Topology Vol. 6, pp. 501–504. Pergamon Press, 1967. Printed in Great Britain

EINE VERALLGEMEINERUNG DES SCHLEIFENSATZES

FRIEDHELM WALDHAUSEN

(*Eingegangen* 24 *Februar* 1967)

DAS im Titel angekündigte Ergebnis verhält sich zum Schleifensatz (in der von Stallings angegebenen Fassung) wie die von Shapiro und Whitehead angegebene Verallgemeinerung zum Dehnschen Lemma—mit der Einschränkung allerdings, daß wir je zwei der singulären Randkurven als disjunkt voraussetzen müssen.

Definitionen. M ist eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer festen semilinearen Struktur; M ist nicht notwendig kompakt oder orientierbar.

$\omega(M)$ ist die Untergruppe von $\pi_1(M)$, die zu der "kleinsten" orientierbaren Überlagerungsmannigfaltigkeit von M gehört. (Ist M nicht-orientierbar, dann hat $\omega(M)$ den Index 2 in $\pi_1(M)$.)

Ist N ein Normalteiler in $\pi_1(M)$, und k eine geschlossene Kurve in M, dann ist es sinnvoll zu sagen "$k \in N$", bzw. "$k \notin N$".—Eine Untergruppe vom Index 2 ist immer Normalteiler.

D und D' sind zusammenhängende kompakte 2-Mannigfaltigkeiten; sie sind planar, d.h. sie lassen sich in die 2-Sphäre einbetten. d_j, bzw. d_j' sind ihre Randkurven.

Die Abbildung f ist semilinear.

"∂" bedeutet "Rand".

SATZ. *$f:(D, \partial D) \to (M, \partial M)$ sei eine singuläre planare Fläche. Es gebe kompakte reguläre Umgebungen U_j der $f(d_j)$ in ∂M, so daß $U_i \cap U_j = \phi$, wenn $i \neq j$. N_j seien Normalteiler in $\pi_1(M)$. Sei $f(d_j) \notin N_j$, aber $f(d_j) \in \omega(M)$ für alle j.*

Dann gibt es eine in M eingebettete planare Fläche D' mit den Eigenschaften:

(a) $D' \cap \partial M = \partial D' \subset \bigcup U_j$.

(b) *In jedem der U_j liegt höchstens eine Randkurve von D'.*

(c) *In mindestens einem der U_j liegt eine Randkurve, d_j', von D', so daß $d_j' \notin N_j$.*

Bemerkungen. (1) Die N_j sind Normalteiler in $\pi_1(M)$. Wir schließen damit aus, daß eines der $f(d_j)$ in M homotop null ist.

(2) Sei D ein Kreisring; $f:(D, \partial D) \to (M, \partial M)$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes bis auf die Bedingung "$f(d_j) \in \omega(M)$". Bezeichne $p: \tilde{D} \to D$ die zweiblättrige Überlagerung. Dann ist $(fp)(\tilde{d}_j) \in \omega(M)$. In vielen Fällen wird auch $(fp)(\tilde{d}_j) \notin N_j$ gelten.

(3) Für den Fall, daß die $f(d_j)$ einfach-geschlossene (evtl. mehrfach durchlaufene) Kurven sind, ist der Satz bereits in [2] bewiesen; vgl. [2], Lemma 4.1.

Zum Beweis des Satzes konstruieren wir einen "Turm" zweiblättriger Überlagerungen, [2, 3]. Wir analysieren die Situation im "obersten Stockwerk", (unser Lemma 1). Für das Übrige können wir auf [2] und [3] verweisen:

Wie in [3] folgt, daß der Turm eine endliche Höhe hat.

Beim "Abstieg vom Turm" erhalten wir, wenn wir von einem Stockwerk zum nächst tieferen übergehen, eine singuläre Fläche, die so normiert werden kann, daß einfache Doppelbögen und einfache Doppelkurven die einzigen Singularitäten sind. Wir entfernen diese Singularitäten durch "Umschalten": Umschalten an Doppelkurven ist unproblematisch, wir können etwa bei jedem Schritt so umschalten, daß eine zusammenhängende Fläche entsteht. Das Umschalten an Doppelbögen erfordert ein bißchen Aufmerksamkeit, da wir eine Fläche konstruieren wollen, die (mindestens) eine wesentliche Randkurve hat: Sei l ein Doppelbogen, und seien l_1 und l_2 seine beiden Urbilder. Es folgt aus unserer Bedingung "$U_i \cap U_j = \phi$, wenn $i \neq j$" (die wir hier wesentlich benutzen), daß der "Anfangspunkt" von l_1 in derselben Randkurve liegt wie der "Anfangspunkt" von l_2, und daß Entsprechendes für die "Endpunkte" gilt. Hieraus folgt erstens, daß beim Umschalten keine Randkurven durcheinandergeraten, und zweitens, daß bei beiden möglichen Umschaltungen an l (mindestens) eine (singuläre) planare Fläche entsteht; wir haben also die evtl. benötigte Auswahl.—Für den Fall, daß Anfangs- und Endpunkt von l_1 in derselben Randkurve liegen, finden sich Details in [3], Lemma 2. Der andere Fall ist einfacher.

LEMMA 0. *Sei F eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht $m \geq 1$. $S_1, \ldots, S_n$ seien disjunkte kompakte Teilflächen von F; R_j seien die Zusammenhangskomponenten von $F - (\mathring{S}_1 \cup \ldots \cup \mathring{S}_n)$. Keines der S oder R sei ein 2-Element.*

Ein R heißt "schlecht", wenn es nicht planar ist oder wenn es an eines der S mit mehr als einer Randkurve anstößt.

Ein S heißt "schlecht", wenn es nicht planar ist oder wenn es an mehr als ein schlechtes R anstößt oder wenn es an ein R mit mehr als zwei Randkurven anstößt.

Behauptung: Es gibt höchstens m schlechte S.

Beweis. Bezeichne $-\tau$ die Eulersche Charakteristik. Es ist $\tau(F) = \Sigma\tau(R_j) + \Sigma\tau(S_j)$ Für keines der Flächenstücke ist τ negativ. Daher würde es zum Beweis genügen, $\tau(F)$ so abzuzählen, daß jedes schlechte S den Beitrag 2 liefert. Wir machen den Versuch dazu; an einer Stelle bricht unsere Zählmethode möglicherweise zusammen, dann können wir aber einen Induktionsschritt machen. Für $m = 1$ ist die Behauptung offenbar richtig.

Ist R nicht planar, dann ist $\tau(R)$ mindestens gleich der Anzahl der Randkurven von R. Ist R schlecht und planar, dann zeichnen wir in R zwei Randkurven aus, die an ein und dasselbe S anstoßen; $\tau(R)$ ist dann gleich der Anzahl der nicht ausgezeichneten Randkurven.

1. *Fall.* R_1 und R_2 sind schlecht und treffen S_1. —Dann stößt S_1 an R_1 und R_2 an in (mindestens):

zwei nicht-ausgezeichneten Kurven

oder einer nicht-ausgezeichneten Kurve und einem ausgezeichneten Kurvenpaar

oder zwei ausgezeichneten Kurvenpaaren.

In jedem Falle liefern in unserer Zählweise die Kurven aus $S_1 \cap R_1$ und $S_1 \cap R_2$ mindestens den Beitrag 2 zu $\tau(S_1) + \tau(R_1) + \tau(R_2)$.

2. *Fall.* S_1 stößt an R_1 in mehr als zwei Kurven an. – Von den Kurven $S_1 \cap R_1$ ist in R_1 mindestens eine nicht ausgezeichnet. Außerdem ist $\tau(S_1) \geq 1$.

3. *Fall.* S_1 ist nicht planar.—Dann ist $\tau(S_1) \geq 1$, (andernfalls wäre $S_1 = F$, und die Behauptung wäre trivial).—Gilt das Gleichheitszeichen, so hat S_1 nur eine Randkurve. Wir gehen von S_1 zum anstoßenden R_1, wenn R_1 ein Kreisring ist, weiter zum anstoßenden S_2, und so fort, bis wir an ein Flächenstück kommen, das kein Kreisring ist. Wir nehmen dann S_1 und die durchlaufenen Kreisringe aus F heraus und füllen in das Loch ein 2-Element. Das Flächenstück, an das wir das 2-Element ankleben, wird dadurch nicht zu einem 2-Element; und wenn es ursprünglich schlecht war (sei es als R oder S), so ist es auch schlecht geblieben. Da bei dieser Operation die Anzahl der schlechten S um genau 1 kleiner geworden ist, und das Geschlecht von F ebenfalls um 1, folgt nun die Behauptung aus unserer Induktionsvoraussetzung.

Lemma 1. *Der Satz ist richtig, wenn noch zusätzlich vorausgesetzt wird: M ist kompakt; es gibt keine zweiblättrige Überlagerung von M, zu der $f: D \to M$ geliftet werden kann.*

Beweis. Da $f(d_j) \in \omega(M)$ für alle j, ist notwendig $\omega(M) = \pi_1(M)$, d.h. M ist orientierbar.

Die Faktorgruppe von $H_1(M)$ nach $f_*(H_1(D))$ ist endlich, denn andernfalls gäbe es sicher eine zweiblättrige Überlagerung von M, zu der f sich liften ließe. Ist also n' die Anzahl der Randkurven von D, so ist die erste Bettische Zahl von M höchstens gleich $n' - 1$. Daher ist nach ([1], S.223, Satz IV) das Gesamtgeschlecht von ∂M ebenfalls höchstens gleich $n' - 1$. Also hat M eine Randfläche F vom Geschlecht m, auf der n der U_j liegen, $n > m$; es ist $m > 0$, s. Bem. 1.

In F definieren wir $S_j = U_j \cup$ (anstoßende 2-Elemente aus $F - \bigcup \mathring{U}_j$). Keines der S_j ist ein 2-Element, (s. Bem. 1). Sei S_1 dasjenige unter den S_j, dessen Existenz in Lemma 0 behauptet ist, (S_1 ist "nicht schlecht"). Seien $R_1, \dots R_l$, die an S_1 anstoßenden Komponenten von $F - \bigcup \mathring{S}_j$.

Sei $2 \leq i \leq l$, dann ist R_i planar und trifft jedes der S_j in höchstens einer Randkurve; sei $k_i = R_i \cap S_1$. Ist $k_i \notin N_1$ für ein $i > 1$, dann sind wir fertig: wir brauchen nur das Innere von R_i in das Innere von M abzuheben.

Wir nehmen also an, daß $k_i \in N_1$ für $2 \leq i \leq l$, (daß insbesondere etwa auch $l = 1$), und zeigen, daß das zu einem Widerspruch führt.

$S_1 \cap R_1$ besteht aus einer oder zwei Kurven. Da S_1 planar ist, folgte im ersten Falle sofort, daß $f(d_1) \in N_1$. Es kann also nur $S_1 \cup R_1 = k_0 \cup k_1$ sein; (für den Rest vgl. [2], S.177).

Aus je einem Bogen in S_1 und R_1, deren jeder je einen Endpunkt in k_0 und k_1 hat, setzen wir die geschlossene Kurve w zusammen. Wir orientieren die d_j und $f(d_j)$ mit einer von D induzierten Orientierung; die k_j mit einer von S_1 induzierten Orientierung; und w beliebig. Bezeichne $\mathscr{S}(\,,\,)$ die Schnittzahl in ∂M. Es ist $\mathscr{S}(w, k_0) = -\mathscr{S}(w, k_1) = \pm 1$; $\mathscr{S}(w, k_j) = 0$

für $j \geq 2$. Sei $\alpha = \mathscr{S}(w, f(d_1))$. In $\pi_1(F)$ ist $f(d_1)$ homotop k_0^{α} oder $k_0^{-\alpha}$ modulo dem von $k_2, \ldots, k_l$ erzeugten Normalteiler. Da dieser Normalteiler unter $F \to M$ in N_1 geht, folgt, daß $\alpha \neq 0$. Da $w \cap f(d_j) = \phi$ für $j \neq 1$, erhalten wir: $\mathscr{S}(w, f(\partial D)) = \mathscr{S}(w, f(d_1)) = \alpha \neq 0$.

Andererseits ist $\mathscr{S}(f(d_j), f(\partial D)) = 0$ für alle j. Denn die Schnittzahl von 1-Zykeln in einer orientierbaren Fläche wechselt das Vorzeichen, wenn man die Zykel vertauscht; deshalb ist $\mathscr{S}(f(d_j), f(d_j)) = 0$. Und nach Voraussetzung ist $f(d_i) \cap f(d_j) = \phi$, wenn $i \neq j$.

Bezeichne $\bar{\mathscr{S}}(\,,\,)$ die Schnittzahl in M für die Paarung $(H_1(M), H_2(M, \partial M))$. Es folgt

$$\bar{\mathscr{S}}(f(d_j), f(D)) = \pm \mathscr{S}(f(d_j), f(\partial D)) = 0 \text{ für alle } j,$$
$$\bar{\mathscr{S}}(w, f(D)) \quad = \pm \mathscr{S}(w, f(\partial D)) = \pm \alpha \neq 0;$$

im Widerspruch dazu, daß $f_*(H_1(D))$ endlichen Index in $H_1(M)$ hat.

LITERATUR

1. H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934.
2. A. Shapiro and J. H. C. Whitehead: A proof and extension of Dehn's Lemma, *Bull. Am. math. Soc.* **64** (1958), 174–178.
3. J. Stallings: On the loop theorem, *Ann. Math.* **72** (1960), 12–19.

Mathematisches Institut
der Universität Bonn