Walther Kindt

THEORIE DER DIALOGSPIELE, DIE EINFÜHRUNG DES WAHRHEITS-PRÄDIKATS UND DIE LOGIK VON SPRACHEN MIT UNFUNDIERTEN SÄTZEN

1. Einleitung

Der vorliegende Aufsatz knüpft einerseits an meine Arbeiten über Dialogspiele (vgl. Kindt, 1970, 1972) und andererseits an die in Kindt 1976a und b geführte Diskussion über die Einführung des Wahrheitsprädikats in prädikatenlogische Sprachen an.

Im Hinblick auf die Wahrheitsprädikat-Problematik soll in dem Aufsatz gezeigt werden, in welcher Form Spracherweiterungen zur Einführung des Wahrheitsprädikats darzustellen sind, wenn man anstatt des üblichen modelltheoretischen Semantikkonzepts das Dialogspielkonzept zugrundelegt. Als Resultat ergibt sich, daß dieses Konzept eine sehr einfache Darstellung für solche Spracherweiterungen ermöglicht, weil jeweils nur eine Ergänzung der Argumentationsrelation erforderlich wird. Im Vergleich hierzu ist die Darstellung bei Verwendung des modelltheoretischen Konzepts insofern komplizierter (und der Alltagsverwendung natürlicher Sprachen auch weniger angepaßt), als dieses Konzept - zumindest in seiner üblichen Version - für jede zur erweiterten Sprache gehörigen Struktur eine explizite Interpretation des Wahrheitsprädikats voraussetzt und damit die formelle Durchführung der intuitiv nicht leicht zu durchschauenden Konstruktion dieser Interpretation (vgl. Kindt, 1976a, b) notwendig macht.

Vor der Behandlung des genannten Erweiterungsproblems muß eine Darstellung des Dialogspielkonzepts gegeben werden. Diese Gelegenheit möchte ich dazu benutzen - und dies ist ein weiteres Ziel meines Aufsatzes -, wesentliche Teile der in Kindt 1972 ausgearbeiteten Theorie der Dialogspiele zu skizzieren und dabei eine Reihe von Änderungen vorzunehmen, die der Vereinfachung und Geschlossenheit der Theorie dienen; vor allem soll die Theorie aber erweitert werden und zwar erstens hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf andere (u.a. mehrwertige und unfundierte Logiksysteme und zweitens durch Angabe neuer Resultate (z.B. Vollständigkeitstheorem). Insgesamt gesehen geht es mir darum, deutlich zu machen, daß im Rahmen dieser Theorie wesentliche Eigenschaften von Logiksystemen auf sehr abstrakter Stufe nachgewiesen werden können und daß dies sogar weitgehend mit konstruktiven Mitteln möglich ist.

Als ein Nebenresultat meiner Untersuchungen ergibt sich außer-

dem, daß die in Smullyan 1968 aufgestellte abstrakte Logiktheorie in zwei wesentlichen Punkten falsch ist.
Die Auflösung der Wahrheitsprädikat-Problematik wird ermöglicht einerseits durch eine genaue Analyse der Bedingungen, die bei Spracherweiterungen zu erfüllen sind, und andererseits durch den Übergang zu Sprachen, in denen das Vorkommen von (in ihrer Interpretation) undefinierten bzw. unfundierten Sätzen zulässig ist. Genereller wird man hierdurch dazu geführt, seine Aufmerksamkeit auf die Frage nach der Logik von Sprachen mit unfundierten Sätzen zu richten. Zur Behandlung dieser Problemstellungen, die sicherlich auch in zukünftigen Diskussionen noch eine große Rolle spielen werden, können im vorliegenden Aufsatz nur einige Überlegungen angestellt werden. Speziell sollen hier zum Thema "Unfundierte Logiksysteme" die wichtigsten Konsequenzen erörtert werden, die sich aus der Theorie der Dialogspiele ergeben.

2. Spieltheoretische Grundlagen

Die ab Abschnitt 3 behandelten Dialogspiele sind *Zweipersonenspiele* mit *vollständiger Information* im Sinne von Berge 1957. Spiele dieser Art sind bestimmt durch die Angabe eines Tripels $\langle X,R,s\rangle$ mit einer *Situationsmenge* X, einer *Spielregel* $R \subset X^2$ und einer *Zugfunktion* $s:X \rightarrow 2$. Elemente von X sollen hier mit x,y ... angedeutet werden.
In einer Situation x wird mit $s(x)$ derjenige Spieler ($2:=\{0,1\}$) ausgezeichnet, der in x am Zuge ist; ein Zug von $s(x)$ besteht darin, daß $s(x)$ - sofern möglich - zu x eine bei der Spielregel R zulässige Nachfolgesituation y bestimmt, d.h. ein y mit $\langle x,y\rangle \in R$. Statt $\langle x,y\rangle \in R$ wird im folgenden $x\ R\ y$ geschrieben und die Menge der bei R zulässigen Nachfolgesituationen von x wird mit $R(x)$ bezeichnet.

Eine *Partie* in einem Spiel $\langle X,R,s\rangle$ ist eine Folge $\langle x_n\rangle$ von Situationen, bei der für je zwei aufeinanderfolgende Glieder x_n und x_{n+1} gilt, daß $x_n\ R\ x_{n+1}$. Eine Partie zählt für den Spieler i als *gewonnen* genau dann, wenn sie nur aus endlich vielen Situationen $x_o,\ldots,x_m$ besteht, und wenn bei der letzten Situation x_m der Gegenspieler $1-i$ am Zuge ist, er aber keinen Zug mehr machen kann, weil $R(x)= 0$ (die natürliche Zahl "Null" und die leere Menge werden hier identifiziert).

$P_i(x)$ sei die Menge aller endlicher Partien $\langle x_n\rangle_{n\leq m}$ mit $x_o = x$ und $s(x_m) = i$. Eine partielle Funktion σ aus $P_i(x)$ nach X heißt Strategie des Spielers i für x, oder kurz *i-Strategie* für x, wenn für jede Partie $<x_n>_{n\leq m}$ aus dem Definitionsbereich von σ gilt, daß $x_m\ R\ \sigma(<x_n>)$. Eine i-Strategie σ ist eine *i-Gewinnstrategie* für x genau dann, wenn i jede Partie $<x_n>$ mit folgenden Eigenschaften gewinnt:

(i) $x_0 = x$,

(ii) falls $<x_n>$ endlich und x_m das letzte Glied der Partie ist, so gilt $R(x_m) = 0$,

(iii) für jedes Glied x_n mit $n>0$ und $s(x_{n-1}) = i$ gilt $x_n = \sigma(<x_k>_{k\leq n-1})$.

Situationen, für die es eine i-Gewinnstrategie gibt, sollen auch *i-Gewinnsituationen* heißen. Für die Menge der i-Gewinnsituationen wird in folgendem Theorem eine andere, wichtige Charakterisierung angegeben.

2.1 Theorem: Für jede Ordinalzahl α werde gesetzt:

$$G_{i,\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} \{x \in X:\ s(x) = 1-i \text{ und } R(x) \subset G_{i,\beta}\} \cup$$
$$\bigcup_{\beta<\alpha} \{x \in X:\ s(x) = i \text{ und } R(x) \cap G_{i,\beta} \neq 0\}.$$

Weiter werde gesetzt:

$G_i := \{x \in X:$ es gibt α mit $x \in G_{i,\alpha}\}$.

Dann gilt für jede Situation x:

$x \in G$ genau dann, wenn x i-Gewinnsituation ist.

Der Nachweis von 2.1 kann in beiden Richtungen ohne Schwierigkeiten durch Induktionsbeweise geführt werden und ist bei geeigneten Konstruktivitätsvoraussetzungen für X und R selbst konstruktiv.
Auf die Frage, ob jede Situation entweder eine 0- oder eine 1-Gewinnsituation ist, gibt das folgende als Bestimmtheits- oder Sattelpunktsatz von *Zermelo* und *v. Neumann* bekannte Theorem eine Antwort.

2.2 Theorem: $x \in G_0 \cup G_1$ für alle $x \in X$ genau dann, wenn jede Partie im Spiel endlich ist.

Die nichttriviale Richtung in 2.2 von rechts nach links gilt nur klassisch und wird indirekt durch Angabe einer unendlichen Partie im Fall $x \notin G_0 \cup G_1$ bewiesen.
Zur Erleichterung der Beweise eines bestimmten Typs, der beim Nachweis von Beziehungen zwischen Gewinnsituationen eines oder verschiedener Spiele sehr häufig vorkommt, habe ich in Kindt 1972 den Begriff der Erhaltungsrelation eingeführt. Eine Relation $E \subset X \times X'$ heißt *i-Erhaltungsrelation* von dem Spiel $<X,R,s>$ nach dem Spiel $<X',R',s'>$, wenn für alle x,x' mit xEx' gilt:

(i) $s(x) = s'(x')$,

(ii) falls $s(x) = 1-i$, so gibt es für jedes $y' \in R'(x')$ ein $y \in R(x)$ mit $y \; E \; y'$,

(iii) falls $s(x) = i$, so gibt es für jedes $y \in R(x)$ ein $y' \in R'(x')$ mit $y \; E \; y'$.

Im Sonderfall $\langle X,R,s \rangle = \langle X',R',s' \rangle$ heiße E i-Erhaltungsrelation in $\langle X,R,s \rangle$. Wenn es eine (nichtleere) i-Erhaltungsrelation von $\langle X,R,s \rangle$ nach $\langle X',R',s' \rangle$ gibt, dann lassen sich die für i günstigen Spielweisen teilweise von $\langle X,R,s \rangle$ nach $\langle X',R',s' \rangle$ übertragen; genauer gilt das folgende, durch Induktion über $G_{i,\alpha}$ leicht zu beweisende Theorem.

2.3 Theorem: E sei eine i-Erhaltungsrelation von $\langle X,R,s \rangle$ nach $\langle X',R',s' \rangle$. Dann gilt:
Wenn $x \in G_{i,\alpha}$ und $x \; E \; x'$, dann $x' \in G'_{i,\alpha}$.

Für die Beurteilung eines Spiels $\langle X,R,s \rangle$ ist es einerseits von großem Interesse zu wissen, bis zu welcher Ordinalzahl man in der $G_{i,\alpha}$-Hierarchie gehen muß, um G_i bereits ganz ausgeschöpft zu haben; eine wichtige Rolle spielt hierbei insbesondere der Fall, daß $G_i = G_{i,\omega}$ (ω ist die Menge der natürlichen Zahlen). Andererseits sind Aufzählbarkeits- und Entscheidbarkeitsaussagen für G_i von besonderer Bedeutung. Zu diesen beiden Fragestellungen sollen jetzt ohne Beweis drei später benötigte Theoreme angegeben werden.

2.4 Theorem: $\langle X,R,s \rangle$ sei lokal partienbeschränkt (d.h. zu jedem x gibt es ein m derart, daß jede Partie $\langle x_n \rangle$ mit $x_0 = x$ höchstens m Glieder hat). Dann gilt $G_i = G_{i,\omega}$ für $i = 0,1$.

Eine wichtige Rolle spielt die Bedingung der Finitheit. R heißt *finit*, wenn R(x) für jedes x endlich ist.

2.5 Theorem: R sei finit. Dann gilt für $i = 0,1$:

(1) $G_i = G_{i,\omega}$.

(2) Wenn X aufzählbar und $\lambda x \, R(x)$ rekursiv ist, dann ist G_i aufzählbar.

(3) Wenn jede Partie in $\langle X,R,s \rangle$ endlich ist und die Voraussetzungen von (2) erfüllt sind, dann ist G_i entscheidbar.

In den später zu behandelnden formalen Dialogspielen für prädikatenlogische Sprachen ist die Bedingung der Finitheit verletzt; trotzdem sind dort (1) und die Eigenschaft der Aufzählbarkeit erfüllt. Der Nachweis hierfür läßt sich mit Hilfe des in Kindt 1972 entwickelten Kriteriums der Quasifinitheit erbringen.

R heißt *quasifinit* für i, wenn es eine Relation $R' \subset R$ mit der Eigenschaft gibt, daß für alle x mit $s(x) = 1-i$ gilt:

(i) $R'(x)$ ist endlich,

(ii) für alle $y \in R(x)$ gibt es eine i-Erhaltungsrelation E in $\langle X,R,s\rangle$ und ein $x' \in R'(x)$ mit $x'\ E\ y$

2.6 Theorem: R sei bezüglich der Relation R' quasifinit für i. Dann gilt:

(1) $G_i = G_{i,\omega}$.

(2) Wenn X aufzählbar, R entscheidbar und $\lambda x\, R'(x)$ rekursiv ist, dann ist G_i aufzählbar.

3. Dialogspiele

Dialogspiele werden jeweils erklärt über einer *Satzmenge* Σ (einer zugrundeliegenden Sprache); Sätze werden im folgenden angedeutet durch φ,ϕ, ... und Teilmengen von Σ durch Φ,Ψ ... Im Hinblick auf ihre Verwendung in Dialogen werden Sätze auch *Argumente* genannt.

Jedem über einer Satzmenge Σ erklärten Dialogspiel D liegt die *Situationsmenge*

$$X: = \Pi(\Sigma)^2 \times 2$$

zugrunde, wobei $\Pi(\Sigma)$ die Menge der endlichen Teilmengen von Σ sei. In einer Situation

$$x = \langle \Phi,\Psi,i\rangle$$

werden die Argumente in Φ (also der nullten Komponente x_0 von x) und die Argumente in Ψ ($=x_1$) als die in x vom Spieler O bzw. vom Spieler 1 *zu verantwortenden Argumente* gedeutet. Zugleich wird der Wert der *Zugfunktion* s definiert durch

$$s(x) : = x_2 \ (=i).$$

Bei den Spielern eines Dialogspiels unterscheidet man traditionellerweise den *Opponenten* vom *Proponenten*; unter den möglichen Partien eines Dialogspiels nehmen nämlich solche eine Sonderstellung ein, die damit beginnen, daß der eine Spieler (Proponent) ein Argument φ vorbringt, und der andere Spieler (Opponent) φ bestreitet. Jede Partie, die mit dem Vorbringen eines Arguments φ durch den Proponenten und der Weitergabe der Zugpflicht an den Opponenten anfängt, heißt *Dialog um* φ. Gemäß einer Reihenfolge-Konvention soll der Opponent mit dem Spieler O und der Proponent mit dem Spieler 1 identifiziert werden. Dementsprechend ist $\langle O,\{\varphi\},O\rangle$ die Anfangssituation jedes Dialogs um φ.
Die Situation $\langle O,O,O\rangle$ soll *leere* Situation heißen und mit $\emptyset$ bezeichnet werden.

Die Spielregel R eines Dialogspiels D setzt sich aus drei Bestandteilen zusammen:

(a) Die dreistellige *Argumentationsrelation* $A \subset X \times \Sigma \times \Pi(\Sigma)$ regelt, ob in einer Situation x gegen ein Argument φ eine Argumentemenge Φ vorgebracht werden darf (Schreibweise: $x\ \varphi\ A\ \Phi$).

(b) Die *Reduktionsfunktion* $r : X \times \Sigma \times \Pi(\Sigma) \rightarrow X$ legt fest, welche Argumente aus einer Situation x nach einer Argumentation mit Φ gegen φ weiterhin verantwortet werden müssen.

(c) Die *Zugnachfolgerelation* $N \subset X \times \Sigma \times \Pi(\Sigma) \times 2$ bestimmt, ob nach einer Argumentation mit Φ gegen φ in x als nächster der Spieler i am Zug ist (Schreibweise: $x\ \varphi\ \Phi\ N\ i$).

Mit A,r und N wird folgendermaßen R definiert:

$x\ R\ y$ genau dann wenn es φ, Φ gibt mit

$\varphi \in x_{1-s(x)}$, $x\ \varphi\ A\ \Phi$, $x\ \varphi\ \Phi\ N\ s(y)$,

$y_{s(x)} = \Phi \cup r(x,\varphi,\Phi)_{s(x)}$ und

$y_{1-s(x)} = r(x,\varphi,\Phi)_{1-s(x)}$

An A, r und N werden schließlich noch bestimmte Anforderungen gestellt, die in den nachfolgend angegebenen Axiomen (D1) - (D6) formuliert sind.

(D1) Wenn $x_0 \subset y_0$, dann $A(y,\varphi) \subset A(x,\varphi)$ im Falle $s(x)=s(y)=0$ und $A(x,\varphi) \subset A(y,\varphi)$ im Falle $s(x)=s(y)=1$.

Hierbei sei $A(x,\varphi) := \{\Phi \in \Pi(\Sigma) : x\ \varphi\ A\ \Phi\}$
(D1) besagt, daß eine Abhängigkeit der Argumentationsmöglichkeiten von der Situation höchstens insoweit besteht, als zu berücksichtigen ist, welche Argumente der Opponent in der Situation zu vertreten hat: der Opponent darf ggf. bestimmte Argumente nicht mehr angreifen, wenn er selbst schon gewisse Argumente vorgebracht hat; umgekehrt darf der Proponent ggf. erst dann auf bestimmte Argumente des Opponenten eingehen, wenn dieser die Verantwortung für gewisse andere Argumente übernommen hat. Die nach (D1) mögliche Unsymmetrie ist für formale Dialogspiele einschlägig (vgl. Abschnitt 4), wo verhindert werden soll, daß der Opponent Argumente des Proponenten angreift, die er selber auch verantworten muß.

(D2) $s(r(x,\varphi,\Phi)) = s(x)$ und
$r(x,\varphi,\Phi)_i \subset x_i$ für $i=0,1$.

(D3) Falls $s(x+y)=i$, so

$$r(x+y,\varphi,\Phi) = r(x^{i}_{2},\varphi,\Phi) + r(y^{i}_{2},\varphi,\Phi).$$

Hierbei seien definiert:

$$x + y := \langle x_0 \cup y_0,\ x_1 \cup y_1,\ x_2 \cup y_2\rangle;$$

$$x^{i}_{2} := \langle x_0, x_1, i\rangle \quad (x_2 \text{ wird ersetzt durch } i).$$

(D4) $r(r(x^{i}_{2},\varphi,\Phi)^{j}_{2},\psi,\Psi) = r(r(x^{j}_{2},\psi,\Psi)^{i}_{2},\varphi,\Phi)$.

(D5) Falls $\psi \in r(x,\varphi,\Phi)_{1-s(x)}$, so gilt

$A(r(x,\varphi,\Phi) \subset A(x,\psi)$ und

$r(r(x,\varphi,\Phi),\psi,\Psi)_{s(x)} \supset r(x,\psi,\Psi)_{s(x)}$

(D2) - (D4) geben drei plausible Eigenschaften von r an. Anstelle der in (D2) formulierten Reduktion, könnte man allerdings auch vorsehen, daß Argumente eliminiert oder modifiziert werden; eine solche Modifikation ist z.B. erforderlich, wenn man für das modallogische System T (vgl. Zeman 1973) ein Dialogspiel definieren will, in dem der Übergang von einer Welt zu einer anderen nicht explizit formuliert wird. Im Interesse einer einfachen Axiomatik soll hier aber auf eine derartige Verallgemeinerung für r verzichtet werden.
(D5) geht auf spezifische Eigenschaften der *Permanenz* von Argumenten, wie sie in Dialogspielen vorkommen, die zur intuitionistischen Logik oder zum modallogischen System S4 führen. (D5) ist in solchen Fällen von Belang, wo mit $r(x,\varphi,\Phi)$ eine echte Reduktion der Argumente von $s(x)$ erfolgt; in solchen Fällen ergibt sich aus (D4) und (D5), daß der Angriff auf ein gegnerisches Argument ψ, das gegenüber einem Angriff auf φ mit Φ permanent geblieben ist, bei $x_{s(x)}$ schon dieselbe Reduktionswirkung wie bei $r(x,\varphi,\Phi)_{s(x)}$ hat.
Zur Veranschaulichung der Axiome (D2) - (D5) sollen jetzt drei typische Beispiele von Reduktionsfunktionen angegeben werden.

<u>Beispiel 1:</u>

$$r_1(x,\varphi,\Phi) := \begin{cases} \langle x_0, x_1 - \{\varphi\}, 0\rangle & \text{falls } s(x) = 0 \\ \langle x_0 - \{\varphi\}, x_1, 1\rangle & \text{falls } s(x) = 1 \end{cases}$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$r_2(x,\varphi,\Phi) := \langle x_0, 0, s(x)\rangle$$

Beispiel 3:

Σ zerfalle in zwei zueinander disjunkte Teilmengen Σ' und Σ'' (z.B. in eine Menge von Aussagen und eine Menge von Fragen). Die Pflicht, Argumente aus Σ'' weiter verantworten zu müssen, wird bei der folgenden (für intuitionistische Dialogspiele einschlägigen) Reduktionsfunktion auf bestimmte Fälle beschränkt.

$$r_3(x, \varphi, \Phi) := \begin{cases} \langle x_0, x_1 - \{\varphi\}, 0\rangle & \text{falls } s(x) = 0 \text{ und } \varphi \in \Sigma'' \\ \langle x_0 \cap \Sigma', (x_1 \cap \Sigma') - \{\varphi\}, 0\rangle & \text{falls } s(x) = 0 \text{ und } \varphi \in \Sigma' \\ x & \text{falls } s(x) = 1 \end{cases}$$

Für die Zugnachfolgerelation wird schließlich folgendes Axiom zugrundegelegt.

(D6) Falls $x \ \varphi \ \Phi \ N \ i$ und $s(x) = s(y)$, so $y \ \varphi \ \Phi \ N \ i$;

außerdem gilt stets $x \ \varphi \ \Phi \ N \ 0$ oder $x \ \varphi \ \Phi \ N \ 1$.

Sofern über (D6) hinaus mit $x \ \varphi \ \Phi \ N \ i$ stets $i = 1-s(x)$ erfüllt ist, soll N *alternativ* heißen.

Zusammenfassend soll festgehalten werden, daß jedes Dialogspiel durch die Angabe der Satzmenge Σ, der Argumentationsrelation A, der Reduktionsfunktion r sowie der Zugnachfolgerelation N eindeutig bestimmt ist; das betreffende Spiel soll daher als das Quadrupel $\langle\Sigma, A, r, N\rangle$ notiert werden.

4. Inhaltliche und formale Dialogspiele

In Verallgemeinerung einer Unterscheidung bei den Dialogspielen, die in der Logik von primärem Interesse sind, sollen als zwei Haupttypen die *inhaltlichen* und die *formalen* Dialogspiele ausgezeichnet werden.

$D = \langle\Sigma, A, r, N\rangle$ sei ein Dialogspiel. Ein Argument φ ist *Primargument* bei D genau dann, wenn $A(x,\varphi)$ für jedes x den Wert 0 oder 1 $(=\{0\})$ hat (was die Unangreifbarkeit bzw. eine triviale Zurückweisung von φ bedeutet). Ein Argument φ heißt *kontextunabhängig* in D, wenn $A(x,\varphi) = A(y,\varphi)$ für alle x,y; anderenfalls heißt φ *kontextabhängig*. D heißt nun *inhaltlich*, wenn jedes Argument kontextunabhängig in D ist. Demgegenüber heißt D *formal*, wenn es ein geordnetes Paar $K = \langle K_0, K_1\rangle$ von zweistelligen Relationen über der Menge der kontextabhängigen Primargumente mit folgenden fünf Eigenschaften gibt, deren letzte allerdings noch durch mindestens eine oder zwei Ausnahmeregelungen eingeschränkt wird.

(i) K_0 ist reflexiv und transitiv, K_1 antireflexiv und symmetrisch.

(ii) $K_0 \odot K_1 \subset K_1$ (d.h. mit $\varphi\ K_0\ \psi$ und $\psi\ K_1\ \rho$ ist stets $\varphi\ K_1\ \rho$).

(iii) $A(\emptyset,\varphi) \supset A(\emptyset\frac{1}{2},\varphi)$.

(iv) Wenn φ ein kontextabhängiges Primargument ist, dann gilt $A(\emptyset,\varphi) = 1$ und $A(\emptyset\frac{1}{2},\varphi) = 0$.

(v) $A(x,\varphi) = A(\emptyset\frac{s(x)}{2},\varphi)$.

Abweichend von (v) gelten ggf. folgende Sonderregelungen:

1. *Kohärenzregel:* Wenn φ ein kontextabhängiges Primargument ist, $s(x) = i$, $\psi \in x_0$ und $\psi\ K_i\ \varphi$, dann $A(x,\varphi) = i$.

2. *Kohärenzregel:* Wenn $s(x) = 0$ und $\varphi \in x_0$, dann $A(x,\varphi) = 0$.

Wenn die erste, nicht aber die zweite Kohärenzregel gilt, heißt D *schwach formal*, wenn beide Kohärenzregeln gelten, heißt D *stark formal*. K ist eindeutig bestimmt und soll *Kohärenzbasis* genannt werden.

Im Gegensatz zu den inhaltlichen Dialogspielen sind bei den formalen Spielen die Argumentationsregeln für Opponent und Proponent nicht symmetrisch. Der Opponent übernimmt hier die Funktion, in einer Dialogsituation hypothetisch für die Wahrheit oder Falschheit bestimmter Argumente zu bürgen und zwar in Abhängigkeit davon, welche Argumente er selbst in der Situation zu verantworten hat. Die in diesem Zusammenhang wichtige Frage nach dem Zweck der Unterscheidung von schwach und stark formalen Spielen wird in Abschnitt 6 beantwortet werden.
M sei eine nichtleere Menge von inhaltlichen Dialogspielen über Σ, die alle dieselbe Reduktionsfunktion r und dieselbe Zugnachfolgerelation N haben. Zu M können auf natürliche Weise ein von M *erzeugtes schwach formales* Dialogspiel D[M] sowie ein *stark formales* Spiel D<M> definiert werden, für die die Erfüllung folgender Bedingungen gefordert wird:

(i) $D[M] = \langle\Sigma, A[M], r, N\rangle$ und $D\langle M\rangle = \langle\Sigma, A\langle M\rangle, r, N\rangle$.

(ii) $A[M](\emptyset,\varphi) = A\langle M\rangle(\emptyset,\varphi) = \bigcup_{D\in M} A(\emptyset,\varphi)$.

(iii) $A[M](\emptyset\frac{1}{2},\varphi) = A\langle M\rangle(\emptyset\frac{1}{2},\varphi) = \bigcap_{D\in M} A(\emptyset,\varphi)$

(iv) $\psi\ K_i\ \varphi$ genau dann, wenn φ und ψ kontextabhängige Primargumente in D[M] (und D<M>) sind und wenn $A(\emptyset,\psi) \supset A(\emptyset,\varphi)$ im Falle $i = 0$ bzw. $A(\emptyset,\psi) \cup A(\emptyset,\varphi) = 1$ im Falle $i = 1$ für alle $D \in M$.

Es ist klar, daß für die Gewinnsituationen von D[M] und D<M> folgende Beziehung gilt: $G[M]_{1,\alpha} \subset G\langle M\rangle_{1,\alpha}$ für jedes α.

Die Einführung und Untersuchung von inhaltlichen und formalen Dialogspielen in der Logik dient dem Zweck, den Begriff der *Gültigkeit* (Wahrheit) zu definieren und bzw. eine Beziehung zwischen formaler und inhaltlicher Gültigkeit herzustellen. Ein Satz φ *gilt* in dem Dialogspiel D (abgekürzt $D \models \varphi$) genau dann, wenn $\langle O, \{\varphi\}, O\rangle \in G_1$.
Relativ zu einer Menge M von Dialogspielen ist φ *allgemeingültig* (geschrieben als $\models_M \varphi$) genau dann, wenn $D \models \varphi$, für jedes $D \in M$.
Im Zusammenhang mit der Bildung von D[M] bzw. D<M> stellt sich die Frage, ob die Allgemeingültigkeitsrelation von M oder eines bestimmten (z.B. konstruktiv erreichbaren) Teils von ihr durch die Gültigkeitsrelation von D[M] bzw. D<M> charakterisiert werden kann. Allgemein heißt ein Dialogspiel D *korrekt* bzgl. Allgemeingültigkeit in M, wenn $\models_M \varphi$ für jedes φ mit $D \models \varphi$, und D heißt *vollständig*, wenn $D \models \varphi$ für jedes φ mit $\models_M \varphi$.
Über diese intern dialogspieltheoretische Fragestellung hinaus ist es von Interesse zu untersuchen, ob die so eingeführten Begriffe von inhaltlicher und formaler Gültigkeit mit den in der Logik sonst auf andere Art eingeführten Begriffe übereinstimmen. Dies betrifft insbesondere die Frage, ob die in der Logik verwendeten Schlußregelsysteme im Rahmen des Konzepts formaler Dialogspiele begründbar sind.

Beispiel:

Σ' sei die Menge der Sätze einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe ohne Identität und ohne Funktionskonstanten und sei mit den logischen Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ formuliert (vgl. hierzu z.B. Shoenfield 1967). Weiter sei ? ein neues Symbol und es werde gesetzt $\Sigma'' := \{?\varphi\colon \varphi \in \Sigma'\}$ und $\Sigma := \Sigma' \cup \Sigma''$. Schließlich sei KL die Menge aller inhaltlicher Dialogspiele der Form $D = \langle \Sigma, A, r, N\rangle$, die den folgenden drei Bedingungen genügen.

(i) φ ist Primargument bei D genau dann, wenn $\varphi \in \Sigma'$ und φ atomar ist. Wenn φ kein Primargument ist, gilt:

$$A(x,\varphi) = \begin{cases} \{\{\psi\}\} & \text{falls } \varphi = \neg\psi \\ \{\{?\psi\},\{?\rho\}\} & \text{falls } \varphi = \psi \wedge \rho \\ \{\{?\varphi\}\} & \text{falls } \varphi = \psi \vee \rho \text{ oder } = \exists v\psi \\ \{\{\psi, ?\rho\}\} & \text{falls } \varphi = \psi \rightarrow \rho \\ \{\{?\psi\tfrac{a}{v}\} : a \in IK\} & \text{falls } \varphi = \forall v\psi \\ \{\{\psi\}\} & \text{falls } \varphi = ?\psi \text{ und } \psi \text{ ist nicht} \\ & \text{von der Form } \rho \vee \tau \text{ oder } \exists v\varphi \\ \{\{\psi\},\{\rho\}\} & \text{falls } \varphi = ?(\psi \vee \rho) \\ \{\{\psi\tfrac{a}{v}\} : a \in IK\} & \text{falls } \varphi = ?\exists v\psi \end{cases}$$

Hierbei bezeichne IK die Menge der Individuenkonstanten der Sprache und $\psi\frac{a}{v}$ entstehe aus ψ durch Substitution von a für die Variable v.

(ii) Die Reduktionsfunktion r ist identisch mit der in 3. bei Beispiel 2 angegebenen Funktion r_2.

(iii) Die Zugnachfolgerelation N ist alternativ.

Unter der Voraussetzung, daß IK mindestens abzählbar ist, entspricht $\models_{KL}$ der Allgemeingültigkeitsrelation der klassischen Prädikatenlogik und zugleich sind D[KL] und D<KL> korrekt und vollständig bzgl. der Allgemeingültigkeit (vgl. Abschnitt 7). Um z.B. die Regeln von D<KL> an einem Dialog zu erläutern, wird im folgenden bewiesen, daß alle Sätze der Form $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ in D<KL> gelten:

$$\langle\ 0\ ,\ \{\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi\}\ ,\ 0\ \rangle$$
$$\langle\ \{\neg\neg\varphi, ?\varphi\}\ ,\ 0\ ,\ 1\ \rangle$$
$$\langle\ \{\neg\neg\varphi, ?\varphi\}\ ,\ \{\varphi\}\ ,\ 0\ \rangle$$
$$\langle\ \{\neg\neg\varphi, ?\varphi, \varphi\}\ ,\ 0\ ,\ 1\ \rangle$$

Je nach Form von φ kann der Proponent jetzt entweder $?\varphi$ mit φ beantworten oder φ mit $?\varphi$ anzweifeln; der Opponent kann danach keinen Zug mehr machen, weil er kein Argument angreifen darf, das er selbst verantworten muß.

Im Gegensatz zu den bei KL vorliegenden Verhältnissen ist die gewünschte Korrektheit formaler Dialogspiele nicht in jedem Fall und gleichsam "automatisch" erfüllt. Dieser Fall kann insbesondere dann eintreten, wenn in der Satzmenge unfundierte, d.h. solche Sätze vorkommen, die nicht durch Argumentationen auf Primargumente zurückgeführt werden können. Ein besonders einfaches Beispiel für eine Satzmenge mit unfundierten Sätzen erhält man, wenn man in eine prädikatenlogische Sprache mit Zitatfunktion (vgl. Kindt 1976a) das Prädikat "Autolog" (im folgenden abgekürzt als "Aut") einführt; für eine einstellige Prädikatenkonstante P gilt also Aut'P' genau dann, wenn P'P' (d.h. P trifft auf sich selbst zu). In den inhaltlichen Dialogspielen muß als Argumentationsregel folgende Festsetzung getroffen werden:
$A(x,Aut'P') = \{\{ ?\ P'P'\}\}$ und $A(x,\ ?\ Aut'P') = \{\{Aut'P'\}\}$ für jedes einstellige P. Bei Beibehaltung der im obigen Beispiel für KL angenommenen Regeln kann man nun leicht zeigen, daß $Aut'Aut' \rightarrow Aut'Aut'$ zwar im zugehörigen stark formalen Spiel, aber in keinem inhaltlichen Spiel gilt und daß damit die Korrektheitsforderung verletzt wird.

Umgekehrt kann man beweisen, daß für stark formale Spiele die Korrektheitseigenschaft unter bestimmten Voraussetzungen immer erfüllt ist, wenn keine unfundierten Argumente in der Satzmenge vorkommen. Ein Beweis hierfür wird in Abschnitt 6 geführt werden. Auch bei der späteren Diskussion über die Vollständigkeit (dann allerdings im verallgemeinerten Sinne) wird der Fall, daß unfundierte Argumente vorkommen, wieder eine besondere Rolle spielen. Daneben können für die Unvollständigkeit eines formalen Spiels aber noch andere Gründe verantwortlich sein. Ersetzt man die in der Definition von KL zugrundegelegte Reduktionsfunktion durch die in Abschnitt 3, Beispiel 3 eingeführte Funktion r_3, so erhält man eine zur intuitionistischen Logik gehörige Dialogspielmenge INT'. Nun sind aber $D[INT']$ und $D\langle INT'\rangle$ unvollständig bzgl. Allgemeingültigkeit in INT', weil z.B. $\varphi \vee \neg \varphi$ (insbesondere für Primargumente φ) in jedem Spiel aus INT', nicht aber in $D[INT']$ und $D\langle INT'\rangle$ gilt.
Eine weitere, grundlegende Forderung, die man an inhaltliche und formale Dialogspiele stellt, ist die Forderung nach Konsistenz. Ein Dialogspiel $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ heißt *konsistent*, wenn es kein φ mit $\langle \{\varphi\}, O, 1\rangle \in G_1$ und $\langle O, \{\varphi\}, O\rangle \in G_1$ gibt.
Daß inhaltliche Dialogspiele stets konsistent sind, resultiert aus folgendem, zumindest klassisch gültigen Theorem.

4.1 Theorem: $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein inhaltliches Dialogspiel. Wenn $x_{s(x)} = 0$ und $x \in G_1$, dann $\langle x_1,x_0,s(x)\rangle \notin G_1$.

Zum Beweis von 4.1: Aufgrund der im nächsten Abschnitt bewiesenen Theoreme 5.3, 5.10, 5.6 und 5.8 genügt es, 4.1 unter der Voraussetzung zu zeigen, daß N alternativ und stets $r(x,\varphi,\Phi) = \langle 0,0,s(x)\rangle$ erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung kann die Behauptung von 4.1 sogar verschärft werden zu: falls $x_{s(x)} = 0$, so $x \in G_1$ genau dann, wenn $\langle x_1,x_0,1-s(x)\rangle \in G_0$. Der entsprechende Beweis wird induktiv geführt.

Im Gegensatz zu den inhaltlichen sind formale Dialogspiele nicht notwendig konsistent. Dies kann man am Beispiel des Prädikats "Heterolog" (abgekürzt "Het") zeigen, das durch die Vereinbarung $A(x,\mathrm{Het}'P') = \{\{?\neg P'P'\}\}$ einzuführen ist. In dem zugehörigen stark formalen Dialogspiel ist dann sowohl $\langle\{\mathrm{Het}'\mathrm{Het}'\},0,1\rangle$ als auch $\langle 0,\{\mathrm{Het}'\mathrm{Het}'\},0\rangle$ eine 1-Gewinnsituation. Für die hier auftretende Konsistenz ist wiederum die Unfundiertheit von Het'Het' verantwortlich. Die hiermit zusammenhängenden Fragen werden in Abschnitt 6 systematisch diskutiert. Zuvor sollen in Abschnitt 5 einige generelle Eigenschaften von Dialogspielen aufgezeigt werden.

5. Abgeschlossenheitseigenschaften und Vergleichstheoreme

Bei der Untersuchung von Dialogspielen geht es einerseits darum, Informationen über die Menge der gültigen Sätze bzw. allgemeiner über G_1, die Menge der 1-Gewinnsituationen, zu erhalten. Diesbezüglich sollen in diesem Abschnitt in Theorem 5.1 wichtige Abgeschlossenheitseigenschaften vor G_1 aufgezeigt werden. Andererseits ist es von Bedeutung zu erfahren, wie sich Änderungen der Spielregel auf G_1 auswirken. Aussagen hierüber sind insbesondere unter der Fragestellung von Interesse, inwieweit die Spielregel eines Dialogspiels verschärft/vereinfacht werden kann, ohne daß dabei G_1 verändert wird. In diesem Sinne sollen im folgenden die Auswirkungen einer Reihe von Regeländerungen näher untersucht werden. Zunächst müssen einige technische Vorbereitungen getroffen werden. Für endliche Argumentemengen Φ bezeichne $|\Phi|$ die *Anzahl* der Elemente von Φ. Die *Argumentationsbreite* eines Dialogspiels D wird definiert durch

$$\mathrm{br}(D) := \bigcap \{\alpha \leq \omega : |\Phi| < \alpha \text{ für alle } x,\varphi,\Phi \text{ mit } x\ \varphi\ A\ \Phi\}.$$

Als Ordinalzahladdition und -multiplikation werden im folgenden stets die *natürlichen Operationen* nach Hessenberg zugrundegelegt, mit denen man wie im Bereich der natürlichen Zahlen rechnen kann (vgl. z.B. Bachmann 1967). Für Situationen x und y bedeute $x \leq y$, daß $x_0 \subset y_0$, $y_1 \subset x_1$ und $s(x)=s(y)$.

Eine Reduktionsfunktion r heißt *i-argumentbewahrend* bzw. *i-argumenteliminierend für j*, wenn für alle x,φ,Φ im Fall von $s(x)=j$ stets $r(x,\varphi,\Phi)_i = x_i$ bzw. $r(x,\varphi,\Phi)_i = 0$ gilt.
Für die Diskussion einiger wichtiger Eigenschaften von Dialogspielen werden noch bestimmte, zusätzliche Axiome benötigt.

(D7) Wenn $s(x) = 0$, dann $\varphi \notin r(x,\varphi,\Phi)_1$

(D8) Wenn $s(x) = 0$ und $\psi \in r(x\frac{1}{2},\varphi,\Phi)_1$, dann
$A(r(x\frac{1}{2},\varphi,\Phi)\frac{0}{2}, \Phi) \subset A(x,\psi)$ und
$r(r(x\frac{1}{2},\varphi,\Phi)\frac{0}{2}, \psi, \Psi)_0 \supset r(x,\psi,\Psi)_0$.

(D9) Wenn $s(x) = 1$, dann $r(x,\varphi,\Phi) = r(x,\psi,\Psi)$.

(D8) bzw. (D9) sind z.B. erfüllt, wenn r 0-argumentbewahrend bzw. 0- und 1-argumentbewahrend für 1 ist.

5.1 Theorem: $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein Dialogspiel. Dann hat D folgende Eigenschaften:

(1) Wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und $x \leq y$, dann $y \in G_{1,\alpha}$

(2) Wenn $s(x) = 0$ und $x \in G_{1,\alpha}$, dann $r(x,\varphi,\Phi) \in G_{1,\alpha}$.

(3) Wenn $s(x) = 1$ und $r(x,\varphi,\Phi) \in G_{1,\alpha}$, dann $x \in G_{1,\alpha}$.

(4) D erfülle (D8). Wenn $s(x) = 0$ und $x \in G_{1,\alpha}$, dann $r(x\frac{1}{2},\varphi,\Phi)\frac{0}{2} \in G_{1,\alpha}$.

(5) D erfülle (D9). Wenn $s(x) = 1$ und $x \in G_{1,\alpha}$, dann $r(x,\varphi,\Phi)\frac{0}{2} \in G_{1,\alpha}$.

(6) D erfülle (D8). Wenn $s(x) = 0$ oder $s(y) = 0$ und wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und $y \in G_{1,\beta}$, dann $x + y \in G_{1,\alpha+\beta}$.

(7) D erfülle (D8) und (D9). Wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und $y \in G_{1,\beta}$, dann $x + y \in G_{1,\alpha+\beta}$.

Der Beweis von 5.1 und auch die Beweise der meisten folgenden Theoreme bieten keine besonderen Schwierigkeiten, so daß für sie in der Regel nur einige Hinweise gegeben werden sollen. Das Grundprinzip fast aller dieser Beweise besteht darin, daß die in bestimmten Situationen möglichen Züge in geeigneten anderen Situationen imitiert werden.
Zum Beweis von 5.1: Für (1) wird gezeigt, daß $\leq$ eine 1-Erhaltungsrelation in D ist (vgl. Abschnitt 2); dabei wird von (D1) - (D3) und (D6) Gebrauch gemacht. In die Beweise von (2), (3) und (4) gehen wesentlich die Axiome (D4) und (D5) bzw. (D8) ein; man zeigt jeweils, daß analoge Nachfolgesituationen von x und $r(x,\varphi,\Phi)$ in der $\leq$-Beziehung stehen. (5) ergibt sich unmittelbar mit Hilfe des folgenden Lemmas.

5.2 <u>Lemma:</u> $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein Dialogspiel. Dann gilt: Wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und $s(x)=1$, dann gibt es $\beta<\alpha$ und $y \in R(x)$ mit $y \in G_{1,\beta}$ und $s(y)=0$.

5.2 wird durch Induktion bewiesen; in dem Beweis wird wieder wesentlich von (D4) und (D5) Gebrauch gemacht.
5.1(6) wird durch Induktion über $\alpha+\beta$ gezeigt, dabei nutzt man insbesondere (D3) sowie (2) und (4) aus. Den gegenüber (6) neuen Fall $s(x) = s(y) = 1$ beweist man schließlich mit Hilfe von (5) und (6).
Eine erste, mehr triviale Aussage über die Auswirkungen von Regeländerungen wird in folgendem Theorem gemacht.

5.3 <u>Theorem:</u> $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ und $D' = \langle\Sigma,A',r',N\rangle$ seien zwei Dialogspiele mit der Eigenschaft, daß für alle x,φ,Φ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) falls $s(x) = 0$, so $A'(x,\varphi) \subset A(x,\varphi)$,

(ii) falls $s(x) = 1$, so $A(x,\varphi) \subset A'(x,\varphi)$,

(iii) $r(x,\varphi,\Phi) \leq r'(x,\varphi,\Phi)$

Dann gilt für jedes α: $G_{1,\alpha} \subset G'_{1,\alpha}$.

<u>Zum Beweis von 5.3</u> zeigt man, daß $\leq$ eine 1-Erhaltungsrelation <u>von D nach D' ist.</u>
Ein zentraler Punkt bei der Festlegung von Dialogspielen ist die Frage der Normierung, wie oft gegnerische Argumente angegriffen werden dürfen. Die Axiome (D1) - (D6) machen in dieser Hinsicht keine Einschränkungen. Beispielsweise ist danach zugelassen, daß in einem inhaltlichen Dialogspiel stets $r(x,\varphi,\Phi) = x$ erfüllt ist; das würde aber bedeuten, daß der Opponent Argumente des Proponenten unbegrenzt oft und stets mit denselben Gegenargumenten angreifen könnte und daß der Proponent außer im Fall der Behauptung von unangreifbaren Primarargumenten überhaupt keine Gewinnchancen hätte. Die Zahl möglicher Angriffe auf ein Argument muß daher in irgendeiner Weise beschränkt werden. Da unser Interesse ausschließlich der Charakterisierung von G_1 gilt, braucht eine solche Beschränkung nur für den Fall der Argumentation des Opponenten diskutiert zu werden.
Im Rahmen der vorgegebenen Axiomatik kann auf zwei Arten eine Beschränkung der Angriffshäufigkeit vorgenommen werden. Entweder werden überhaupt nur einmalige Angriffe zugelassen und dementsprechend werden einmal angegriffene Argumente eliminiert, was durch Voraussetzung von (D7) gewährleistet werden kann. Oder die Beschränkung wird dadurch erreicht, daß die Argumentationsrelation in geeigneter Weise situationsabhängig gemacht wird.
Die letzte Möglichkeit läßt sich beispielsweise dadurch realisieren, daß man die Satzmenge durch Sätze des Typs $\langle n,\varphi\rangle$ erweitert, die zweckmäßigerweise selbst unangreifbar sind und deren Funktion durch folgende Bedingungen bestimmt wird:

(i) Wenn $s(x) = 0$ und $x \ \varphi \ A \ \ \Phi$, dann gibt es ein m mit $\langle m,\varphi\rangle \in \Phi$ und $m<n$ für jedes n mit $\langle n,\varphi\rangle \in x_o$.

(ii) Wenn $\langle n,\varphi\rangle \in x_o$, dann $\langle n,\varphi\rangle \in r(x,\Phi,\Psi)_o$.

Bei Voraussetzung von (i) und (ii) kann gezeigt werden (Theorem 5.4), daß sich die Gewinnchancen des Proponenten nicht verschlechtern, wenn man dem Opponenten statt jeweils nur einen einmaligen Angriff im Prinzip eine nach eigenem Belieben gewählte endliche Zahl von Angriffen auf ein gegnerisches Argument zugesteht; dies gilt zumindest dann, wenn der Proponent ebenfalls die Möglichkeit hat, die Häufigkeit seiner Angriffe selbst zu bestimmen (sofern diese Möglichkeit nicht durch das Recht des Opponenten, eigene Argumente zurückzunehmen, eingeschränkt wird). Umgekehrt besagt dieses Resultat zusammen mit 5.3, daß eine Verschärfung der Spielregel von der Art, daß der Opponent Argumente des Proponenten nur einmal angreifen darf, keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Zu Abschätzungszwecken wird folgende (in beiden Stellen monotone) Funktion benötigt: $f(\alpha,\beta) := 1 + \bigcup_{\gamma<\alpha} f(\gamma,\beta) + \bigcup_{\delta<\beta} f(\alpha,\gamma)$.
Außerdem wird gesetzt:

$$a(D) := \bigcap \left\{ \alpha\leq\omega: \begin{array}{l} n<\alpha \text{ für alle } n,x,\varphi,\Phi \text{ mit} \\ s(x)=0,\ x\ \varphi\ A\ \Phi \text{ und } \langle n,\varphi\rangle \in \Phi \end{array} \right\}$$

$$a'(x) := \sum_{\varphi\in x_1} \bigcap \left\{ n < \omega: \langle n,\varphi\rangle \in x_o \right\}$$

5.4 <u>Theorem:</u> $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein Dialogspiel mit $\Sigma = \Sigma' \cup (\omega\times\Sigma')$, für das (D8) und die Bedingungen (i), (ii) erfüllt sind. Weiter sei $D' = \langle\Sigma,A,r',N\rangle$, wobei r' definiert sei durch:

$$r'(x,\varphi,\Phi) := \begin{cases} \langle r(x,\varphi,\Phi)_o,\ r(x,\varphi,\Phi)_1 - \{\varphi\},0\rangle & \text{falls } s(x)=0 \\ r(x,\varphi,\Phi) & \text{falls } s(x)=1 \end{cases}$$

Dann ist D' ein Dialogspiel und es gilt:

wenn $x \in G'_{1,\alpha}$ und $\beta = a'(x) + \alpha\cdot a(D)\cdot br(D)$,

dann $x \in G_{1,f(\alpha,\beta)}$.

<u>Zum Beweis von 5.4:</u> Der zweite Teil der Behauptung von 5.4 wird durch Doppelinduktion über α und $a'(x)$ bewiesen. Dabei zerlegt man im Fall $s(x)=0$ jede bei R mögliche Nachfolgesituation $\langle r(x,\varphi,\Phi)_o \cup \Phi,\ r(x,\varphi,\Phi)_1,i\rangle$ in die beiden Situationen $\langle r(x,\varphi,\Phi)_o \cup \Phi,\ r'(x,\varphi,\Phi)_1,i\rangle$ und $\langle r(x,\varphi,\Phi)_o \cup \Phi,\ \{\varphi\},0\rangle$ und wendet dann die Induktionsvoraussetzungen sowie 5.1(6) an.

Die durch 5.4 zu legitimierende Regeländerung kann sogar soweit verschärft werden, daß man dem Opponenten nach Durchführung eines Zuges verbietet, die von ihm noch nicht angegriffenen Argumente des Proponenten zu einem späteren Zeitpunkt anzugreifen (d.h. daß man eine für O 1-argumenteliminierende Reduktionsfunktion wählt).

Zu Abschätzungszwecken wird folgende Funktion definiert:
$g(\alpha,\beta) := \beta\cdot(1+\bigcup_{\gamma<\alpha} g(\gamma,\beta))$.

5.5 Theorem: $D = <\Sigma,A,r,N>$ sei ein Dialogspiel, für das (D7) und (D8) erfüllt sind. Weiter sei $D' = <\Sigma,A,r',N>$, wobei r' definiert sei durch:

$$r'(x,\varphi,\Phi) := \begin{cases} <r(x,\varphi,\Phi)_0,\ 0,\ 0> & \text{falls } s(x)=0 \\ r(x,\varphi,\Phi) & \text{falls } s(x)=1 \end{cases}$$

Dann ist D' ein Dialogspiel und es gilt:

wenn $x \in G'_{1,\alpha}$ und $\beta = \bigcap \{\omega, |x_1|+br(D)\}$,

dann $x \in G_{1,g(\alpha,\beta)}$.

Zum Beweis von 5.5 (zweiter Teil) zeigt man für jedes n durch Induktion über α, daß für alle $x \in G'_{1,\alpha}$ mit $|x_1| \leq m + br(D)$ im Falle $s(x)=0$ und mit $|x_1| \leq m$ im Falle $s(x)=1$ stets $G_{1,g(\alpha,\delta)}$ mit $\delta = \bigcap\{\omega,m+br(D)\}$ gilt. Dabei genügt es beim Induktionsschritt im Falle $s(x)=0$ wegen 5.1(6) zu zeigen, daß für alle $\varphi \in x_1$: $<x_0,\{\varphi\},0> \in G_{1,\varepsilon}$, wobei $\varepsilon = 1+\bigcup_{\gamma<\alpha} g(\gamma,\delta)$. Im Falle $s(x)=1$ wird von 5.2 Gebrauch gemacht.

Die Resultate 5.3, 5.4 und 5.5 geben Anlaß zu der Frage, ob nicht auch die Angriffsmöglichkeiten des Proponenten eingeschränkt werden dürfen, ohne daß dies Rückwirkungen auf G_1 hat. Diese Frage kann nicht generell bejaht werden. Beispielsweise ist in formalen Dialogspielen wie D<KL> die Möglichkeit mehrfacher Angriffe auf Argumente des Opponenten ein wesentliches Mittel, um den Opponenten zu zwingen, für bestimmte Argumente zu bürgen, auf die sich der Proponent im weiteren Verlauf des Dialogs stützen kann: die Gültigkeit etwa des Satzes
$\varphi \wedge \psi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varsigma) \rightarrow \varsigma)$ basiert auf der Zulässigkeit eines zweimaligen Angriffs auf $\varphi \wedge \psi$.
Für inhaltliche Dialogspiele ist die obige Frage jedoch mit einer gewissen Einschränkung zu bejahen.

5.6 Theorem: $D = <\Sigma,A,r,N>$ sei ein inhaltliches Dialogspiel, dessen Reduktionsfunktion 1-argumenteliminierend für 0 ist. Weiter sei $D' = <\Sigma,A,r',N>$, wobei r' definiert sei durch:

$$r'(x,\varphi,\Phi) := \begin{cases} r(x,\varphi,\Phi) & \text{falls } s(x)=0 \\ <0,r(x,\varphi,\Phi)_1,\ 1> & \text{falls } s(x)=1 \end{cases}$$

Dann ist auch D' ein inhaltliches Dialogspiel und es gilt: wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und wenn $x_1 = 0$ im Falle $s(x)=1$, dann $x \in G'_{1,\alpha}$.

Zum Beweis von 5.6 (zweiter Teil) zeigt man zunächst durch Induktion über α, daß gilt: wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und $x_1 = 0$, dann gibt es $\varphi,\Phi,\gamma < \alpha$ mit $\varphi \in x_0$, $x\ \varphi\ A^{\alpha}\ \Phi$ und $<0,\Phi,0> \in G_{1,\gamma}$.

Dabei wird beim Induktionsschritt ausgenutzt, daß es im Falle $x \in G_{1,\alpha}$ ein minimales $\alpha' \leq \alpha$ mit $x \in G_{1,\alpha'}$ gibt; außerdem wird von 5.2 Gebrauch gemacht. 5.6 ergibt sich anschließend durch einen einfachen Induktionsbeweis.
Der angedeutete Beweis für 5.6 ist allerdings nicht konstruktiv, weil das minimale α' und damit auch eine zu x gehörige Nachfolgesituation $y \in G_{1,\gamma}$ mit $\gamma < \alpha'$ im allgemeinen nicht effektiv angegeben werden können.. Ein konstruktiver Beweis läßt sich aber für den Fall führen, daß $A(x,\varphi)$ stets endlich ist (vgl. Kindt 1972:22-23).
Daß die in 5.6 gemachte Aussage für Situationen mit $s(x)=1$ nicht uneingeschränkt gilt, ändert nichts an der Berechtigung, für den Proponenten eine Restriktion der Angriffsmöglichkeiten einzuführen; die in Dialogspielen interessierenden Anfangssituationen sind nämlich ausschließlich vom Typ $\langle O,\Phi,O\rangle$ oder vom Typ $\langle\Phi,O,1\rangle$ (dieser Punkt wird in Abschnitt 6 noch einmal genauer behandelt werden).
Nach Beantwortung der Frage, in welchen Fällen Regeländerungen mit einer unmittelbaren Einschränkung der Angriffsmöglichkeiten zulässig sind, soll nun untersucht werden, ob und ggf. unter welchen Voraussetzungen die Bestimmungen über die Rücknahme eigener Argumente vereinfacht werden können.

5.7 <u>Theorem:</u> $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein Dialogspiel und r sei 1-argumenteliminierend für O. Weiter sei $D' = \langle\Sigma,A,r',N\rangle$, wobei r' definiert sei durch:

$$r'(x,\varphi,\Phi) := \begin{cases} r(x,\varphi,\Phi) & \text{falls } s(x)=O \\ \langle r(x,\varphi,\Phi)_O,\ O,\ 1\rangle & \text{falls } s(x)=1 \end{cases}$$

Dann ist D' ein Dialogspiel und es gilt: wenn $x \in G'_{1,\alpha}$ und wenn $x_1 = O$ im Falle $s(x) = 1$, dann $x \in G_{1,\alpha}$.

5.7 ist unter Verwendung von 5.2 leicht zu verifizieren und besagt zusammen mit den bisherigen Ergebnissen, daß r o.B.d.A. als 1-argumenteliminierend für 1 angenommen werden darf.

5.8 <u>Theorem:</u> $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein Dialogspiel, r sei O-argumenteliminierend für 1 und N sei alternativ. Weiter sei $D' = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$, wobei r' definiert sei durch:

$$r'(x,\varphi,\Phi) := \begin{cases} \langle O,\ r(x,\varphi,\Phi)_1,\ O\rangle & \text{falls } s(x)=O \\ r(x,\varphi,\Phi) & \text{falls } s(x)=1 \end{cases}$$

Falls D' ein Dialogspiel ist, so gilt: wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und wenn $x_O = O$ im Falle $s(x) = O$, dann $x \in G'_{1,\alpha}$.

Der Beweis für 5.8 verläuft parallel zu dem Beweis für den zweiten Teil von 5.7. Daß D' nicht notwendigerweise selbst ein Dialogspiel ist, hängt mit der in (D5) geforderten Teilbedingung $A(r'(x,\varphi,\Phi),\Phi) \subset A(x,\Phi)$ zusammen, die z.B. nicht er-

füllt wird, wenn D ein formales Dialogspiel ist und $r(x,\varphi,\Phi)_1 = x_1 - \{\varphi\}$ im Falle $s(x)=0$. Wenn demgegenüber r 1-argumenteliminierend für 0 ist, dann ist D' auch ein Dialogspiel.
Die in 5.8 enthaltene Einschränkung im Fall von Situationen mit $s(x)=0$ ist - wie oben schon begründet - ohne Belang. Ebenso bedeutet die Voraussetzung der Alternativität von N keine echte Einschränkung; dies wird im folgenden in 5.10 noch gezeigt werden. Im Gegensatz dazu darf die Reduktionsfunktion nicht generell in eine 0-argumenteliminierende Funktion für 1 abgeändert werden. Dementsprechend kann die Stärke der Reduktion von x_0 bei r für Situationen x mit $s(x)=0$ einen wesentlichen Einfluß auf die Größe von G_1 haben; beispielsweise ist der Unterschied in der Gültigkeitsrelation bei dem formalen Dialogspiel der klassischen Logik und dem der intuitionistischen Logik gerade in der unterschiedlichen Regelung bzgl. der Möglichkeit des Opponenten, die an den Proponenten gestellten Fragen wieder zurückzunehmen, begründet.
Für inhaltliche Dialogspiele läßt sich mit Hilfe von 5.3 und 5.5-5.8 das interessante Resultat nachweisen, daß die spezifische Wahl von r bedeutungslos ist. Wegen 5.3 ergibt sich dieses Resultat aus der Tatsache, daß die für den Proponenten günstigste Wahl von r nicht zu mehr (relevanten) Gewinnsituationen führt als die ungünstigste Wahl.

5.9 Theorem: $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ und $D' = \langle\Sigma,A,r',N\rangle$ seien zwei inhaltliche Dialogspiele mit der Eigenschaft, daß stets $r(x,\varphi,\Phi)_0 = x_0$, $r(x,\varphi,\Phi)_1 = 0$, $r'(x,\varphi,\Phi)_0 = 0$, $r'(x,\varphi,\Phi)_1 = x_1 - \{\varphi\}$ im Fall $s(x)=0$ und $r'(x,\varphi,\Phi) = x_1$ im Falle $s(x)=1$. Außerdem sei N alternativ. Dann gilt: wenn $x \in G_{1,\alpha}$ und wenn $x_0 = 0$ im Falle $s(x)=0$ bzw. $x_1=0$ im Falle $s(x)=1$, dann $x \in G'_{1,g(\alpha,\beta)}$ mit $\beta = \bigcap \{\omega, |x_1| + br(D)\}$.

Zum Beweis von 5.9 wendet man der Reihe nach 5.6, 5.8, 5.7 und 5.5 an.
Gemäß 5.3 und 5.9 kann für inhaltliche Dialogspiele zwecks Vereinfachung der Spielregel insbesondere die restriktivste Version der möglichen Reduktionsfunktionen $r(x,\varphi,\Phi) = \langle 0,0,s(x)\rangle$ gewählt werden. Demgegenüber kann gemäß 5.5 und 5.7 für formale Dialogspiele, deren Reduktionsfunktion r nach obiger Diskussion für 1 0-argumenterhaltend sein sollte, zusätzlich angenommen werden, daß r 1-argumenteliminierend für 0 und 1 ist.
Ein weiteres interessantes Resultat, das sich mit 5.2 schon teilweise angedeutet hat, liefert das folgende Theorem, in dem ausgesagt wird, daß sich der Bereich G_1 eines Dialogspiels auch nicht ändert, wenn man die Zugnachfolgerelation auf ihren alternativen Teil restringiert.

5.10 Theorem: $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ sei ein Dialogspiel, für das (D7) erfüllt ist. Weiter sei $D' = \langle \Sigma, A', r, N' \rangle$, N' sei alternativ und für alle x, φ, Φ gelte:
$x \varphi A' \Phi$ genau dann, wenn $x \varphi A \Phi$ und $x \varphi \Phi N 1-s(x)$.
Dann ist D' ein Dialogspiel und es gilt:

(1) wenn $x \in G_{1,\alpha}$, dann $x \in G'_{1,\alpha}$.

(2) wenn $x \in G'_{1,\alpha}$ und $\beta = |x_1| + \alpha \cdot br(D)$, dann $x \in G_{1,\beta}$.

Zum Beweis von 5.10: (1) wird durch Induktion über α bewiesen; dabei wird von 5.2 Gebrauch gemacht; (2) zeigt man durch Doppelinduktion über α und $|x_1|$.
Eine Diskussion über Regeländerungen, die sich auf die Argumentationsrelation beziehen, bringt erst dann weitergehende Resultate, wenn mehr Eigenschaften dieser Relation axiomatisch eingeführt sind. Als ein Ergebnis, das auch im Rahmen des Typs von Aussagen liegt, die bisher gemacht wurden, soll noch das folgende, leicht nachzuweisende Theorem angegeben werden.

5.11 Theorem: $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ und $D' = \langle \Sigma, A', r, N \rangle$ seien Dialogspiele mit der Eigenschaft, daß N alternativ ist und daß für alle x, φ, Φ, Ψ gilt:

(i) $r(x, \varphi, \Phi) = r(x, \varphi, \Psi)$,

(ii) $x \varphi A \Phi$ genau dann, wenn es gibt m und $\Phi_0, \ldots, \Phi_m$ derart, daß $\Phi = \bigcup_{n \leq m} \Phi_n$ und $x \varphi A' \Phi_n$ für jedes $n \leq m$.

Dann gilt $G_{1,\alpha} = G'_{1,\alpha}$ für jedes α.

Aufgrund von 5.11 können Regeländerungen folgender Art legitimiert werden: Wenn ein Spieler die beiden Möglichkeiten hat, ein Argument φ einerseits mit jeder der Argumentemengen $\Phi_0, \ldots, \Phi_m$ anzugreifen, andererseits aber auch mit $\bigcup_{n \leq m} \Phi_m$, dann darf ihm die zweite Angriffsmöglichkeit o.B.d.A. genommen werden. Mit 5.11 ist beispielsweise zu begründen, warum man in KL nicht zugleich die Möglichkeit eines Angriffs auf $\varphi \wedge \psi$ mit $\{? \varphi, ? \psi\}$ vorsehen muß.

6. Standarddialogspiele

Aufgrund der Ergebnisse von Abschnitt 5 können die Spielregeln von Dialogspielen in einigen ihrer Bestimmungen standardisiert werden. Darüber hinaus haben die Dialogspiele, die für die Logik von Interesse sind, bestimmte, über (D1) - (D9) hinausgehende Standardeigenschaften, deren Konsequenzen in diesem Abschnitt untersucht werden sollen.
Im Einklang mit gewissen Unabhängigkeitseigenschaften der Argumentationsrelation A und der Reduktionsfunktion r von Dialogspielen können folgende zwei Definitionen zur Vereinfachung der Schreibweise eingeführt werden.
Zu A wird eine zweistellige Relation $\bar{A}$ definiert durch:

$\varphi\ \bar{A}\ \Phi$ genau dann, wenn $\emptyset\ \varphi\ A\ \Phi$ und $A(\emptyset,\varphi) = A(\emptyset^1_2,\varphi)$. Außerdem wird gesetzt $q(\Phi,\varphi) := r(\langle\Phi,0,0\rangle,\varphi,0)_0$ und statt $q(\Phi,\varphi)$ wird kürzer Φ_φ geschrieben.

Ein Dialogspiel $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ ist ein *Standarddialogspiel*, wenn zu D zusätzlich eine Funktion $*: \Sigma \to \Sigma$ spezifiziert ist, so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

(S1) D ist inhaltlich oder formal.

(S2) N ist alternativ.

(S3) r ist 0-argumenterhaltend für 1 und 1-argumenteliminierend für 0 und 1.

(S4) Wenn $s(x)=0$, dann $r(x,\varphi,\Phi)_0 = r(x,\varphi,\Psi)_0$

(S5) Wenn $\psi \in \{\psi\}_\varphi$, dann $(\Phi_\varphi)_\psi \supset \Phi_\psi$.

(S6) $\varphi \in \{\varphi\}_\varphi$.

(S7) Wenn φ und ψ Primargumente sind, dann $\Phi_\varphi = \Phi_\psi$ und $\{\varphi,\psi\}_\rho = 0$ oder $= \{\varphi,\psi\}$

(S8) $(\varphi^*)^* = \varphi$ (* ist eine Involution).

(S9) $\bar{A}(\varphi) = \{\{\varphi^*\}\}$ oder $\bar{A}(\varphi^*) = \{\{\varphi\}\}$.

(S10) Wenn $\bar{A}(\varphi) = \{\{\varphi^*\}\}$ und $\varphi^*\ \bar{A}\ \Phi$, dann $\{\varphi\}_\psi = 0$ oder $\Phi_\psi = \Phi$.

(S11) $\psi \in \{\Phi\}_\varphi$ für alle ψ oder $\psi \in \{\psi\}_{\varphi*}$ für alle ψ.

(S12) Wenn φ Primargument ist, dann $\psi \in \{\psi\}_{\varphi*}$.

(S13) Wenn φ Primargument ist und es gibt ein ρ mit $\{\rho\}_\psi = 0$, dann $\{\varphi^*\}_\psi = 0$.

Gemäß (S2) - (S4) sind Standarddialogspiele jeweils durch die Angabe von Σ,A,q und * eindeutig bestimmt, sie sollen daher im folgenden jeweils durch das zugehörige Quadrupel $\langle\Sigma,A,q,*\rangle$ notiert werden.

Die Axiomatik von Standarddialogspielen vereinfacht sich erheblich, wenn man sich auf die Diskussion von Reduktionsfunktionen beschränkt, die 0-argumenterhaltend für 0 sind; in diesem Fall werden nämlich (S5)-(S7) und (S10)-(S13) gegenstandslos. Will man jedoch formale Dialogspiele für die intuitionistische Logik oder für das modale System S4 definieren, dann muß man auch nicht 0-argumenterhaltende Reduktionsfunktionen für 0 in Betracht ziehen.

Aufgrund von (S3) sind mit dem Axiom (D5) für Standarddialogspiele keine Anforderungen verbunden; an die Stelle von (D5) tritt jetzt das verwandte Axiom (S5). Mit (S6) wird erreicht, daß der Opponent für Argumente, die er selbst vertritt aber beim Proponenten angreift, auch weiterhin bürgen muß; dieses Axiom ermöglicht dem Proponenten in inhaltlichen Dialogspielen ggf. eine einfache Imitationsstrategie für Situationen des Typs $\langle\{\varphi\}, \{\varphi\}, 0\rangle$.

In Standarddialogspielen wird φ^* das zu φ *konjugierte* Argument genannt; im Falle $\bar{A}(\varphi) = \{\{\varphi^*\}\}$ heißt φ *ganz* (weil φ aus dem einzigen Gegenargument φ^* durch $*$ wieder reproduzierbar ist). Primargumente sind nicht ganz. Für die in Abschnitt 4 eingeführten Dialogspiele von KL bedeutet $*$ gerade den Übergang von φ zu $?\varphi$ bzw. von $?\varphi$ zu φ. Dementsprechend sind dort z.B. Argumente der Form $\varphi \vee \psi$ ganz, nicht aber der Form $\varphi \wedge \psi$.
Im folgenden Theorem werden einige, aus (S3) - (S7) resultierende Eigenschaften angegeben, die gegenüber 5.1 Verschärfungen bedeuten.

6.1 Theorem: $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ sei ein Dialogspiel, für das (S3) - (S7) erfüllt sind. Dann hat D folgende Eigenschaften:

(1) Wenn $s(x) = 0$ und $x \in G_{1,\alpha}$, dann $\langle (x_0)_\varphi, (x_1)_\varphi, 0 \rangle \in G_{1,\alpha}$.

(2) $\langle \Phi, \{\varphi\}, 0 \rangle \in G_{1,\alpha}$ genau dann, wenn $\langle \Phi_\varphi, \{\varphi\}, 0 \rangle \in G_{1,\alpha}$.

(3) Es sei $s(x) = 1$. $x \in G_{1,\alpha}$ genau dann, wenn $\langle x_0, 0, 1 \rangle \in G_{1,\alpha}$.

(4) Wenn $x, y \in G_{1,\alpha}$, dann $x + y \in G_{1,\alpha}$.

(5) Es sei $s(x) = 0$. $x \in G_{1,\alpha}$ genau dann, wenn $\langle x_0, \{\varphi\}, 0 \rangle \in G_{1,\alpha}$ für jedes $\varphi \in x_1$.

Der Beweis von 6.1 ist ohne Schwierigkeiten durchführbar. Gemäß (3) und (5) kann man sich fortan auf die Diskussion von Situationen der Form $\langle \Phi, \{\varphi\}, 0 \rangle$ und $\langle \Phi, 0, 1 \rangle$ beschränken.

In Abschnitt 4 war bereits auf die mögliche Inkorrektheit und Inkonsistenz stark formaler Dialogspiele bei Vorkommen von unfundierten Argumenten hingewiesen worden. Im folgenden soll nun der Problemkomplex "Fundiertheit/Unfundiertheit" näher untersucht und im Zusammenhang damit sollen auch die Fragen nach Konsistenz, Korrektheit und Vollständigkeit für Standarddialogspiele beantwortet werden.

In der Satzmenge eines Dialogspiels $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ wird zunächst eine Hierarchie eingeführt:
$\Sigma_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \{\varphi \in \Sigma : \Phi \subset \Sigma_\beta$ für alle Φ mit $\emptyset\ \varphi\ A\ \Phi\}$.
Ein Argument φ heißt *fundiert* (in D), wenn es α mit $\varphi \in \Sigma_\alpha$ gibt; außerdem wird A fundiert genannt, wenn jedes φ fundiert ist. In inhaltlichen oder formalen Dialogspielen sind insbesondere die Primargumente fundiert und gehören zu Σ_1; im Falle, daß jedes φ fundiert und $A(\emptyset, \varphi)$ stets endlich ist, gilt außerdem $\Sigma = \Sigma_\omega$. Für bestimmte Dialogspiele kann die mögliche

Länge von Partien direkt von der Einstufung der vorkommenden Argumente in die Hierarchie abhängen.

6.2 Theorem: $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein inhaltliches oder formales Dialogspiel, bei dem N alternativ und r 0-argumenteliminierend für 0 oder 1 sowie 1-argumenteliminierend für 0 oder 1 ist. Wenn alle $\varphi \in x_0 \cup x_1$ fundiert sind, dann ist jede Partie, die mit x beginnt, endlich; falls darüber hinaus $x_{1-s(x)} \subset \Sigma_{n-1}$ und $x_{s(x)} \subset \Sigma_n$ gilt, besteht jede derartige Partie aus höchstens n+1 Gliedern.

Aus 4.1, 6.2 und 2.2 ergibt sich ein wichtiges (klassisch gültiges) Vollständigkeitsresultat für inhaltliche Dialogspiele.

6.3 Theorem: $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein inhaltliches Dialogspiel, (D7) sei erfüllt und jedes φ sei fundiert in D. Dann gehört für jedes φ entweder $\langle\{\varphi\},0,1\rangle$ oder $\langle 0,\{\varphi\},0\rangle$ zu G_1.

6.2 ist leicht durch Induktion nachzuweisen. Beim Beweis von 6.3 kann wegen 5.3, 5.9 und 5.10 angenommen werden, daß N alternativ ist und stets $r(x,\varphi,\Phi) = \langle 0,0,s(x)\rangle$ gilt. Wegen 6.2 kann dann von 2.2 und der verschärften Behauptung von 4.1 Gebrauch gemacht werden.
Für das von einer Menge inhaltlicher Standarddialogspiele erzeugte schwach formale Spiel können stets die Konsistenz und die Korrektheit (bzgl. Allgemeingültigkeit) nachgewiesen werden, für das zugehörige stark formale Spiel ist dies unter der Voraussetzung der Fundiertheit der Argumentationsrelationen der inhaltlichen Spiele möglich.

6.4 Theorem: M sei eine Menge inhaltlicher Dialogspiele, für die $D[M]$ und $D\langle M\rangle$ erklärt sind. Weiter sei $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$, $D \in M$ und r sei 1-argumenteliminierend für 0.
(1) Wenn $x \in G[M]_{1,\alpha}$, dann $x \in G_{1,\alpha+2}$.
(2) Für r seien (S4) und (S6) erfüllt. Wenn $x \in G\langle M\rangle_{1,\alpha}$ und $x_0 \cup x_1 \subset \Sigma_\beta$ in D, dann $x \in G_{1,\alpha+2\beta+1}$.

Aus 6.4 ergeben sich unmittelbar die gewünschten Korrektheitsresultate. Außerdem erhält man die Konsistenz schwach und stark formaler Standarddialogspiele, allerdings zunächst nur als klassisch gültige Resultate (diese Einschränkung kann später aufgehoben werden); hierzu sind 4.1 und 6.4 anzuwenden auf das betreffende formale Spiel D und eine in geeigneter Weise zu definierende Menge M inhaltlicher Dialogspiele mit der Eigenschaft $D = D[M]$ bzw. $D = D\langle M\rangle$
Der Beweis von 6.4 wird durch Induktion über α geführt, dabei macht man von folgendem, leicht zu zeigenden Lemma Gebrauch.

6.5 <u>Lemma:</u> $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ sei ein inhaltliches Dialogspiel, r sei 1-argumenteliminierend für O und es seien (S4) und (S6) erfüllt. Wenn $\varphi \in \Sigma_\alpha$, dann $\langle \{\varphi\}, \{\varphi\}, O \rangle \in G_{1,2\alpha+1}$.

Angesichts von Theorem 6.4 liegt es nahe zu fragen, in welchem Verhältnis schwach formale und die zugehörigen stark formalen Spiele genau stehen, welchen Stellenwert die Voraussetzung der Fundiertheit dabei hat und ob die Konsistenz und Korrektheit stark formaler Spiele ggf. auch im Falle nicht fundierter Argumentationsrelationen bedingt zu erreichen ist. Die generelle Voraussetzung der Fundiertheit bedeutet nämlich eine sehr starke Einschränkung, weil die Argumentation mit unfundierten Argumenten nicht in jedem Fall als sinnlos angesehen werden darf; beispielsweise ist es vollkommen unproblematisch, in einem Dialogspiel mit Sätzen der Form $\varphi \vee \psi$ zu argumentieren, wenn φ fundiert, ψ unfundiert und damit $\varphi \vee \psi$ insgesamt unfundiert ist: ein Spieler, der $\varphi \vee \psi$ zu verantworten hat, kann sich bei einem Angriff auf $\varphi \vee \psi$ darauf beschränken, φ zu verteidigen.

Im folgenden sollen die oben genannten Fragen näher diskutiert werden.

6.6 <u>Theorem:</u> $D = \langle \Sigma, A, r, N \rangle$ sei ein schwach formales und $D' = \langle \Sigma, A', r, N \rangle$ sei das zugehörige (durch Einführung der zweiten Kohärenzregel entstehende) stark formale Dialogspiel. Weiter seien (S4) und (S6) für r erfüllt.

(1) Wenn $x \in G_{1,\alpha}$, dann $x \in G'_{1,\alpha}$.

(2) Wenn $x \in G'_{1,\alpha}$ und $x_0 \cup x_1 \subset \Sigma_\beta$, dann $x \in G_{1,\alpha+2\beta}$.

Aus Theorem 6.6, das leicht nachzuweisen ist, ergibt sich, daß für jede Menge M inhaltlicher Standarddialogspiele, deren Argumentationsrelationen sämtlich fundiert sind, die von M erzeugten formalen Spiele $D[M]$ und $D\langle M \rangle$ - sofern definiert - in ihren 1-Gewinnsituationen übereinstimmen und daß somit in diesem Fall die Einführung der zweiten Kohärenzregel keine Einschränkung bedeutet. Umgekehrt differieren $D[M]$ und $D\langle M \rangle$ bei Vorkommen unfundierter Argumentationsrelationen. Besonders augenfällig wird dies, wenn $K_0 = K_1 = 0$ und wenn es in $D[M]$ auch keine kontextunabhängigen Primargumente gibt; dann gilt nämlich $G[M]_1 = 0$. Damit stellt sich erneut die Frage nach der möglichen Funktion formaler Dialogspiele für den Fall, wo die Argumentationsrelationen der zugrundeliegenden inhaltlichen Spiele unfundiert sein können. Zur Beantwortung dieser Frage ist einerseits zu bemerken, daß das sich aus $G[M]_1 = 0$ ergebende Resultat, daß kein Argument allgemeingültig ist, durchaus adäquat ist, wenn jedes Argument aufgrund von Unfundiertheit in wenigstens einem inhaltlichen Spiel nicht gilt. Andererseits ist zu bedenken, daß es trotz möglicher Unfundiertheit der verwendeten Argumente zweckmäßig sein kann, mit solchen Argumenten formal zu argumentieren und zwar z.B. in dem Sinne, daß man aufgrund der hypothetisch unterstellten Gültigkeit bestimmter Argumente auf die Gültigkeit anderer Argumente schließt. An genau dieser Zielsetzung orientiert sich auch die Einführung stark formaler Dialogspiele, in denen der Opponent die Rolle erhält, für die hypothetisch als gültig unterstellten und die daraus zu implizierenden Argumente zu bürgen; die zweite Kohärenzregel ist insofern als ein Minimalpostulat für entsprechende formale Dialoge anzusehen. Der Nutzen von $D\langle M\rangle$ ist demgemäß u.a. daran zu messen, ob man mit $D\langle M\rangle$ die im üblichen Sinne relativ zu M zu definierende Folgerungsrelation korrekt und vollständig beschreiben kann. Für eine Behandlung dieser Frage soll zunächst eine Bedingung eingeführt und diskutiert werden, die auch bei Vorkommen unfundierter Argumente die Konsistenz und Korrektheit stark formaler Dialogspiele garantiert. Wenn man nach der Ursache für die bei unfundierten Sätzen auftretenden Probleme sucht, kann man feststellen, daß diese Probleme in genau solchen Fällen entstehen, wo der Opponent aufgrund der vorgegebenen Argumentationsregeln gezwungen wird, für die Gültigkeit von unfundierten Sätzen zu bürgen, ohne daß dies in einem notwendigen Zusammenhang mit seiner vorherigen Argumentation steht. Speziell kann es (z.B. bei Sätzen der Form $\varphi \rightarrow \varphi$) geschehen, daß die um bestimmte Sätze geführten Dialoge stets bei Situationen des Typs $\langle \Phi \cup \{\psi\}, \{\psi\}, O\rangle$ mit unfundiertem ψ enden, weshalb dann die angestrebte Korrektheitseigenschaft von $D\langle M\rangle$ unerreichbar bleibt. Es liegt daher nahe, folgende Restriktion für die Argumentationsrelation einzuführen.

(B1) Wenn n+m ungerade ist, dann

$$A^n(\varphi) \cap A^m(\varphi) = O.$$

Hierbei sei definiert: $A^O(\varphi) = \{\varphi\}$ und

$A^{n+1}(\varphi) = \{\psi \in \Sigma\text{: es gibt } \rho,\ \Psi \text{ mit } \rho \in A^n(\varphi), \emptyset\, \rho\, A\, \Psi \text{ und } \psi \in \Psi\}$

Beispielsweise ist die in Abschnitt 4 angegebene Argumentationsregel für das Prädikat "Autolog" mit (B1) kompatibel, nicht aber die Regel für die Implikation. Anschaulich gesagt wird durch (B1) die Existenz von Argumenten ausgeschlossen, die zu teilweise parallelen Argumentationssträngen von Opponent und Proponent führen können. Allgemein soll ein Satzmengendupel $\langle \Phi_O, \Phi_1\rangle$ *parallelenfrei* (bzgl. A) heißen, wenn für alle $i,j<2$, $\varphi \in \Phi_i$, $\psi \in \Phi_j$, m, n gilt: $A^m(\varphi) \cap A^n(\psi) = O$, falls $i=j$ und m+n ungerade ist oder falls $i \neq j$ und m+n gerade ist. Mit Hilfe dieser Begriffsbildung läßt sich nun folgendes klassisch gültige und auf den Nachweis einer verallgemeinerten Korrektheitseigenschaft hin zielende Theorem zeigen.

6.7 Theorem: M sei eine Menge inhaltlicher Dialogspiele, für die $D\langle M\rangle$ erklärt ist. Weiterhin sei $D = \langle \Sigma,A,r,N\rangle \in M$, r sei 1-argumenteliminierend für 0 und 1 und N sei alternativ. Wenn $x \in G_{1,\alpha}$, $x_0 = 0$, $s(x) = 0$, $\langle x_1,0,0\rangle + y \in G\langle M\rangle_{1,\beta}$ und wenn $\langle y_0,y_1\rangle$ parallelenfrei bzgl. $A\langle M\rangle$ ist, dann $y \in G_{1,\alpha+\beta}$.

Der Beweis von 6.7 wird induktiv geführt und dabei wird ausgenutzt, daß die Spielweise um $z = \langle x_1,0,0\rangle + y$ in $D\langle M\rangle$ in etwa auf die Spielweise um y in D übertragen werden kann. Eine Ausnahme hiervon bildet der Fall, wo der Proponent in z ein Argument von x_1 angreifen muß; dann ist bei z und x über zwei Spielzüge eine analoge Spielweise vorzunehmen und von 5.6 und 4.1 Gebrauch zu machen.
Aus 6.7 ergeben sich bei Voraussetzung von (B1) speziell die Konsistenz und die Korrektheit bzgl. Allgemeingültigkeit von $D\langle M\rangle$. Darüber hinaus läßt sich aus 6.7 bereits ein Korrektheitsresultat bzgl. der Folgerungsrelation von der Art herauslesen, daß $D \models \psi$, falls $\langle \Phi,\{\psi\},0\rangle \in G\langle M\rangle_1$ und $D \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Phi$. Da jedoch das Problem der Charakterisierbarkeit der Folgerungsrelation nur für Standarddialogspiele angemessen gelöst werden kann, soll die diesbezügliche Diskussion noch aufgeschoben und zunächst das wichtige, allgemeiner geltende Schnittregeltheorem behandelt werden, das zugleich teilweise auch die Möglichkeit zu konstruktiven Konsistenz- und Korrektheitsbeweisen eröffnet.

In spezialisierter Form macht die Schnittregel für Dialogspiele D folgende Aussage: wenn $\langle \Phi,\{\varphi\},0\rangle \in G_1$ und $\langle \{\varphi\} \cup \Psi,\Psi',i\rangle \in G_1$, dann $\langle \Phi \cup \Psi,\Psi',i\rangle \in G_1$.
In Kindt 1972 wurde das Schnittregeltheorem unter der Voraussetzung der Fundiertheit der Argumentationsrelation bewiesen; wie hier dargestellt werden soll, ist das Theorem aber auch unter Voraussetzung von (B1) nachweisbar.
Als Ersatz für die in Sprachen mit unfundierten Sätzen verlorengehende generelle Möglichkeit abzuschätzen, wie viele Schritte man im Dialog für den Abbau von Argumenten höchstens benötigt, kann für jedes Dialogspiel $D = \langle \Sigma,A,r,N\rangle$ eine situationsbezogene Hierarchie $B_\alpha(x)$ von Bewertungsfunktionen definiert werden, durch die für Gewinnsituationen x in Abhängigkeit von Strategie und Spieler ein Abbaugrad für die Argumente gegeben ist. Der Einfachheit halber soll diese Definition nur für den später benötigten Fall, wo (S2) und (S3) für D erfüllt sind, formuliert werden: $b \in B_\alpha(x)$ genau dann, wenn $x \in G_{1,\alpha}$, $b\colon \Sigma \times 2 \to \alpha+1$ und $b(\varphi,i) = 0$ für alle φ, i mit $\varphi \notin x_i$ und wenn es $\alpha'<\alpha$ gibt derart, daß folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) falls $s(x) = 0$, so gibt es für jedes $\varphi \in x_1$ ein $\beta < b(\varphi,1)$ derart, daß für alle $x' \in R(x)$, Φ mit $x\ \varphi\ A\ \Phi$ und $x' = \langle (x_0)_\varphi \cup \Phi, 0, 1\rangle$ existiert ein $b' \in B_{\alpha'}(x')$ mit
$b'(\psi,0) \leq b(\psi,0)$ für jedes $\psi \in (x_0)_\varphi - \Phi$,
$b'(\psi,0) \leq b(\psi,0) \cup \beta$ für jedes $\psi \in (x_0)_\varphi \cap \Phi$ und
$b'(\psi,0) \leq \beta$ für jedes $\psi \in \Phi - (x_0)_\varphi$;

(ii) falls $s(x) = 1$, so gibt es $\varphi \in x_0, \Phi$, $x' \in R(x)$, $\beta < b(\varphi,0)$, $b' \in B_{\alpha'}(x')$ derart, daß $x\ \varphi\ A\ \Phi$, $x' = \langle x_0, \Phi, 0\rangle$, $b'(\psi,0) \leq b(\psi,0)$ für jedes $\psi \in x_0$ und $b'(\psi,1) \leq \beta$ für jedes $\psi \in \Phi$.

6.8 <u>Theorem:</u> $D = \langle \Sigma, A, r, N\rangle$ sei ein Dialogspiel, für das (S2) und (S3) erfüllt sind. Weiter sei $x \in G_{1,\alpha}$ und b sei definiert durch:

$$b(\varphi,i) := \begin{cases} \alpha & \text{falls } \varphi \in x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $b \in B_\alpha(x)$ erfüllt.

6.8 ist ohne Schwierigkeiten nachzuweisen. Zu Abschätzungszwecken wird definiert:

$$h(\alpha,\gamma) := \alpha + \bigcup_{\delta<\gamma} h(\alpha + \bigcup_{\beta<\alpha} h(\beta,\gamma),\ \delta).$$

6.9 <u>Theorem (Schnittregel):</u> $D = \langle \Sigma, A, r, N\rangle$ sei ein Dialogspiel, für das (S1) - (S5) erfüllt sind. Weiter seien $x \in G_{1,\alpha}$, $y \in G_{1,\beta}$, $s(x) = 0$, $x_1 \subset y_0$ und $z = \langle x_0 \cup (y_0 - x_1), y_1, s(y)\rangle$. Dann gilt $z \in G_{1,h(\alpha+\beta,\gamma)}$, wenn $x_1 \subset \Sigma_\gamma$ oder wenn (B1) für A erfüllt ist, $\langle x_1, 0\rangle$ parallelenfrei ist und $\gamma = \alpha \cup \beta$.

Der Beweis für 6.9 im Fall $x_1 \subset \Sigma_\gamma$ wird durch Doppelinduktion und über γ und $\alpha+\beta$ geführt (vgl. Kindt 1972:39-40). Mit Ausnahme eines Falles kann die Spielweise um y auf die Spielweise um z übertragen werden. Dieser Ausnahmefall tritt ein, wenn $s(y) = 1$ und wenn der Proponent gemäß seiner Strategie für y ein Argument $\varphi \in y_0$ angreifen muß, das nicht auch zu z_0 gehört. Ist $y' = \langle y_0, \Phi, 0\rangle$ die vom Proponenten auszuwählende Nachfolgesituation mit $y' \in G_{1,\beta'}$ und $\beta' < \beta$, so kann man aufgrund der inneren Induktionsvoraussetzung zunächst $z' \in G_{1,h(\alpha+\beta',\gamma)}$ für $z' = \langle x_0 \cup (y_0 - x_1), \Phi, 0\rangle$ erschließen. Außerdem zeigt man, daß $x' = \langle (x_0)_\varphi \cup \Phi, 0, 1\rangle$ Nachfolgesituation von x ist und daß auf z' und x' bzgl. Φ und einem $\gamma' < \gamma$ die äußere Induktionsvoraussetzung angewendet werden kann. Damit ergibt sich dann ohne Schwierigkeiten die Induktionsbehauptung.

Der Beweis für den zweiten Fall von 6.9 verläuft zwar im wesentlichen nach demselben Schema wie im ersten Fall. Um eine Anwendung der äußeren Induktionsvoraussetzungen zu ermöglichen, muß die Behauptung von 6.9 aber erheblich verschärft werden. Zu diesem Zweck wird zunächst der Begriff der Unabhängigkeit eingeführt.

Die Argumentemengendupel $\langle \Phi_{o,o}, \Phi_{o,1} \rangle$ und $\langle \Phi_{1,o}, \Phi_{1,1} \rangle$ sind *unabhängig* bzgl. $b \in B_\alpha(x)$ genau dann, wenn $\Phi_{j,i} \subset x_i$ und $\Phi_{j,i} \cap \Phi_{1-j,i} = 0$ für alle $i,j<2$ und wenn es gibt $\alpha' < \alpha$ mit:

(i) falls $s(x) = 0$, so gibt es für alle $\varphi \in x_1$ ein $j<2$ mit $\varphi \in x_1 - \Phi_{1-j,i}$ und ein $\beta < b(\varphi,1)$ derart, daß für alle x', Φ mit $\langle x_o - \Phi_{1-j,o}, x_1, 0 \rangle \ \varphi \ A \ \Phi$ und $x' = \langle (x_o)_\varphi \cup \Phi, 0, 1 \rangle$ existiert ein $b' \in B_{\alpha'}(x')$ mit: $b'(\psi,0) \leq b(\psi,0)$ für jedes $\psi \in (x_o)_\varphi - \Phi$, $b'(\psi,0) \cup \beta$ für jedes $\psi \in (x_o)_\varphi \cap \Phi$ und $b'(\psi,0) \leq \beta$ für jedes $\psi \in \Phi - (x_o)_\varphi$ und außerdem sind $\langle ((\Phi_{j,o})_\varphi - \Phi) \cup \Phi - (x_o)_\varphi), 0 \rangle$ im Falle $\varphi \in \Phi_{j,1}$ bzw. $\langle (\Phi_{j,o})_\varphi - \Phi, 0 \rangle$ im Falle $\varphi \notin \Phi_{j,1}$ und $\langle (\Phi_{1-j,o})_\varphi - \Phi, 0 \rangle$ unabhängig bzgl. b';

(ii) falls $s(x) = 1$, so gibt es $j<2$, $\varphi \in x_o - \Phi_{1-j,o}$, $x' \in R(x)$, $\beta < b(\varphi,0)$, $b' \in B_{\alpha'}(x')$ derart, daß $x \ \varphi \ A \ \Phi$, $x' = \langle x_o, \Phi, 0 \rangle$, $b'(\psi,0) \leq b(\psi,0)$ für jedes $\psi \in x_o$, $b'(\psi,1) \leq \beta$ für jedes $\psi \in \Phi$ und daß außerdem $\langle \Phi_{j,o}, \Phi \rangle$ im Falle $\varphi \in \Phi_{j,o}$ bzw. $\langle \Phi_{j,o}, 0 \rangle$ im Falle $\varphi \notin \Phi_{j,o}$ und $\langle \Phi_{1-j,o}, 0 \rangle$ bzgl. b' unabhängig sind.

Zwischen Parallelenfreiheit und Unabhängigkeit besteht folgende leicht nachzuweisende Beziehung: Wenn (B1) für A erfüllt ist, wenn $\langle \Phi_{o,o} \cup \Phi_{1,o}, \Phi_{o,1} \cup \Phi_{1,1} \rangle$ parallelenfrei ist und $\Phi_{j,i} \subset x_i$ sowie $\Phi_{j,i} \cap \Phi_{1-j,i} = 0$ für alle $i,j<2$ und wenn $b \in B_\alpha(x)$, dann sind $\langle \Phi_{o,o}, \Phi_{o,1} \rangle$ und $\langle \Phi_{1,o}, \Phi_{1,1} \rangle$ unabhängig bzgl. b.
Anstelle von 6.9 ist dann folgende Aussage zu beweisen:
Es seien (B1) für A erfüllt, $\langle x_1, 0 \rangle$ parallelenfrei, $b \in B_\alpha(x)$, $c \in B_\beta(y)$ sowie $b(\varphi,1) \leq \gamma$ und $c(\varphi,0) \leq \gamma$ für alle $\varphi \in x_1$. Dann gibt es ein $d \in B_{h(\alpha+\beta,\gamma)}(z)$ derart, daß für alle $\Phi_o, \Phi_1, \Psi, \psi \in z_o \cup z_1$ gilt:

(i) Wenn $\langle \{\psi\} \ 0 \rangle$ und $\langle \Psi, x_1 \rangle$ im Falle $\psi \in x_o$ bzgl. b sowie $\langle \{\psi\}, 0 \rangle$ und $\langle \Phi_o \cup x_1, \Phi_1 \rangle$ im Falle $\psi \in y_o - x_1$ bzgl. c unabhängig sind, dann $d(\psi,0) = b(\psi,0) \cup c(\psi,0)$ und außerdem sind $\langle \{\psi\}, 0 \rangle$ und $\langle \Psi \cup ((y_o - x_1) - x_o), y_1 \rangle$ im Falle $\psi \in x_o$, $\psi \notin y_o - x_1$ bzw. $\langle (\Psi \cap \Phi_o) \cup (\Psi - (y_o - x_1) \cap (\Phi_o - x_o), \Phi_1 \rangle$ im Falle $\psi \in x_o$, $\psi \in y_o - x_1$ bzw. $\langle \Phi_o \cup (x_o - (y_o - x_1)), \Phi_1 \rangle$ im Falle $\psi \notin x_o$, $\psi \in y_o - x_1$ bzgl. d unabhängig.

(ii) Wenn $\psi \in x_o$ und $\langle \{\psi\}, 0 \rangle$ und $\langle 0, x_1 \rangle$ bzgl. b nicht unabhängig sind oder wenn $\psi \in y_o - x_1$ und $\langle \{\psi\}, 0 \rangle$ und $\langle x_1, 0 \rangle$ bzgl. c nicht unabhängig sind, dann $d(\psi,0) = h(\alpha+\beta,\gamma)$.

(iii) Wenn $\psi \in y_1$ und $\langle 0, \{\psi\} \rangle$ und $\langle \Phi_o \cup x_1, \Phi_1 \rangle$ bzgl. c unabhängig sind, dann $d(\psi,1) = c(\psi,1)$ und außerdem sind $\langle 0, \{\psi\} \rangle$ und $\langle (x_o - (y_o - x_1) \cup \Phi_o, \Phi_1 \rangle$ bzgl. d unabhängig.

(iv) Wenn $\psi \in y_1$ und $\langle 0, \{\psi\} \rangle$ und $\langle x_1, 0 \rangle$ bzgl. c nicht unabhängig sind, dann $d(\psi,1) = h(\alpha+\beta,\gamma)$.

Mit Hilfe von 6.9 ist sofort folgendes Konsistenzresultat nachweisbar.

6.10 <u>Theorem:</u> $D = \langle\Sigma,A,r,N\rangle$ sei ein Dialogspiel, für das (S1) - (S5) erfüllt sind. Wenn A fundiert ist oder (B1) erfüllt ist, dann ist D konsistent.

Im folgenden soll nun die Frage der Charakterisierbarkeit der Folgerungsrelation systematisch behandelt werden.
Relativ zu einer Menge M von Dialogspielen über der Satzmenge Σ ist ψ eine *Folgerung* aus $\Phi \subset \Sigma$ (abgekürzt: $\Phi \models_M \psi$) genau dann, wenn $D \models \psi$ für alle $D \in M$ mit $D \models \Phi$ (das bedeutet: $D \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$). Sofern $D\langle M\rangle$ erklärt ist, wäre zu prüfen, ob ggf. die Folgerungsrelation mit Hilfe der 1-Gewinnsituationen von $D\langle M\rangle$ charakterisierbar ist.
Wie generell in Bewertungssemantiken ist eine Charakterisierbarkeit hier höchstens für den Fall endlicher Prämissenmengen Φ erreichbar, so daß nachfolgend von dieser einschränkenden Voraussetzung ausgegangen wird. Die zunächst naheliegende Möglichkeit eines Vergleichs von Folgerungsrelation und der Relation $\{\langle\Phi,\varphi\rangle : \langle\Phi,\{\varphi\},O\rangle \in G[M]_1\}$ ist für die angestrebte Charakterisierung unzureichend. Grund hierfür ist zum einen die Argumentationsregel für Primargumente (in $D\langle KL\rangle$ ist z.B. $\langle\{\varphi\wedge\psi\},\{\varphi\},O\rangle$ keine 1-Gewinnsituation, falls φ Primargument ist) und zum anderen die Tatsache, daß im Falle von $\Phi_\varphi \neq \Phi$ bei der Wahl der Anfangssituation $\langle\Phi,\{\varphi\},O\rangle$ wichtige Informationen aus Φ verloren gehen. Die beiden, hier angedeuteten Probleme treten nicht auf, wenn M aus Standarddialogspielen mit einer einheitlichen Funktion * besteht und wenn man als Vergleichsrelation $\{\langle\Phi,\varphi\rangle : \langle\Phi \cup \{\varphi^*\},O,1\rangle \in G\langle M\rangle_1\}$ wählt. Diese Wahl kann hinsichtlich der zugrundeliegenden Anfangssituationen folgendermaßen motiviert werden: eine Argumentation, die unter formaler Voraussetzung der Prämissenmenge Φ einen Nachweis für den Satz φ erbringen soll, kann mit der Behauptung von Φ und der gleichzeitigen Infragestellung von φ durch den Opponenten beginnen. Die bisherige Auszeichnung der Situationen des Typs $\langle O,\{\varphi\},O\rangle$ als Anfangssituationen ist auch durch die neue Festlegung ersetzbar, weil jedes Standarddialogspiel D wegen (S9) die Eigenschaft hat, daß $\langle\{\varphi^*\},O,1\rangle \in G_1$ genau dann, wenn $\langle O,\{\varphi\},O\rangle \in G_1$.
Insofern brauchen in Standarddialogspielen eigentlich nur Situationen des Typs $\langle\Phi,O,1\rangle$ als Anfangssituationen zugrundegelegt werden; aus Darstellungsgründen sollen aber auch weiterhin Anfangssituationen des Typs $\langle O,\Phi,O\rangle$ betrachtet werden.

M sei eine Menge inhaltlicher Standarddialogspiele über Σ mit einheitlichen Funktionen q und *. $D\langle M\rangle$ ist *korrekt* (der Bezug auf die Folgerungsrelation soll jetzt der Einfachheit halber unerwähnt bleiben) genau dann, wenn $\Phi \models_M \varphi$ für alle Φ, φ mit

$\langle \Phi \cup \{\varphi^*\},0,1\rangle \in G\langle M\rangle_1$; D<M> ist *vollständig* genau dann, wenn $\langle \Phi \cup \{\varphi^*\},0,1\rangle \in G\langle M\rangle_1$ für alle Φ, φ mit $\Phi \models_M \varphi$.

Sowohl im Falle der Fundiertheit der Argumentationsrelation in M als auch im Falle, daß (B1) für A<M> erfüllt ist, kann die Korrektheit des stark formalen Spiels (im letzteren Fall zumindest klassisch) nachgewiesen werden.

6.11 Theorem: M sei eine Menge inhaltlicher Standarddialogspiele über Σ mit einheitlichen Funktionen q und *. Dann ist D<M> korrekt, falls die Argumentationsrelation von jedem D $\in$ M fundiert ist oder falls (B1) für A<M> gilt.

Zum Beweis von 6.11: Im ersten Fall ergibt sich die Korrektheit mit Hilfe von 6.4(2) und 6.10, im zweiten Fall mit Hilfe von 6.7.

Was nun die Eigenschaft der Vollständigkeit betrifft, so ist diese nur unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen erfüllt, zu deren Motivation vorbereitend einige Bemerkungen gemacht werden sollen. Zunächst sind bestimmte, stark formale Dialogspiele wie etwa das zur intuitionistischen Logik oder das zu S4 führende Spiel deshalb unvollständig, weil die zugrundeliegenden inhaltlichen Spiele die semantisch wesentliche Impermanzeigenschaft der Reduktionsfunktion gemäß Theorem 5.6 nivellieren und somit gar keine adäquate Semantik bilden. Im speziellen Fall der intuitionistischen Logik kann die Unvollständigkeit allerdings auch anders interpretiert werden: mit der Einführung des stark formalen Spiels wird gar nicht eine Charakterisierung der Folgerungsrelation, sondern die Einführung von semantischen Konzepten wie "logische (formale) Gültigkeit" und "logische Implikation" angestrebt, die überhaupt erst das natürliche semantische Korrelat zum Kalkül der intuitionistischen Logik bilden. Die Diskussion zu diesem Punkt soll hier aber nicht vertieft werden.
Ein weiterer Grund, der für die Unvollständigkeit eines stark formalen Spiels D<M> verantwortlich sein kann, besteht darin, daß ggf. die Argumentation um bestimmte Sätze in den Spielen von M zwar unterschiedlich ausfällt, aber nicht voneinander unabhängig ist und daß die betreffende Abhängigkeit in D<M> nicht abbildbar ist. Ein solcher Fall liegt z.B. vor, wenn für zwei Primargumente φ und ψ in jedem D $\in$ M, die Beziehung $\bar{A}(\varphi) = 1 - \bar{A}(\psi)$ besteht; dann ist $\varphi \vee \psi$ allgemeingültig, jedoch nicht gültig in D<M>.
Ein spezielles Problem ergibt sich schließlich bei Vorkommen von Sätzen wie Aut'Aut', die in allen inhaltlichen Spielen gleichermaßen unfundiert sind. Bei geeigneter Wahl von M kann man z.B. zeigen, daß aus {Aut'Aut'} jeder beliebige Satz φ folgt, $\langle\{\text{Aut'Aut'},\varphi^*\},0,1\rangle$ aber nicht in $G\langle M\rangle_1$ zu liegen braucht. Der hier auftretende Typ von Unvollständigkeit erzwingt eine prinzipielle Restriktion des angestrebten Voll-

ständigkeitstheorems auf den Fall von Prämissenmengen, zu denen keine *global unfundierten* Sätze (d.h. keine Sätze, die relativ zu $\bigcap_{DEM}$ A unfundiert sind) gehören. Eine vollständige Charakterisierung auch für den hier ausgeschlossenen Fall ist allenfalls möglich, wenn man im formalen Spiel eine weitere kontextsensitive Argumentationsregel einführt, bei der jeweils auch die Argumentations-"Vorgeschichte" berücksichtigt werden muß. Eine solche Erweiterung des Dialogspielkonzepts würde jedoch den Rahmen der vorliegenden Darstellung sprengen und soll hier nicht diskutiert werden (vgl. zu diesem Punkt aber Abschnitt 9).
Die genannte Restriktion des Vollständigkeitstheorems hat im übrigen - pragmatisch gesehen - gar nicht so negative Auswirkungen, wie man zunächst vermutet. Das wird deutlich, wenn man bedenkt, daß die Funktion des formalen Spiels bzw. des ggf. dazu definierbaren Kalküls (s.u.) in einer (möglichst mechanischen) Erzeugung derjenigen Folgerungen besteht, die relativ zu den in einer Situation schon nachgewiesenen oder als erfüllt geltenden Prämissen gezogen werden dürfen. Nun sind aber global unfundierte Sätze entweder unerfüllbar oder sie enthalten unerfüllbare Teilsätze und sind Abschwächungen von nicht global unfundierten Sätzen (letzeres gilt z.B. für $\varphi \vee$ Aut'Aut' bei fundiertem φ). Insofern kann man für den Regelfall der praktischen Anwendung davon ausgehen, daß die zugrundeliegende Prämissenmenge keine global unfundierten Sätze enthält bzw. daß durch die Erweiterung der Prämissenmenge durch solche Sätze keine neuen oder keine relevanten Folgerungen hinzukommen. Durch die genannte Restriktion verliert man allerdings eine metalogische Argumentationsmöglichkeit: wenn man für eine Situation fälschlicherweise annimmt, daß bestimmte (in Wirklichkeit unerfüllbare) global unfundierte Prämissen gelten, dann kann man unter den beschriebenen Verhältnissen die Falschheit der Annahme nicht durch die Ableitung zweier sich widersprechender Sätze aufdecken.
Genau die Schwierigkeiten, die durch das Vorkommen unfundierter Sätze entstehen, sind es auch, die Smullyan in seiner Arbeit 1968 übersehen hat. Weder das dortige Korrektheitstheorem noch das Vollständigkeitstheorem (Theorem 8 und 9, p. 86,87) sind richtig; denn z.B. ist zwar {Aut'Aut', ? Aut'Aut'} quasierfüllbar, aber nicht analytisch konsistent und umgekehrt ist zwar {Aut'Aut', ? $(\varphi \wedge \neg \varphi)$} für Primargumente φ analytisch konsistent, nicht aber quasierfüllbar.
An dieser Stelle sind auch ein paar kurze, generelle Bemerkungen zum Verhältnis zwischen Smullyans und meinen Arbeiten angebracht. Trotz des historischen Zusammenhangs zwischen Dialogspielkonzept und Tableauxmethode sind beide Ansätze zu einer mehr abstrakten Logiktheorie seinerzeit unabhängig voneinander entwickelt worden und basieren auch auf unterschiedlichen Erfahrungen (Smullyan hatte in früheren Arbeiten entdeckt, daß wesentliche Theoreme der Prädikatenlogik unabhängig von den speziellen Eigenschaften der logischen Junktoren und Quantoren bewiesen werden konnten, mir ging es demgegenüber anfangs

darum, den Nachweis bestimmter Beziehungen zwischen unterschiedlichen Dialogspielen unabhängig von den speziellen Eigenschaften der Argumentationsrelationen zu erbringen). Die beiden Ansätze behandeln teilweise dieselben Probleme - wenn auch mit unterschiedlichem Differenzierungsgrad. Insofern ist es nicht verwunderlich, daß auch ähnliche Resultate postuliert und parallele Begriffsbildungen ("Permanenz", "konjugiert") entwickelt werden. Einer der Vorteile der Dialogspieltheorie, der jedoch mit einer größeren Strukturkomplexität einhergeht, ist m.E. darin zu sehen, daß die Grundbegriffe dieser Theorie aufgrund ihrer anschaulichen Interpretation besonders gut motiviert sind. Insgesamt ist für das Rahmenprogramm der Dialogspieltheorie vielfach die Durchführung anderer oder detaillierterer Arbeitsschritte als für Smullyans Ansatz notwendig. Für das nachfolgende, in Kindt 1972 noch nicht aufgeführte Vollständigkeitstheorem kann allerdings auf die grundsätzliche Beweisidee der Verwendung systematischer Tableaux's in Smullyan 1968 zurückgegriffen werden.

6.12 <u>Theorem:</u> M sei eine Menge inhaltlicher Standarddialogspiele über Σ mit einheitlichen Funktionen q und *. Außerdem seien folgende drei Bedingungen erfüllt:

(i) $\overline{A\langle M\rangle}(\varphi)$ ist abzählbar.

(ii) $\Phi_\varphi = \Phi$.

(iii) Wenn $D \in M$ und $A\langle M\rangle(\emptyset,\varphi) \neq A\ M\ (\emptyset_2^1,\varphi)$, dann gibt es D', D" $\in$ M mit

$$\overline{A'}(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \psi = \varphi \text{ oder } \varphi\ K_0\ \psi \\ 1 & \text{falls } \varphi\ K_1\ \psi \\ \bar{A}(\psi) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{A''}(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \psi = \varphi \text{ oder } \psi\ K_0\ \varphi \\ \bar{A}(\psi) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: wenn Φ keine global unfundierten Sätze enthält und $\Phi \models_M \varphi$, so $\langle\Phi \cup \{\varphi^*\},0,1\rangle \in G\langle M\rangle_1$.

<u>Der Beweis von 6.12</u> wird in zwei Schritte unterteilt. Zuerst wird der Begriff der *systematischen* 1-Strategie eingeführt und gezeigt, daß unter den gegebenen Voraussetzungen jede systematische 1-Strategie für eine 1-Gewinnsituation in $D \in M$ sogar eine 1-Gewinnstrategie ist. Danach wird mit Hilfe einer systematischen 1-Strategie für $x = \langle\Phi \cup \{\varphi^*\},0,1\rangle$ unter der Annahme $x \notin G\langle M\rangle_1$ ein $D \in M$ mit der Eigenschaft angegeben, daß $x \notin G_1$ und alle $\psi \in \Phi$ in D fundiert sind. Hieraus ergibt sich parallel zu 6.3 (also auch nur klassisch), daß $D \models \Phi$ und nicht $D \models \varphi$ und somit auch nicht $\Phi \models_M \varphi$.
Bei einer systematischen 1-Strategie für x werden die Argumente des Opponenten, also die x_0 angehörenden und die im Verlauf des jeweiligen Dialogs vorgebrachten Argumente, nach einem Diagonalverfahren in normierter Reihenfolge angegriffen und dabei alle Argumentationsmöglichkeiten gemäß einer vorgegebenen Abzählung sukzessiv wahrgenommen. Für formale Dialogspiele gilt eine ein-

schränkende Zusatzregel, die besagt, daß der Proponent einen nach der Abzählung eigentlich gerade anstehenden Angriff, bei dem vom Proponenten ein Primargument φ vorgebracht werden soll, für das es unter den derzeitigen Argumenten des Opponenten kein ψ mit $\psi\ K_0\ \varphi$ gibt, solange aufschieben muß, bis der Opponent ggf. ein solches ψ einbringt.
Das zu $x \in G\langle M\rangle_1$ anzugebende inhaltliche Spiel D wird folgendermaßen bestimmt. Ausgehend von einer 0-Strategie σ für x in D<M>, die dem Proponenten die Möglichkeit zum Gewinn der mit x beginnenden Partien verstellt, und einer systematischen 1-Strategie σ' in D<M> wird der durch σ und σ' bestimmte Dialog zur Festlegung der noch frei wählbaren Werte der Argumentationsrelation A für alle φ mit $A\langle M\rangle(\emptyset,\varphi) \neq A\langle M\rangle(\emptyset\tfrac{1}{2},\varphi)$ benutzt: wenn es unter den im Dialog vom Opponenten vorgebrachten Argumenten ein ψ mit $\psi\ K_0\ \varphi$ gibt, dann wird $\bar{A}(\varphi) = 0$ und sonst $= 1$ gesetzt.

Bei den bisherigen Theoremen wurde von den Axiomen (S8) - (S13) kein oder zumindest kein wesentlicher Gebrauch gemacht. Diese Axiome werden aber für den Nachweis benötigt, daß die 1-Gewinnsituationen von Standarddialogspielen unter bestimmten Voraussetzungen durch Regelsysteme beschrieben werden können, die die natürliche Verallgemeinerung der bekannten Gentzenkalküle sind.
Zu jedem Standarddialogspiel $D = \langle\Sigma,A,q,*\rangle$ wird ein Regelsystem mit vier Regeln definiert.

Neutralisierungsregel:
(N) Wenn D formal ist und $\varphi\ K_0\ \psi^*$ oder $\varphi\ K_1\ \psi$ oder wenn D stark formal ist und $\psi = \varphi^*$, dann $\vdash_D \{\varphi,\psi\}$.

Verdünnungsregel:
(V) Wenn $\Phi \subset \Psi$ und $\vdash_D \Phi$, dann $\vdash_D \Psi$.

Einführung ganzer Argumente:
(G) Wenn φ ganz ist und wenn $\vdash_D \Phi \cup \Psi$ für alle Ψ mit $\varphi^*\ \bar{A}\ \Psi$, dann $\vdash_D \Phi_{\varphi^*} \cup \{\varphi\}$.

Für den Fall, daß die Spielregel R von D bzgl. einer Relation R' quasifinit für 1 ist, darf statt (G) auch folgende, modifizierte Regel verwendet werden:

(G') Wenn φ ganz ist und wenn $\vdash_D \Phi_{\varphi^*} \cup \Psi$ für alle Ψ mit $\varphi^*\ \bar{A}\ \Psi$ und $\langle\Phi \cup \{\varphi\},\{\varphi^*\},0\rangle\ R'\ \langle(\Phi \cup \{\varphi\})_{\varphi^*} \cup \Psi,0,1\rangle$, dann $\vdash_D \Phi \cup \{\varphi\}$.

Einführung nicht-ganzer Argumente:
(G*) Wenn φ nicht ganz ist, wenn $\varphi\ \bar{A}\ \Psi$ und wenn $\vdash_D \Phi_\psi \cup \{\psi^*\}$ für alle $\psi \in \Psi$, dann $\vdash_D \Phi \cup \{\varphi\}$.

Φ und Ψ seien hierbei jeweils endliche Argumentemengen.

6.13 Theorem: $D = \langle\Sigma,A,q,*\rangle$ sei ein Standarddialogspiel mit der Eigenschaft, daß $0 \in A(\emptyset,\varphi)$ und $A(\emptyset\frac{1}{2},\varphi) = 0$ für alle φ mit $A(\emptyset,\varphi) \neq A(\emptyset\frac{1}{2},\varphi)$.
Dann gilt: $\vdash_D \Phi$ genau dann, wenn $\langle\Phi,0,1\rangle \in G_1$.

6.13 ist besonders in solchen Fällen wichtig, wo $D = D\langle M\rangle$ für eine Menge M inhaltlicher Standarddialogspiele und wo D zugleich korrekt und vollständig ist. Dann besagt 6.13, daß die Folgerungsbeziehung mit Hilfe von $\vdash_D$ charakterisiert werden kann. Ist außerdem R quasifinit für 1, dann liegt mit (G') eine Regel vor, bei der jeweils nur endlich viele Prämissen überprüft werden müssen; d.h. die Charakterisierung kann bei geeigneten Entscheidbarkeitsvoraussetzungen (vgl. 2.6) sogar durch einen Kalkül vorgenommen werden.
Für den Beweis von 6.13 werden drei Lemmata benötigt, für die jeweils vorausgesetzt wird, daß $D = \langle\Sigma,A,q,*\rangle$ ein Standarddialogspiel ist.

6.14 Lemma: Es seien φ ganz, $\varphi^* \bar{A}\ \Phi$, $\{\varphi\} \cup \Phi \subset x_0$ und $x \in G_{1,\alpha}$. Dann $\langle x_0 - \{\varphi\},x_1,s(x)\rangle \in G_{1,\alpha+2}$.

6.13 besagt, daß die für den Proponenten aus φ gewinnbare Information durch Φ allein ausreichend repräsentiert ist und daß bei einer Elimination von φ allenfalls eine Spieldauerverlängerung in Kauf genommen werden muß (dieser Fall tritt nur auf, wenn D formal ist). Darüber hinaus ergibt sich aus 6.14, daß der Proponent in einer Situation x mit $s(x) = 1$ unbeschadet solche ganzen Argumente $\varphi \in x_0$ mit einem einmaligen Angriff "abarbeiten" kann, für die $(x_0)_{\varphi*} = x_0$ gilt; falls A fundiert ist, läßt sich für den Proponenten hieraus das Strategiekonzept ableiten, ggf. ganze Argumente vorrangig anzugreifen.

6.15 Lemma: Es seien $x = \langle\Phi,\{\varphi\},0\rangle$ und $y = \langle\Phi_\varphi \cup \{\varphi^*\},0,1\rangle$.
(1) Wenn $x \in G_{1,\alpha}$, dann $y \in G_{1,\alpha+1}$.
(2) Wenn $y \in G_{1,\alpha}$ und wenn $A(\emptyset,\varphi) = A(\emptyset\frac{1}{2},\varphi)$, dann $x \in G_{1,\alpha+3}$.

6.16 Lemma: Es seien $x = \langle\Phi \cup \{\varphi\},0,1\rangle$, φ nicht ganz, $\varphi\ \bar{A}\ \Psi$, $\Psi = \{\psi_0,\ldots,\psi_{n-1}\}$ und $\alpha = \sum_{j<n} \alpha_j$.
Wenn $\langle\Phi_{\psi_j} \cup \{\psi_j{}^*\},0,1\rangle \in G_{1,\alpha_j}$ für jedes $j<n$, dann $x \in G_{1,\alpha+4}$.

Die Beweise für 6.13 - 6.16 sind ohne größere Schwierigkeiten durchführbar (vgl. auch Kindt 1972:40-42; die dort angegebenen Beweise sind mit gewissen Modifikationen zu übernehmen).
Mit Hilfe von 6.9, 6.13 und 6.15 können schließlich leicht zwei andere Formulierungen der Schnittregel bewiesen werden, die sich eng an die bei Logikkalkülen bekannte Formulierung anschließen.

6.17 <u>Theorem:</u> $D = \langle \Sigma, A, q, * \rangle$ sei ein Standarddialogspiel. Weiter seien φ, $\varphi^* \in \Sigma_\gamma$ oder (B1) sei für A erfüllt und $\gamma = (\alpha \cup \beta)+3$.

(1) Wenn $\langle \Phi \cup \{\varphi\}, 0, 1\rangle \in G_{1,\alpha}$ und $\langle \Phi \cup \{\varphi^*\}, 0, 1\rangle \in G_{1,\beta}$, dann $\langle \Phi, 0, 1\rangle \in G_{1,h(\alpha+\beta+3,\gamma)}$.

(2) Wenn $\vdash_D \Phi \cup \{\varphi\}$ und $\vdash_D \Phi \cup \{\varphi^*\}$, dann $\vdash_D \Phi$.

7. Dialogspiele für einige bekannte Logiksysteme

Für viele der in der Logik diskutierten Logiksysteme sind korrespondierende formale Dialogspiele definierbar. Damit ergibt sich einerseits die Möglichkeit einer dialogischen Begründung dieser Systeme und andererseits können die Ergebnisse der Dialogspieltheorie für diese Systeme verwendet werden. Im folgenden sollen unter diesem Aspekt die Systeme der klassischen, der intuitionistischen, der auf S4 aufbauenden modalen und einer dreiwertigen Prädikatenlogik diskutiert werden. Auf typenfreie, höherstufige und unendliche Systeme kann hier nicht eingegangen werden, obwohl eine Auseinandersetzung mit solchen Systemen ebenfalls von Interesse wäre.
Gemeinsamer Ausgangspunkt aller Übertragungen von Logiksprachen in Dialogsprachen ist, daß die in der Logiksprache gebildeten Sätze in Dialogen den Status von Behauptungen erhalten (die zugehörige Satzmenge wird wie schon in Abschnitt 4 mit Σ' bezeichnet). Neben den Behauptungssätzen wird die Menge $\Sigma'' = \{?\varphi : \varphi \in \Sigma'\}$ der Fragesätze eingeführt und $\Sigma := \Sigma' \cup \Sigma''$ gesetzt. Die Unterteilung in Σ' und Σ'' entspricht der Verwendung signierter Formeln bei Smullyan. Zugleich wird eine Funktion * definiert durch

$$\varphi^* = \begin{cases} ?\,\varphi & \text{falls } \varphi \in \Sigma' \\ \psi & \text{falls } \varphi = ?\psi \text{ und } \psi \in \Sigma \,. \end{cases}$$

Der Anschluß des in Abschnitt 6 eingeführten Regelsystems an die bekannten Gentzenkalküle (vgl. Kleene 1952) ergibt sich (abgesehen von der Ersetzung der dort verwendeten Formelsequenzen durch entsprechende Satzmengen) aufgrund folgender Übersetzungsvorschrift: Für Φ, $\Psi \in \Pi(\Sigma')$: $\vdash \Phi \rightarrow \Psi$ genau dann, wenn $\vdash \Phi \cup \{\psi^* : \psi \in \Psi\}$.
Neben der in Abschnitt 4 definierten Dialogspielmenge KL werden jetzt drei weitere Mengen INT, QS4 und QL3 eingeführt; dabei soll im folgenden zugleich vorausgesetzt werden, daß die jeweils zugrundeliegende Sprache Σ' abzählbar viele Individuenkonstanten und höchstens abzählbar viele Prädikatenkonstanten besitzt.
Die Spiele in INT unterscheiden sich von denen in KL nur dadurch, daß für die Reduktionsfunktionen im Fall $s(x) = 0$ und $\varphi \in \Sigma'$ abweichend $r(x,\varphi,\Phi) = \langle x_0 \cap \Sigma', 0, 0\rangle$ gilt. Für QS4 wird erstens gegenüber KL eine Erweiterung von Σ' durch Ein-

führung des *Modaloperators* $\Box$ ("notwendig") vorgenommen und als zugehörige Argumentationsregeln $A(x, \Box\varphi) = \{\{?\varphi\}\}$ und $A(x,?\Box\varphi) = \{\{\varphi\}\}$ festgelegt; zweitens wird für die Reduktionsfunktionen abweichend von den Bestimmungen für KL im Fall $s(x) = 0$ und $\varphi = \Box\psi$ festgesetzt, daß $r(x,\varphi,\Phi) = \langle x_0 \cap \Sigma^{\Box},0,0\rangle$, wobei $\Sigma^{\Box} = \{\Box\rho : \rho\in\Sigma'\}$.
Für QL3 wird schließlich gegenüber KL eine Erweiterung von Σ' durch Einführung der *starken Negation* - vorgenommen und die zugehörigen Argumentationsregeln folgendermaßen festgelegt:

$$A(x,\varphi) = \begin{cases} \{\{?\psi\}\} & \text{falls } \varphi = --\psi \text{ oder } = \neg\psi \\ \{\{?\varphi\} & \text{falls } \varphi = -(\psi\wedge\rho) \text{ oder } = -\forall v\psi \\ \{\{?-\psi\},\{?-\rho\}\} & \text{falls } \varphi = -(\psi\vee\rho) \\ \{\{?\psi\},\{?-\rho\}\} & \text{falls } \varphi = -(\psi\rightarrow\rho) \\ \{\{?-\psi\frac{a}{v}\}:a\in IK\} & \text{falls } \varphi = -\exists v\psi \\ \{\{-\psi\} & \text{falls } \varphi = ?-\psi \text{ und } \psi \text{ ist nicht} \\ & \text{von der Form } \rho\wedge\tau \text{ oder } \forall v\rho \\ \{\{-\psi\},\{-\rho\}\} & \text{falls } \varphi = ?-(\psi\wedge\rho) \\ \{\{-\psi\frac{a}{v}\}:a\in IK\} & \text{falls } \varphi = ?-\forall v\psi \end{cases}$$

Darüber hinaus gilt $A(x,-\varphi) = 0$ oder $= 1$ für atomare Sätze φ unter der Nebenbedingung, daß nicht zugleich $A(x,\varphi) = 0$ und $A(x, -\varphi) = 0$ (dies bedeutet, daß $-\varphi$ ebenfalls Primargument ist und daß $\varphi\ K_1\ -\varphi$ in D<QL3>). Schränkt man QL3 auf solche Spiele ein, bei denen $A(x,-\varphi) = 1 - A(x,\varphi)$ für atomare φ, dann stimmen die starke Negation - und die *schwache Negation* $\neg$ in ihrer Argumentationswirkung überein und sind somit füreinander ersetzbar; hieraus ergibt sich, daß KL und die Restriktion von QL3 identifiziert werden können.
Alle Spiele in KL, INT, QS4 und QL3 sowie die zugehörigen formalen Spiele sind Standarddialogspiele (wie leicht nachweisbar ist). Die Argumentationsbreite jeder dieser Spiele beträgt 3; mit Ausnahme der Spiele von INT und der beiden hierzu gehörigen formalen Spiele kann die Argumentationsbreite aber auch auf 2 erniedrigt werden, indem die Argumentationsregeln für $\varphi\rightarrow\psi$ und $?(\varphi\rightarrow\psi)$ durch die in ihrer Wirkung identischen Regeln für $\neg\varphi\vee\psi$ bzw. $?(\neg\varphi\vee\psi)$ ersetzt werden. Die Argumentationsrelationen aller Spiele sind fundiert und darüber hinaus gilt stets $\Sigma = \Sigma_\varphi$. Außerdem sind u.a. folgende, mit 2.3 und 6.6 beweisbare Inklusionsbeziehungen erfüllt:

$$G[INT]_1 = G\langle INT\rangle_1 \subset G[KL]_1 = G\langle KL\rangle_1,$$
$$G\langle KL\rangle_1 \subset G[QS4]_1 = G\langle QS4\rangle_1,$$
$$G\langle KL\rangle_1 \subset G[QL3]_1 = G\langle QL3\rangle_1.$$

Ein für die angegebenen formalen Spiele zentrales Resultat ist, daß ihre Spielregeln quasifinit für 1 sind; die bei Quasifinitheit erforderliche Relation R' entsteht dabei durch Einschränkungt der jeweiligen Spielregel R in genau folgenden Fällen:

Falls $s(x) = 0$, $\varphi \in x_1$, $y = \langle (x_0)_\varphi \cup \Psi, 0, 1\rangle$, $x \; R \; y$ und falls $\varphi = \forall v\psi$, $\Psi = \{?\ \psi\frac{a}{v}\}$ oder $\varphi = ?\ \exists v\psi$, $\Psi = \{\psi\frac{a}{v}\}$ oder $\varphi = ? - \forall v\psi$, $\Psi = \{- \psi\frac{a}{v}\}$ oder $\varphi = - \exists v\psi$, $\Psi = \{? - \psi\frac{a}{v}\}$, so gilt $x \; R' \; y$ genau dann, wenn a die gemäß einer vorgegebenen Aufzählung erste Individuenkonstante ist, die in keinem der Argumente in x vorkommt.

7.1 <u>Theorem:</u> D sei eines unter den zu KL, INT, QS4 und QL3 gehörigen formalen Dialogspielen. Dann ist die Spielregel R von D bzgl. R' quasifinit für 1.

7.1 gilt genereller für alle solche formalen Dialogspiele über prädikatenlogischen Sprachen, in denen nur endlich lange Sätze vorkommen (also z.B. keine unendlichen Konjunktionen zulässig sind). <u>Der Beweis von 7.1</u> basiert auf der Tatsache, daß in den kritischen Quantorenfällen jeder bei R zulässige Nachfolger aus dem bei R' vorgesehenen Nachfolger durch eine geeignete Ersetzung der gemäß R' bestimmten neuen Individuenkonstanten hervorgeht und daß allgemein die Relation der (mehrfachen) Konstantensubstitution in Situationen eine 1-Erhaltungsrelation in D ist (vgl. Kindt 1972:46).

Aus 7.1 ergibt sich mit 2.6 die Aufzählbarkeit der Menge der 1-Gewinnsituationen bei den betreffenden formalen Spielen. Als spezifischere Aussage erhält man wegen 6.13, daß der durch die Regeln (N), (V), (G') und (G*) gegebene Kalkül jeweils gerade die Menge der 1-Gewinnsituationen von der Form $\langle \Phi, 0, 1\rangle$ aufzählt. Darüber hinaus soll jetzt im einzelnen ausgeführt werden, in welchem Verhältnis die zu D<KL>, D<INT>, D<QS4> und D<QL3> gehörigen Kalküle zu bestimmten, bekannten Logikkalkülen stehen.

Jeder dieser vier Kalküle stimmt im wesentlichen mit einer entsprechenden Version bzw. Erweiterung des Kalküls G1 (vgl. Kleene 1952:442-43) überein, allerdings unter Auslassung der Schnittregel, die abgeleitet werden kann. Aufgrund der Verwendung von Individuenkonstanten in Σ sind die Kalküle im Gegensatz zu G1 keine Formel- sondern Satzkalküle. Von den Strukturregeln in G1 ist wegen des Übergangs zu Satzmengen nur noch die Verdünnungsregel erforderlich. Außerdem ist die durch die obige Definition von R' eingeführte (kontextsensitive) Nebenbedingung für die kritischen Quantorenfälle strikter als die in G1 verwendete und auch sonst übliche Bedingung, daß a eine in der Konklusion nicht vorkommende Individuenkonstante sein soll. Diese striktere Fassung bedeutet jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit, da stets eine Konstantensubstitutionsregel als abgeleitete Regel eingeführt werden darf.

Unter diesen Randbedingungen gilt nun erstens, daß der zu D<KL> gehörige Kalkül der klassischen Version von G1 entspricht. Zweitens entspricht auch der zu D<INT> gehörige

Kalkül in etwa der intuitionistischer Version von G1. Der Hauptunterschied zu G1 besteht in der Verwendung einer schwächeren Verdünnungsregel (auch die Menge der Fragesätze darf vergrößert werden) und in der daher notwendigen extensiven Reduktion von Fragesätzen bei allen Regeln, die sich auf einen Fragesatz oder eine Negation oder eine Implikation beziehen; in dieser Hinsicht stimmt der Kalkül z.B. mit dem in Fitting 1969:79 angegebenen Tableauxkalkül überein. Drittens ist der zu D<QS4> gehörige Kalkül eine Erweiterung des zu D<KL> gehörigen Kalküls und zwar kommen folgende zwei Regeln neu hinzu:

(G?$\Box$) Wenn $\vdash \Phi^{\Box} \cup \{?\psi\}$, dann $\vdash \Phi \cup \{?\Box\psi\}$.

(G*$\Box$) Wenn $\vdash \Phi \cup \{\psi\}$ dann $\vdash \Phi \cup \{\Box\psi\}$.

Zusammen mit der Verdünnungsregel sind diese beiden Regeln äquivalent zu den in Zeman 1973:284-85 angegebenen $\Box$-Regeln für S4. Viertens schließlich stimmt der zu D<QL3> gehörige Kalkül, der wieder eine Erweiterung des zu D<KL> gehörigen Kalküls ist, im wesentlichen mit dem für das dreiwertige System Q3 auszusondernden Anteil des in Blau 1978:240 angegebenen Kalküls überein; abgesehen davon, daß dort auf die Angabe von Regeln für Alternation, Implikation und Existenzquantor verzichtet wird, sind für eine Übersetzung folgende Punkte zu berücksichtigen: der dortige Kalkül ist vom Typ G3 (Kleene 1952:480) und enthält daher keine Verdünnungsregel, die Regeln für negierte Sätze sind durch Substitution des Fragezeichens für das erste vorkommende Negationszeichen zu transformieren, die Neutralisierungsteilregel $\vdash \{\varphi, -\varphi\}$ kann auf atomare Sätze φ eingeschränkt werden.
Insgesamt ergibt sich folgendes Bild über die eingeführten formalen Dialogspiele.

7.2 Theorem: Die Ableitungsbeziehungen der klassischen, der intuitionistischen, der auf S4 aufbauenden modalen und der mit Q3 bezeichneten dreiwertigen Prädikatenlogik erster Stufe sind gemäß 6.13 mit Hilfe der 1-Gewinnsituationen von D<KL> bzw. D<INT> bzw. D<QS4> bzw. D<QL3> charakterisierbar.

Durch Anwendung von 6.12 erhält man außerdem zwei wichtige Korrektheits- und Vollständigkeitsresultate.

7.3 Theorem: D<KL> und D<QL3> sind korrekt und vollständig hinsichtlich KL bzw. QL3.

Aus 7.2 und 7.3 ergibt sich - unter den einschränkend geltend gemachten Endlichkeitsvoraussetzungen - indirekt die Äquivalenz des üblichen modelltheoretischen und des dialogspieltheoretischen Semantikkonzepts für Q3 und die klassische Prädikatenlogik.

Abschließend sollen zwei Bemerkungen zur Möglichkeit einer dialogspieltheoretischen Behandlung von Logiksystemen, gemacht werden, die im hier entwickelten Rahmen nicht erfaßt werden können. Dies betrifft zum einen prädikatenlogische Systeme z.B. mit Identitätsaxiomen oder allgemeiner mit Axiomen, die nicht vollständig im Rahmen von Argumentations- und Kohärenzregeln reformulierbar sind. Für solche Fälle ist das Dialogspielkonzept ohne Schwierigkeiten erweiterbar durch die Einführung von Regeln, die es dem Proponenten in jeder Situation bzgl. eines Axioms φ gestatten, den Opponenten durch die Rückfrage $?\varphi$ zu zwingen, die Verantwortung für φ zu übernehmen. Zum anderen ist in Abschnitt 3 schon darauf hingewiesen worden, daß die Behandlung etwa des modallogischen Systems T eine Modifikation von Axiom (D2) erfordern würde. Als Alternative zu einer solchen Modifikation gibt es aber auch die Möglichkeit, modallogische Systeme (und auch die intuitionistische Logik) im Rahmen klassisch logischer Systeme zu explizieren; damit können zugleich die Schwierigkeiten, die mit den komplizierten Impermanenzeigenschaften und mit der Inadäquatheit der inhaltlichen Spiele als semantisches Korrelat verbunden sind, behoben werden. Im Gegensatz zu der Vorgehensweise in Fitting 1972, mit präfigierten Formeln zu arbeiten, ziehe ich die Verwendung einer prädikatenlogischen Sprache vor, in der auch Situationsindividuenkonstanten vorkommen und in der über die Gültigkeit von Aussagen in Situationen gesprochen werden kann (einen entsprechenden Vorschlag habe ich, allerdings in anderem Zusammenhang in Kindt 1974 gemacht und ich plane, hierzu in Kürze eine ausführlichere Darstellung zu geben).

8. Dialogische Behandlung des Wahrheitsprädikats

In Parallele zu der Vorgehensweise in Kindt 1976a,b soll jetzt die Frage behandelt werden, ob oder ggf. unter welcher Systemmodifikation die Dialogspielmenge KL und die ihr zugrundeliegende Sprache um ein Wahrheitsprädikat erweitert werden kann, das weder zu Inkonsistenz noch zu anderen intuitiv inadäquaten Resultaten führt.
Die Dialogspielmenge WKL sei als Erweiterung von KL so definiert, daß zu der Menge der Prädikatenkonstanteneine neue einstellige Konstante W hinzugefügt wird und daß in den Spielen von WKL für die Argumentationsregeln bei Sätzen der Form Wa oder ?Wa folgende zwei Bedingungen erfüllt sind: $\bar{A}(?Wa) = \{\{Wa\}\}$, $\bar{A}(Wa) = 0$ oder $= 1$ oder es gibt $\phi \in \Sigma'$ mit $\bar{A}(Wa) = \{\{?\phi\}\}$. Die zweite Bedingung ist intuitiv so zu interpretieren, daß Wa Primargument ist, falls auf triviale Weise über das Zutreffen des Wahrheitsprädikats auf das durch a benannte Objekt entschieden werden kann (z.B. wenn dieses Objekt gar kein Satz ist), und daß Wa anderenfalls durch Infragestellung des mit a bezeichneten Satzes ϕ angreifbar ist.
Im Sinne dieser Interpretation darf die Menge WKL wohl als "natürliche" Erweiterung von KL zur Einführung des Wahrheits-

prädikats bezeichnet werden. Zugleich ist festzustellen, daß es bei den Spielen von WKL auch keine Schwierigkeiten mit der Antinomie des Lügners gibt: wenn in einem Spiel D für eine Individuenkonstante a $\bar{A}(Wa) = \{\{?\neg Wa\}\}$ gilt, dann ist weder $D \models Wa$ noch $D \models \neg Wa$ erfüllt, weil Wa in D unfundiert ist.
Im Vergleich zu der sehr aufwendigen, weil notwendigerweise mit einer expliziten Aufkonstruktion der Interpretation von W verbundenen Vorgehensweise in Kindt 1976a,b ist die hier dargestellte Einführung des Wahrheitsprädikats viel einfacher, und im übrigen der Spracherwerbspraxis bei natürlichen Sprachen ähnlicher; erforderlich sind nur die syntaktische Erweiterung des Konstantenrepertoires und eine zugehörige Ergänzung der Argumentationsregeln (bei einer geeigneten Erweiterung des modelltheoretischen Interpretationskonzepts ist dieser Vorteil der Dialogspielsemantik jedoch wieder einholbar; vgl. Kindt 1979). Darüber hinaus wird hier auf natürliche Weise deutlich, daß mit der Einführung des Wahrheitsprädikats semantikintern notwendigerweise der Rahmen der klassischen Logik gesprengt wird, weil damit zugleich das Vorkommen unfundierter Sätze geduldet werden muß. Und schließlich kann auch die für den klassischen Logiker so schwer einsehbare Problematik der Verwendbarkeitsgrenzen für die schwache Negation besonders gut demonstriert werden, wie im folgenden verdeutlicht werden soll.
Bei der Erweiterung von KL zu WKL ist ein Problem des Wahrheitsprädikats W noch nicht sichtbar geworden, nämlich das Problem, daß nicht alle logischen Junktoren zu W "passen". Dieses Problem wird diskutierbar, wenn man D<WKL> betrachtet und konstatieren muß, daß D<WKL> nicht korrekt ist, weil z.B. $Wa \vee \neg Wa$ zwar in D<WKL>, nicht aber in einem solchen Spiel D aus WKL gilt, wo Wa den Satz vom Lügner ($\bar{A}(Wa) = \{\{?\neg Wa\}\}$) oder vom "Wahrsager" ($\bar{A}(Wa) = \{\{?Wa\}\}$) repräsentiert. Schränkt man WKL aber ausgehend von einer vorgegebenen Individuenkonstanten a auf solche Spiele ein, die $\bar{A}(Wa) = \{\{?\neg Wa\}\}$ erfüllen, dann ist das zugehörige stark formale Spiel sogar inkonsistent, weil in ihm sowohl Wa als auch $\neg Wa$ gelten. Diese Inkorrektheits- und Inkonsistenzresultate basieren darauf, daß wegen der Argumentationsregel für die Negation $\neg$ die Bedingung (B1) (vgl. Abschnitt 6) nicht erfüllt ist. Dieselbe Schwierigkeit besteht auch bei der Implikation. Hieraus ist die Konsequenz zu ziehen, daß die bisherige dialogische Interpretation von Negation und Implikation bei gleichzeitiger Verwendung von W nicht mehr sinnvoll ist, obwohl das bei alleiniger Betrachtung der Spiele von WKL zunächst nicht einsichtig wird. Die genaueren diesbezüglichen Zusammenhänge sollen jetzt geklärt werden. Nach dem in Abschnitt 7 über das Verhältnis von KL und QL3 Gesagten kann in KL die Negation $\neg$ auch durch die Negation $-$ ersetzt werden und zwar in dem Falle, daß für Primargumente φ stets $\bar{A}(-\varphi) = 1-\bar{A}(\varphi)$ gefordert wird; außerdem kann dann die Implikation durch einen Junktor $\twoheadrightarrow$ ersetzt werden, dessen Argumentationsregeln durch $\bar{A}(\varphi \twoheadrightarrow \psi) = \{?(\varphi \twoheadrightarrow \psi)\}$ und $\bar{A}(?(\varphi \twoheadrightarrow \psi)) = \bar{A}(?(-\varphi \vee \psi))$ definierbar sind. Wenn man die so entstehende Dialogspielmenge durch Einführung

des Wahrheitsprädikats erweitert und zu diesem Zweck neben den oben angegebenen die Argumentationsbedingungen $\bar{A}(-Wa) = \{\{?-\varphi\}\}$ im Falle $\bar{A}(Wa) = \{\{?\varphi\}\}$ bzw. $\bar{A}(-Wa) = 0$ oder $= 1$ sonst und $\bar{A}(?-Wa) = \{\{-Wa\}\}$ zugrundelegt, dann treten keine Inkorrektheits- oder Inkonsistenzprobleme mehr auf, weil die Bedingung (B1) für das zur Erweiterung gehörige stark formale Spiel erfüllt ist. Dieses Spiel ist allerdings nicht vollständig; in ihm gilt nämlich kein Satz der Form $\varphi v - \varphi$ für Primargumente φ, obwohl jeder dieser Sätze allgemeingültig ist. Genau gesehen kann dieses Unvollständigkeitsergebnis aber dadurch erklärt werden, daß die zugrundeliegende Menge inhaltlicher Dialogspiele noch nicht allgemein genug gewählt ist, um zu adäquaten Konzepten von logischer Gültigkeit und Folgerung zu führen: mit dem Resultat, daß $\varphi v - \varphi$ für Primargumente φ, nicht aber $Wa v - Wa$ allgemeingültig ist, wird das aussagenlogische Substitutionsprinzip verletzt.
Aus dem bislang Gesagten ergibt sich erstens, daß nicht KL sondern allenfalls die Menge der um die Verwendung von $\neg$ und $\rightarrow$ gekürzten Dialogspiele aus QL3 einen geeigneten Ausgangspunkt für die Einführung des Wahrheitsprädikats bilden. Diese Menge soll mit L3 bezeichnet werden und die daraus mit Hilfe der angegebenen Argumentationsbedingungen für W zu definierende Erweiterung mit WL3. Zweitens kann festgestellt werden, daß der Fortfall von $\neg$ zunächst nicht die Möglichkeit einer zusätzlichen Einführung der schwachen Negation in WL3 ausschließt, weil die Regeln von $\neg$ für eine solche Einführung nicht mehr geeignet sind (in einem Spiel von WL3, in dem Wa den Satz vom Wahrsager repräsentiert, würde dennoch nicht $\neg$Wa gelten). Drittens aber ist es in WL3 prinzipiell unmöglich, eine geeignete Argumentationsregel für die schwache Negation zu finden, u.a. weil für bestimmte Sätze φ die Feststellung, daß weder φ noch $-\varphi$ gilt, erst nach Durchlaufen der gesamten 1-Gewinnsituationenhierarchie getroffen werden kann.
Über WL3 und D<WL3> sind nun eine Reihe von Bemerkungen zu machen. Zunächst ist darauf hinzuweisen, daß die Einführung von W einen Typ von Spracherweiterung darstellt, der in den Standardlehrbüchern der Logik nicht behandelt wird. Das Neue an diesem Typ ist, daß die Interpretation der hinzugefügten Prädikatenkonstante nicht nur von der Gültigkeit von Sätzen der alten sondern auch der erweiterten Sprache abhängig ist (vgl. hierzu auch Kindt 1976a,b). Bei den Spielen von WL3 äußert sich dies darin, daß für $\bar{A}(Wa)$ keine Beschränkungen bzgl. L3 formuliert sind. Speziell ist an dieser Stelle festzuhalten, daß Wa zwar ein atomarer Satz, i.a. aber kein Primargument in den Spielen von WL3 ist. Um den Übergang von WL3 zu D<WL3> beschreiben zu können, mußte übrigens die vorliegende im Gegensatz zu den bisherigen Darstellungen die Möglichkeit vorsehen, daß die einem formalen Dialogspiel zugeordneten inhaltlichen Spiele sich auch in den Argumentationen um Nichtprimargumente unterscheiden. Mit Hilfe der in Abschnitt 6 angegebenen Theoreme kann man sich weiterhin davon überzeugen, daß WL3 und D<WL3>

die üblicherweise erwünschten Eigenschaften besitzen; insbesondere ist D<WL3> korrekt und vollständig. Trotzdem ist die durch D<WL3> gegebene Logik nicht sonderlich attraktiv. Einerseits enthält sie nämlich überhaupt keine Regeln über den Gebrauch des Wahrheitsprädikats und Sätze der Form Wa haben in D<WL3> faktisch dieselbe Funktion wie Primargumente. Andererseits ist auch in dieser Logik noch das Substitutionsprinzip verletzt, weil zwar für Primargumente φ stets $\vdash\{\varphi\wedge-\varphi,\psi\}$ erfüllt ist, nicht aber $\vdash\{Wa\wedge-Wa,\psi\}$.
Dem zuerst genannten Nachteil kann man dadurch begegnen, daß man zu einer Sprache mit Zitatfunktion übergeht. Ein solcher Übergang ist ohne Schwierigkeiten durchführbar und soll hier nur kurz skizziert werden (vgl. dazu Kindt 1976a).
Die durch Einführung der Zitatfunktion aus der Ausgangssprache Σ entstehende Erweiterung $Z(\Sigma)$ ist dadurch charakterisiert, daß für jeden Behauptungsatz $\varphi\in Z(\Sigma')$ das Zitat 'φ' als Individuenkonstante zählt und daß 'φ' stets in natürlicher Weise interpretiert wird. Letzteres besagt für die Argumentationsregeln von W, daß in den inhaltlichen Spielen stets $\bar{A}(W'\varphi') = \{\{?\varphi\}\}$ und $\bar{A}(-W'\varphi') = \{\{?-\varphi\}\}$ gelten muß. Dieselben Bedingungen sind daher im stark formalen Spiel erfüllt, so daß dann auch im Ableitungskalkül entsprechende Regeln für W vorkommen. Speziell können $\vdash\{W'\varphi',?\varphi\}$, $\vdash\{\varphi,?W'\varphi'\}$, $\vdash\{-W'\varphi',?-\varphi\}$ und $\vdash\{-\varphi,?-W'\varphi\}$ als abgeleitete Regeln zusätzlich in den Kalkül aufgenommen werden. Ansonsten erfordert die Hinzunahme der Zitatkonstanten als weitere Änderung des Ableitungskalküls nur noch die Präzisierung, daß die kritische Konstantenbedingung in den Regeln der Quantorenfälle auf Nichtzitatkonstanten zu spezifizieren ist.
Das Problem der Verletzung des Substitutionsprinzips ist allerdings im Rahmen des hier entwickelten allgemeinen Dialogspielkonzepts nicht mehr befriedigend lösbar. Für eine Lösung wäre im stark formalen Spiel nämlich die Einführung einer dritten, zur 2. Kohärenzregel parallelen Regel der folgenden Art notwendig:
Wenn $s(x) = 1$, $\varphi\in x_o$ und $\psi = -\varphi$ oder $\varphi = -\psi$, dann $A(x,\psi) = 1$.

Die Einführung dieser (fakultativen) Regel würde aber zusätzlich weitreichende strukturelle Vorgaben und entsprechende Axiome für die Argumentationsrelation erfordern, um wünschenswerte Eigenschaften wie z.B. die Korrektheit zu garantieren. Speziell müßte die 3. Kohärenzregel natürlich mit den Primargumentbestimmungen in den inhaltlichen Spielen kompatibel sein und für Primargumente φ stets $\bar{A}(\varphi)\cup\bar{A}(-\varphi) = 1$ gelten (gerade dies wurde oben für WL3 nicht vorausgesetzt, um die Vollständigkeit von D<WL3> zu erreichen). Insgesamt schien es für die vorliegende Darstellung jedoch nicht gerechtfertigt zu sein, den für eine derartige theoretische Ausdifferenzierung notwendigen Aufwand zu treiben. Gleichwohl kann extrapoliert werden, daß die theoretischen Aussagen von Abschnitt 6 im wesentlichen auch für solche stark formalen Dialogspiele erfüllt sind, bei denen die 3. Kohärenzregel eingeführt wird. Genauer gesagt muß der Geltungsanspruch dieser Aussagen aber eingeschränkt und z.B. kann die Korrektheits- und Vollständigkeitseigenschaft des formalen Spiels nur für eine *restringierte* Folgerungsrelation nachgewiesen werden; im Fall der hier diskutierten, konkreten Sprachen wird eine Restriktion der Folgerungsrelation auf Behauptungssätze notwendig. Eine ausführlichere Erläuterung dieses Sachverhalts wird in Abschnitt 9 gegeben werden. Im Vorgriff darauf soll jetzt bereits ein (in üblicher Weise notierter) Kalkül für prädikatenlogische Sprachen mit Wahrheitsprädikat und Zitatfunktion (formuliert mit $-$, $\wedge$, $\forall$, W und ' ') angegeben werden, der alle in der vorangegangenen Diskussion formulierten Anforderungen berücksichtigt. Dieser Kalkül besteht aus einem zu L3 gehörigen Kalkül (wie nach den bisherigen Ausführungen leicht verzifizierbar ist) und zusätzlichen vier, die Verwendung des Wahrheitsprädikats betreffenden Regeln. Im Sinne der genannten Restriktion werden in der Formulierung des Kalküls mit φ,ψ,ρ stets Sätze aus Σ' und mit Φ,Ψ endliche Teilmengen von Σ' angedeutet; außerdem werden genau die Individuenkonstanten *frei* genannt, die keine Zitate sind.

$$\frac{}{\varphi,-\varphi,?\psi} \qquad \frac{}{\varphi,?\varphi}$$

$$\frac{\Phi,?\psi}{\Psi,?\psi}\ , \quad \text{falls } \Phi\subset\Psi$$

$$\frac{\Phi,\varphi,?\psi}{\Phi,--\varphi,?\psi} \qquad \frac{\Phi,?\varphi}{\Phi,?--\varphi}$$

$$\frac{\Phi,\varphi,?\psi \text{ oder } \Phi,\rho,?\psi}{\Phi,\varphi\wedge\rho,?\psi} \qquad \frac{\Phi,?\varphi \text{ und } \Phi,?\rho}{\Phi,?(\varphi\wedge\rho)}$$

$$\frac{\Phi,-\varphi,?\psi \text{ und } \Phi,-\rho,?\psi}{\Phi,-(\varphi\wedge\rho),?\psi} \qquad \frac{\Phi,?-\varphi \text{ oder } \Phi,?-\rho}{\Phi,?-(\varphi\wedge\rho)}$$

$$\frac{\Phi,\varphi\frac{a}{v},?\psi}{\Phi,\forall v\varphi,?\psi} \qquad \frac{\Phi,?\varphi\frac{a}{v}}{\Phi,?\forall v\varphi}\ , \text{ falls a frei ist und nicht in } \Phi,?\forall v\varphi \text{ vorkommt.}$$

$$\frac{\Phi,-\varphi\frac{a}{v},?\psi}{\Phi,-\forall v\varphi,?\psi} \text{ falls a frei ist und nicht in } \Phi,-\forall v\varphi,?\psi \text{ vorkommt.} \qquad \frac{\Phi,?-\varphi\frac{a}{v}}{\Phi,?-\forall v\varphi}$$

$$\frac{\Phi,\varphi,?\psi}{\Phi,W'\varphi',?\psi} \qquad \frac{\Phi,?\varphi}{\Phi,?W'\varphi'}$$

$$\frac{\Phi,-\varphi,?\psi}{\Phi,-W'\varphi',?\psi} \qquad \frac{\Phi,?-\varphi}{\Phi,?-W'\varphi'}$$

9. Die Logik von Sprachen mit unfundierten Sätzen

Die im vorigen Abschnitt behandelte Problematik von prädikatenlogischen Sprachen mit Wahrheitsprädikat ist nur ein interessanter Spezialfall der generelleren Problematik von Sprachen mit unfundierten Sätzen, die jetzt diskutiert werden soll. Gleichwohl wurden an diesem Spezialfall bereits einige Charakteristika solcher Sprachen deutlich. Insbesondere drei Punkte sind hervorzuheben. Erstens ist nach Einführung des Wahrheitsprädikats die schwache Negation nicht mehr verfügbar (dies gilt jedenfalls, wenn das Wahrheitsprädikat auf die gesamte erweiterte Sprache anwendbar sein soll). Zweitens sind die mit dem Wahrheitsprädikat gebildeten atomaren Sätze i.a. keine Primargumente mehr; mit Hilfe der in Kindt 1976a,b angegebenen Verfahren wäre die Interpretation des Wahrheitsprädikats zwar auch explizit aufkonstruierbar, der dafür erforderliche Rekursionsprozeß ist aber einerseits sehr kompliziert und nimmt andererseits schon die ohnehin rekursiv durchzuführende Definition der Gültigkeitsrelation vorweg, so daß die Einführung eines erweiterten Sprachkonzepts mit verallgemeinerten Interpretationsrahmen für Prädikatenkonstanten bzw. für atomare Sätze angemessen ist. Und drittens wird für die Aufrechterhaltung der Quantorenregeln die Auszeichnung von *freien* Individuenkonstanten notwendig; dabei muß einerseits gewährleistet sein, daß genügend viele freie Individuenkonstanten vorhanden sind, und andererseits darf nur für nicht freie Individuenkonstanten zugelassen werden, daß sie bei standardisierten Argumentationen um atomare Sätze hinsichtlich ihres Vorkommens in Argument und Argumentation nicht übereinstimmen (eine solche Übereinstimmung ist z.B. gerade für 'φ' bei W'φ' nicht gegeben).
Die drei eben dargestellten Punkte legen es nahe, solche Mengen M von inhaltlichen Dialogspielen zu untersuchen, deren Spiele sich im Bereich der nichtatomaren Sätze wie die Spiele von L3 (vgl. Abschnitt 8) verhalten und für die darüber hinaus die Erfüllung folgender zwei Voraussetzungen gefordert wird. Zum einen sei als dritte Argumentationsmöglichkeit für atomare Sätze φ neben 0 und 1 auch $A(x,\varphi) = \{\{?\psi\}\}$ für beliebiges $\psi \in \Sigma'$ vorgesehen, wobei als Nebenbedingung für diesen Fall $A(x,-\varphi) = \{\{?-\psi\}\}$ gefordert wird. Zum anderen sei in der Menge der Individuenkonstanten eine abzählbare Menge freier Konstanten ausgezeichnet und daran werde die Bedingung geknüpft:

(FK) Falls φ atomar und a frei ist und $\bar{A}(\varphi) = \bar{A}'(\varphi)$ für alle $D,D' \in M$, so kommt a in φ genau dann vor, wenn a in $\bar{A}(\varphi)$ vorkommt für alle $D \in M$.

Die größtmögliche derartige Menge inhaltlicher Dialogspiele soll mit UL bezeichnet werden und im folgenden geht es nun um die Bestimmung relevanter Eigenschaften von UL und speziellen Teilmengen von UL. Für UL selbst kann zunächst festgestellt werden, daß die gesonderte Auszeichnung freier Individuenkonstanten funktionslos ist, weil die Bedingung (FK) wegen fehlender

Argumentationskonstanz trivial erfüllt wird. Für die Beantwortung der zentralen Frage nach der synktatischen Charakterisierbarkeit der Folgerungsrelation von UL ergibt sich desweiteren eine, in Abschnitt 8 schon angesprochene Schwierigkeit, die zu einer Restriktion des Charakterisierbarkeitsanspruches zwingt. Diese Schwierigkeit basiert auf der Tatsache, daß es auch für ein UL zuzuordnendes formales Dialogspiel wünschenswert ist, die in Abschnitt 8 formulierte 3. Kohärenzregel einzuführen; ein derartiges formales Spiel ist aber notwendigerweise inkorrekt z.B. im Hinblick auf formale 1-Gewinnsituationen des Typs $\langle O,\{?(\varphi\wedge-\varphi)\},O\rangle$ für atomares φ, weil zu UL Spiele D gehören, bei denen $A(\varphi) = \{\{?\varphi\}\}$ und somit nicht $D \models ?(\varphi\wedge-\varphi)$ erfüllt ist. Diese Inkorrektheit ist in Analogie zu den Erläuterungen in Abschnitt 6 damit zu erklären, daß die Argumentationsrelation des formalen Spiels folgende, bei Voraussetzung der 3. Kohärenzregel naheliegende und zu (B1) parallele Bedingung verletzt:

(B2) Wenn m und n ungerade sind, dann gibt es kein $\psi\in\Sigma'$ mit $\psi\in A^n(\varphi)$ und $-\psi\in A^m(\varphi)$.

Mit (B2) wird verhindert, daß der Opponent in einem formalen Dialog um φ u.U. gezwungen wird, Gewähr für zwei einander widersprechende Sätze ψ und $-\psi$ zu übernehmen, ohne selbst vorher irgendwelche ψ und $-\psi$ implizierende Argumente vorgebracht zu haben. Tatsächlich ist (B2) bei der Argumentationsrelation des formalen Spiels aber für Sätze aus Σ' erfüllt, was dann die Korrektheit bzgl. der auf Σ' restringierten Folgerungsrelation von UL garantiert. Die Gültigkeit von (B1) für beliebige Sätze und von (B2) für Sätze aus Σ' ist im übrigen gemeinsam zurückführbar auf die Gültigkeit folgender Bedingung für beliebige Sätze und beliebige natürliche Zahlen.

(B3) Wenn $\varphi\in\Sigma'$ bzw. Σ'', dann $A^{2n}(\varphi)\subset\Sigma'$ bzw. Σ'' und $A^{2n+1}(\varphi)\subset\Sigma''$ bzw. Σ'.

Um nun zu der gewünschten Aussage über die synktatische Charakterisierbarkeit der restringierten Folgerungsrelation von UL zu kommen, soll hier ein direkter, nicht über die allgemeine Dialogspieltheorie führender Weg gewählt werden, der den Vorteil hat, daß bei ihm zugleich das Verhältnis zwischen UL und L3 geklärt wird. Jedem Spiel $D \in$ UL kann ein korrespondierendes Spiel $D^* \in$ L3 vermöge der Vorschrift zugeordnet werden, daß für atomare Sätze φ stets $\bar{A}^*(\varphi)=0$ im Falle $D \models \varphi$, $\bar{A}^*(-\varphi) = 0$ im Falle $D \models -\varphi$ und $\bar{A}^*(\varphi) = \bar{A}^*(-\varphi) = 1$ sonst; die auf Σ' restringierten Gültigkeitsrelationen von D und D^* stimmen dann überein. Hieraus und aus L3 $\subset$ UL ergibt sich die Identität der restringierten Folgerungsrelationen von L3 und UL. Damit erhält man bereits das wichtige Resultat, daß jeder Kalkül, der die restringierte Folgerungsrelation von L3 charakterisiert, dies auch für UL leistet; speziell kann hierzu also z.B. der in Abschnitt 8 angegebene, um die Regeln für das Wahrheitsprädikat gekürzte Teilkalkül verwendet werden. Angesichts dieses Resultates wird man geneigt sein anzunehmen, daß abgesehen von der in UL gewonnenen Möglichkeit einerangemessenen semantischen Behandlung von prädikatenlogischen Sprachen mit unfundierten Sätzen die relevanten logischen Eigenschaften dieser Sprachen bereits im Rahmen der zu L3 gehörigen, dreiwertigen Logik erfaßt sind. Daß dies nicht ganz richtig ist, wird allerdings erst deutlich werden, wenn man unter den Teilmengen von UL auch solche untersucht, bei denen bestimmte Sätze global unfundiert sind.

In Verallgemeinerung der Betrachtungen in Abschnitt 8 soll nun der Fall von Dialogspielmengen $M \subset$ UL behandelt werden, bei denen für bestimmte atomare Sätze φ standardisierte Argumentationsbeziehungen des Typs $\bar{A}(\varphi) = \{\{?\psi\}\}$ gelten. Eine n-stellige Prädikatenkonstante P heiße in M *partiell auflösbar*, wenn es ein n-Tupel $\langle a_o, \ldots, a_{n-1}\rangle$ vonIndividuenkonstanten und ein $\varphi \in \Sigma'$ mit $\bar{A}(Pa_o \ldots a_{n-1}) = \{\{?\varphi\}\}$ für alle $D \in M$ gibt. Wenn P partiell auflösbar ist, dann wird die Funktion $f_P := \{\langle Pa_o \ldots a_{n-1}, \varphi\rangle : \bar{A}(Pa_o \ldots a_{n-1}) = \{\{?\varphi\}\}$ für alle $D \in M\}$ *Auflösungsfunktion* von P genannt. Im folgenden sei $M \subset$ UL eine Menge mit der Eigenschaft, daß (FK) erfüllt ist und die n-stellige Prädikatenkonstante P die einzige in M partiell auflösbare Konstante ist. Außerdem sei $M^* = \{D^* \in L3: D \in M\}$. Zunächst ist klar, daß sowohl in M als auch in M* für alle $\langle a_o, \ldots, a_{n-1}\rangle$ aus dem Definitionsbereich von f_P folgende Folgerungsbeziehungen gelten:

$$Pa_o \ldots a_{n-1} \;\dashv\vDash\; f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})$$

$$-Pa_o \ldots a_{n-1} \;\dashv\vDash\; -f_P(Pa_o \ldots a_{n-1}).$$

Es liegt nun nahe zu fragen, ob M* mit derjenigen Menge $M' \subset$ L3 übereinstimmt, die gerade durch die angegebenen Folgerungsbeziehungen definiert ist. Sofern diese Frage zu bejahen ist, können nämlich - wie leicht nachzuweisen ist - die restringierten Folgerungsrelationen von M* und damit auch von M durch den für L3 oben angegebenen Kalkül und folgende vier zusätzliche Aufbauregeln charakterisiert werden.

$$\frac{\Phi,\ f_P(Pa_o \ldots a_{n-1}), ?\psi}{\Phi,\ Pa_o \ldots a_n, ?\psi} \qquad \frac{\Phi, ?\ f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})}{\Phi, ?\ Pa_o \ldots a_{n-1}}$$

$$\frac{\Phi,\ -f_P(Pa_o \ldots a_{n-1}), ?\psi}{\Phi,\ -Pa_o \ldots a_{n-1}, ?\psi} \qquad \frac{\Phi, ?\ -f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})}{\Phi, ?\ -Pa_o \ldots a_{n-1}}$$

Hiermit ist allerdings nur dann insgesamt ein Kalkül gegeben, wenn f_P berechenbar ist. Alternativ zu den hier eben aufgeführten Regeln können auch die folgenden, einfacheren Regeln verwendet werden, sofern der Kalkül für L3 um die (ableitbare) Schnittregel erweitert wird.

$$\frac{?f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})}{?Pa_o \ldots a_{n-1}} \qquad \frac{?Pa_o \ldots a_{n-1}}{?f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})}$$

$$\frac{?\ -f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})}{?\ -Pa_o \ldots a_{n-1}} \qquad \frac{?\ -Pa_o \ldots a_{n-1}}{?\ -f_P(Pa_o \ldots a_{n-1})}$$

Die Frage nach der Übereinstimmung von M* und M' soll hier für drei verschiedene Fälle von möglichen Zusatzannahmen für f_P diskutiert werden.
Im ersten Fall wird für f_P angenommen, daß es eine Formel $\varphi(v_0,\dots,v_{n-1})$ derart gibt, daß P nicht in φ vorkommt und daß $f_P(Pa_0\dots a_{n-1}) = \varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$ für alle Tupel $\langle a_0,\dots,a_{n-1}\rangle$ (d.h. insbesondere, daß f_P für alle Sätze der Form $Pa_0\dots a_{n-1}$ definiert ist). In diesem Fall stimmen M* und M' deshalb überein, weil die Gültigkeitsrelation von jedem $D \in M$ bzw. von jedem $D' \in M'$ bereits eindeutig durch die Gültigkeitsrelation des jeweils zugehörigen, um die Verwendung von Sätzen mit Vorkommen von P restringierten Dialogspiels festgelegt ist; und zwar basiert diese Festlegung auf der Tatsache, daß alle in einer Gültigkeitsbeziehung vorkommenden Formeln des Typs $Pv_0\dots v_{n-1}$ oder $Pa_0\dots a_{n-1}$ durch entsprechende Formeln $\varphi(v_0,\dots,v_{n-1}$ bzw. $\varphi(a_0,\dots,a_{n-1})$ äquivalent ersetzbar sind und daß nach einer solchen Ersetzung über die Gültigkeitsbeziehung bereits unmittelbar im jeweiligen restringierten Dialogspiel entschieden werden kann. Genau besehen handelt es sich hier um den in der Logik wohlbekannten Fall einer durch eine Formel *definierbaren* Prädikatenkonstante, wobei allerdings hier die Definierbarkeit z.B. im Unterschied zur klassischen Prädikatenlogik nicht durch ein *Definitionsaxiom* $\forall v(Pv_0\dots v_{n-1} \leftrightarrow \varphi(v_0,\dots,v_{n-1}))$ ausgedrückt werden kann, sondern mit Hilfe der oben aufgeführten Regeln formuliert werden muß (unter diesem Aspekt sollen diese auch *Definitionsregeln* heißen).
Im zweiten, zu diskutierenden Fall wird vorausgesetzt, daß M abgeschlossen ist gegenüber der Erweiterung durch solche Spiele $D \in UL$, deren Argumentationsrelation der durch f_P gegebenen Bedingung genügt, und daß außerdem kein Satz der Form $Pa_0\dots a_{n-1}$ global unfundiert ist. Auch in diesem Fall (für den die Menge der inhaltlichen Dialogspiele über einer Sprache mit Wahrheitsprädikat und Zitatfunktion ein Beispiel abgibt) ist M* = M' erfüllt, weil in jedem $D \in M$ bzw. $D' \in M'$ die Gültigkeit aller Sätze $Pa_0\dots a_{n-1}$ mit der Eigenschaft, daß f_P für $\langle a_0,\dots,a_{n-1}\rangle$ definiert ist, bereits eindeutig bestimmt ist durch die Gültigkeitsbeziehungen im jeweiligen restringierten Dialogspiel. Allerdings kann die Entscheidung über die Gültigkeit eines solchen Satzes i.a. nicht unmittelbar wie im ersten Fall getroffen werden, sondern bedarf eines längeren Zurückgehens auf dem Weg der rekursiven Definition der Gültigkeitsrelation. In Abgrenzung zum ersten Fall kann man im vorliegenden Fall sagen. daß P sprachintern partiell bestimmt ist durch die obigen vier Aufbauregeln, die unter diesem Aspekt *Bestimmungsregeln* genannt werden können. Das semantische Konzept der Dialogspiele ist allerdings nicht stark genug, um in angemessener Weise den interessanten Sonderfall zu erfassen, wo P durch die Bestimmungsregeln sogar vollständig charakterisiert ist; eine Erfassung dieses Falls ist demgegenüber im modelltheoretischen Semantikkonzept möglich (vgl. Kindt 1979).
Im dritten und letzten Fall soll in Abänderung der Voraus-

setzungen des zweiten Falls angenommen werden, daß es doch wenigstens einen global unfundierten Satz $Pa_o \ldots a_{n-1}$ gibt, und zwar sollen hier genauer zwei verschiedene, konkrete Beispielrealisierungen dieser Annahme betrachtet werden: im ersten Beispiel sei für $\langle a_o, \ldots, a_{n-1} \rangle$ $f_P(Pa_o \ldots a_{n-1}) = Pa_o \ldots a_{n-1}$ erfüllt und im zweiten Beispiel gebe es eine unendliche Folge $\langle\langle a^m_o, \ldots, a^m_{n-1} \rangle : m<\omega$ von paarweise verschiedenen Konstantentupeln mit der Eigenschaft, daß stets $f_P(Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}) = Pa^{m+1}_o \ldots a^{m+1}_{n-1}$. Für beide Beispiele läßt sich sofort zeigen, daß $M^* \neq M'$. Zu M' gehört nämlich auch ein D', bei dem $D' \models Pa_o \ldots a_{n-1}$ bzw. $D' \models Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}$ für alle m; demgegenüber ist für alle $D \in M$ stets $D \not\models Pa_o \ldots a_{n-1}$ und $D \not\models -Pa_o \ldots a_{n-1}$ bzw. $D \not\models Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}$ und $D \not\models -Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}$ erfüllt.
Eine vollständige syntaktische Charakterisierung der restringierten Folgerungsrelation von M kann allerdings bei beiden Beispielen auf einfache Weise dadurch erreicht werden, daß die Unerfüllbarkeit von $Pa_o \ldots a_{n-1}$ und $-Pa_o \ldots a_{n-1}$ bzw. von $Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}$ und $-Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}$ durch folgende, unmittelbar korrespondierende Regeln der Widerspruchsvollheit charakterisiert wird.

$$\frac{}{Pa_o \ldots a_{n-1}, ?\varphi} \qquad \frac{}{-Pa_o \ldots a_{n-1}, ?\varphi}$$

bzw.

$$\frac{}{Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}, ?\varphi} \qquad \frac{}{-Pa^m_o \ldots a^m_{n-1}, ?\varphi}$$

Nach Behandlung der drei Fälle mit genau einer in M partiell auflösbaren Prädikatenkonstante würde es nun naheliegen, den allgemeineren Fall zu betrachten, wo mehr als eine , also z.B. endlich viele partiell auflösbare Prädikatenkonstanten vorkommen. Eine entsprechende Diskussion soll hier aber nicht mehr geführt werden. Einerseits ist nämlich bereits ziemlich klar, wie die bisherigen Vollständigkeitsaussagen zu verallgemeinern sind. Andererseits kann im Sinne der in der Logik vorgenommenen Unterscheidungen darauf verwiesen werden, daß die Untersuchung der spezifischen Eigenschaften von Prädikaten nicht zum Aufgabengebiet der Logik im engen Sinne gehört, sondern daß diese Untersuchung im Rahmen der Beschäftigung mit Theorien durchgeführt wird. Eine auf der klassischen Prädikatenlogik aufbauende *Theorie* ist - etwa nach der Definition in Shoenfield 1967 - gegeben durch eine prädikatenlogische Sprache, durch die zugehörigen klassisch logischen Axiome und/oder Regeln sowie durch weitere nichtlogische Axiome. Nach der oben geführten Diskussion ist nun zunächst klar, daß eine Verlagerung der Behandlung partiell auflösbarer Prädikatenkonstanten auf ein Theoriekonzept für UL nur möglich ist, wenn man das klassische Konzept umformuliert und als Bestandteil einer Theorie statt nur nichtlogischer Axiome allgemeiner nichtlogische Regeln zuläßt. Für klassisch logische Theorien führt diese Umformulierung aufgrund des Deduktionstheorems zu nichts Neuem, für UL-Theorien ist sie aber erforderlich, um die zu einer partiell auflösbaren Prädikatenkonstante gehörigen Regeln aufnehmen zu können. Desweiteren muß aber jetzt abschließend die schon einmal angeschittene Frage wieder aufgegriffen werden, ob die UL zuzuordnende Logik bereits hinreichend durch die Logik von L3 repräsentiert ist. Diese Frage ist m.E. insofern zu verneinen, als die in der obigen Diskussion des dritten Falls, vorgeschlagene Lösung, bei Vorkommen global unfundierter Sätze ggf. zusätzliche Regeln einzuführen, unbefriedigend bleibt, weil sie singulär, d.h. zu sehr auf den jeweiligen Einzelfall zugeschnitten ist und nicht die allen Einzelfällen gemeinsam zugrundeliegende Problematik global angeht. Insbesondere scheint es auch in einem gewissen Sinne unnatürlich zu sein, daß die den Argumentationsregeln bzgl. einer partiell auflösbaren Prädikatenkonstante auf kanonische Weise zugeordneten vier Aufbauregeln in einigen Fällen bereits für eine vollständige Charakterisierung der restringierten Folgerungsrelation sorgen, in anderen Fällen aber nicht. M.a.W. würde man sich eigentlich wünschen, daß ein Logikkalkül für UL neben den Regeln von L3 eine allgemeine Regel enthielte, mit Hilfe derer aus den betreffenden Aufbauregeln je nach zugrundeliegenden Unfundiertheitseigenschaften ggf. zugehörige spezielle Widerspruchsvollheitsregeln ableitbar wären. Dieser Wunsch ist jedoch im Rahmen der bisher üblichen Kalkültypen überhaupt nicht, bei Einführung eines neuen Regeltyps allerdings wenigstens teilweise erfüllbar. Und zwar ist eine solche Lösung unter der Voraussetzung erreichbar, daß relativ zu der zugrundeliegenden Dialogspielmenge $M \subset UL$ keine global unfundierten Sätze existieren, von denen unendliche Argumentationsketten ohne Wiederholungen ausgehen (bei dem zweiten Beispiel des oben diskutierten dritten Falls von partiell auflösbaren Prädikatenkonstanten gibt es gerade eine solche Kette, nicht aber beim ersten Beispiel). Als zusätzliche Regel, die nicht über Satzmengen sondern über Ableitungen definiert ist, kann dann die folgende Regel eingeführt werden:

> Im Rahmen einer Theorie sei eine nichttriviale (d.h. nicht ausschließlich auf der entsprechenden Neutralisierungsregel beruhende) Ableitung für $\varphi,?\varphi$ mit der Eigenschaft gegeben, daß jede Wurzel der Ableitung selbst mit $\varphi,?\varphi$ beginnt und daß in der Ableitung nur aufbauende Regeln und diese nur auf Sätze aus Σ' angewendet werden. Unter dieser Bedingung darf von $\varphi,?\varphi$ zu $\varphi?\psi$ übergangen werden.

Ein Nachweis dafür daß diese Regel das Gewünschte leistet, soll hier nicht geführt werden. Und es soll auch nicht mehr versucht werden, eine abschließende Einschätzung des möglichen Stellenwertes dieser Regel für die Logik von UL vorzunehmen, weil hierfür eine gründlichere Diskussion der Gesamtproblematik erforderlich wäre. Insbesondere wäre zu erörtern, ob man im Falle von $f_P(Pa) = Pa$ tatsächlich $Pa \models \varphi$ als Folgerung akzeptieren soll oder ob man den Folgerungsbegriff modifizieren will. Weiterhin wäre über das oben Gesagte hinaus genauer zu klären, wie das klassische Theoriekonzept und dementsprechend ggf. auch der Ableitungsbegriff abzuändern ist, um die Charakterisierung der restringierten Folgerungsrelation spezieller Dialogspielmengen $M \subset UL$ auf das Problem der Ableitbarkeit im Rahmen einer Theorie zurückführen zu können. Abgesehen von der Erörterung dieser grundsätzlichen Probleme gäbe es auch eine große Zahl interessanter Anschlußprobleme zu behandeln. Hierzu würde u.a. das Problem gehören, ob und inwieweit es möglich ist, UL durch die Einführung weiterer Junktoren und semantischer Prädikate zu erweitern; außerdem wäre es von Interesse, die Beziehungen der Logik von UL zur klassischen und zur konstruktiven Logik genauer darzustellen. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit den genannten Problemen muß anderen Untersuchungen vorbehalten bleiben, nach den Ausführungen in diesem und im vorigen Abschnitt dürften aber bereits einige wesentliche Züge von prädikatenlogischen Sprachen mit unfundierten Sätzen deutlich geworden sein.

10. Literaturangaben

Bachmann, H., 1967²: *Transfinite Zahlen*, Berlin-Heidelberg-New York.

Berge, C., 1957: *Théorie Générale des Jeux à n Personnes*, Paris.

Blau, U., 1978: *Die dreiwertige Logik der Sprache*, Berlin-New York.

Fitting, M.C., 1969: *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, Amsterdam.

ders., 1972: "Tableaux Methods of Proof for Modal Logics", in: Notre Dame Journ. of Formal Logic XIII, 2.

Kindt, W., 1970: *Dialogspiele*, Diplomarbeit Univ. Freiburg.

ders., 1972: *Eine abstrakte Theorie von Dialogspielen*, Diss. Univ. Freiburg.

ders., 1974: "Ein Versuch zur Analyse und modelltheoretischen Beschreibung von Rezeption und Interpretation", Kolloquiumsvorlage, ZiF, Univ. Bielefeld, erscheint in: Burghardt/Hölker (eds.): *Text Processing*, Berlin 1979, sowie in: Petöfi/Schmidt (eds.): *Text Theory*, Berlin 1979.

ders., 1976a: "Über Sprachen mit Wahrheitsprädikat", Ms. Bielefeld, erschienen in: Habel/Kanngießer (eds.): *Sprachdynamik und Sprachstruktur*, Tübingen 1978.

ders., 1976b: "The Introduction of Truth Predicates into First-Order Languages", Kolloquiumsvorlage Werner Reimers-Stiftung Bad Homburg, erschienen in: Guenthner/Schmidt (eds.): *Formal Semantics and Pragmatics*, Dordrecht 1978.

ders., 1979: Zur Logik von Sprachen mit unfundierten Formeln", Vorlage zum 6. Int. Kongreß für Logik, Methodologie und Philosophie der Wissenschaften, Hannover.

Kleene, S.C. 1952: *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam.

Shoenfield, J.R., 1967: *Mathematical Logic*, New York.

Smullyan, R.M., 1968: "Abstract Quantification Theory", Kongreßvorlage Buffalo N.Y., erschienen in: Kino/Myhill/Vesley (eds.): *Intuitionism and Proof Theory*, Amsterdam 1970.

Zeman, J.J., 1973: *Modal Logic*, Oxford.