

Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II*

FRIEDHELM WALDHAUSEN (Bonn)

6. Graphenmannigfaltigkeiten

M sei eine Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand (orientierbar, kompakt, dreidimensional – wie immer in dieser Arbeit).

$T = T_1 \cup \dots \cup T_n$, $n \geq 0$, sei ein System Tori im Innern von M . $U(T)$ sei eine reguläre Umgebung von T in M .

(6.1) Definition. Ist jede Komponente von $M - \overset{\circ}{U}(T)$ homöomorph zu einem Faserbündel mit S^1 als Faser, dann heißt T eine „Graphenstruktur“ für M . – Eine Mannigfaltigkeit, die eine Graphenstruktur besitzt, heißt eine „Graphenmannigfaltigkeit“.

(6.2) Definition. Eine Graphenstruktur heißt „reduziert“, wenn jede der folgenden Aussagen (6.2.1)–(6.2.10) falsch ist. – Eine Mannigfaltigkeit, die mit einer reduzierten Graphenstruktur gegeben ist, heißt eine „reduzierte Graphenmannigfaltigkeit“.

(Vorsicht: „reduziert“ ist nicht zu verwechseln mit „irreduzibel“).

Es bezeichnet T_1 eine beliebige, aber fest herausgegriffene Komponente von T . $U(T_1)$ ist die T_1 enthaltende Komponente von $U(T)$. $U(T_1)$ ist homöomorph zu Torus \times Intervall. T' und T'' sind die Randflächen von $U(T_1)$. Die an T' anstoßende Komponente von $M - \overset{\circ}{U}(T)$ heißt M_1 , die an T'' anstoßende M_2 . – Wir können Homologieklassen von Kurven aus T' und T'' vergleichen mit Hilfe des natürlichen Isomorphismus $H_1(T') \leftrightarrow H_1(U(T_1)) \leftrightarrow H_1(T'')$; insbesondere beziehen wir uns mit „Schnittzahl“ auf die Schnittzahl in $H_1(T')$ und den angegebenen natürlichen Isomorphismus.

(6.2.1) M_1 ist nicht identisch mit M_2 , und M_1 ist das Bündel über dem Kreisring.

(6.2.2) Die Faser von M_1 ist homolog zur Faser von M_2 .

(6.2.3) M_1 ist ein Vollring, und eine Meridiankurve hat mit der Faser von M_2 die Schnittzahl eins.

* Dies ist der zweite Teil einer aus technischen Gründen aufgeteilten Arbeit. Kenntnis des ersten Teils ([13]) ist notwendig für die Lektüre des zweiten Teils. Hinweise der Art „(α, β)“, mit $\alpha \leq 5$, beziehen sich auf den ersten Teil.

(6.2.4) M_1 ist ein Vollring, und eine Meridiankurve ist homolog zur Faser von M_2 .

(6.2.5) M_1 ist das S^1 -Bündel über dem Möbiusband; wird das Möbiusband als Schnitt in M_1 eingebettet, so ist seine Randkurve homolog zur Faser von M_2 .

(6.2.6) Sowohl M_1 als auch M_2 ist das S^1 -Bündel über dem Möbiusband; wird in M_1 und M_2 das Möbiusband als Schnitt eingebettet, so sind die Randkurven homolog.

(6.2.7) $M - \mathring{U}(T_1)$ hat zwei Komponenten; von denen ist eine die in § 3 definierte Graphenmannigfaltigkeit Q , und die andere ist (als Graphenmannigfaltigkeit) nicht ein Vollring.

(6.2.8) M_1 und M_2 sind identisch und homöomorph zu $\text{Torus} \times \text{Intervall}$, und die Zusammensetzung der natürlichen Isomorphismen $H_1(T') \rightarrow H_1(U(T_1)) \rightarrow H_1(T'') \rightarrow H_1(M_1) \rightarrow H_1(T')$ bildet ein Element auf sich oder sein Inverses ab.

(6.2.9) M_1 und M_2 sind Vollringe.

(6.2.10) Es ist $T = \emptyset$, und M ist ein S^1 -Bündel über der 2-Sphäre oder projektiven Ebene.

(6.3) Satz. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer Graphenstruktur T .

(6.3.1) Ob T reduziert ist, hängt nicht davon ab, welche Homöomorphismen von den Komponenten von $M - \mathring{U}(T)$ zu S^1 -Bündeln gewählt werden.

(6.3.2) Ist für jede Komponente von $M - \mathring{U}(T)$ ein Homöomorphismus zu einem S^1 -Bündel gegeben, dann läßt sich feststellen, ob T reduziert ist.

(6.3.3) Sei für jede Komponente von $M - \mathring{U}(T)$ ein Homöomorphismus zu einem S^1 -Bündel gegeben. Dann lassen sich in endlich vielen Schritten Mannigfaltigkeiten N_1, \dots, N_m konstruieren, so daß M homöomorph ist zur zusammenhängenden Summe $N_1 \# \dots \# N_m$, und so daß jedes der N_j entweder eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit ist, oder ein Linsenraum oder $S^1 \times S^2$.

Bemerkung. Die Voraussetzung zu (6.3.2) läßt sich abschwächen wie folgt (entsprechendes gilt für (6.3.3)):

Weiß man, daß T eine Graphenstruktur ist, daß also jede Komponente von $M - \mathring{U}(T)$ homöomorph ist zu einem S^1 -Bündel, dann läßt sich mit homologischen Mitteln feststellen, zu welchem S^1 -Bündel eine solche Komponente homöomorph ist.

Man kann ferner die in den Reduktionsforderungen vorkommenden Kurven auffinden; denn sei M_1 eine Komponente von $M - \mathring{U}(T)$, und

sei k eine nicht nullhomologe einfach-geschlossene Kurve auf ∂M_1 : Ist M_1 ein Vollring, dann ist k genau dann eine Meridiankurve, wenn k in M_1 nullhomolog ist. — Ist M_1 ein Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche, so gibt es genau dann eine Faserung mit k als Faser, wenn $2[k]=0$ in $H_1(M_1)$.

Ist M_1 ein Bündel über einer orientierbaren Fläche, das verschieden ist von Vollring und Torus \times Intervall, und hat M_1 mindestens zwei Randflächen, so gibt es genau dann eine Faserung mit k als Faser, wenn k homolog ist zu einer Kurve auf einer andern Randfläche. — Die Situation ist aber wesentlich komplizierter, wenn M_1 nur eine Randfläche hat: Es kommt zwar k genau dann als Faser in Frage, wenn k eine Erzeugende des (frei zyklischen) Zentrums von $\pi_1(M_1)$ repräsentiert, aber dafür gibt es kein Entscheidungsverfahren: Um eine Faser auf ∂M_1 zu finden, muß man mit der Hakenschen Normalflächenmethode einen inkompressiblen und nicht rand-parallelen Kreisring in M_1 konstruieren. — Ist M_1 das S^1 -Bündel über dem Möbiusband, so gilt Ähnliches wie das zuletzt Gesagte für die Aufgabe, in ∂M_1 den Rand des eingebetteten Möbiusbandes aufzufinden.

Beweis von (6.3) zu (6.3.1) a) Nach (5.5) ist in der Randfläche eines S^1 -Bündels die Homologieklass einer Faser unabhängig von der Faserung, wenn die Basis des Bündels nicht das 2-Element oder der Kreisring ist.

b) Für $M_1 = \text{Torus} \times \text{Intervall}$ sind (6.2.1) und (6.2.8) unabhängig von der Faserung.

c) Auf dem Rande eines Vollrings ist die Homologieklass einer Meridiankurve invariant gegenüber Homöomorphismen; wir haben also nur noch die Punkte nachzuprüfen, in denen von Fasern die Rede ist: Ist in (6.2.2) M_1 oder M_2 ein Vollring, so sind wir in (6.2.3); ist in (6.2.3) oder (6.2.4) auch M_2 ein Vollring, so sind wir in (6.2.9); (6.2.9) ist invariant.

zu (6.3.2): Der einzige Punkt, für den die Behauptung nicht trivial ist, ist (6.2.8): Wir tensorieren $H_1(T')$ mit den reellen Zahlen: Der Isomorphismus $H_1(T') \rightarrow H_1(T')$ definiert dann eine homogene lineare Transformation der euklidischen Ebene. Der Isomorphismus bildet genau dann ein Element auf sich oder sein Inverses ab, wenn diese Transformation einen Eigenvektor besitzt, dessen Koordinaten in einem rationalen Verhältnis stehen: Und das läßt sich nachprüfen.

zu (6.3.3): Von den Reduktionsforderungen nehmen wir der Reihe nach an, daß sie nicht erfüllt sind, und geben die zugehörige Änderung an. Die zu (6.2.4) gehörende Reduktion ist die Aufspaltung in eine zusammenhängende Summe; die übrigen betreffen nur die Graphenstruktur. Daß das Verfahren abbricht, zeigen wir zum Schluß.

zu (6.2.1): $M_1 \cup U(T_1) \cup M_2$ ist homöomorph zu M_2 : Wir vergessen T_1 .

zu (6.2.2): Mit Hilfe der Produktstruktur $U(T_1) = T' \times I$ werfen wir die Faserung von T'' nach T' . Nach (5.2) gibt es eine Isotopie von T'' , die die T' -Faserung in die T'' -Faserung überführt: Diese Isotopie definiert eine Faserung von $T' \times I$, die auf $\partial(T' \times I)$ mit den vorgegebenen Faserungen übereinstimmt. Wir vergessen T_1 .

zu (6.2.3): Ist auf dem Rande eines Vollrings eine Kurve vorgegeben, die mit einem Meridian die Schnitzzahl eins hat, dann gibt es eine Faserung des Vollrings, in der die vorgegebene Kurve eine Faser ist. Damit sind wir im vorigen Fall.

zu (6.2.4): Sei $p: M_2 \rightarrow B$ die Bündelprojektion.

Für den Fall, daß B ein Kreisring ist, haben wir schon früher eine Vereinfachung angegeben; den Fall, daß B ein 2-Element ist, behandeln wir in (6.2.9). — In allen andern Fällen gibt es in B einen nicht randparallelen Bogen l , dessen Endpunkte in der Randkurve $p(T'')$ von B liegen. Nach unserer Voraussetzung über die Verklebung von M_1 und M_2 gibt es in M eine 2-Sphäre S , die aus dem vertikalen Kreisring $p^{-1}(l)$ in M_2 , zwei Kreisringen in $U(T_1)$ und zwei Meridianflächen in M_1 besteht. Sei $U(S)$ eine reguläre Umgebung von S in M , so daß $U(S) \cap M_2$ vertikal in M_2 ist. Wir ersetzen M durch $M' = M - U(S) +$ zwei 3-Elemente. War S nicht-zerlegend in M , dann ist $M \approx M' \# S^1 \times S^2$; zerlegte S , dann ist M homöomorph zur zusammenhängenden Summe der beiden Komponenten von M' .

Wir erhalten eine Graphenstruktur von M' , bzw. der beiden Komponenten von M' wie folgt: Statt ein 3-Element an die Randkomponente S_1 von $M - \overset{\circ}{U}(S)$ anzukleben, bilden wir den Quotientenraum von $M - \overset{\circ}{U}(S)$ nach einem geeigneten involutorischen Homöomorphismus $h: S_1 \rightarrow S_1$; h vertauscht die Kurven jedes der Paare $S_1 \cap T'$, $S_1 \cap T_1$, $S_1 \cap T''$, und $h|_{S_1 \cap M_2}$ bildet Fasern in Fasern ab; die Fixpunktmenge von h besteht aus einer Kurve, die Faser in $\overset{\circ}{S}_1 \cap M_2$ ist. — Analog für die andere Randsphäre von $M - \overset{\circ}{U}(S)$.

Wir modifizieren das Verfahren noch folgendermaßen: Statt des einen Bogens l in $B = p(M_2)$ nehmen wir ein System von Bögen, deren Endpunkte in $p(T'')$ liegen, so daß B von diesen Bögen aufgeschnitten wird: in ein 2-Element, wenn $\partial B = p(T'')$, und andernfalls in Kreisringe, je einen für jede von $p(T'')$ verschiedene Randkurve von B . Wir schneiden dann M auf an einem System von 2-Sphären, das mit Hilfe dieser Bögen genau so gebildet ist wie S aus l , und verfahren weiter wie oben.

Wir bezeichnen die zum Schluß erhaltene Graphenmannigfaltigkeit mit M' .

War $\partial B = p(T'')$, dann ist M' eine Graphenmannigfaltigkeit, die aus zwei Vollringen besteht, und es ist M gleich der zusammenhängenden Summe von M' mit einer Anzahl $S^1 \times S^2$; diese Anzahl ist gleich der Anzahl der Bögen, an denen B aufgeschnitten wurde.

War $\partial B \neq p(T'')$, dann können wir jetzt die Reduktion (6.2.1) ausführen, und zwar je einmal mit jedem der Teile, die den Kreisringen entsprechen, in die B aufgeschnitten wurde. Die schließlich erhaltene Graphenstruktur hat eine Komponente weniger als die Graphenstruktur T . — Wir können M' so beschreiben: Aus M wird $M_1 \cup U(T_1) \cup M_2$ fortgelassen und stattdessen wird an jedes von $U(T_1)$ verschiedene $U(T_j)$, das M_2 traf, in der richtigen Weise ein Vollring angeheftet; für jede in M_2 gelegene Randfläche von M resultiert eine Komponente von M' , die ein Vollring ist. M ist homöomorph zur zusammenhängenden Summe der Komponenten von M' und einer Anzahl $S^1 \times S^2$; diese Anzahl ist bestimmt durch die Charakteristik und den Orientierbarkeitscharakter von B und die Anzahl der Komponenten von M' .

Bemerkung. Mit Hilfe einer Konstruktion, die im wesentlichen die Umkehrung der gerade beschriebenen Reduktion ist, läßt sich für die zusammenhängende Summe zweier Graphenmannigfaltigkeiten wieder eine Graphenstruktur angeben. Eine solche Graphenstruktur ist aber wertlos, denn für sie (und allgemein für eine nicht reduzierte Graphenstruktur) werden die zu den Ergebnissen der folgenden Paragraphen analogen Behauptungen beliebig falsch.

zu (6.2.5): Wir ersetzen M_1 durch die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3, und führen hinterher die Reduktion (6.2.2) aus; daß das geht, ist gerade die Voraussetzung von (6.2.5).

zu (6.2.6): Wir ersetzen sowohl M_1 als auch M_2 durch die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3, und führen hinterher die Reduktion (6.2.2) aus; daß das geht, ist gerade die Voraussetzung von (6.2.6).

zu (6.2.7): Wir ersetzen die Graphenmannigfaltigkeit Q durch das S^1 -Bündel über dem Möbiusband.

zu (6.2.8): Wenn es überhaupt eine Kurve in T' gibt, deren Homologiekategorie unter dem Isomorphismus $H_1(T') \rightarrow H_1(T')$ auf sich oder ihr Inverses abgebildet wird, dann gibt es auch eine einfach-geschlossene Kurve mit dieser Eigenschaft. Wir fasn M_1 so, daß diese Kurve Faser wird: Die Reduktion (6.2.2) liefert dann eine Faserung von M als S^1 -Bündel über dem Torus oder Kleinschen Schlauch.

zu (6.2.9): Unter dieser Voraussetzung ist M ein Linsenraum (insbesondere möglicherweise die 3-Sphäre) oder $S^1 \times S^2$. — Wir rechnen diese Mannigfaltigkeiten nicht zu den reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten. Unsere Methode liefert für sie gar nichts, und sie würden deshalb nur überflüssige Disjunktionen verursachen.

zu (6.2.10): Aus demselben Grund wie im letzten Punkt rechnen wir diese Bündel nicht zu den reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten. — Ein Bündel über der 2-Sphäre ist ein Linsenraum oder $S^1 \times S^2$. — Der Vollständigkeit halber geben wir für die Bündel über der projektiven Ebene eine andere Graphenstruktur an: Sei M ein solches Bündel; wir erhalten M , wenn wir einen Vollring und das Bündel über dem Möbiusband in geeigneter Weise verkleben. Wir ersetzen dann das Bündel über dem Möbiusband durch die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3. Bis auf genau eine Ausnahme sind die so erhaltenen Graphenmannigfaltigkeiten reduziert. Die Ausnahme wird nach (6.2.4) vereinfacht und zerfällt dabei in die zusammenhängende Summe zweier projektiver Räume.

Die Behauptung, daß das Reduktionsverfahren abbricht, ist trivial für solche Graphenstrukturen, auf die (6.2.9) oder (6.2.10) Anwendung findet oder der erste Fall aus (6.2.4), („ M' ist eine Mannigfaltigkeit, die aus zwei Vollringen besteht“); diese Graphenstrukturen seien im folgenden ausgeschlossen.

Sei ρ die Anzahl der Komponenten von T . Sei σ die Anzahl derjenigen Komponenten von $M - \overset{\circ}{U}(T)$, die homöomorph sind zu einem S^1 -Bündel über einer gelochten projektiven Ebene. Dann ist $(\rho + 2\sigma, \rho)$, in lexikographischer Anordnung, ein Kompliziertheitsgrad für M , bzw. für die Mannigfaltigkeiten, deren zusammenhängende Summe M ist, der bei jeder Reduktion kleiner wird:

Bei (6.2.1)–(6.2.4) und (6.2.8) wird ρ kleiner und σ nicht größer. (Bei (6.2.2) kann ein Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche neu hinzukommen, nämlich eventuell dann, wenn $M_1 = M_2$; in einem solchen Falle hat aber die Basis des neuen Bündels höheres Geschlecht als die projektive Ebene.)

Bei (6.2.5) wird ρ um 1 größer und σ um 1 kleiner.

Bei (6.2.6) wird ρ um 3 größer und σ um 2 kleiner.

Bei (6.2.7) wird ρ um 2 kleiner und σ um 1 größer.

7. Flächen in reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten

(7.1) Satz. *Eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit ist irreduzibel.*

Beweis. Sei M eine solche, und sei $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ ihre Graphenstruktur. — Ist $T = \emptyset$, dann ist wegen (6.2.10) M eine Mannigfaltigkeit, für die die Behauptung in (2.7) bewiesen ist. Sei also $T \neq \emptyset$. — Ist $T = T_1$, und $M - \overset{\circ}{U}(T)$ homöomorph zu Torus \times Intervall, dann ist T inkompressibel in M , und die Behauptung folgt aus (1.8) und (2.7). Wir schließen im folgenden diesen Fall aus; wegen (6.2.1) ist dann keine Komponente von $M - \overset{\circ}{U}(T)$ das S^1 -Bündel über dem Kreisring.

Sei im Widerspruch zur Behauptung S eine 2-Sphäre in M , die kein 3-Element berandet; sei S so gewählt, daß $S \cap T$ aus möglichst wenig Kurven besteht. Es ist $S \cap T \neq \emptyset$ nach (2.7). Sei $U(T)$ eine reguläre Umgebung von T , sei $\tilde{M} = M - \overset{\circ}{U}(T)$, sei $\tilde{S} = S \cap \tilde{M}$. Nach (1.6) ist \tilde{S} inkompressibel in \tilde{M} , und keine Komponente ist randparallel in \tilde{M} .

Ist die Komponente M_1 von \tilde{M} ein Vollring, dann besteht $\tilde{S} \cap M_1$ aus Meridianflächen.

Sei M_2 eine Komponente von \tilde{M} , die kein Vollring ist. Da $S \cap T \neq \emptyset$, gibt es wegen (6.2.9) eine solche, daß $\tilde{S} \cap M_2 \neq \emptyset$; sei F eine Komponente von $\tilde{S} \cap M_2$. Nach (4.2) ist F in M_2 entweder isotop zu einem vertikalen Kreisring oder zu einer Fläche, die mindestens zwei horizontale Randkurven hat (da wir ja den Fall, daß M_2 Torus \times Intervall ist, schon erledigt haben). An eine vertikale bzw. horizontale Randkurve von F kann nicht von außerhalb M_2 , etwa in M_1 , eine Komponente von \tilde{S} anstoßen, die ein 2-Element ist: Dann müßte M_1 ein Vollring sein und dieses 2-Element eine Meridianfläche in M_1 . Damit hätten wir aber einen Widerspruch zu der Reduktionsforderung (6.2.4) bzw. (6.2.3).

Hängen wir nun jeden der Kreisringe $S \cap U(T)$ mit einer Randkurve an \tilde{S} an, so haben wir folgende seltsame Zerlegung von S konstruiert:

- 1) S ist in endlich viele Teile zerlegt.
- 2) Mindestens einer dieser Teile ist nicht ein 2-Element.
- 3) Jeder Teil, der nicht ein 2-Element ist, hat mindestens zwei Randkurven, an die ein Teil anstößt, der nicht ein 2-Element ist.

(7.2) Lemma. *Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur T . Ist ∂M kompressibel, dann ist $T = \emptyset$, und M ist ein Vollring.*

Beweis: Unter der Voraussetzung $T = \emptyset$, ist die Behauptung in (2.6) bewiesen. Sei also $T \neq \emptyset$.

Sei im Widerspruch zur Behauptung D ein rand-inkompressibles 2-Element in M . Sei D bereits so deformiert, daß $D \cap T$ aus möglichst wenig Kurven besteht. Es ist $D \cap T \neq \emptyset$ wegen (2.6). Sei $U(T)$ eine reguläre Umgebung von T , sei $\tilde{M} = M - \overset{\circ}{U}(T)$, sei $\tilde{D} = D \cap \tilde{M}$. Nach (1.9) und (7.1) ist \tilde{D} inkompressibel in \tilde{M} , und keine Komponente von \tilde{D} ist randparallel in \tilde{M} . — Die weitere Argumentation ist nahezu identisch mit der aus (7.1).

(7.3) Lemma. *Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$.*

T_1 ist genau dann kompressibel in M , wenn einer der an $U(T_1)$ anstoßenden Teile von $M - \overset{\circ}{U}(T)$ ein Vollring ist.

Beweis. Die eine Richtung ist trivial. Um die andere zu beweisen, wenden wir (7.2) an auf $M' = M - \overset{\circ}{U}(T_1)$.

(7.4) Lemma. *Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur T . Der Kreisring F in M sei enthalten in $\tilde{M} = M - \dot{U}(T)$. F sei inkompressibel und nicht rand-parallel in \tilde{M} . Dann ist F inkompressibel und nicht rand-parallel in M .*

Beweis. Sei M_1 die Komponente von \tilde{M} , die F enthält. Ist $M_1 = M$, so ist nichts zu beweisen: Wäre M_1 das Bündel über dem 2-Element oder dem Kreisring oder dem Möbiusband, so kämen wir gerade auf diesen Fall; also nehmen wir an, M_1 ist nicht eines dieser Bündel. Nach (2.8) dürfen wir deshalb annehmen, daß F in M_1 vertikal ist.

1) Gäbe es ein 2-Element D in $\overset{\circ}{M}$ mit $D \cap F = \partial D$, so daß ∂D nicht ein 2-Element auf F berandete, dann könnten wir D zusammensetzen mit einem der Kreisringe, in die F von ∂D zerlegt würde, zu einem rand-inkompressiblen 2-Element in M , im Widerspruch zu (7.2).

2) Wir nehmen an, F sei parallel zu dem Kreisring F' in ∂M . Dann gibt es einen Vollring V in M , so daß $\partial V = F \cup F'$. Nach Voraussetzung ist $T \cap V = T \cap \overset{\circ}{V} \neq \emptyset$.

Die von M in V induzierte Graphenstruktur kann nicht reduziert sein, da wir sonst einen Widerspruch zu (7.2) hätten. Aber die einzige Reduktionsforderung, die möglicherweise nicht erfüllt ist, ist (6.2.1). Also ist ∂V parallel zu einer Komponente von T , etwa T_1 . Als Torus in einem Vollring ist T_1 kompressibel, also folgt aus (7.3), daß T_1 die einzige in V liegende Komponente von T ist, und daß die von M_1 verschiedene an $U(T_1)$ anstoßende Komponente von \tilde{M} ein Vollring ist, (der im Innern von V liegt). — Aus der Annahme, F sei parallel zu F' , folgt, daß es eine Meridianfläche von V gibt, deren Rand F in genau einem Bogen trifft, also jede der beiden vertikalen Randkurven von F in je einem Punkt: Es folgt, daß die Verklebung an T_1 die Reduktionsforderung (6.2.3) verletzt.

(7.5) Lemma. *Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur T . Sei F ein inkompressibler und nicht rand-paralleler Kreisring in M . Sei F so deformiert, daß $F \cap T$ aus möglichst wenig Kurven besteht.*

Ist $F \cap T \neq \emptyset$, dann ist M die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3.

Beweis. Sei $\tilde{M} = M - \dot{U}(T)$, und sei $\tilde{F} = F \cap \tilde{M}$.

1. Fall. \tilde{F} besteht nur aus Kreisringen. Sei M_1 eine Komponente von \tilde{M} , und F_1 eine in M_1 liegende Komponente von \tilde{F} ; F_1 ist nach (1.9) inkompressibel und nicht rand-parallel in M_1 . Also ist M_1 kein Vollring; da $T \neq \emptyset$ und $\partial M \neq \emptyset$, ist wegen (6.2.1) M_1 auch nicht Torus \times Intervall. Daher ist nach (2.8) F isotop zu einem vertikalen Kreisring, wenn M_1 nicht das S^1 -Bündel über dem Möbiusband ist. Ist M_1 dieses Bündel,

dann ist entweder F isotop zu einem vertikalen Kreisring oder aber die Randkurven von F sind isotop in ∂M_1 zum Rand des als Schnitt eingebetteten Möbiusbandes, (3.3). — Aber die Reduktionsforderungen (6.2.1) und (6.2.5) verbieten, daß F nur aus solchen Teilen wie F_1 zusammengesetzt ist.

2. Fall. Die Komponente F_1 von \tilde{F} sei ein 2-Element; sie liege in der Komponente M_1 von \tilde{M} . Nach (2.8) muß M_1 ein Vollring sein; F_1 ist Meridianfläche in M_1 .

M_1 stoße an M_2 an, und F_1 an F_2 aus M_2 . Wegen (6.2.9) und (6.2.1) ist M_2 weder ein Vollring noch Torus \times Intervall. Wegen (6.2.4) ist F_2 nicht isotop zu einem vertikalen Kreisring in M_2 . Und schließlich kann F_2 wegen (6.2.3) nicht lauter horizontale Randkurven haben: Es folgt mit (4.2), daß M_2 das Produktbündel über einer mindestens 3-fach gelochten 2-Sphäre ist, und daß F_2 in M_2 isotop ist zu einer α -blättrigen Überlagerung der Basis von M_2 , mit $\alpha \geq 2$.

Jede Randkurve von F_2 , die auf F ein 2-Element berandet, liegt auf einem $U(T_j)$, an das auf der andern Seite ein Vollring anstößt: Denn sei k eine solche Randkurve; sie liege in $\partial U(T_1)$; D sei das von ihr auf F berandete 2-Element. Es gibt dann ein 2-Element D' in D mit $D' \cap T_1 = \partial D'$. Da F so deformiert war, daß die Anzahl der Schnitte $F \cap T$ möglichst klein ist, und da M irreduzibel ist, folgt, daß $\partial D'$ auf T_1 nicht ein 2-Element berandet: Mit (7.3) folgt die Behauptung.

M_2 habe r Randflächen. Nach (4.2) liegen in $r-2$ Randflächen von M_2 lauter horizontale Randkurven von F_2 ; d.h. F_2 hat (mindestens) $\alpha(r-2)$ horizontale Randkurven und insgesamt (mindestens) $\alpha(r-2) + 2$ Randkurven. Eine solche horizontale Randkurve darf nach dem oben Gesagten und wegen (6.2.3) nicht ein 2-Element auf F beranden. Andererseits hat F_2 höchstens zwei Randkurven, die auf dem Kreisring F nicht ein 2-Element beranden: Also ist $\alpha(r-2) \leq 2$, daher genau $\alpha=2$ und $r=3$.

Von den (mindestens) vier Randkurven von F_2 beranden (mindestens) zwei auf F ein 2-Element. Da diese Kurven nicht horizontal sein dürfen, und da $\alpha=2$, liegen sie auf verschiedenen Randflächen von M_2 . Und an diese beiden Randflächen stoßen tatsächlich Vollringe an: Wir kommen also genau auf die Konstruktion von Q aus § 3. An die dritte Randfläche von M_2 kann nicht ein Vollring anstoßen, da $\partial M \neq \emptyset$ ist; an diese Randfläche kann aber auch nichts anderes anstoßen, wegen (6.2.7). Also ist $M=Q$.

(7.6) Lemma. Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur T . Sei M homöomorph zu Torus \times Intervall. Dann ist $T = \emptyset$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $T \neq \emptyset$. Sei M_1 eine Komponente von $M - \dot{U}(T)$, so daß $M_1 \cap \partial M \neq \emptyset$. Sei F ein inkompressibler und nicht rand-paralleler Kreisring in M , so daß (mindestens) eine Randkurve in ∂M_1 nicht isotop zu einer vertikalen Kurve ist. F werde so deformiert, daß $F \cap T$ aus möglichst wenig Kurven besteht. Es kann nicht $F \cap T = \emptyset$ sein, da sonst aus (2.8) folgte, daß jede Komponente von $F \cap M_1$ in M_1 isotop zu einem vertikalen Kreisring wäre, was nach Wahl von F nicht möglich ist. — Aber $F \cap T \neq \emptyset$ widerspricht (7.5).

(7.7) Lemma. *Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit. Sei M homöomorph zu dem S^1 -Bündel über dem Möbiusband. Dann ist M entweder das S^1 -Bündel über dem Möbiusband oder die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3.*

Beweis. Sei T die Graphenstruktur von M . Ist $T = \emptyset$, dann ist die Behauptung in (5.5) bewiesen. Ist $T \neq \emptyset$, dann folgt die Behauptung auf die gleiche Weise wie (7.6) aus (7.5), denn es gibt in M zwei inkompressible und nicht rand-parallele Kreisringe, deren Randkurven nicht zueinander isotop sind.

(7.8) Wir definieren zwei Graphenmannigfaltigkeiten Q_1 und Q_2 wie folgt:

(7.8.1) Sei sowohl M_1 als auch M_2 die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3. Sei $h: M_1 \rightarrow M_2$ ein Homöomorphismus. Der Homöomorphismus $h|_{\partial M_1} \rightarrow \partial M_2$ definiert eine Verklebung von M_1 und M_2 an ihren Randflächen. Wir führen die Verklebung aus und vergessen den von ∂M_1 herrührenden Torus (Reduktion (6.2.2)). Es entsteht dann eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit, die wir mit Q_1 bezeichnen. — Q_1 ist homöomorph zu dem S^1 -Bündel über dem Kleinschen Schlauch, das einen Schnitt besitzt; (dies ist das Bündel, das durch „Verdoppeln“ des S^1 -Bündels über dem Möbiusband entsteht).

(7.8.2) Sei sowohl N_1 als auch N_2 das S^1 -Bündel über dem Möbiusband. Sei $h: N_1 \rightarrow N_2$ ein Homöomorphismus. Sei $f: \partial N_1 \rightarrow \partial N_1$ ein involutorischer Homöomorphismus, der die beiden ausgezeichneten Kurvenklassen auf ∂N_1 vertauscht; nämlich die Klasse der zu einer vertikalen isotopen und die Klasse der zum Rand des als Schnitt eingebetteten Möbiusbandes isotopen Kurven. Wir verkleben N_1 und N_2 an ihren Randflächen mit Hilfe des Homöomorphismus $h|_{\partial N_1} \circ f: \partial N_1 \rightarrow \partial N_2$. Die entstehende Graphenmannigfaltigkeit ist nicht reduziert. Die Reduktion (6.2.5) ist ausführbar, und zwar auf zwei Arten: Wir können sowohl den von N_1 als auch den von N_2 herrührenden Teil durch die Graphenmannigfaltigkeit Q ersetzen und dann nach (6.2.2) reduzieren. Aber die beiden schließlich erhaltenen Graphenstrukturen sind äquivalent in dem Sinne, daß es einen Homöomorphismus gibt, der die eine auf die

andere abbildet. — Wir bezeichnen die konstruierte Graphenmannigfaltigkeit mit Q_2 .

(7.9) Lemma. *Sei M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit mit der Graphenstruktur T . Sei F ein inkompressibler Torus in M . F sei so deformiert, daß $F \cap T$ aus möglichst wenig Kurven besteht. Es sei $F \cap T \neq \emptyset$. Dann liegt einer der folgenden drei Fälle vor:*

(7.9.1) $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$ hat als Komponenten das S^1 -Bündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre und 3 Vollringe. $M - \mathring{U}(F)$ ist homöomorph zu Torus \times Intervall.

(7.9.2) M ist die Graphenmannigfaltigkeit Q_1 aus (7.8.1). $M - \mathring{U}(F)$ ist homöomorph zu Torus \times Intervall.

(7.9.3) M ist die Graphenmannigfaltigkeit Q_2 aus (7.8.2). $M - \mathring{U}(F)$ besteht aus zwei Komponenten, deren jede homöomorph ist zu dem S^1 -Bündel über dem Möbiusband.

Beweis. Sei $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$, und $\tilde{F} = F \cap \tilde{M}$.

Aus ähnlichen Gründen wie im ersten Fall des Beweises von (7.5) (und zusätzlich wegen der Reduktionsforderungen (6.2.6) und (6.2.8)) sind nicht alle Komponenten von \tilde{F} Kreisringe.

Sei M_1 eine Komponente von \tilde{M} , die nicht ein Vollring ist, und so daß $F \cap M_1$ nicht nur aus Kreisringen besteht; M_1 ist nicht Torus \times Intervall. Nach (2.8) dürfen wir annehmen, daß die Beschränkung der Bündelprojektion von M_1 auf $F \cap M_1$ eine Überlagerungsprojektion ist.

Falls dies möglich ist, werde in M_1 ein vertikaler Torus T^* gewählt, der inkompressibel in M_1 ist, und der nicht parallel ist zu einer Randfläche von M_1 . Existiert T^* , dann folgt aus (7.2), daß T^* inkompressibel in M ist, da wir beim Aufschneiden an T^* eine (möglicherweise nicht zusammenhängende) reduzierte Graphenmannigfaltigkeit erhalten.

Ist jeder inkompressible Torus in M_1 rand-parallel, dann ist die Basis von M_1 das Möbiusband oder die 3-fach gelochte 2-Sphäre. — Sei M_1 das S^1 -Bündel über dem Möbiusband. Wäre die Randfläche von M_1 kompressibel in M , dann folgte, daß $M - \mathring{M}_1$ ein Vollring wäre, und daß F aus einem Kreisring in M_1 und zwei 2-Elementen in $M - \mathring{M}_1$ bestände, was nicht geht: Wir nehmen als T^* die Komponente von T , deren $U(T^*)$ an M_1 anstößt; T^* ist inkompressibel in M .

1. Fall. M_1 ist das Bündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre, und $M - \mathring{M}_1$ besteht aus drei Vollringen: Dann besteht $F \cap (M - \mathring{M}_1)$ aus 2-Elementen, die Meridianflächen in diesen Vollringen sind. $F \cap M_1$ ist zusammenhängend. Nach (2.9) gibt es eine solche Faserung von M_1 über der 1-Sphäre, daß $F \cap M_1$ eine Faser ist. Diese Faserung induziert

eine Faserung von ∂M_1 durch Meridiankurven der anstoßenden Vollringe, und diese Faserung wiederum können wir fortsetzen zu einer Faserung der Vollringe durch Meridianflächen in solcher Weise, daß die $F \cap (M - \dot{M}_1)$ Fasern sind. Also ist M ein Torus-Bündel über der 1-Sphäre, und wir sind in (7.9.1).

2. *Fall. Der erste Fall tritt nicht ein:* Ist M_1 das Bündel über der 3-fach gelochten 2-Sphäre, dann gibt es nach (7.3) mindestens eine Komponente T^* von T , so daß $U(T^*)$ an M_1 anstößt, und daß T^* inkompressibel in M ist.

T^* ist also jetzt in allen Fällen definiert. Es ist $T^* \cap F \neq \emptyset$. Da T^* inkompressibel ist, wird F von $T^* \cap F$ in Kreisringe aufgeschnitten; keiner dieser Kreisringe ist parallel zu einem Teil von T^* , da andernfalls folgte, daß die Anzahl der Schnitte $F \cap T$ verringert werden könnte.

Wir schneiden M an T^* auf: Dadurch entstehen reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten N_1 und N_2 (N_1 ist möglicherweise identisch mit N_2). Wir bezeichnen ihre Graphenstrukturen mit $T_{(1)}$ und $T_{(2)}$. Es ist, etwa, $F \cap T_{(1)} \neq \emptyset$, (insbesondere $T_{(1)} \neq \emptyset$), da sonst entweder $T \cap F = \emptyset$ sein müßte oder $\tilde{F} = F \cap (M - \dot{U}(T))$ nur aus Kreisringen bestände. Also ist nach (7.5) N_1 die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3 (insbesondere muß $N_1 \neq N_2$ sein). Wegen (6.2.7) ist es gar nicht möglich, daß T^* als Komponente von T gewählt wurde, d. h. es ist $N_2 \cap M_1 \neq \emptyset$, und $N_2 \cap M_1$ ist ein S^1 -Bündel, das nicht $\text{Torus} \times \text{Intervall}$ ist. Die Schnittkurven $F \cap T^*$ sind nicht isotop zu vertikalen Kurven in $\partial(N_2 \cap M_1)$. Also ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder ist $T_{(2)} = \emptyset$, (und daher $N_2 \subset M_1$) und N_2 ist das S^1 -Bündel über dem Möbiusband; oder es ist $T_{(2)} \neq \emptyset$, dann ist notwendig $F \cap T_{(2)} \neq \emptyset$, daher nach (7.5) N_2 die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3.

Beide Möglichkeiten für M haben Folgendes gemeinsam: Die beiden ausgezeichneten Isotopieklassen derjenigen Kurven auf ∂N_1 , die als Randkurven von inkompressiblen, nicht rand-parallelen Kreisringen in N_1 auftreten, fallen in T^* zusammen mit den beiden ausgezeichneten Kurvenklassen auf ∂N_2 . (Es sind dies auf T^* einerseits die Isotopieklasse, die die in M_1 vertikalen Kurven enthält, und andererseits die Isotopieklasse, die $F \cap T^*$ enthält). — Dadurch, und daß die Graphenstruktur nicht trivial ist, sind aber gerade Q_1 und Q_2 aus (7.8) gekennzeichnet.

Ist M die Graphenmannigfaltigkeit Q_1 , dann besteht $M - \dot{U}(T)$ aus dem S^1 -Bündel über der 4-fach gelochten 2-Sphäre und 4 Vollringen. M_1 wird von $F \cap M_1$ nicht zerlegt. Die Faserung von M_1 induziert auf der durch Aufschneiden von M_1 an $F \cap M_1$ entstehenden Mannigfaltigkeit eine Faserung als Linienbündel. Diese Faserung läßt sich fortsetzen auf die Teile, in die die Vollringe $M - \dot{M}_1$ durch die darin liegenden Meridianflächen $F \cap (M - \dot{M}_1)$ aufgeschnitten werden, zu einer Faserung

der aus M durch Aufschneiden an F entstehenden Mannigfaltigkeit. Da M von F nicht zerlegt wird, hat dieses Linienbündel zwei Randflächen, ist also $\text{Torus} \times \text{Intervall}$.

Ist M die Graphenmannigfaltigkeit Q_2 , dann besteht $M - \mathring{U}(T)$ aus dem S^1 -Bündel M_1 über der 2-fach gelochten projektiven Ebene und zwei Vollringen. Wie oben finden wir eine Faserung der aus M durch Aufschneiden an F entstehenden Mannigfaltigkeit als Linienbündel. Diesmal ist aber diese Mannigfaltigkeit nicht zusammenhängend: Also hat jede Komponente eine Randfläche, ist daher das Linienbündel über dem Kleinschen Schlauch und homöomorph zu dem S^1 -Bündel über dem Möbiusband.

8. Homöomorphismen von reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten

(8.1) Satz. M und N seien reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten mit den Graphenstrukturen $T = T_1 \cup \dots \cup T_m$, bzw. $T' = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$. Das Paar (M, N) sei nicht eine der unten beschriebenen Ausnahmen.

Es gebe einen Homöomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$.

Dann gibt es einen zu φ isotopen Homöomorphismus ψ , so daß $\psi(T) = T'$.

Ausnahmen:

(8.1.1) $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$ besteht aus einem Bündel über der m -fach gelochten 2-Sphäre und (genau) m Vollringen, und es ist $m \leq 3$; oder \tilde{M} besteht aus einem Bündel über der m -fach gelochten projektiven Ebene und (genau) m Vollringen, und es ist $m \leq 1$. Und dasselbe gilt für $\tilde{N} = N - \mathring{U}(T')$.

(8.1.2) $\tilde{M} = M - \mathring{U}(T)$ ist $\text{Torus} \times \text{Intervall}$; und $\tilde{N} = N - \mathring{U}(T')$ besteht aus einem Bündel über der n -fach gelochten 2-Sphäre und n Vollringen, und es ist $n \leq 3$. Oder umgekehrt.

(8.1.3) M ist die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3; und N ist das S^1 -Bündel über dem Möbiusband. Oder umgekehrt.

(8.1.4) M ist die Graphenmannigfaltigkeit Q_1 aus (7.7); und N ist das S^1 -Bündel über dem Kleinschen Schlauch, das einen Schnitt besitzt. Oder umgekehrt.

(8.1.5) M und N sind beide die Graphenmannigfaltigkeit Q_2 aus (7.7).

Die Behauptung von (8.1) ist trivial, wenn $m = n = 0$; also nehmen wir an, daß $m + n > 0$. Zum Beweis unterscheiden wir die folgenden drei Fälle:

(8.2) Es ist $\partial M \neq \emptyset$; und alle T_j und T'_j sind kompressibel.

(8.3) Unter den Tori T_j und T'_j gibt es mindestens einen, etwa T_1 , der inkompressibel ist.

(8.4) Es ist $\partial M = \emptyset$; und alle T_j und T'_j sind kompressibel.

(8.2) *Beweis von (8.1) für den Fall, daß $\partial M \neq \emptyset$ und daß alle T_j und T'_j kompressibel sind.*

Nach (7.3) wird M von den T_j aufgeschnitten in das S^1 -Bündel M^* und die Vollringe V_1, \dots, V_m ; es ist $m \geq 1$; M^* hat mehr als m Randflächen. N wird von den T'_j aufgeschnitten in das S^1 -Bündel N^* und die Vollringe W_1, \dots, W_n ; es ist $n \geq 0$.

Sei C_1 ein vertikaler Kreisring in M^* , dessen eine Randkurve in T_1 und dessen andere Randkurve in ∂M liegt. Sei V_1 der an T_1 anstoßende Vollring. Sei $U(C_1 \cup V_1)$ eine reguläre Umgebung, so daß $M^* \cap U(C_1 \cup V_1)$ vertikal ist. Sei $F = (\partial U(C_1 \cup V_1) - \partial M)$; F ist ein vertikaler Kreisring in M^* , der, grob gesprochen, V_1 von M abtrennt. Nach (7.4) ist F inkompressibel und nicht rand-parallel in M . Deshalb gilt dasselbe für $\varphi(F)$ in N . Wir deformieren den Homöomorphismus φ so, daß $\varphi(F) \cap T'$ aus möglichst wenig Kurven besteht. Da N irreduzibel ist, (7.1), zeigt (1.9), daß $\varphi(F) \cap N^*$ inkompressibel in N^* ist und daß keine Komponente von $\varphi(F) \cap N^*$ parallel ist zu einem Teil von $\partial N^* - \partial N$. Daß eine Komponente von $\varphi(F) \cap N^*$ parallel ist in N^* zu einem Teil von ∂N , ist nur möglich, wenn $\varphi(F) \subset N^*$; es ist also nicht möglich, da $\varphi(F)$ nicht randparallel in N ist. Wir können also in (2.8) nachschauen, wie $\varphi(F) \cap N^*$ aussieht:

1. *Fall. Die Randkurven $\varphi(\partial F)$ sind in ∂N^* nicht homolog zu vertikalen Kurven.* Dann ist die Basis von N^* eine nicht-orientierbare Fläche. Denn die Randkurven von F liegen in einer Randfläche von M , und eine Orientierung von F induziert in ihnen entgegengesetzte Orientierung. Daher gilt dasselbe für die beiden Randkurven $\varphi(\partial F)$ von $\varphi(F) \cap N^*$. Andererseits ist $\varphi(F) \cap N^*$ zusammenhängend, und ist isotop zu einer Überlagerung der Basis von N^* : Das führte zu einem Widerspruch, wenn die Basis von N^* orientierbar wäre. — Nach (4.2.3) hat nun $\varphi(F) \cap N^*$ nur Randkurven, die in ∂N^* isotop sind zu horizontalen Kurven. Daher kann wegen (6.2.3) an N^* gar kein Vollring W_j anstoßen. Es ist also $N = N^*$, und N ist notwendig das S^1 -Bündel über dem Möbiusband.

Sei nun C' ein vertikaler Kreisring in N , der inkompressibel und nicht rand-parallel ist. Da die $\varphi(\partial F)$ nicht homolog zu vertikalen Kurven in ∂N sind, können die $\varphi^{-1}(\partial C')$ nicht homolog zu vertikalen Kurven in ∂M^* sein. Wird also φ so deformiert, daß $\varphi^{-1}(C') \cap T$ aus möglichst wenig Kurven besteht, dann wird $\varphi^{-1}(C') \cap M^*$ ein Flächensystem vom Typ (2.8.2), d.h. es ist dann $\varphi^{-1}(C') \cap T \neq \emptyset$. Also ist nach (7.5) M die Graphenmannigfaltigkeit Q . — (M, N) ist die Ausnahme (8.1.3).

2. *Fall. Die Randkurven $\varphi(\partial F)$ sind in ∂N^* homolog zu vertikalen Kurven.* Dann liegt $\varphi(F)$ bereits in N^* und ist in N^* isotop zu einem vertikalen Kreisring; wir nehmen daher an, daß $\varphi(F)$ vertikal ist in N^* . $\varphi(F)$ zerlegt N , und eine der Komponenten, nämlich $\varphi(U(C_1 \cup V_1))$,

ist ein Vollring. Läge dieser Vollring in N^* , dann wäre sein Durchschnitt mit einer als Schnitt in N^* eingebetteten Basis eine Meridianfläche, die $\varphi(F)$ in genau einem Bogen träge, und es folgte, daß $\varphi(F)$ in N^* randparallel wäre, was nicht stimmt. Also enthält dieser Vollring mindestens einen der Tori T_j ; er enthält auch höchstens einen, da im andern Falle $\varphi(U(C_1 \cup V_1))$, mit der von N induzierten Graphenstruktur, eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit wäre (der einzige kritische Punkt ist (6.2.1)), aber kompressiblen Rand hätte, im Widerspruch zu (7.2). Da sicherlich $\partial N \not\subset \varphi(U(C_1 \cup V_1))$, enthält also $\varphi(U(C_1 \cup V_1))$ genau einen der Vollringe W_j , etwa W_1 . — Die Tori $\varphi(\partial V_1)$ und ∂W_1 sind beide parallel zu $\varphi(\partial U(C_1 \cup V_1))$, und beide liegen im Innern von N ; sie sind daher isotop. Also können wir φ so deformieren, daß $\varphi(V_1) = W_1$.

Die Behauptung folgt nun rekursiv über die Vollringe V_j : Der nächste Schritt ist, V_1 und W_1 zu „entfernen“ und die Beschränkung $\varphi|(M - \overset{\circ}{V}_1)$ zu untersuchen, usw. Bei dieser Rekursion stört die im ersten Fall aufgetretene Ausnahme nicht, da die weiterhin vorkommenden Mannigfaltigkeiten alle mindestens zwei Randflächen haben.

(8.3) Beweis von (8.1) für den Fall, daß T_1 inkompressibel ist.

Sei v die Anzahl der inkompressiblen Komponenten von T , und w die Anzahl der inkompressiblen Komponenten von T' . Um die Behauptung für das gegebene Paar (M, N) nachzuweisen, nehmen wir an, sie sei bereits bewiesen für alle Paare (M', N') , die nicht die Ausnahme (8.1.3) sind, und für die $\partial M' \neq \emptyset$, und $v' + w' < v + w$. Der Induktionsanfang ist nach (8.2) richtig.

Sei φ so deformiert, daß $\varphi(T_1) \cap T'$ aus möglichst wenig Kurven besteht.

(8.3.1) Es ist $\varphi(T_1) \cap T' = \emptyset$. — Zum Beweis prüfen wir die Möglichkeiten nach, die (7.9) noch offenläßt. (Die hier mit „ N^* “ bezeichnete Mannigfaltigkeit heißt dort „ M^* “; „ $\varphi(T_1)$ “ heißt dort „ F^* “.)

(7.9.1) beschreibt wegen (7.6) gerade die Ausnahme (8.1.2).

zu (7.9.2). Sei T^* ein Torus in N , der dem in (7.9) mit T^* bezeichneten Torus entspricht (vgl. Schluß des Beweises von (7.9)). Die Existenz von $\varphi^{-1}(T^*)$ in M zeigt, daß die Reduktionsforderung (6.2.8) verletzt ist für die Verklebung an T_1 .

zu (7.9.3). Sei T^* in N gewählt wie oben. Die Existenz von $\varphi^{-1}(T^*)$ in M zeigt, daß für die Verklebung an T_1 eine der Reduktionsforderungen (6.2.5), (6.2.6) oder (6.2.7) verletzt ist.

(8.3.2) Unter den Komponenten von $\tilde{N} = N - \overset{\circ}{U}(T')$ sei N^* diejenige, die $\varphi(T_1)$ enthält. $\varphi(T_1)$ ist isotop zu einem vertikalen Torus in N^* .

Beweis. Nach (2.8) ist die einzige Alternative die, daß N^* ein S^1 -Bündel über dem Torus oder Kleinschen Schlauch ist, (insbesondere

$N^* = N$), und es läßt sich dann φ so deformieren, daß die Beschränkung der Bündelprojektion von N^* auf $\varphi(T_1)$ eine Überlagerungsprojektion ist.

Es folgt wie am Schluß von (7.9), daß $M - \mathring{U}(T_1)$ homöomorph ist zu einem Linienbündel, und zwar zu $\text{Torus} \times \text{Intervall}$ im ersten Fall, und zu zwei Exemplaren des S^1 -Bündels über dem Möbiusband im zweiten Fall. — Das Weitere geht ganz analog zum zweiten und dritten Fall von (8.3.1).

Wir nehmen also an, daß $\varphi(T_1)$ in N^ vertikal ist.*

1. *Fall.* $\varphi(T_1)$ ist parallel zu einer Randfläche von N^* . — Diese Randfläche kann nicht eine Randfläche von N sein, denn sonst folgte aus (7.6), daß die Reduktionsforderung (6.2.1) für M verletzt wäre. Also ist $\varphi(T_1)$ parallel zu einer Komponente von T' , etwa T'_1 ; die beiden Tori liegen im Innern von N und sind daher isotop: Wir deformieren φ so, daß $\varphi(T_1) = T'_1$, und schneiden dann M und N an T_1 und T'_1 auf zu M' und N' . M' und N' sind (möglicherweise nicht zusammenhängende) reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten. Wegen (6.2.7) ist keine von ihnen (bzw. keine ihrer Komponenten) die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3. Daher können wir nach der Induktionsvoraussetzung $\varphi|_{M'}$ so deformieren, daß $\varphi|_{M'}: M' \rightarrow N'$ die Graphenstruktur respektiert. Die Deformation kann auf $\partial M'$, insbesondere auf T_1 , konstant gehalten werden. Also folgt die Behauptung.

2. *Fall.* $\varphi(T_1)$ ist nicht parallel zu einer Randfläche von N^* . (Wir werden sehen, daß das nicht geht.) — Wir schneiden M und N an T_1 und $\varphi(T_1)$ auf zu M' und N' ; M' und N' sind reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten (M' trivialerweise, N' deshalb, weil $\varphi(T_1)$ nicht parallel war zu einer Komponente von T'). Seien M_1 und M_2 die Komponenten von M' (es ist eventuell $M_1 = M_2$) und N_1 und N_2 die von N' . Wegen (6.2.7) ist weder M_1 noch M_2 die Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3. Wir nehmen zunächst an, daß dasselbe auch für N_1 und N_2 gelte. Nach der Induktionsvoraussetzung können wir dann φ so deformieren, daß $\varphi|_{M_1}$ und $\varphi|_{M_2}$ die Graphenstruktur respektieren. Sowohl auf T_1 als auch auf $\varphi(T_1)$ gibt es zwei ausgezeichnete Isotopieklassen von Kurven, nämlich die der vertikalen Kurven in den anstoßenden Bündeln. Auf $\varphi(T_1)$ sind diese beiden Klassen identisch. Wegen der bereits erreichten Normierung von φ werden die an $\varphi(T_1)$ anstoßenden Bündel durch φ^{-1} auf die an T_1 anstoßenden Bündel abgebildet. Daher wird nach (5.5) eine ausgezeichnete Kurvenklasse auf $\varphi(T_1)$ durch φ^{-1} auf eine ausgezeichnete Kurvenklasse auf T_1 abgebildet. Es folgt, daß die beiden ausgezeichneten Kurvenklassen auf T_1 identisch sind, im Widerspruch zu (6.2.2).

Ist N_1 (bzw. N_1 und N_2) die Graphenmannigfaltigkeit Q , dann schließen wir ähnlich: Nach (7.7) und (6.2.7) ist M_1 (bzw. M_1 und M_2)

das S^1 -Bündel über dem Möbiusband. Unter dem Homöomorphismus φ^{-1} geht die durch N_1 bestimmte ausgezeichnete Kurvenklasse auf $\varphi(T_1)$ über in die Klasse derjenigen Kurven auf T_1 , die isotop sind zum Rand des als Schnitt in M_1 eingebetteten Möbiusbandes (und eventuell analog für N_2 und M_2). Also ist die Reduktionsforderung (6.2.5) (bzw. (6.2.6)) für die Verklebung an T_1 verletzt.

(8.4) Beweis von (8.1) für den Fall, daß $\partial M = \emptyset$ und daß alle T_j und T'_j kompressibel sind.

M wird von T aufgeschnitten in das S^1 -Bündel M^* und Vollringe V_1, \dots, V_m ; es ist $m \geq 0$; N wird von T' aufgeschnitten in das S^1 -Bündel N^* und Vollringe W_1, \dots, W_n ; es ist $n \geq 1$.

Sei p^* die Bündelprojektion von M^* . In M^* sei ein vertikaler Torus F folgendermaßen definiert:

Ist $B^* = p^*(M^*)$ orientierbar und ist das Geschlecht von B^* nicht 0, dann sei $p^*(F)$ eine nichtzerlegende Kurve in B^* .

Ist B^* nichtorientierbar, dann berande $p^*(F)$ ein Möbiusband auf B^* .

Ist B^* eine gelochte 2-Sphäre, dann werde B^* von $p^*(F)$ in zwei Teile zerschnitten, deren einer genau drei Randkurven hat ($p^*(F)$ eingeschlossen).

Ist M^* das Bündel über einer 3-fach gelochten 2-Sphäre oder einer 1-fach gelochten projektiven Ebene (da M eine reduzierte Graphenmannigfaltigkeit ist, kann B^* nicht eine Teilfläche der 2-Sphäre oder projektiven Ebene mit weniger Randkurven sein), dann trifft nach Voraussetzung für N^* nicht dasselbe zu. Also können wir, indem wir notfalls M und N vertauschen, annehmen, daß dieser Fall nicht eintritt. F ist dann nicht rand-parallel in M^* , und es folgt aus (7.2) (durch Aufschneiden an F), daß F inkompressibel in M ist.

Wir deformieren φ so, daß $\varphi(F) \cap T'$ aus möglichst wenig Kurven besteht.

1. Fall. Es ist $\varphi(F) \cap T' = \emptyset$. — Da $T' \neq \emptyset$, dürfen wir nach (2.8) annehmen, daß $\varphi(F)$ in N^* vertikal ist. Wir zerschneiden M und N an F bzw. $\varphi(F)$ zu M_1 und M_2 , bzw. N_1 und N_2 (wobei möglicherweise $M_1 = M_2$ und $N_1 = N_2$). M_1 und M_2 sind reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten. Dasselbe gilt für N_1 und N_2 , denn das Gegenteil wäre nur dadurch möglich, daß für eine von ihnen die Reduktionsforderung (6.2.1) verletzt, daß also $\varphi(F)$ parallel zu einer Randfläche von N^* wäre, und das geht nicht, da $\varphi(F)$ inkompressibel in N ist.

Wir haben auf F und $\varphi(F)$ je eine ausgezeichnete Kurvenklasse, nämlich die der Faserung von M^* bzw. N^* .

1a) φ führt die eine ausgezeichnete Kurvenklasse in die andere über: Nach (8.2) können wir den Homöomorphismus $\varphi|_{M_1}$ deformieren in

einen Homöomorphismus, der die Graphenstruktur respektiert, wenn nicht (M_1, N_1) das Ausnahmepaar aus (8.2) ist: Aber (M_1, N_1) kann nicht dieses Ausnahmepaar sein wegen unserer Annahme über die ausgezeichneten Kurvenklassen. Entsprechendes gilt für $\varphi|M_2$. Die Deformationen können auf ∂M_1 und ∂M_2 konstant gehalten werden; also folgt die Behauptung.

1b) φ führt die eine ausgezeichnete Kurvenklasse nicht in die andere über: Das ist mit (8.2) nur dann verträglich, wenn beide Paare (M_1, N_1) und (M_2, N_2) das Ausnahmepaar (S^1 -Bündel über dem Möbiusband, Q) sind. Um nachzuweisen, daß (M, N) eines der Paare (8.1.4) oder (8.1.5) ist, genügt es nachzuweisen, daß bei der Verklebung von M_1 und M_2 zu M eine Kurve auf ∂M_1 , die als Randkurve eines inkompressiblen, nicht rand-parallelen Kreisrings in M_1 in Frage kommt, zusammenfällt mit einer ebensolchen Kurve in ∂M_2 . Daß das so ist, folgt aber gerade aus unserer Annahme über φ : Denn eine auf F liegende, in M^* vertikale Kurve liefert ein solches Kurvenpaar, und eine auf $\varphi(F)$ liegende, in N^* vertikale Kurve liefert ein anderes.

2. Fall. Es ist $\varphi(F) \cap T' \neq \emptyset$. — Wir prüfen die Fälle nach, die (7.9) noch offen läßt.

2a) (zu (7.9.1) und (7.9.2)) N^* ist das Bündel über der 3- oder 4-fach gelochten 2-Sphäre, und N wird von $\varphi(F)$ aufgeschnitten in $\text{Torus} \times \text{Intervall}$.

Nach (7.6) kann in unserem Falle M nur ein Bündel über dem Torus oder Kleinschen Schlauch sein (mit trivialer Graphenstruktur). M kann nicht ein Bündel über dem Kleinschen Schlauch sein, da wir für solche Bündel F als zerlegende Fläche gewählt hatten. — Also gibt es in M einen vertikalen inkompressiblen Torus F' , der M nicht zerlegt und der nicht isotop zu F ist. Wir deformieren φ so, daß $\varphi(F') \cap T'$ möglichst klein ist: Ist $\varphi(F') \cap T' = \emptyset$, liegt also $\varphi(F')$ in N^* , dann wird N von $\varphi(F')$ zerlegt, was nicht stimmt. Ist $\varphi(F') \cap T' \neq \emptyset$, dann folgt aus (2.11), daß $\varphi(F')$ isotop ist zu $\varphi(F)$, was auch nicht stimmt.

2b) (zu (7.9.3); dieser Fall kann eintreten) N ist die Graphenmannigfaltigkeit Q_2 aus (7.8.2). M ist noch zu bestimmen.

Wir zerlegen N durch einen vertikalen Torus in zwei Teile N_1 und N_2 , so daß die induzierte Graphenstruktur auf N_1 die des S^1 -Bündels über dem Möbiusband ist und die von N_2 die der Graphenmannigfaltigkeit Q aus § 3. Wir konstruieren nun eine neue Graphenstruktur für N dadurch, daß wir N_1 die Graphenstruktur von Q geben und N_2 die des Bündels über dem Möbiusband. Die neue Graphenstruktur von N ist homöomorph zur ursprünglichen, (7.8.2).

Nach unserer Voraussetzung über $\varphi(F)$ konnten wir φ so deformieren, daß die Beschränkung der Bündelprojektion von N^* auf $\varphi(F) \cap N^*$ eine

Überlagerungsprojektion war. Für die neue Graphenstruktur heißt das aber gerade: φ kann so deformiert werden, daß der Durchschnitt $\varphi(F) \cap N_1$ aus Kreisringen besteht, und daß diese Kreisringe die in N_1 liegenden neuen W_j nicht treffen. Also sind wir mit der neuen Graphenstruktur für N im schon behandelten Fall, daß $\varphi(F) \cap T' = \emptyset$.

9. Klassifikation der „meisten“ reduzierten Graphenmannigfaltigkeiten

(9.1) Wir betrachten in diesem Paragraphen nur reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten, und schließen von diesen noch die folgenden aus:

(9.1.1) $M - \mathring{U}(T)$ besteht aus dem Bündel über der dreifach gelochten 2-Sphäre und drei Vollringen.

(9.1.2) $M - \mathring{U}(T)$ besteht aus dem Bündel über dem Möbiusband und einem Vollring

(9.1.3) $T \neq \emptyset$, und $M - \mathring{U}(T)$ ist Torus \times Intervall.

(Die Mannigfaltigkeiten (9.1.3) ordnen sich den folgenden Überlegungen nicht unter. Ihre Klassifikation läßt sich zurückführen auf das (gelöste) Konjugationsproblem in $\text{Aut}_+(Z \times Z) = \text{Gruppe der zwei-reihigen unimodularen Matrizen mit Determinante } +1$.)

Einer reduzierten Graphenmannigfaltigkeit M , die nicht eine der ausgeschlossenen ist, und die mit einer festen Orientierung versehen sei, werden wir in kanonischer Weise einen bewerteten Graphen $A(M)$ zuordnen. Wir geben zuerst eine „axiomatische Beschreibung“ der auftretenden Graphen.

(9.2.1) $A(M)$ hat endlich viele Punkte μ_1, μ_2, \dots und endlich viele Strecken τ_1, τ_2, \dots . Die Strecken sind orientiert. Jeder Endpunkt einer Strecke ist mit einem Punkt inzident. $A(M)$ ist zusammenhängend.

(9.2.2) Jedem Punkt μ_j wird ein Tripel ganzer Zahlen, (g_j, r_j, s_j) zugeordnet. Darin ist g_j beliebig; r_j nicht negativ; wenn $r_j = 0$, dann ist s_j beliebig, wenn $r_j > 0$, dann ist s_j durch einen Strich zu ersetzen.

(9.2.3) Ist einem Punkt der Ordnung 1 das Tripel $(0, 0, s_j)$ zugeordnet, so wird es durch einen Strich ersetzt.

(9.2.4) a) Hat $A(M)$ nur zwei Punkte, so sind nicht beide mit einem Strich bewertet.

b) Einem Punkt der Ordnung 0 wird nicht das Tripel $(0, 0, s_1)$ oder $(-1, 0, s_1)$ zugeordnet.

c) Einem Punkt der Ordnung 2 wird nicht das Tripel $(0, 0, s_j)$ zugeordnet.

d) Einem Punkt der Ordnung 1 wird nicht das Tripel $(0, 1, -)$ zugeordnet.

e) Hat $A(M)$ drei Punkte, die mit einem Strich bewertet sind, und nur drei Strecken, so ist dem vierten Punkt nicht das Tripel $(0, 0, s_j)$ zugeordnet.

f) Hat $A(M)$ einen Punkt, der mit einem Strich bewertet ist, und nur eine Strecke, so ist dem zweiten Punkt nicht das Tripel $(-1, 0, s_j)$ zugeordnet.

(9.2.5) Sei die Strecke τ_i mit einem Punkt inzident, der mit einem Strich bewertet ist:

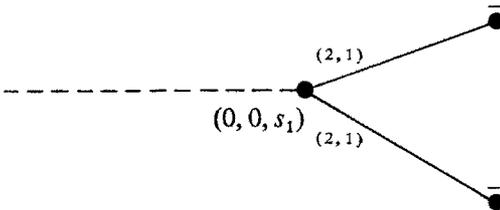
Dann ist τ_i zu diesem Punkt hin orientiert. Und τ_i wird mit einem Paar (α_i, β_i) bewertet; darin sind α_i und β_i teilerfremde ganze Zahlen, und es ist $1 \leq \beta_i < \alpha_i$.

(9.2.6) Sei keiner der Punkte, mit denen τ_i inzident ist, mit einem Strich bewertet:

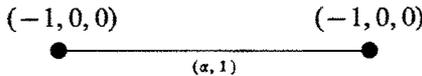
Dann wird die (orientierte) Strecke τ_i mit einem Paar (α_i, β_i) bewertet; darin sind α_i und β_i teilerfremde ganze Zahlen, und es ist $0 \leq \beta_i < \alpha_i$.

(9.2.7) Folgende Graphen oder Teilgraphen kommen nicht vor:

a)



b)



c)



(9.2.8) Sei A^* der (möglicherweise nicht zusammenhängende) Teilgraph, der aus $A(M)$ entsteht, wenn alle Punkte, deren zugeordnetes $g_j < 0$ ist, und die mit ihnen inzidenten Strecken entfernt werden. Die Homologiegruppe $H_1(A^*)$ wird mit einem Homomorphismus nach Z_2 bewertet.

(9.3) Seien A_1 und A_2 Graphen mit den Eigenschaften (9.2.1)–(9.2.8). A_1 und A_2 heißen äquivalent, wenn es eine eindeutige inzidenzerhaltende Abbildung $\Phi: A_1 \rightarrow A_2$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(9.3.1) Φ führt jeden Punkt in einen ebenso bewerteten Punkt über.

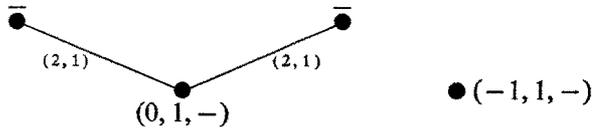
(9.3.2) Φ führt eine mit (α, β) bewertete Strecke über in eine mit (α, β^ω) bewertete Strecke; darin ist $\omega = +1$ oder -1 , je nachdem die Streckenorientierung (dieser einen Strecke) erhalten bleibt oder nicht. Es ist $\beta^{+1} = \beta$; und β^{-1} ist der normierte Repräsentant der zur Restklasse mod α von β inversen Restklasse; mit der Konvention $0^{-1} = 0$.

(9.3.3) Der durch Φ induzierte Homöomorphismus $A_1^* \rightarrow A_2^*$ induziert ein kommutatives Diagramm

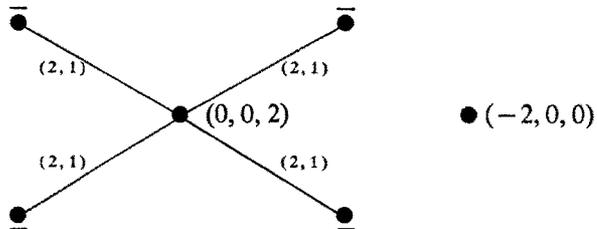
$$\begin{array}{ccc} H_1(A_1^*) & \longleftrightarrow & H_1(A_2^*) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Z_2 & \end{array}$$

(9.3.4) Folgende beiden Paare von Graphen sind äquivalent:

a)



b)



(9.4) Satz. Eine orientierte reduzierte Graphenmannigfaltigkeit, die nicht eine der in (9.1) genannten ist, bestimmt einen bewerteten Graphen mit den Eigenschaften (9.2). Davon gilt auch die Umkehrung.

Zwei orientierte Mannigfaltigkeiten sind genau dann orientierungserhaltend homöomorph, wenn die zugeordneten Graphen äquivalent im Sinne von (9.3) sind.

Sind M und N reduzierte Graphenmannigfaltigkeiten, die nicht zu den in (9.1) ausgeschlossenen gehören, und ist $\varphi: M \rightarrow N$ ein Homöo-

morphismus, so gibt es nach (8.1), wenn nicht (M, N) eines der Paare (8.1.3), (8.1.4) oder (8.1.5) ist, einen zu φ isotopen Homöomorphismus, der die Graphenstruktur respektiert.

Im Falle (8.1.5) gibt es einen Homöomorphismus $\varphi': M \rightarrow N$, der die Graphenstruktur respektiert.

Daß die aus dem Paar (8.1.3), bzw. (8.1.4) resultierenden Graphen äquivalent sind, ist in die Definition der Äquivalenz mit aufgenommen, (9.3.4).

Es genügt daher zum Beweis des Satzes, daß wir nicht einer Graphenmannigfaltigkeit, sondern einer Graphenstruktur einen bewerteten Graphen zuordnen, und daß die in dieser Zuordnung enthaltene Willkür gerade von der in (9.3.1)–(9.3.3) beschriebenen Äquivalenz erfaßt wird.

Wir merken an, daß die Verabredungen (9.1) und die Reduktionsforderungen (6.2.1) und (6.2.5)–(6.2.10) in (9.2.4) und (9.2.7) auftauchen. Die Reduktionsforderung (6.2.3) tritt implizit in (9.2.5) auf, („ $1 \leq \beta_i$ “). Wir kommen hierauf später nicht mehr zurück.

Die folgenden Argumente sind im wesentlichen die, mit denen SEIFERT die „gefaseren Räume“ gegenüber „faseretreuen Homöomorphismen“ klassifiziert hat [12]. Von unseren Reduktionsforderungen (6.2) sind die meisten dabei unwesentlich; nur (6.2.2) und (6.2.4) sind notwendig.

Sei $T = T_1 \cup \dots \cup T_n$ die Graphenstruktur von M . Sei $U(T)$ eine reguläre Umgebung von T , und sei $U(T_i)$ die T_i enthaltende Komponente. Wir bezeichnen die Randflächen von $U(T_i)$ mit T_i^- und T_i^+ . Wir orientieren T_i^- und T_i^+ mit der von der Inklusion $T_i^- \subset M - \mathring{U}(T)$ bzw. $T_i^+ \subset M - \mathring{U}(T)$ induzierten Orientierung. Die (fest gewählte) Produktstruktur $U(T_i) = T_i \times I$ definiert Homöomorphismen $T_i^- \rightarrow T_i$ und $T_i^+ \rightarrow T_i$; der zusammengesetzte Homöomorphismus $T_i^- \rightarrow T_i^+$ ist orientierungsumkehrend.

Seien M_1, \dots, M_n die Komponenten von $M - \mathring{U}(T)$.

Der M zugeordnete Graph $A = A(M)$ besteht aus Punkten μ_1, \dots, μ_n und orientierten Strecken τ_1, \dots, τ_n . Der Punkt μ_j ist der Komponente M_j zugeordnet. Die Strecke τ_i ist dem Paar T_i^-, T_i^+ zugeordnet; der Anfangspunkt von τ_i entspricht T_i^- , der Endpunkt T_i^+ . μ_j ist genau dann mit τ_i inzident, und zwar am Anfangspunkt, bzw. am Endpunkt, bzw. an beiden, wenn $T_i^- \subset \partial M_j$, bzw. $T_i^+ \subset \partial M_j$, bzw. $T_i^- \cup T_i^+ \subset \partial M_j$. – Es braucht nicht (und es darf sogar nicht) vermerkt werden, die „wievielte“ Randfläche von M_j T_i^- , etc., ist, da es zu zwei Randflächen von M_j einen Homöomorphismus gibt, der sie vertauscht.

Ist M_j nicht ein Vollring, so wird μ_j mit dem Tripel (g_j, r_j, s_j) bewertet. Das Vorzeichen von g_j sagt aus, ob die Basis von M_j orientierbar

ist, der Betrag von g_j bezeichnet ihr Geschlecht, (Torus: +1; 2-Sphäre: 0; projektive Ebene: -1). r_j ist die Anzahl der in M_j liegenden Randflächen von M . s_j wird später definiert werden; s_j ist nur erklärt, wenn $r_j = 0$.

Ist M_j ein Vollring, dann wird μ_j mit einem Strich bewertet.

(9.5) Bewertung der τ_i .

Es liege T_i^- in M_1 und T_i^+ in M_2 . Notfalls werden T_i^- und T_i^+ umnumeriert, daher nehmen wir an, daß M_1 nicht ein Vollring ist.

Es sei k eine orientierte Kurve in T_i^+ , und zwar: Ist M_2 ein Vollring, dann sei k eine Meridiankurve. Ist M_2 nicht ein Vollring, dann sei k eine vertikale Kurve; da wir ausgeschlossen haben, daß M_2 Torus \times Intervall ist, ist auch in diesem Falle k bis auf Umorientierung und Isotopie ohne Bezug auf die Faserung von M_2 festgelegt, (5.5).

Wir wählen ein Koordinatensystem a_1, b_1 in der Randfläche T_i^- von M_1 , (5.6.1); b_1 , als vertikale Kurve in der Randfläche eines Bündels, das weder ein Vollring noch Torus \times Intervall ist, ist bis auf Umorientierung und Isotopie ohne Bezug auf die Faserung festgelegt. Die Orientierung von a_1 ist durch die von b_1 (und die von T_i^-) festgelegt; die Homologieklassse von a_1 ist aber nur bis auf Vielfache von b_1 bestimmt.

In $U(T_i)$ besteht eine Homologie $\varepsilon_i^- k \sim \alpha_i^- a_1 + \beta_i^- b_1$, mit $\varepsilon_i^- = +1$ oder -1 , und $\alpha_i^- \geq 0$. Da k eine einfach-geschlossene Kurve ist, sind α_i^- und β_i^- teilerfremd.

Es ist $\alpha_i^- > 0$: Denn wäre $\alpha_i^- = 0$, dann wäre $\beta_i^- = \pm 1$, und es folgte, daß die Reduktionsforderung (6.2.4) bzw. (6.2.2) verletzt wäre. — Also können wir durch Addition eines geeigneten Vielfachen von b_1 zu einer neuen horizontalen Koordinate a_1 übergehen, so daß $\varepsilon_i^- k \sim \alpha_i^- a_1 + \beta_i^- b_1$, mit $0 \leq \beta_i^- < \alpha_i^-$. Durch diese Normierung ist die Homologieklassse von a_1 (bis auf gemeinsame Umorientierung von b_1 und a_1) eindeutig bestimmt. α_i^- und β_i^- hängen nicht ab von der Orientierung von k oder von der Orientierung von b_1 und a_1 . (Dagegen hängt β_i^- ab von der Orientierung von T_i^- , d.h. von der Orientierung von M , und wäre bei Umorientierung von M durch $\alpha_i^- - \beta_i^-$ zu ersetzen, wenn $\beta_i^- \neq 0$.)

(9.5.1) M_2 ist ein Vollring.

τ_i wird so orientiert, daß μ_1 mit dem Anfangspunkt und μ_2 mit dem Endpunkt von τ_i inzident ist. τ_i wird mit (α_i^-, β_i^-) bewertet. — Wegen der Reduktionsforderung (6.2.3) ist $\alpha_i^- > 1$, daher $\beta_i^- > 0$.

(9.5.2) M_2 ist kein Vollring.

Sei $[a_2], [b_2]$ das bis auf gemeinsame Umorientierung eindeutig bestimmte Koordinatensystem in der Randfläche T_i^+ von M_2 , für das

gilt $\varepsilon_i^+ b_1 \sim \alpha_i^+ a_2 + \beta_i^+ b_2$, mit $0 \leq \beta_i^+ < \alpha_i^+$, (diese und die folgenden Homologien in $U(T_i)$).

Wir können jedes der beiden Koordinatensysteme durch das andere ausdrücken, wir haben also in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \sim \varepsilon_i^- \begin{pmatrix} \gamma_i^- & \delta_i^- \\ \alpha_i^- & \beta_i^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \sim \varepsilon_i^+ \begin{pmatrix} \gamma_i^+ & \delta_i^+ \\ \alpha_i^+ & \beta_i^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen sind zueinander invers; da die natürliche Projektion $T_i^- \rightarrow T_i^+$ orientierungsumkehrend ist, haben sie die Determinante -1 . Ausrechnen zeigt, daß $\alpha_i^- = \alpha_i^+$; $\delta_i^- = \delta_i^+$; $\gamma_i^- = -\beta_i^+$; $\gamma_i^+ = -\beta_i^-$. (Dabei haben wir benutzt, daß $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$, s. u.)

Also können wir die beiden Matrizen schreiben als:

$$\begin{pmatrix} -\beta_i^+ & \delta_i^- \\ \alpha_i^- & \beta_i^- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -\beta_i^- & \delta_i^+ \\ \alpha_i^+ & \beta_i^+ \end{pmatrix}.$$

Die Determinantengleichung ist $\alpha_i^- \delta_i^- + \beta_i^- \beta_i^+ = 1$. Hieraus und aus den Beziehungen $0 \leq \beta_i^- < \alpha_i^-$ und $0 \leq \beta_i^+ < \alpha_i^+$ folgt:

Ist $\alpha_i^- = 1$, so ist $\beta_i^- = \beta_i^+ = 0$ und $\delta_i^- = 1$.

Ist $\alpha_i^- > 1$, so ist $\beta_i^- \neq 0$ und $\beta_i^+ \neq 0$, und die Determinantengleichung wird äquivalent zu der Gleichung für inverse prime Restklassen β_i^- und β_i^+ modulo α_i^- .

Daher ist die Verklebung entlang der gerichteten Strecke τ_i (die Homologie am „Endpunkt“ T_i^+ ausgedrückt durch die Homologie am „Anfangspunkt“ T_i^-) eindeutig gekennzeichnet durch das Paar (α_i^-, β_i^-) . Wird die Richtung der Strecke τ_i geändert, so bleibt α_i^- ungeändert, und β_i^- ist durch β_i^+ zu ersetzen, also durch den normierten Repräsentanten der inversen Restklasse modulo α_i^- .

Wir haben noch zu zeigen, daß $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$. Daß diese Gleichung stimmt, zeigt folgende Interpretation: Wir projizieren die Kurve b_2 nach T_i^- , es folgt dann aus der Homologie $\varepsilon_i^- b_2 = \alpha_i^- a_1 + \beta_i^- b_1$, daß $\varepsilon_i^- \alpha_i^-$ die Schnittzahl von b_1 mit b_2 – in dieser Reihenfolge – ist, (5.6.1). Andererseits ist $\varepsilon_i^+ \alpha_i^+$ die entsprechende Schnittzahl von b_2 mit b_1 . Um von einer Schnittzahl zur andern überzugehen, müssen wir einerseits die Faktoren vertauschen und zum andern von der Orientierung von T_i^- zu der von T_i^+ übergehen: das ergibt zwei Minuszeichen.

(9.6) Definition von $H_1(A^*) \rightarrow Z_2$.

Sei M^* die (möglicherweise unzusammenhängende) Teilmannigfaltigkeit von M , die entsteht, wenn wir aus $M = U(T) \cup M_1 \cup \dots \cup M_m$ alle

S^1 -Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche und die daran anstoßenden $U(T_i)$ fortlassen. $H_1(M^*) \rightarrow H_1(A^*)$ ist surjektiv; der Kern wird erzeugt von den $H_1(M_j)$.

Gehört M_j zu M^* , dann ist es sinnvoll, zu sagen, daß zwei vertikale Kurven in verschiedenen Randflächen von M_j gleich orientiert seien. Wir nehmen nun nachträglich an, daß die Koordinatensysteme in (9.5) so gewählt worden seien, daß die vertikalen Koordinaten in einem M_j , dessen Basis orientierbar ist, sämtlich gleich orientiert sind.

Für einen geschlossenen Weg l in M^* werde $\rho'(l)$ definiert als

$$\rho'(l) = \sum_i \sigma(l, T_i) \varepsilon_i;$$

dabei ist $\sigma(l, T_i)$ die Schnittzahl mod 2 von l und T_i , und $\varepsilon_i \in Z_2$ der „Logarithmus“ von $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$, (9.5), also $\varepsilon_i = 1$ oder 0, je nachdem $\varepsilon_i^- = -1$ oder $+1$.

$\rho: H_1(A^*) \rightarrow Z_2$ wird definiert als Ergänzung in dem untenstehenden kommutativen Diagramm; ρ existiert.

$$\begin{array}{ccc} H_1(M^*) & \longrightarrow & H_1(A^*) \\ & \searrow \rho' & \swarrow \rho \\ & & Z_2 \end{array}$$

Der Homomorphismus ρ beschreibt die Abhängigkeiten zwischen den Orientierungen der vertikalen Koordinaten in den Randflächen der M_j : Ist M_j ein S^1 -Bündel über einer nicht-orientierbaren Fläche, dann sind diese Orientierungen wegen der Existenz des Homöomorphismus (5.7.4) irrelevant; also genügt es, wenn wir uns auf die Teilmannigfaltigkeit M^* beschränken. Und hier kommt es, wegen des Homöomorphismus (5.7.3), auch nicht eigentlich auf die Orientierung der vertikalen Koordinaten an, sondern nur darauf, ob bei der Verklebung T_i die vertikalen Koordinaten „kohärent“ orientiert sind oder nicht, d. h. ob $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+ + 1$ ist oder -1 .

Bezeichnen wir für den Moment als einen „Zykel“ eine geschlossene Kurve in A^* , die jeden Punkt und jede Strecke höchstens einmal durchläuft, so erreichen wir mit Hilfe von Homöomorphismen des Typs (5.7.3), (nur solche stehen uns nach (5.8) zur Verfügung), daß entlang einem vorgegebenen Zykel entweder an genau keiner oder an genau einer Verklebung die vertikalen Koordinaten nicht kohärent orientiert sind; im zweiten Falle kann noch die Verklebung vorgegeben werden, an der die vertikalen Koordinaten nicht kohärent orientiert sind. Die beiden Möglichkeiten sind dadurch charakterisiert, daß das Bild des Zyklus unter $\rho: H_1(A^*) \rightarrow Z_2$ das triviale Element oder nicht das triviale Element ist.

(9.7) *Definition der s_j .*

Sei M_j nicht ein Vollring. Wir definieren s_j als Hindernis, die Basis von M_j so als Schnitt in M_j einzubetten, daß die in (9.5) konstruierten horizontalen Kurven Randkurven werden; ist $\partial M_j = \emptyset$, dann ist s_j das übliche Hindernis für einen Schnitt.

Seien R_1, \dots, R_t die Randflächen von M_j , $t \geq 0$; von diesen mögen die ersten t' in $U(T)$ liegen, $t' \leq t$, und die übrigen in ∂M .

Wir bezeichnen die in (9.5) konstruierten Koordinaten mit $a_1, b_1, \dots, a_{t'}, b_{t'}$.

Wir wählen ein Koordinatensystem für ∂M_j , (5.6.2), und bezeichnen die einzelnen Koordinaten mit $a'_1, b'_1, \dots, a'_t, b'_t$.

(9.7.1) *Es ist $t > t'$.* — Wir dürfen annehmen, daß $b_1 = b'_1, b_2 = b'_2$, usw. (vgl. die analoge Argumentation in (5.8.2)); und wir können dann erreichen, daß $a_i = a'_i$ für $i \leq t'$, indem wir Homöomorphismen vom Typ (5.7.6) jeweils mit der i -ten und t -ten Randfläche ausführen. — Ein Hindernis existiert in diesem Falle nicht, und s_j wird nicht erklärt.

(9.7.2) *Es ist $t = t'$.* — Sei V ein vertikaler Vollring in M_j , und sei v eine orientierte Meridiankurve auf ∂V . Sei $M'_j = M_j - \overset{\circ}{V}$. Da uns jetzt die zusätzliche Randfläche ∂V in M'_j zur Verfügung steht, können wir wie in (9.7.1) ein Koordinatensystem für $\partial M'_j$ finden, so daß die in den Randflächen R_1, \dots, R_t liegenden Koordinaten gerade die ursprünglich vorgegebenen sind. Seien a_0, b_0 die zu diesem Koordinatensystem für $\partial M'_j$ gehörenden Koordinaten, die in ∂V liegen. Nach (5.8) gehen alle Koordinatensysteme aus einem vorgegebenen durch Homöomorphismen vom Typ (5.7) hervor: Nachschauen zeigt (da die Orientierung vorgegeben ist und da Homöomorphismen vom Typ (5.7.6) jetzt verboten sind), daß gleichzeitiges Umorientieren von a_0 und b_0 die einzige allenfalls noch mögliche Abänderung von a_0, b_0 ist.

Wir definieren s_j als das Produkt der Schnittzahlen von v mit b_0 und von v mit a_0 — beide in der angegebenen Reihenfolge. s_j bleibt ungeändert, sowohl wenn v umorientiert wird, als auch wenn (gleichzeitig) b_0 und a_0 umorientiert werden.

In der Definition von s_j steckt noch die Wahl eines vertikalen Vollrings in M_j , also die Wahl der Isotopieklasse einer Faser: Nach (5.5) gibt es, von wenigen Ausnahmen abgesehen, in M_j nur eine solche Isotopieklasse. Von den Ausnahmen kommen hier nur zwei in Frage, nämlich die Bündel über dem Torus bzw. Kleinschen Schlauch, die einen Schnitt besitzen. In diesen Fällen sind aber je zwei Faserungen der unterliegenden Mannigfaltigkeit äquivalent als Faserbündel, und s_j hängt hier nur von dieser Äquivalenzklasse ab, da gar keine Randflächen vorhanden sind.

10. Seifertsche Faserräume

Ein orientierbarer *gefaserter Raum* im Sinne von SEIFERT [12], ist eine orientierbare (kompakte, zusammenhängende) 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Punkte so auf 1-Sphären („Fasern“) verteilt sind, daß jede Faser eine ganz aus Fasern bestehende Umgebung besitzt, die fasertreu homöomorph einem *gefasernten Vollring* ist. — Mit „homöomorph“ meinen wir auch hier „semilinear homöomorph“. SEIFERT macht diese Annahme nicht; aber er konstruiert auf einer gefaserten topologischen Mannigfaltigkeit eine semilineare Struktur, so daß jede Faser semilinear eingebettet ist.

Ein *gefaserter Vollring* ist wie folgt definiert: Das 2-Element D sei identifiziert mit den komplexen Zahlen vom Betrag ≤ 1 ; die 1-Sphäre S^1 mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1. Seien μ, ν teilerfremde ganze Zahlen, $0 \leq \nu < \mu$. Sei z eine Erzeugende von Z_μ , der zyklischen Gruppe der Ordnung μ . z operiere auf D durch Multiplikation mit $\exp(2\pi i \nu/\mu)$ und auf S^1 durch Multiplikation mit $\exp(2\pi i 1/\mu)$. Dann sei $V(\mu, \nu)$ der Quotientenraum $(D \times S^1)/Z_\mu$; $V(\mu, \nu)$ ist ein Vollring; $V(\mu, \nu)$ ist auf natürliche Weise gefasert durch die Bilder der $d \times S^1$, $d \in D$. — Die mittlere Faser von $V(\mu, \nu)$ hat mit einer Meridianfläche von $V(\mu, \nu)$ die Schnittzahl ± 1 ; jede andere Faser aber die Schnittzahl $\pm \mu$. Ist $\mu > 1$, so heißt die mittlere Faser von $V(\mu, \nu)$ eine *Ausnahmefaser der Ordnung μ* ; ist $\mu = 1$, so heißt sie eine *gewöhnliche Faser*. — $V(\mu, \nu)$ hat eine solche semilineare Struktur, daß jede Faser semilinear eingebettet ist.

Sei M ein im Seifertschen Sinne gefasertes Raum. Der Quotientenraum von M nach den Fasern ist eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit F , die *Zerlegungsfläche*. Wir können F eine solche semilineare Struktur aufprägen, daß die Projektion $P: M \rightarrow F$ semilinear ist. Da M kompakt ist, gibt es in M höchstens endlich viele Ausnahmefasern; wir bezeichnen ihre Bilder unter P als *Ausnahmepunkte* von F . — Auf ∂M liegen keine Ausnahmefasern.

(10.1) Satz. *Seien M und N orientierbare Seifertsche Faserräume. Weder M noch N sei eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.3). M sei nicht eine der Ausnahmen (10.1.4). (M, N) sei nicht eines der Paare (10.1.5)–(10.1.10).*

$\varphi: M \rightarrow N$ sei ein Homöomorphismus.

Dann gibt es einen Homöomorphismus $\psi: M \rightarrow N$ mit den Eigenschaften:

- a) ψ bildet jede Faser von M auf eine Faser von N ab.
- b) ψ ist isotop zu φ .

Bemerkung. Es ist nicht schwierig, aber lästig, „Weder M noch N sei eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.3)“ zu ersetzen durch „ M sei nicht eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.4)“.

Ausnahmen:

(10.1.1) $V(\mu, \nu)$.

(10.1.2) Geschlossene Seifertsche Faserräume mit der 2-Sphäre als Zerlegungsfläche und mit höchstens zwei Ausnahmefasern. — Jeder solche ist homöomorph einem Linsenraum (bzw. S^3 oder $S^1 \times S^2$). Zu jedem gibt es unendlich viele homöomorphe, die paarweise nicht fasertreu homöomorph sind.

(10.1.3) Geschlossene Seifertsche Faserräume mit der projektiven Ebene als Zerlegungsfläche und mit höchstens einer Ausnahmefaser. — Einer von ihnen ist homöomorph zur zusammenhängenden Summe zweier projektiver Räume. Jeder andere ist homöomorph zu einem (geeigneten) Faserraum aus (10.1.4), (vgl. im Beweis von (6.3.3) „zu (6.2.10)“).

(10.1.4) Geschlossene Seifertsche Faserräume mit der 2-Sphäre als Zerlegungsfläche und mit genau drei Ausnahmefasern.

(10.1.5) $S^1 \times S^1 \times I$.

(10.1.6) $S^1 \times S^1 \times S^1$.

(10.1.7) Das Bündel über dem Kleinschen Schlauch, das einen Schnitt besitzt.

(10.1.8) Der Seifertsche Faserraum mit dem 2-Element als Zerlegungsfläche und mit zwei Ausnahmefasern der Ordnung 2. Und das S^1 -Bündel über dem Möbiusband. — Diese beiden sind homöomorph; denn wir können (in der Notation von § 3) V_1 und V_2 als $V(2, 1)$ fasern, und zwar so, daß die auf den ∂V_j induzierten Faserungen übereinstimmen mit den von der Produktfaserung $S^1 \times B \rightarrow B$ induzierten Faserungen.

(10.1.9) Bilden wir die Verdopplung der beiden Seifertschen Faserräume (10.1.8), so erhalten wir zwei homöomorphe Mannigfaltigkeiten, deren eine ein Seifertscher Faserraum über der 2-Sphäre mit vier Ausnahmefasern der Ordnung 2 ist, und deren andere ein S^1 -Bündel über dem Kleinschen Schlauch (und zwar dasjenige, das einen Schnitt besitzt).

(10.1.10) Die beiden Seifert-Faserungen der Mannigfaltigkeit (10.1.8) lassen sich so wählen, daß auf dem Rande jede Faser der einen Faserung jede Faser der andern Faserung genau einmal schneidet. Es gibt also einen involutorischen Homöomorphismus der Randfläche auf sich, der die beiden Faserungen vertauscht. Bilden wir mit Hilfe dieses Homöomorphismus die „schiefe Verdopplung“ der Mannigfaltigkeit, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit, die auf natürliche Weise als Seifertscher Faserraum mit der projektiven Ebene als Zerlegungsfläche und mit zwei Ausnahmefasern der Ordnung 2 gefasert ist: aber auf zwei Arten. Die

beiden Seifert-Faserungen sind homöomorph, aber nicht isotop, (vgl. (7.8.2)).

Bemerkung. Das Ergebnis von (10.1) – mit (a) statt (a+b) – wurde auf anderem Wege von ORLIK, VOGT und ZIESCHANG erhalten [9]. Sie zeigen: Wenn es einen Isomorphismus des Gruppensystems von M auf das von N gibt, dann gibt es – von Ausnahmen abgesehen – einen fasertreuen Homöomorphismus von M auf N . (Das Gruppensystem ist die Fundamentalgruppe zusammen mit einer Klasse konjugierter Untergruppen für jede Randfläche. Ein Isomorphismus des Gruppensystems ist ein Isomorphismus der Fundamentalgruppen, der die Klassen konjugierter Untergruppen aufeinander abbildet. – Ein Homöomorphismus induziert natürlich immer einen Isomorphismus des Gruppensystems.) Die in [9] ausgeschlossenen Fälle sind „minimal“, d. h. es sind genau die, von denen man explizit zeigen kann, daß (10.1.a) für sie nicht stimmt. Insbesondere passiert in (10.1.3) und (10.1.4) genau das, was dort angegeben ist.

Es ist in Spezialfällen schon seit längerem bekannt, daß eine Seifert-Faserung „i. a.“ eine topologische Invariante ist: SEIFERT [12] gibt einen Beweis für Homologiesphären ($\neq S^3$). BRODY [2] behandelt Faserräume mit höchstens zwei Ausnahmefasern.

Beweis von (10.1): Sei $P: M \rightarrow F$ die Projektion des Seifertschen Faserraumes M auf seine Zerlegungsfläche F . Seien D_1, \dots, D_m disjunkte 2-Elemente im Innern von F , deren jedes genau einen Ausnahmepunkt im Innern enthält, und so daß jeder Ausnahmepunkt in einem von ihnen enthalten ist. Sei $M' = P^{-1}(F - \bigcup \overset{\circ}{D}_j)$; sei $V_j = P^{-1}(D_j)$. M' mit der Projektion $P|_{M'}$ ist ein S_1 -Bündel; die V_j sind Vollringe. Damit ist eine Graphenstruktur für M definiert.

(10.2) Lemma. *Ist M nicht eine der Ausnahmen (10.1.1)–(10.1.3), dann ist diese Graphenstruktur reduziert.*

Beweis. Das ist trivial für die Punkte (6.2.1) und (6.2.5)–(6.2.10). – Sei $V(\mu, \nu)$ die ausgebohrte Umgebung einer Ausnahmefaser: Daß für die Verklebung an $\partial V(\mu, \nu)$ die verbotene Situation (6.2.4) vorliegt, ist nicht möglich, da $\mu \neq 0$. Hätten wir die verbotene Situation (6.2.3), dann folgte $\mu = 1$, was nicht stimmt, da wir eine Ausnahmefaser und nicht eine gewöhnliche Faser ausgebohrt haben; mit (6.2.3) ist auch (6.2.2) erledigt.

Auf die gleiche Weise konstruieren wir zu N eine Graphenstruktur; wir schreiben analog $N = N' \cup W_1 \cup \dots \cup W_n$.

Nach einer der Voraussetzungen von (10.1) und nach (10.2) sind die M und N zugeordneten Graphenstrukturen reduziert. Also ist entweder (M, N) eines der Ausnahmepaare aus (8.1), oder wir können nach (8.1) φ so deformieren, daß $\varphi(M') = N'$.

Wir behandeln zuerst den zweiten Fall: Es sei also $\varphi(M') = N'$. Wir wenden (5.5) an auf den Homöomorphismus $\varphi|_{M'}$. Die in (5.5) aufgeführten Ausnahmen sind auch in (10.1) aufgeführt, also dürfen wir annehmen, daß der Homöomorphismus $\varphi|_{M'}$ fasertreu ist. Zum Schluß wenden wir (5.4) an auf die Homöomorphismen $\varphi|_{V_j}$.

Nun zu dem Fall, daß die M und N zugeordneten Graphenstrukturen auf eine der Ausnahmen zu (8.1) führen: Wir kommen auf ein Paar (8.1.1) genau dann, wenn sowohl der Faserraum M als auch der Faserraum N zu (10.1.3) oder (10.1.4) gehört. — (8.1.2) kann nicht vorkommen.

Die Paare (8.1.3)–(8.1.5) entsprechen genau den Paaren (10.1.8)–(10.1.10).

(10.3) Es sei noch vermerkt, daß sich (2.8) und (2.9) mit einigen kleinen Änderungen auf Seifertsche Faserräume übertragen lassen.

Die Änderungen sind folgende:

An die Stelle der Bündelprojektion tritt die natürliche Projektion auf die Zerlegungsfläche, $P: M \rightarrow F$.

In (2.8.1) ist „ G ist vertikal“ zu interpretieren als: G besteht aus Fasern, enthält aber keine Ausnahmefaser.

In (2.8.2) ist „Überlagerung“ zu ersetzen durch „verzweigte Überlagerung“; die Überlagerung ist verzweigt über den Ausnahmepunkten der Zerlegungsfläche.

In der Voraussetzung von (2.9) wird „ $p|G$ lokal homöomorph“ formuliert als „ G vom Typ (2.8.2)“.

In (2.9.1) ist „Homöomorphismus“ zu ersetzen durch „Überlagerung der Blätterzahl μ “; dabei ist μ die Ordnung der x enthaltenden Ausnahmefaser, bzw. $\mu = 1$, wenn diese Faser eine gewöhnliche Faser ist.

Wir geben keinen Beweis; ein solcher wäre i. w. eine Zusammenstellung bereits früher gegebener Details. Einige Spezialfälle sind auch schon behandelt worden (vgl. die Beweise zu (3.1), (3.2), (7.9.3)).

Literatur

- [1] ALEXANDER, J. W.: On the subdivision of 3-space by a polyhedron. Proc. Nat. Acad. Sc. **10**, 6–8 (1924).
- [2] BRODY, E. J.: On the fibred spaces of SEIFERT. Quart. J. Oxford **13**, 161–171 (1962).
- [3] EPSTEIN, D. B. A.: Curves on 2-manifolds and isotopies. Acta Math. **115**, 83–107 (1966).
- [4] FOX, R. H.: On the imbedding of polyhedra in 3-space. Ann. of Math. **49**, 462–470 (1948).
- [5] GRAEB, W.: Die semilinearen Abbildungen. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1950, math.-nat. Klasse, 4. Abh.
- [6] GUGENHEIM, V. K. A. M.: Piecewise linear isotopy and embedding of elements and spheres, I, II, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, **3**, 29–53, 129–152 (1953).

- [7] HAKEN, W.: Theorie der Normalflächen. Acta Math. **105**, 245—375 (1961).
- [8] MUMFORD, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Inst. Hautes Etudes Scient., Publ. Math. No. 9 (1961).
- [9] ORLIK, P., E. VOGT u. H. ZIESCHANG: Zur Topologie gefaserter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Topology **6**, 49—64 (1967)
- [10] RANDOW, R. von: Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten, Dissertation, Bonner Mathematische Schriften 1962.
- [11] SCHUBERT, H.: Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 131—286 (1953).
- [12] SEIFERT, H.: Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume. Acta Math. **60**, 147—238 (1933).
- [13] WALDHAUSEN, F.: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I. Inventiones math. **3**, 308—333 (1967).

(Eingegangen am 24. Februar 1967)