismus natürlich ist, ist dann auch $H_1(F) \to H_1(N)$ bijektiv. Daher zerfällt die Homologiefolge von (N, F) in die exakten Folgen

$$0 \leftarrow H_0(N) \leftarrow H_0(F) \leftarrow H_1(N, F) \leftarrow 0$$

$$0 \to H_3(N, F) \to H_2(F) \to H_2(N) \to H_2(N, F) \to 0.$$

$$0 \leftarrow H_1(N) \leftarrow H_1(F) \leftarrow 0$$

Je zwei übereinanderstehende der nicht mit "0" bezeichneten Gruppen haben gleiche Bettische Zahl. Also ist $H_1'(F)$ endlich.

§2. EIN BEISPIEL FÜR DIE NICHT-EXISTENZ INKOMPRESSIBLER FLÄCHEN

In diesem Paragraphen ist M ein orientierbarer geschlossener Seifertscher Faserraum (vgl. §3), dessen Zerlegungsfläche die 2-Sphäre ist, und der genau drei Ausnahmefasern hat; ferner ist $H_1(M)$ endlich, aber $\pi_1(M)$ nicht endlich. M existiert, ([11], Satz 9, Satz 12).

Definition 2.1. Sei N eine orientierbare kompakte 3-Mannigfaltigkeit, und sei F eine orientierbare kompakte Fläche in N, so daß $F \cap \partial N = \partial F$. F ist *kompressibel* in jedem der beiden folgenden Fälle:

(1) Es gibt ein 2-Element D in N, so daß $D \cap F = \partial D$, und daß ∂D nicht Rand eines 2-Elements auf F ist.

(2) Es gibt ein 3-Element E in N, so daß $\partial E = F$.

"*inkompressibel*" ist die Negation von "kompressibel".

X SATZ 2.2. (1) *Jede orientierbare geschlossene Fläche in M ist kompressibel.*

(2) *Es gibt eine Abbildung des Torus nach $M, f: T \to M$, so daß $\ker(f_*: \pi_1(T) \to \pi_1(M)) = 0$.*

Ich möchte Herrn Dr. Epstein und Herrn Prof. Higman für Diskussionen über dieses Beispiel danken. Der ursprüngliche Beweis zu (1) entstand in Diskussionen mit D. B. A. Epstein.

Beweis von (2.2).

zu (1): Seien V_1, V_2, V_3 paarweise disjunkte kompakte Faserumgebungen der Ausnahmefasern. Sei $M' = M - \bigcup \mathring{V}_j$. Die Faserung von M induziert auf M' eine Faserung $p : M' \to B$ als Produktbündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre.

Angenommen, es gäbe in M eine inkompressible Fläche (vom Geschlecht 0 oder > 0). Dann folgt aus ([15]; (1.6), (1.9), (2.3), (2.8)), daß es in M eine inkompressibel Fläche F mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) $F \cap V_j$ besteht (höchstens) aus 2-Elementen, die Meridianflächen in V_j sind.

(b) Es ist entweder $p \mid (F \cap M')$ eine Überlagerungsabbildung; oder

(c) $F \cap M' = p^{-1}(p(F \cap M'))$.

Die Kombination von (a) mit (b) ist nicht möglich: Denn wegen (a) wäre $F \cap M'$ zusammenhängend, und wegen (b) wäre jede Komponente von $F \cap M'$ nicht-zerlegend in M'; es würde folgen, daß $H_1(M)$ nicht endlich wäre.

Die Kombination von (a) mit (c) ist ebenfalls nicht möglich, denn wäre etwa $F \cap V_1 \neq \emptyset$, dann würde das heißen, daß eine Faser auf ∂V_1 gleichzeitig eine Meridiankurve wäre, was nicht stimmt.

Es bleibt als einzige Möglichkeit, daß $F \subset M'$, und $F = p^{-1}(p(F))$. F ist dann ein Torus, und ist parallel zu einer der Randflächen von M'. Also gibt es einen Vollring in M, dessen Rand F ist: und F ist kompressibel.

zu (2): Es genügt zu zeigen, daß $\pi_1(M)$ eine Untergruppe hat, die frei abelsch vom Rang 2 ist. Und das folgt aus:

(a) Im Zentrum von $\pi_1(M)$ gibt es ein Element unendlicher Ordnung, ([11], Satz 19).

(b) Die Faktorgruppe von $\pi_1(M)$ nach dem Zentrum enthält ein Element unendlicher Ordnung, ([11], S. 202–204).

Bemerkung. In B (s. 1.Teil des Beweises) sei t eine "Ziffer acht", die Deformationsretrakt von B ist. Es läßt sich dann $f : T \to M$ so wählen, daß $f(T) \subset M'$, daß $f : T$ als Singularität nur eine einfache Doppelkurve hat, und daß $f(T) = p^{-1}(t)$. In diesem Falle sind die Randflächen von M' isotop zu den Tori, die man aus $f(T)$ durch "Umschalten" erhält; und M entsteht aus M' gerade dadurch, daß man diese Tori durch Ankleben von Vollringen an M' kompressibel macht.

§3. SEIFERTSCHE FASERRÄUME

Ein *Seifertscher Faserraum, M,* ist "beinahe" ein Faserbündel: die Punkte von M sind so auf 1-Sphären ("Fasern") verteilt, daß jede Faser eine aus Fasern bestehende Umgebung besitzt, die fasertreu homöomorph einem "gefaserten Vollring" ist. Per Definitionem entsteht ein *gefaserter Vollring,* wenn man in einem Kreiszylinder, der durch zur Achse parallele Geraden gefasert ist, die beiden Stirnflächen identifiziert unter einem Homöomorphismus, der zusammengesetzt ist aus einer Drehung um einen rationalen Winkel $2\pi\nu/\mu$ und der Projektion entlang den Fasern; ν und μ sind normiert als teilerfremde ganze Zahlen, $0 \leq \nu < \mu$. — Die mittlere Faser eines gefaserten Vollrings hat mit einer Meridianfläche die Schnittzahl ± 1, jede andere Faser die Schnittzahl $\pm\mu$. Ist $\mu > 1$, so heißt die mittlere Faser eine *Ausnahmefaser der Ordnung* μ; ist $\mu = 1$, so heißt sie eine *gewöhnliche Faser*. In einer kompakten Mannigfaltigkeit gibt es höchstens endlich viele Ausnahmefasern; keine von ihnen liegt auf dem Rande.

Der Quotientenraum nach den Fasern — wir schreiben $P: M \to F$ — ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die als *Zerlegungsfläche* bezeichnet wird. Das Bild einer Ausnahmefaser heißt ein *Ausnahmepunkt*.

LEMMA 3.1. *Sei M ein orientierbarer kompakter Seifertscher Faserraum über einer orientierbaren Zerlegungsfläche vom Geschlecht g. M habe* $r + 1$ *Randflächen, und s Ausnahmefasern der Ordnungen* $\mu_1, \ldots, \mu_s$; $r \geq 0$; $s \geq 0$. *Dann ist*

$$\pi_1(M) \approx \{x_1, \ldots, x_{2g+r}, y_1, \ldots, y_s, z; x_j \rightleftarrows z, y_j^{\mu_j} = z\}$$

Beweis. Seien $D_1, \ldots, D_s$ disjunkte 2-Elemente in F, so daß D_j den j-ten Ausnahmepunkt im Innern enthält, und daß der Durchschnitt von D_j mit ∂F genau aus einem Bogen in der $(r+1)$-ten Randkurve von F besteht. $M' = P^{-1}(\overline{(F - \bigcup D_j)})$ ist dann ein Faserbündel und zwar ein Produktbündel; daher ist

$$\pi_1(M') \approx \{x_1, \ldots, x_{2g+r}; -\} \times \{z; -\}$$

$V_j = P^{-1}(D_j)$ ist ein Vollring. $M' \cap V_j$ ist ein Kreisring. Das Bild von $\pi_1(M' \cap V_j)$ in $\pi_1(M')$ ist die von z erzeugte Untergruppe. Das Bild von $\pi_1(M' \cap V_j)$ in $\pi_1(V_j)$ hat den Index μ_j. — Also folgt die Behauptung.

Bemerkung. (3.1) zeigt, daß für berandete M die Isomorphieklasse von $\pi_1(M)$ gar nicht von den v_j abhängt (während das bei geschlossenen Seifertschen Faserräumen durchaus der Fall ist). Aber Vorsicht: Der Homöomorphietyp von M hängt auch von den v_j ab; (vgl. [15], (10.1)).

LEMMA 3.2. *Sei M wie in* (3.1). (1) *Ist* $\pi_1(M)$ *frei zylisch, dann ist M homöomorph zu einem Vollring.* — Und ist eine einfach-geschlossene Kurve auf ∂M vorgegeben, die nicht die triviale Untergruppe von $\pi_1(M)$ erzeugt, dann gibt es eine Seifert-Faserung, in der die vorgegebene Kurve eine Faser ist; ([11], Hilfssatz VI).

(2) *Ist* $\pi_1(M)$ *frei abelsch vom Rang* 2, *dann ist M homöomorph zu Torus* × *Intervall.* — Zu jeder nicht zusammenziehbaren einfach-geschlossenen Kurve auf ∂M gibt es eine Faserung von M als Faserbündel, in der die vorgegebene Kurve eine Faser ist.

(3) *In allen übrigen Fällen ist das Zentrum von* $\pi_1(M)$ *frei zyklisch, und wird erzeugt von einer Faser in* ∂M.

Beweis. a) z ist im Zentrum und hat unendliche Ordnung, (3.1).

b) Ist $2g + r + s > 1$, dann ist die Quotientengruppe von $\pi_1(M)$ nach z ein freies Produkt, und daher ohne Zentrum.

c) $2g + r + s \leq 1$ führt genau auf die Fälle (1) und (2).

§4. GRUPPEN MIT ZENTRUM UND 3-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN

Satz 4.1. *Sei M eine orientierbare kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit; M sei* *irreduzibel. Es sei $H_1(M)$ nicht endlich, oder $\pi_1(M)$ ein nichttriviales freies Produkt mit Amalgamation, (oder beides). Das Zentrum von $\pi_1(M)$ bestehe nicht nur aus dem Einselement.*

Dann ist M homöomorph zu einem Seifertschen Faserraum mit orientierbarer Zerlegungsfläche.

(4.2) Sei F eine Fläche in M (orientierbar, kompakt, $F \cap \partial M = \partial F$) mit den Eigenschaften:

(a) $ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$; (b) *$F$ ist keine 2-Sphäre*

(c) *Ist $\partial M \neq \emptyset$, dann ist $0 \neq [\partial F] \in H_1(\partial M)$.* — Insbesondere ist F genau dann geschlossen und höchstens dann zerlegend, wenn M geschlossen ist.

F existiert nach (1.2). — Zum Beweis von (4.1) unterscheiden wir zwei Fälle:

Beweis von (4.1) *für den Fall, daß $\pi_1(F)$ nicht das Zentrum von $\pi_1(M)$ enthält.* Es ist F nicht-zerlegend in M. Denn andernfalls wäre nach (4.2) und (1.2.4) $\pi_1(M)$ ein nichttriviales freies Produkt mit Amalgamation an $\pi_1(F)$, was aber nicht möglich ist, da $\pi_1(F)$ nicht das Zentrum von $\pi_1(M)$ enthält, ([4], S. 32).

Sei t ein orientierter geschlossener Weg in M, der F genau einmal trifft und durchsetzt. $F \cap t$ werde als Basispunkt für $\pi_1(F)$ und $\pi_1(M)$ gewählt. Das von t in $\pi_1(M)$ repräsentierte Element heiße t.

Sei M' die Mannigfaltigkeit, die aus M durch Aufschneiden an F entsteht. Im Rande von M' liegen zwei Kopien von F und damit zwei Kopien des Basispunktes. Jeder der beiden Basispunkte definiert eine Inklusion $\pi_1(M') \to \pi_1(M)$; die eine Inklusion geht aus der andern hervor duch Konjugation mit t; (die Inklusionshomomorphismen sind injektiv, da $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$). $\alpha : \pi_1(F) \to \pi_1(M')$ und $\beta : \pi_1(F) \to \pi_1(M')$ bezeichnen die beiden offensichtlichen Inklusionen.

Sei $\tilde{M}$ die durch F bestimmte reguläre Überlagerung von M mit frei zyklischer Decktransformationengruppe. Über F liegen Flächen $\ldots, F_{-1}, F_0, F_1, \ldots$, die zu F homöomorph sind; jeder der Teile, in die $\tilde{M}$ durch $\ldots \cup F_{-1} \cup F_0 \cup F_1 \cup \ldots$ zerschnitten wird, ist homöomorph zu M'. Wir wählen einen Basispunkt für F_0 und $\tilde{M}$ über $F \cap t$ in F_0. Die angegebene Zerschneidung definiert dann folgende Präsentation von $\pi_1(\tilde{M})$ als unendlichfaches freies Produkt mit Amalgamation:

$$\pi_1(\tilde{M}) \approx \ldots * A_{-1} \underset{B_{-1}}{*} A_0 \underset{B_0}{*} A_1 \underset{B_1}{*} \ldots$$

(Dies ist als direkter Limes über die Untergruppen $A_{-m} \underset{B_{-m}}{*} \ldots A_0 \ldots \underset{B_{n-1}}{*} A_n$ aufzufassen.)

Unter der Inklusion $\pi_1(\tilde{M}) \to \pi_1(M)$, die durch die Projektion der Räume mit Basispunkt, $\tilde{M} \to M$, induziert wird, gehen die Inklusionen $A_0 \leftarrow B_0 \to A_1$ über in die Inklusionen $\pi_1(M') \xleftarrow[\beta]{} \pi_1(F) \xrightarrow[\alpha]{} \pi_1(M')$; (dabei brauchen die Untergruppen "$\pi_1(M')$" nicht identisch zu sein, s. oben). Im Folgenden identifizieren wir $\pi_1(\tilde{M})$ mit dem Bild der angegebenen Inklusion.

Die Beschränkung der Konjugation $t^{-1}(\,.\,.\,)t$ auf $\pi_1(\tilde{M})$ definiert einen Isomorphismus

$\psi : \pi_1(\tilde{M}) \to \pi_1(\tilde{M})$, der die Teile des freien Produkts mit Amalgamation "um eins nach rechts verschiebt", d.h. es ist $\psi(A_j) = A_{j+1}$ und $\psi(B_j) = B_{j+1}$.

LEMMA 4.3. *$\pi_1(\tilde{M})$ enthält nicht das Zentrum von $\pi_1(M)$.*

Beweis. Sei z ein Element des Zentrums von $\pi_1(M)$; sei $z \in \pi_1(\tilde{M})$. Wir stellen z dar als Produkt von Elementen, deren jedes in einer der Untergruppen A_j enthalten ist. Seien r und s der größte bzw. kleinste der dabei vorkommenden Indizes j.

Sei $A^- \approx \dots \underset{B_{-2}}{*} A_{-1} \underset{B_{-1}}{*} A_0$; und $A^+ \approx A_1 \underset{B_1}{*} A_2 \underset{B_2}{*} \dots$; dann ist $\pi_1(M) \approx A^- \underset{B_0}{*} A^+$.

Es ist $\psi^{-r}(z) \in A^-$, und $\psi^{s+1}(z) \in A^+$. Da z im Zentrum von $\pi_1(M)$ liegt, ist $z = \psi^{-r}(z) = \psi^{s+1}(z)$, daher $z \in A^- \cap A^+$. Andererseits ist $A^- \cap A^+ = B_0$, ([4], S. 32). Also lag z bereits in $\pi_1(F)$. Aber nach unserer Voraussetzung gibt es ein Element im Zentrum von $\pi_1(M)$, das nicht in $\pi_1(F)$ liegt.

LEMMA 4.4. *Die Inklusionen $\alpha' : B_0 \to A^+$ und $\beta' : B_0 \to A^-$ sind surjektiv.*

Beweis. Jedes Element von $\pi_1(M)$ kann in der Form $t^u y$ dargestellt werden, mit $y \in \pi_1(\tilde{M})$. Nach (4.3) gibt es im Zentrum von $\pi_1(M)$ ein Element $z = t^u y$, mit $u \neq 0$, und, etwa, $u > 0$. Da $z = tzt^{-1} = t^u \psi^{-1}(y)$, dürfen wir annehmen, daß $y \in A^-$.

Sei x ein Element aus A^-. Für genügend großes v ist $\psi^{uv}(x) \in A^+$. Andererseits ist $\psi^u(x) = t^{-u} x t^u = y(t^u y)^{-1} x (t^u y) y^{-1} = yxy^{-1}$. Es folgt, daß $\psi^{uv}(x) = y^v x y^{-v}$. Da x beliebig war, ist demnach $A^- \subset (A^- \cap A^+) = B_0$; also ist β' surjektiv. — Auf die gleiche Weise folgt, daß α' surjektiv ist.

(4.5) Wir merken uns noch: Es gibt ein $y \in \pi_1(F)$ und ein $u > 0$, so daß

$$\psi^u(x) = t^{-u} x t^u = yxy^{-1}, \text{ für alle } x \in \pi_1(F).$$

Die vorstehende Diskussion stammt von L. Neuwirth, ([5], 4.5.1; 5.4.3).

Anders formuliert lautet (4.4): Die Untergruppen $\pi_1(F)$ und $\pi_1(\tilde{M})$ von $\pi_1(M)$ sind identisch; d.h. $\pi_1(F)$ ist eine invariante Untergruppe von $\pi_1(M)$, und die Quotientengruppe ist frei zyklisch. Hieraus folgt nach Stallings, [14], daß M ein Faserbündel über der 1-Sphäre mit F als typischer Faser ist. Wir können also M beschreiben durch einen Homöomorphismus $\varphi : F'' \to F'$, wobei $F' = F \times 0$ und $F'' = F \times 1$ die Stirnflächen von $F \times I$ sind.

Sei $\varphi_0 : F' \to F''$ der Homöomorphismus $\varphi_0(p \times 0) = p \times 1$, und sei $\Phi = \varphi\varphi_0 : F' \to F'$; Φ ist ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Sei p ein Fixpunkt von Φ (wir dürfen annehmen, daß p existiert — evtl. nach einer Deformation von φ); p sei unser Basispunkt. Sei t die von $p \times I$ in M dargestellte Kurve, mit geeigneter Orientierung. Dann ist der oben mit ψ bezeichnete Isomorphismus $\psi : \pi_1(F) \to \pi_1(F)$ definiert. Unter der Identifikation $F' \to F$ wird ψ identisch mit dem durch Φ induzierten Isomorphismus $\Phi_* : \pi_1(F') \to \pi_1(F')$. Also ist nach (4.5) eine u-te Potenz, $u > 0$, von Φ_* ein innerer Automorphismus von $\pi_1(F')$. Daraus folgt nach Nielsen, [7], daß es einen zu Φ homotopen orientierungserhaltenden Homöomorphismus gibt, dessen u-te Potenz der identische Homöomorphismus von F' ist; dieser Homöomorphismus heiße Ψ.

LEMMA 4.6. *Sei $q \in F'$. Sei β der kleinste Exponent, $0 < \beta \leq u$, für den $\Psi^\beta(q) = q$. Dann* *gibt es ein 2-Element $U(q)$, das eine Umgebung von q in F' ist, so daß $\Psi^{\alpha}(U(q)) \cap U(q) = \emptyset$ für $0 < \alpha < \beta$, und daß $\Psi^{\beta} \mid U(q)$ konjugiert ist zu einer Drehung um q.*

Das Lemma ist wohlbekannt, [6]; daß $U(q)$ und die Konjugation von $\Psi^{\beta} \mid U(q)$ zu der Drehung semilinear gewählt werden können, ist in [8] ausgeführt.

Wir definieren $\varphi' : F'' \to F'$ so, daß $\varphi'\varphi_0 = \Psi$; φ' ist homotop zu φ, daher auch isotop zu φ. Bei der Verklebung mittels φ' erhalten wir also wieder M.

Wir fasern nun M durch die 1-Sphären, zu denen sich die Bilder der Strecken $q \times I$, $q \in F$, zusammensetzen. Damit ist eine Seifert-Faserung für M definiert, denn nach (4.6) hat jede Faser eine Faserumgebung, die homöomorph einem gefaserten Vollring ist, nämlich die Faserumgebung, die aus den durch $U(q)$ gehenden Fasern besteht, für ein geeignetes $q \in F$. — $F' \to F'/\Psi$ ist die Projektion einer regulären verzweigten Überlagerung. F'/Ψ ist die Zerlegungsfläche der konstruierten Seifert-Faserung; sie ist orientierbar.

Beweis von (4.1) *für den Fall, daß $\pi_1(F)$ das Zentrum von $\pi_1(M)$ enthält.*

LEMMA 4.7. *Sei G eine Randfläche von M. Sei $ker(\pi_1(G) \to \pi_1(M)) \neq 0$. Dann ist M ein Vollring.*

Beweis. Nach dem Schleifensatz und dem Dehnschen Lemma gibt es ein 2-Element D in M, so daß $D \cap \partial M = \partial D \subset G$; $\partial D \not\simeq 0$ in G. Sei $U(D)$ eine reguläre Umgebung von D, und sei $M' = \overline{(M - U(D))}$. Es ist $\pi_1(M) \approx \pi_1(M') * Z$; daher $\pi_1(M') = 0$, da $\pi_1(M)$ ein nichttriviales Zentrum hat. Also besteht $\partial M'$ aus 2-Sphären. Folglich ist M' ein 3-Element, da M irreduzibel ist.

Im Folgenden nehmen wir an, daß $\ker(\pi_1(G) \to \pi_1(M)) = 0$ für jede Randfläche G von M.

LEMMA 4.8. *Ist F ein Kreisring, dann liegen die Randkurven von F in verschiedenen Randflächen von M.*

Beweis. Angenommen, sie liegen beide in der Randfläche G. G ist ein Torus, denn $\pi_1(G)$ hat ein nichttriviales Zentrum, da $\partial F \subset G$, und da $\ker(\pi_1(G) \to \pi_1(M)) = 0$. Von den beiden Kreisringen, in die G von ∂F zerlegt wird, sei G' einer. Aus $[\partial F] \neq 0$ in $H_1(\partial M)$, (4.2.c), folgt, daß $F \cup G'$ ein Kleinscher Schlauch ist. Sei k eine der Kurven $F \cap G'$; k sei orientiert. Wird k über $F \cup G'$ gerade einmal herum parallel verschoben, so ist der Effekt, daß die Orientierung von k umgekehrt wird. Da $\pi_1(F)$ von k erzeugt wird, folgt, daß $\pi_1(F)$ doch nicht das Zentrum von $\pi_1(M)$ enthält.

Sei M' die Mannigfaltigkeit, die aus M durch Aufschneiden an F entsteht, und sei M'' eine zusammenhängende Komponente von M'. Da $\ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M)) = 0$, ist der vom "Wiederzusammenkleben" induzierte Homomorphismus $\pi_1(M'') \to \pi_1(M)$ injektiv. Da im Bild dieses Homomorphismus das Zentrum von $\pi_1(M)$ enthalten ist, folgt, daß $\pi_1(M'')$ ein nichttriviales Zentrum hat.

Die Fläche F ist entweder ein Kreisring oder ein Torus, da $\pi_1(F)$ selbst ein nichttriviales Zentrum hat. — Im ersten Falle hat nach (4.8) M' weniger Randflächen als M, aber nichtleeren Rand; und wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, daß (4.1) für Mannigfaltigkeiten mit weniger Randflächen als M, insbesondere für M', bereits bewiesen sei. Im zweiten

Falle ist nach Wahl von F, (4.2), M geschlossen; und wir nehmen an, daß (4.1) für berandete Mannigfaltigkeiten, insbesondere für M', bereits bewiesen sei.

Wir nehmen im Folgenden an, daß M von F nicht zerlegt wird; der Beweis für den andern Fall ist ähnlich, aber einfacher.

Sei l eine geschlossene Kurve, die F genau einmal durchsetzt; $p = l \cap F$ sei unser Basispunkt. Sei k eine einfach-geschlossene, p enthaltende Kurve in $\dot{F}$, so daß die von k erzeugte Gruppe zwei Elemente des Zentrums von $\pi_1(M)$ enthält. — Auf $\partial M'$ liegen zwei Exemplare F: F_1 und F_2; F_j enthält die Kopie k_j von k. Nachschauen in (3.2) und (4.7) zeigt, daß ein Vielfaches von k_1 in $\partial M'$ homotop ist zu einem Vielfachen einer Faser in $\partial M'$ (bzw. einer Faser einer geeigneten Faserung in den beiden Ausnahmefällen). Da wir uns mit einfach-geschlossenen Kurven auf einem Torus beschäftigen, ist bereits k_1 homotop und daher isotop zu einer Faser. Wir können also die Faserung so deformieren, daß k_1 und ∂F_1 aus Fasern bestehen.

Lemma. Die gleiche Normierung läßt sich gleichzeitig für k_2 und F_2 durchführen.

Beweis. Ist M' nicht eine der Ausnahmen: Vollring oder Torus $\times$ Intervall, dann gibt es auf jeder Randfläche von M' genau eine Isotopieklasse von möglichen Fasern, (3.2) und (4.7). — Ist M' ein Vollring, oder ist M' Torus $\times$ Intervall und k_1 und k_2 liegen in derselben Randfläche, dann sind k_1 und k_2 isotop in dieser Randfläche. — Angenommen, M' sei Torus $\times$ Intervall, und M' ließe sich nicht so fasern, daß sowohl k_1 als auch k_2 Faser ist. Dann wäre kein Vielfaches von k_1 in M' homotop zu einem von null verschiedenen Vielfachen von k_2: Es folgte, daß in M kein von null verschiedenen Vielfaches von k mit l vertauschbar wäre.

Da bei der Verklebung von M' zu M mindestens zwei Fasern, nämlich k_1 und k_2, zusammenfallen, können wir den Verklebungshomöomorphismus so deformieren, daß jede Faser von F_1 mit einer Faser von F_2 zusammenfällt.

Wir haben noch nachzuweisen, daß die Zerlegungsfläche von M orientierbar ist (das Entsprechende für M' vorausgesetzt): Die Behauptung ist aber äquivalent der, daß k bei Konjugation mit l in k und nicht in k^{-1} übergeführt wird.

LITERATUR

1. G. Burde und H. Zieschang: Eine Kennzeichnung der Torusknoten, *Math. Z.* **167** (1966), 169–176.
2. D. B. A. Epstein: Free products with amalgamation and 3-manifolds, *Proc. Am. math. Soc.* **12** (1961), 669–670.
3. D. B. A. Epstein: Curves on 2-manifolds and isotopies, *Acta Math.* **115** (1966), 83–107.
4. A. G. Kurosh: *The Theory of Groups*, Chelsia, 1956, 1960.
5. L. P. Neuwirth: Knot groups, *Ann. math. Stud.* No. 56.
6. J. Nielsen: Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen. *Math.—fys. Meddelelser Kgl. Danske Vidensk. Selsk.* XV, 1 (1937), 1–75.
7. J. Nielsen: Abbildungsklassen endlicher Ordnung, *Acta Math.* **75** (1942), 23–115.
8. D. Noga: Dissertation, Kiel, 1966.
9. C. D. Papakyriakopoulos: On solid tori, *Proc. Lond. math. Soc.* (3), **7** (1957), 281–299.
10. C. D. Papakyriakopoulos: On Dehn's lemma and the asphericity of knots, *Ann. Math.* **66** (1957), 1–26.
11. H. Seifert: Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, *Acta Math.* **60** (1933), 147–238.
12. H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1934.

13. E. SPECKER: Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Comment. math. helvet.* 23 (1949), 303–333.
14. J. STALLINGS: *On Fibering Certain 3-Manifolds. Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, 1962.
15. F. WALDHAUSEN: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Inventiones math.* 3 (1967).
16. J. H. C. WHITEHEAD: 2-spheres in 3-manifolds, *Bull. Am. math. Soc.* 64 (1958), 161–166.
17. J. H. C. WHITEHEAD: On finite cocycles and the sphere-theorem, *Coll. Math* 6 (1958), 271–281.

Mathematisches Institut
der Universität Bonn