Walther Kindt

Über Sprachen mit Wahrheitsprädikat*/**

0. Einleitung

In der berühmten Arbeit „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", in der sich Tarski (1935) mit dem Antinomienproblem und der Möglichkeit, den Wahrheitsbegriff zu definieren, beschäftigt, wird für den Fall der Umgangssprache folgendes Fazit gezogen:

> *„Der Versuch, eine strukturelle Definition des Terminus „wahre Aussage" aufzubauen, stößt – auf die Umgangssprache angewendet – auf Schwierigkeiten, die wir nicht überwinden können." (p. 17/18)*
>
> „[. . .] *so scheint selbst die Möglichkeit eines konsequenten und dabei mit den Grundsätzen der Logik und dem Geiste der Umgangssprache übereinstimmenden Ge-*

---

* Die vorliegende Arbeit ist im Zusammenhang mit wissenschaftstheoretischen Überlegungen entstanden, die ich im Rahmen des DFG-Projekts „Theoretische und empirische Implikate einer Theorie der Literarischen Kommunikation" angestellt habe. Die Grundgedanken dieser Arbeit sind von mir erstmalig im Dezember 1974 auf einem Kolloquium vorgetragen worden, das von dem Projekt in Bielefeld veranstaltet wurde. Eine erste, schriftlich fixierte Fassung meiner Arbeit habe ich im Februar 1976 vorgelegt. Erst nach Fertigstellung dieser Fassung wurden mir die Überlegungen von Kripke und ihre Veröffentlichung in dem Aufsatz von November 1975 bekannt. Kripke's Arbeit basiert auf derselben Idee und kommt im wesentlichen zu demselben Gesamtergebnis wie meine Arbeit; in der Durchführung, der Schwerpunktsetzung sowie den erzielten Einzelergebnissen unterscheiden sich die beiden Arbeiten jedoch erheblich voneinander.
Auf die Frage nach den wissenschaftstheoretischen Konsequenzen dieser Arbeiten werde ich an anderer Stelle eingehen.

** Seit Fertigstellung der für den Druck vorgesehenen Fassung meiner Arbeit (April 1976) sind weitere, für das Thema „Sprachen mit Wahrheitsprädikat" einschlägige Arbeiten erschienen bzw. mir zugänglich geworden; ich verweise u.a. auf Martin/Woodruff 1976 und Feferman 1976 (dem Papier von Feferman sind weitere Angaben über derartige Arbeiten zu entnehmen. Im übrigen sei hier angemerkt, daß die Methode einer induktiven Wahrheits-/Gültigkeitsdefinition, wie sie hier dargestellt wird, nichts grundsätzlich Neues ist; was mich selbst betrifft, so habe ich diese Methode in allgemeiner Form schon in Kindt 1972 für Dialogspiele angewendet, auch wenn dort der Fall von Sprachen mit Wahrheitsprädikat nicht gesondert behandelt wird.

> *brauchs des Ausdrucks „wahre Aussage" und, was daraus folgt, die Möglichkeit des Aufbaus irgendwelcher korrekter Definition dieses Ausdrucks sehr in Frage gestellt." (p. 19)*

Die aufgrund dieser Zweifel Tarskis oftmals geäußerte Vermutung, es sei für die Umgangssprache unmöglich, eine befriedigende Definition des Wahrheitsprädikats anzugeben (vgl. z.B. Stegmüller 1968: 23), ist sehr wenig plausibel und es zeigt sich, daß sie auf Voraussetzungen beruht, von denen es nicht selbstverständlich ist, daß sie für die Umgangssprache erfüllt sind. Es ist daher notwendig, genauer zu untersuchen, welche dieser Voraussetzungen ggf. inadäquat sind und ob ihre Zurückweisung das Auftreten von Widersprüchen verhindert. Darüber, wie diese Frage beantwortet werden muß, konnte bislang kein Konsens erzielt werden. Noch in jüngster Zeit sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, die diesbezüglich sehr unterschiedliche Lösungen vorschlagen (vgl. z.B. Bar-Hillel 1966, Davis 1974, Martin (ed.) 1970, Parsons 1974, Thomason 1973). Die in den hier aufgezählten Arbeiten enthaltenen Vorschläge bleiben jedoch noch unbefriedigend; teils sind sie nicht genügend konstruktiv, teils nicht ausreichend empirisch motiviert, teils fehlt ihnen eine systematische Grundlage oder sie beruhen sogar auf elementaren Mißverständnissen. Vor allem aber gehen diese Vorschläge zu wenig auf das Problem ein, auf welche Weise Spracherweiterungen zur Einführung eines Wahrheitsprädikats explizit durchgeführt werden müssen und welche Bedingungen sich daraus für eine korrekte Verwendung dieses Prädikats ergeben. Aus diesem Grund kann in diesen Vorschlägen auch nicht erklärt werden, weshalb gerade im Zusammenhang mit Wahrheitsprädikaten Antinomien auftreten. Ich will mich nicht im einzelnen mit diesen Vorschlägen auseinandersetzen. Vielmehr geht es mir um den Versuch, für die genannte Frage eine systematisch begründete Antwort zu geben und zu zeigen, daß die mit der Verwendung von Wahrheitsprädikaten verbundenen Schwierigkeiten zurückzuführen sind auf bestimmte bisher nur unzureichend analysierte Probleme der zugehörigen Spracherweiterungen.

1. Bedingungen für die Widerspruchsfreiheit von Sprachen mit Wahrheitsprädikat

Beim alltäglichen Gebrauch natürlicher Sprachen sind Antinomien wie die Antinomie des Lügners oder die Antinomie von Grelling ohne Belang. Zugleich darf man wohl behaupten, daß auch im Alltag ein konsistenter Gebrauch von dem Begriff „wahre Aussage" gemacht werden kann und daß es sinnvoll ist, Begriffe wie „autolog" und „heterolog" einzuführen. Allgemeiner ist m.E. die Annahme, daß natürliche Sprachen als formale Sprachen mit widerspruchsfreier Semantik rekonstruiert werden können, intuitiv ausreichend zu rechtfertigen. Im folgenden sei daher vorausgesetzt, daß diese Annahme zutrifft und daß es insbesondere möglich ist, formale Sprachen zu definieren, die über einen Wahrheitsbegriff verfügen.

Nun ist es z.B. vollkommen unproblematisch, in einer aussagen- oder prädikatenlogischen Sprache einen W a h r h e i t s j u n k t o r W durch das aus allen Biimplikationen der Form

$$W\varphi \longleftrightarrow \varphi$$

bestehende Axiomensystem zu definieren.

Es dürfte unbestritten sein, daß diese Definition intuitiv adäquat ist, und sie führt auch zu keinerlei Widerspruch. Das Antinomienproblem tritt erst dann auf, wenn man einen Wahrheitsbegriff W einführen will, der den Status eines P r ä d i k a t s hat[1]. Genau dieser Fall ist bei der Rekonstruktion natürlicher Sprachen zu berücksichtigen, weil in ihnen Sätze wie „Diese Aussage ist wahr" vorkommen. Da diese Sprachen außerdem über die Möglichkeit der Zitatbildung verfügen (beispielsweise sind Sätze wie „Die Aussage ‚Schnee ist weiß' ist wahr" zulässig), muß die Rekonstruktion über formale Sprachen mit Zitatfunktion und Wahrheitsprädikat erfolgen. Nun kann man aber aufgrund der Ergebnisse von Tarski 1935 z.B. für formale Sprachen, die Erweiterung einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe sind, folgendes Theorem aufstellen:

(T) Es gibt keine formale Sprache L, die Erweiterung einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe ist, insbesondere eine Zitatfunktion ‚φ', eine Prädikatenkonstante W und mindestens eine Individuenkonstante enthält und die zugleich die folgenden drei Bedingungen erfüllt:
  (1) für jede Aussage φ von L ist ‚φ' ein Term von L, der in den zu L gehörigen Strukturen durch φ interpretiert wird[2].
  (2) die zu L gehörigen Strukturen und die jeweils über einer Struktur erklärten Interpretationen sind, was die prädikatenlogischen Anteile von L anbetrifft, in üblicher Weise und ohne zusätzliche Einschränkungen definiert; insbesondere gibt es für die Strukturen keine Restriktionen bezüglich der Interpretation von Individuenkonstanten.
  (3) für jede Aussage φ von L ist W ‚φ' $\longleftrightarrow \varphi$ allgemeingültig.

---

1 Eine unzulässige Vermischung der Junktor- und der Prädikatauffassung ist z.B. bei Davis 1974 festzustellen. Syntaktisch gesehen ist der dort eingeführte Wahrheitsbegriff Tr ein Prädikat (p. 231). Demgegenüber wird in dem angegebenen Widerspruchsfreiheitsbeweis (p. 233) die Zitatfunktion Q als Identität interpretiert; das bedeutet aber, daß Tr in der Formel TrQp semantisch den Status eines Junktors erhält.

2 Das bedeutet, daß die Zitatfunktion nicht-extensional ist.

(T) kann folgendermaßen durch einen Widerspruchsbeweis hergeleitet werden:

Angenommen, es gibt eine Sprache L, für die (1) – (3) erfüllt ist. Aus (1) resultiert zunächst, daß L Teilmenge des Individuenbereichs jeder zu L gehörigen Struktur ist. a sei eine Individuenkonstante. Wegen (2) gibt es zu a eine Struktur S, in der a durch die Aussage $\neg$Wa interpretiert wird. Durch Anwendung von (3) auf $\neg$Wa erhält man, daß in S die Aussage φ: = (W, '$\neg$Wa' $\leftrightarrow \neg$ Wa) gilt. Wegen (1) wird neben a auch '$\neg$Wa' durch $\neg$Wa interpretiert, so daß in φ gemäß (2) '$\neg$Wa' durch a substituiert werden kann und folglich Wa $\leftrightarrow \neg$Wa in S gilt. Letzteres steht aber im Widerspruch dazu, daß nach (2) in S alternativ entweder Wa oder $\neg$Wa gilt.

Bezüglich solcher, für eine Rekonstruktion von natürlichen Sprachen geeigneten formalen Sprachen sind nun zwei Möglichkeiten denkbar. Entweder gilt für solche Sprachen kein dem Theorem (T) vergleichbares Resultat. Oder (T) ist zwar auf diese Sprachen übertragbar, aber wenigstens eine der Bedingungen (1) – (3) ist für sie nicht erfüllt. Gegen die erste dieser beiden Alternativen spricht die Tatsache, daß man bestimmte einfache Fragmente natürlicher Sprachen relativ gut durch prädikatenlogische Sprachen bzw. durch geeignete Erweiterungen von ihnen approximieren kann. Vermutlich ist also die zweite Alternative richtig. Wie in O. schon erwähnt, gibt es nun die unterschiedlichsten Vorstellungen darüber, welche der drei Bedingungen (1) – (3) bzw. welche der in (1) – (3) enthaltenen und für den Beweis von (T) verwendeten Teilbedingungen aufgegeben werden sollten. Wir wollen daher die verschiedenen in den Beweis eingehenden Voraussetzungen der Reihe nach auf ihre Adäquatheit hin überprüfen.

Zunächst dürfte klar sein, daß die Bedingung (1) genau der Gebrauchskonvention für Zitate in natürlichen Sprachen entspricht und damit eine Zurückweisung von (1) nicht in Frage kommt. Was die Bedingung (2) anbetrifft, so gehen in den Beweis zu (T) vier verschiedene, aus (2) entnommene Voraussetzungen wesentlich ein, die wir nachfolgend unter den Punkten (a) – (d) diskutieren.

(a) Im Beweis von (T) wird von der Möglichkeit der Selbstreferenz von Aussagen Gebrauch gemacht; nach (2) ist es nämlich zulässig, daß die in einer Aussage φ (a) vorkommende Individuenkonstante a gerade durch φ (a) interpretiert wird (man kann also sagen, daß φ (a) auf „sich selbst" referiert). Zunächst wird man vielleicht vermuten, daß die – etwas ungewöhnliche – Annahme der Existenz selbstreferenter Aussagen für das Auftreten von Widersprüchen verantwortlich ist und daß man auf diese Annahme verzichten kann, ohne damit eine wesentliche sprachliche Ausdrucksmöglichkeit zu verlieren. Gegen ein Verbot der Selbstreferenz von Aussagen spricht aber erstens die Tatsache, daß eine solche Restriktion in den wichtigsten der bisher untersuchten formalen Sprachen nicht vorgesehen und auch nicht notwendig ist. Zweitens wird an Beispielen wie „Diese Wortfolge ist ein Satz" deutlich, daß es durchaus vertretbar zu sein scheint, Interpretationen mit Selbstreferenz prinzipiell zuzulassen, selbst wenn solche Interpretationen in der Alltagskommunikation keine besondere Rolle spielen[3].

(b) Beim Beweis von (T) wird in der Aussage φ der Term ‚$\neg$Wa' durch die identisch interpretierte Konstante a substituiert. Gegen diese Substitution könnte höchstens dann etwas eingewendet werden, wenn sie innerhalb eines intensionalen Kontextes durchgeführt werden würde. Dieser Fall liegt aber mit Sicherheit nicht vor, weil sowohl die Biimplikation als auch das Wahrheitsprädikat als extensional anzusetzen sind, wie durch Substitutionstests begründet werden kann.

(c) Daß im Beweis von (T) die übliche Interpretation der Negation und der Biimplikation zugrundegelegt wird, dürfte unproblematisch sein. Vorsichtiger gesagt: Es gibt jedenfalls gegen diese Interpretation insoweit keine Einwände, als sie erlaubt, aus der für eine Struktur angenommenen Gültigkeit einer Biimplikation $\psi \longleftrightarrow \rho$ im Fall der Gültigkeit von ψ die Gültigkeit von ρ und im Fall der Gültigkeit von $\neg\psi$ die Gültigkeit von $\neg\rho$ zu erschließen.

(d) Von den aus (2) verwendeten Voraussetzungen bleibt schließlich die Annahme zu diskutieren, daß für jede Aussage ψ in jeder Struktur immer entweder ψ oder $\neg\psi$ gilt, eine Annahme aus der sich die Allgemeingültigkeit des Gesetzes vom „ausgeschlossenen Dritten" („tertium non datur") ergibt. Dieses Gesetz wird einerseits von vielen Logikern für eine unverzichtbare Grundlage logischen Schließens gehalten. Andererseits ist von Linguisten und Sprachphilosophen schon oft darauf hingewiesen worden, daß dieses Gesetz nicht ohne weiteres auf natürliche Sprachen übertragbar ist; als Argument hierfür kann z.B. die Tatsache angeführt werden, daß bei der Behandlung des Präsuppositionsproblems höchst unplausible Komplikationen auftreten, wenn man die Allgemeingültigkeit des „tertium non datur" voraussetzt. M.E. reicht dieses Argument für eine Zurückweisung des „tertium non datur" bei der Rekonstruktion natürlicher Sprachen bereits aus. Sofern man dieses Argument also akzeptiert, hat man – wie gewünscht – eine in den Beweis von (T) eingehende Voraussetzung gefunden, die von den natürlichen Sprachen her beurteilt als inadäquat abzulehnen ist. (Um Mißverständnisse zu vermeiden, muß an dieser Stelle präzisiert werden, daß es

3 Bei einer sprechakttheoretischen Behandlung natürlicher Sprachen sind Selbstreferenzerscheinungen hingegen von großer Wichtigkeit; beispielsweise kann Selbstreferenz vorliegen, wenn im Rahmen einer Sprechhandlung der Satz „Hiermit ist die Sitzung eröffnet" geäußert wird.

hier nicht um eine prinzipielle Ablehnung jeglicher Form des „tertium non datur" geht; dieses Gesetz ist nur inadäquat bei einer konstruktiven Interpretation der Negation, also der Interpretation, die m.E. in der Umgangssprache in der Regel anzusetzen ist). Trotzdem ist das von uns aufgeworfene Problem damit noch nicht gelöst. Es ist nämlich zu bedenken, daß die Inadäquatheit dieses Gesetzes mit einem Argument begründet worden ist, das von dem Problem der Verwendung des Wahrheitsprädikats zunächst vollkommen unabhängig ist; anders ausgedrückt, es wäre möglich, daß es Ausschnitte aus einer natürlichen Sprache gibt, die über das Wahrheitsprädikat und die Zitatfunktion verfügen und außerdem das „tertium non datur" erfüllen, für die sich aber eine andere in den Beweis von (T) eingehende Voraussetzung als inadäquat erweist. Wir wollen diese Möglichkeit nicht weiter verfolgen, weil sie aufgrund der Diskussion von Bedingung (3) ohnehin ausgeschlossen werden kann.

Bei der Suche nach einer Auflösung der Antinomie des Lügners wurde die Bedingung (3) bisher kaum beachtet. Das hat vermutlich folgenden Grund. Einerseits ist es vernünftig, von folgenden beiden Annahmen auszugehen:

(A_1) Wenn in einer Struktur eine Aussage ψ gilt, dann gilt dort auch W ‚ψ'.
(A_2) Wenn in einer Struktur die Aussage W ‚ψ' gilt, dann gilt dort auch ψ.

Andererseits weiß man, daß in prädikatenlogischen Sprachen durch die Forderung nach der Allgemeingültigkeit einer Biimplikation der Form

$$Pv \leftrightarrow \psi(v)$$

die Interpretation von P eindeutig bestimmt ist, sofern P nicht in ψ vorkommt. Folglich scheint mit (3) ein notwendiges Kriterium für die Adäquatheit der Interpretation von W und eine für den Bereich der Aussagen vollständige Charakterisierung dieser Interpretation gegeben zu sein. Genau diese Schlußfolgerung erweist sich bei näherer Betrachtung als voreilig. Die Problematik von (3) wird allerdings erst deutlich, wenn man die Einführung von Wahrheitsprädikaten als einen sprachdynamischen Vorgang explizit zu machen versucht.

Ganz allgemein muß die Einführung eines neuen Begriffs in eine Sprache L als ein Spracherweiterungsprozeß aufgefaßt werden, den man in zwei Schritte untergliedern kann. In einem ersten Schritt wird die Syntax von L durch eine Regel erweitert, die explizit angibt, zu welcher syntaktischen Kategorie der neue Begriff gehören soll bzw. in welchen syntaktischen Konstruktionen dieser Begriff vorkommen darf. Im zweiten Schritt werden die semantischen Regeln von L durch eine Vorschrift ergänzt, die bestimmt, wie der neue Begriff in den zu L gehörigen Strukturen jeweils interpretiert werden soll. Insgesamt erhält man durch diese beiden Erweiterungsschritte eine neue Sprache L'.

Was nun speziell die Einführung eines Wahrheitsprädikats W in eine Sprache L betrifft, so ist intuitiv zwar einigermaßen klar, welche Vorgehensweise hierfür gewählt werden muß; insbesondere steht fest, daß man die Interpretation von W so anlegen wird, daß die beiden Annahmen (A_1) und (A_2) gelten. Erst bei einer genaueren Analyse des für die Einführung von W vorzunehmenden zweiten Schrittes zeigt sich aber, daß die Interpretation von W durch einen rekursiven und u.a. auf sukzessiver Anwendung von (A_1) basierenden Definitionsprozeß bestimmt werden muß und daß W dabei vernünftigerweise im allgemeinen nur einem Teil der Aussagen der erweiterten Sprache L', nicht jedoch allen Aussagen von L' zu- oder abgesprochen werden kann. Das bedeutet erstens, daß W nicht in jedem Fall ein total definiertes Prädikat ist und zweitens ergibt sich, daß für L' das „tertium non datur" nicht generell gilt. Damit haben wir jetzt – im Gegensatz zu der Diskussion in (d) – eine aus der Einführung von W resultierende Begründung dafür gefunden, warum das „tertium non datur" als inadäquat zurückgewiesen werden muß.

In den folgenden Abschnitten soll nun anhand der Diskussion von speziellen formalen Sprachen genauer dargestellt werden, welche Probleme bei Spracherweiterungen zur Einführung eines Wahrheitsprädikats auftreten, wie der bereits angedeutete Definitionsprozeß im einzelnen durchgeführt werden kann und welche allgemeinen Konsequenzen sich aus einer solchen Definition ergeben.

2. Prädikatenlogische Sprachen, Spracherweiterungen und eingeschränkt verwendbare Wahrheitsprädikate

Die in 1. angeführten Argumente legen es nahe, genauer zu untersuchen auf welche Weise die für die Einführung eines Wahrheitsprädikats notwendi- Definitionsschritte explizit durchgeführt werden können. Die Schwierigkeiten einer solchen Definition lassen sich teilweise schon am Fall von prädikatenlogischen Sprachen erster Stufe[4] verdeutlichen, weshalb zunächst diese Sprachen betrachtet werden sollen.

Mit L, L', . . . werden im folgenden prädikatenlogischen Sprachen erster Stufe ohne Identität und ohne Funktionskonstanten angedeutet. Jede solche

4 Für eine Darstellung dieser Sprachen vgl. z.B. Hermes 1972, Shoenfield 1967; für die im folgenden verwendeten mengentheoretischen Begriffe und Symbole vgl. z.B. Suppes 1960.

Sprache L ist definiert als geordnetes Paar aus einer Konstantenmenge K (L) und einer Menge von zu K (L) passenden Strukturen. Bei Konstanten unterscheidet man zwischen Individuenkonstanten (angedeutet durch a, a', . . .) und Prädikatenkonstanten (angedeutet durch P, P', . . .). Allen betrachteten Sprachen gemeinsam ist die Menge der logischen Zeichen und eine abzählbare Menge V von Individuenvariablen; die Elemente von V werden durch v, v', . . . angedeutet, als logische Zeichen werden zugrundegelegt die Negation $\neg$, die Alternation $\vee$ und der Existenzquantor $\exists$. Zu jeder Konstantenmenge K wird nun die Menge der Terme T (K), die Menge der Formeln F (K) und die Menge der Aussagen A (K) über K erklärt. Als Terme über K bezeichnet man die Individuenkonstanten von K und die Individuenvariablen; Terme werden durch t, t', . . . angedeutet. Die Formeln über K werden in üblicher Weise aus den Prädikatenkonstanten von K, den Termen über K und den logischen Zeichen gebildet; Formeln sollen durch φ, ψ, ρ, . . . angedeutet werden. Formeln ohne freie Variablen heißen Aussagen. Bezogen auf eine Sprache L, wird die Menge der Terme über L (K) mit T (L), die Menge der Formel mit F (L) und die Menge der Aussagen mit A (L) bezeichnet.

K sei eine Menge von Konstanten. S = $\langle X, I \rangle$ ist eine K-Struktur genau dann, wenn X von der leeren Menge verschieden ist ($X \neq O$) und wenn I eine Funktion ist, die jeder Individuenkonstanten von K ein Element von X und jeder n-stelligen Prädikatenkonstanten von K eine n-stellige Relation über X zuordnet. X ist der Individuenbereich und I die Interpretationsfunktion von S. Ist S = $\langle X, I \rangle$ eine K-Struktur, so bezeichnet man die Elemente von X^V (X^V ist die Menge der Funktionen von V nach X) als Variablenbelegungsfunktionen für S; solche Funktionen sollen durch β, β', . . . angedeutet werden. Für K-Strukturen S, Belegungsfunktionen β für S und Formeln φ über K wird in üblicher Weise die Gültigkeitsrelation definiert: S $\models_{\beta} \varphi$ bedeute, daß φ in S bei der Belegung β gilt; speziell besage S $\models \varphi$, daß φ eine Aussage ist und daß S $\models_{\beta} \varphi$ für ein β und damit nach dem Koinzidenztheorem[5] für jedes β.

Wie bereits angedeutet ist eine Sprache L das geordnete Paar aus einer Konstantenmenge K (L) und einer Menge von K (L)-Strukturen. Die zu L gehörigen Strukturen werden kurz L-Strukturen genannt. Besonders wichtig für das folgende ist der Begriff der Spracherweiterung.

2.1 *Definition:* L' ist eine Erweiterung von L genau dann, wenn
(1) K (L) $\subset$ K (L').
(2) Es gibt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der L-Strukturen zu den L'-Strukturen mit der Eigenschaft, daß jeder L-Struktur

5 vgl. Hermes (1972:81).

$S = \langle X, I \rangle$ genau eine L'-Struktur $S' = \langle X', I' \rangle$ entspricht, die eine Erweiterung von S ist (d.h. daß $X = X'$ und daß $I = I' \mid K(L)$, also I die Restriktion von I' auf K (L) ist).

Nach diesem terminologischen Vorspann soll nun das Problem der Einführung eines Wahrheitsprädikats in eine Sprache L behandelt werden. Von Interesse ist eine solche Einführung in dem Fall, daß zu den Individuenbereichen einiger L-Strukturen auch Aussagen von A (L) gehören. In diesem Fall liegt es nahe, K (L) durch eine neue einstellige Prädikatenkonstante zu erweitern und jeweils durch diejenige Teilmenge Y des Individuenbereiches X einer L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ zu interpretieren, die genau aus den in S geltenden Aussagen von $A(L) \cap X$ besteht. Das hat nämlich zur Folge, daß dann für jedes $\varphi \in A(L) \cap X$ gilt.

$\varphi \in Y$ genau dann, wenn $S \models \varphi$.

Bezüglich $A(L) \cap X$ und S beschreibt die neue Konstante also in adäquater Weise den Bereich der „wahren" Aussagen. Daß eine solche Spracherweiterung immer möglich ist, besagt in präzisierter Form folgendes, leicht nachweisbare Theorem.

2.2 *Theorem:* W sei eine bezüglich K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante. Zu L wird eine Erweiterung L' definiert durch:

$K(L') := K(L) \cup \{W\}$;

$S' = \langle X', I' \rangle$ ist eine L'-Struktur genau dann, wenn es eine L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ gibt mit $X' = X$ und $I' = I \cup \{\langle W, \{\varphi \in A(L) \cap X; S \models \varphi\}\rangle\}$

Dann hat jede L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ für alle $\varphi \in A(L)$ die Eigenschaft:

(E) Falls $\varphi \in X$, so gilt:

$\varphi \in I'(W)$ genau dann, wenn $S' \models \varphi$.

Statt (E) kann man in 2.2 auch schreiben:

(E') Für alle $t \in T(L')$ und alle $\beta \in X^V$ mit

$(I' \cup \beta)(t) = \varphi$ gilt:

$S' \models_\beta Wt$ genau dann, wenn $S' \models_\beta \varphi$.

Wenn man außerdem wie üblich $\psi \leftrightarrow \rho$ als Abkürzung für $(\neg \psi \vee \rho) \wedge (\neg \rho \vee \psi)$ und $\psi \wedge \rho$ als Abkürzung für $\neg(\neg \psi \vee \neg \rho)$ verwendet, dann ist die letzte Zeile in (E') weiter umformulierbar in: $S' \models_\beta Wt \leftrightarrow \varphi$.

Mit dieser Formulierung ist eine weitgehende Parallelisierung zu Bedingung (3) in Theorem (T) von Abschnitt 1. erreicht; der wesentliche Unterschied zwischen (3) und 2.2 liegt demnach in der Tatsache, daß (E) nur für die Aussagen von A (L) und nicht für alle Aussagen von A (L') erfüllt ist.

Nun ist es denkbar, daß in den Individuenbereichen der L-Strukturen neben einigen Aussagen von A (L) auch Aussagen aus A (L') – A (L) liegen. Insofern kann man sich fragen, ob man L' auch so hätte definieren können, daß sogar jede Aussage in A (L') die Eigenschaft (E) hat. Diese Frage ist weder generell zu bejahen, noch generell zu verneinen; wie sie zu beantworten ist, hängt von den speziellen Eigenschaften der L-Strukturen ab. Wenn es nämlich in K (L) eine Individuenkonstante a gibt, die bei einer L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ durch die Aussage $\neg Wa$ interpretiert wird ($\neg Wa$ entspricht dem Satz vom Lügner) und wenn Wa in X liegt, dann hat Wa für kein L' die Eigenschaft (E). Der Annahme von (E) für Wa und die zu L' gehörige Erweiterung $S' = \langle X, I' \rangle$ von S widerspricht nämlich die aus $I'(a) = I(a) = \neg Wa$ und aus der Definition der Gültigkeitsbeziehung resultierende Folgerung, daß $S' \models Wa$ genau dann, wenn $\neg Wa \in I'(W)$. Die Antwort auf unsere Frage fällt also negativ aus. In anderen Fällen ist die Frage demgegenüber zu bejahen. Wenn nämlich beispielsweise für jede L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ alle in X liegenden Aussagen aus A (L') – A (L) die Form Wa haben und dabei I (a) zu A (L) gehört, dann kann I jeweils folgendermaßen erweitert werden:

$$I' := I \cup \{\langle W, Y \rangle\}, \text{ wobei}$$
$$Y := \{\varphi \in A(L) \cap X; S \models \varphi\} \cup \{\varphi \in X; \text{es gibt a mit } \varphi = Wa \text{ und } S \models I(a)\}.$$

Es ist klar, daß bei einer nach dieser Vorschrift definierten Spracherweiterung für alle $\varphi \in A(L')$ die Eigenschaft (E) erfüllt ist.

Aus der gegebenen Antwort geht erstens hervor, daß L nicht in jedem Fall so zu einer Sprache L' mit $K(L') = K(L) \cup \{W\}$, erweitert werden kann, daß alle L'-Strukturen für jede Aussage in A (L') die Eigenschaft (E) haben. Man muß also bei einer Einführung von W in L mit der Möglichkeit rechnen, daß bei den Strukturen der erweiterten Sprache (E) nur für einen Teil der Aussagen aus A (L') erfüllt ist. Allgemein wollen wir sagen, W sei in L' relativ zu der Menge $\Phi \subset A(L')$ als Wahrheitsprädikat für die L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ verwendbar, wenn (E) für alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt ist. W soll aber nur dann ein Wahrheitsprädikat in L' genannt werden, wenn (E) bei jeder L'-Struktur S' für alle Aussagen von A (L') gilt.

Zweitens ergibt sich, daß (E) allein i.a. nicht zur Auszeichnung einer bestimmten Erweiterung von L ausreicht, weil nicht feststeht, relativ zu welcher Aussagenmenge W jeweils als Wahrheitsprädikat verwendbar gemacht werden soll. Damit stellt sich aber die Frage, ob es überhaupt möglich ist, in natürlicher und eindeutiger Weise eine bestimmte Erweiterung L' von L und zu jeder L-Struktur S eine bestimmte Teilmenge Φ von A (L') so auszuzeichnen, daß W in L' relativ zu Φ als Wahrheitsprädikat für die zu S gehörige L'-Struktur verwendbar ist. Der Beantwortung dieser Frage gelten folgende Überlegungen.

Wie in 2.2 werde im folgenden vorausgesetzt, daß die einstellige Prädikatenkonstante W nicht zur K (L) gehört, und es werde gesetzt K': = K (L) $\cup \{W\}$. Weiter sei S = $\langle X, I \rangle$ eine beliebige L-Struktur. Wenn es nun eine natürliche und eindeutig bestimmte Art der Erweiterung von L zu einer Sprache der gewünschten Art gäbe, dann müßten sich genaue Richtlinien dafür formulieren lassen, wie S zu einer K'-Struktur S' = $\langle X, I \rangle$ erweitert, d.h. wie I' (W) definiert werden soll. Welchen Inhalt könnten diese Richtlinien haben? Zweifellos ist nur eine solche Interpretation von W akzeptabel,bei der (E) wenigstens für einen Teil der über K' gebildeten Aussagen erfüllt ist; es bleibt aber vorerst unklar, welcher Teil hierfür anzusetzen ist.

Nun dürfte es zwar einerseits unstrittig sein, daß I' (W) nicht nur Aussagen aus A (L) umfassen sollte; z.B. spricht nichts dagegen, daß man unter der Voraussetzung von S $\models \varphi$, I (a) = φ und Wa ϵ X neben φ auch Wa in I' (W) aufnimmt. Andererseits ist aber beispielsweise im Falle I (a) = Wa zunächst weder die Annahme Wa ϵ I' (W) noch die Annahme Wa $\notin$ I' (W) zu begründen; beide Setzungen sind offensichtlich möglich, ohne daß dabei Widersprüche auftreten müssen.

Am Vergleich dieser beiden Beispiele kann man bereits den für eine intuitiv adäquate Einführung von Wahrheitsprädikaten wesentlichen Punkt deutlich machen. Im ersten Beispiel ist nur eine der beiden Setzungen Wa ϵ I' (W) und Wa $\notin$ I' (Wa) mit (E) und den Gültigkeitsbeziehungen in S verträglich und zwar ist die Entscheidung für Wa ϵ I' (W) mit Hilfe von (E) zurückführbar auf S $\models \varphi$. Demgegenüber kann man sich im zweiten Beispiel für eine Entscheidung über Wa ϵ I' (W) nicht auf (E) und die Gültigkeitsbeziehungen in S berufen; der Versuch, diese Entscheidung zu reduzieren, führt nämlich wieder auf die Bedingung Wa ϵ I' (W) zurück:

Wa ϵ I' (W) genau dann, wenn S' $\models$ Wa genau dann, wenn
I (a) ϵ I' (W) genau dann, wenn Wa ϵ I' (W).

Im Prinzip läßt das zweite Beispiel drei Möglichkeiten offen. Entweder kann keine der beiden Setzungen Wa ϵ I' (W) und Wa $\notin$ I' (W) vor der anderen ausgezeichnet und S folglich nicht auf eindeutige Weise erweitert werden. Oder die Entscheidung über Wa ϵ I' (W) ist nach bestimmten zusätzlichen von (E) und den Gültigkeitsbeziehungen in S unabhängigen Kriterien vorzunehmen. Drittens schließlich kann die aufgezeigte Unmöglichkeit einer Entscheidungsreduktion als Begründung dafür dienen, daß nicht $Wa \in I'(W)$ gesetzt werden darf. M.E. ist ausschließlich die Wahl der dritten Möglichkeit intuitiv adäquat. Denn es scheint generell geboten zu sein, nur solche über K' gebildeten Aussagen in $I'(W)$ aufzunehmen, für die eine solche Entscheidung unter Berufung auf (E) und die Gültigkeitsbeziehungen in S gerechtfertigt werden kann. Akzeptiert man diese Forderung, dann hat man auch eine Bedingung gefunden, durch die in eindeutiger Weise eine Definition von $I'(W)$ bestimmt ist. Um dies nachweisen zu können, muß die Bedingung allerdings zunächst präzisiert werden. Bevor wir eine solche Präzisierung angeben, sei aber schon auf eine Konsequenz hingewiesen, die sich aus der Bedingung ergibt. Unter Voraussetzung von $I(a) = Wa$ muß der Bedingung gemäß sowohl $Wa \notin I'(W)$ als auch $\neg Wa \notin I'(W)$ angesetzt werden. Aus $Wa \notin I'(W)$ erhält man aber nach Definition der Gültigkeitsbeziehung $S' \models \neg Wa$. Folglich ist (E) für $\neg Wa$ nicht erfüllt. Das zeigt wiederum, daß es i.a. auch nicht sinnvoll sein kann, den Bereich von Aussagen zu maximalisieren, relativ zu dem W in L' als Wahrheitsprädikat für S' eingeführt werden könnte.

Um die genannte Reduzierbarkeitsbedingung präzisieren zu können. wird bezogen auf eine beliebige L-Struktur $S = \langle X, I\rangle$ eine Reihe von Definitionen angegeben.

2.3 *Definition:* Zu S wird eine zweistellige Relation R (S) erklärt und zwar wird für alle

$\varphi, \psi \in F(K')$, alle $\beta \in X^V$, alle $t \in T(L)$, alle $x \in X$ und alle $v \in V$ gesetzt:

(1) Falls $\varphi \in A(K')$ und $(I \cup \beta)(t) = \varphi$, so

$$\langle Wt, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\varphi, \beta\rangle\} \text{ und } \langle\neg Wt, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\neg\varphi, \beta\rangle\}.$$

In den folgenden Bedingungen sei der Reihe nach vorausgesetzt, daß φ bzw. $\varphi \vee \psi$, bzw. $\exists v\varphi \notin F(L)$.

(2) $\langle\neg\neg\varphi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\varphi, \beta\rangle\}$.

(3) $\langle\varphi \vee \psi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\varphi, \beta\rangle\}$,
$\langle\varphi \vee \psi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\psi, \beta\rangle\}$,
$\langle\neg(\varphi \vee \psi), \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\neg\varphi, \beta\rangle, \langle\neg\psi, \beta\rangle\}$.

(4) $\langle\exists v\,\varphi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\varphi, \beta^{x}_{v}\rangle\}$,
$\langle\neg\exists v\,\varphi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\neg\varphi, \beta^{y}_{v}\rangle; y \in X\}$.

Dabei sei β_v^x in (4) definiert durch

$$\beta_v^x(v') = \beta(v') \text{ für } v' \neq v \text{ und } \beta_v^x(v) = x.$$

Gilt für eine Indexmenge J

$$\langle\varphi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\varphi_j, \beta_j\rangle; j \in J\},$$

dann kann dieser Sachverhalt wie folgt interpretiert werden: Eine Entscheidung über die Wahrheit von φ bei der Belegung β ist reduzierbar auf die Entscheidung über die Wahrheit jeweils von φ_j bei der Belegung β_j.

2.4 *Definition:* M (S) sei die Menge der geordneten Paare $\langle\varphi, \beta\rangle$ mit $\varphi \in F(K')$ und $\beta \in X^V$. – Weiter sei $B \subset M(S) \times M(S)$ und $m_o \in M(S)$. $\langle B, m_o\rangle$ heißt R (S)-Reduktionsbaum für m_o, wenn gilt:

(1) Für jedes $m \in M(S)$, zu dem ein $m' \in M(S)$ mit m B m' oder mit m' B m existiert, gibt es eine endliche B-Kette $f: n \to M(S)$ mit $f(0) = m_o$ und $f(n-1) = m$[6].

(2) Für jedes m, zu dem ein m' mit m B m' existiert, gibt es ein $M' \subset M(S)$ mit m R (S) M' und der Eigenschaft, daß für alle $m'' \in M(S)$:

m B m" genau dann wenn $m'' \in M'$.

2.5 *Definition:* Ein R (S)-Reduktionsbaum $\langle B, m_o\rangle$ heißt endlich genau dann, wenn es keine unendliche B-Kette gibt.

2.6 *Definition:* $\langle B, m_o\rangle$ sei ein R (S)-Reduktionsbaum. $m \in M(S)$ ist ein Punkt von $\langle B, m_o\rangle$ genau dann, wenn $m = m_o$ oder wenn ein $m' \in M(S)$ mit m' B m oder mit m B m' existiert. Ein Punkt m von $\langle B, m_o\rangle$ heißt Endpunkt genau dann, wenn es kein $m' \in M(S)$ mit m B m' gibt.

2.7 *Definition:* Zu S wird eine Menge $G(S) \subset M(S)$ definiert durch $\langle\varphi, \beta\rangle \in G(S)$ genau dann, wenn es für $\langle\varphi, \beta\rangle$ einen endlichen R (S)-Reduktionsbaum derart gibt, daß $S \models_{\beta'} \psi$ für jeden Endpunkt $\langle\psi, \beta'\rangle$ des Baumes.

---

6 Eine Folge f ist eine B-Kette genau dann, wenn für jedes Paar aufeinanderfolgender Glieder f(j) und f(j+1) gilt: f(j) B f(j+1).

Auf der Basis der angegebenen Definitionen kann jetzt der Reduzierbarkeitsbegriff erklärt werden.

2.8 *Definition:* Es sei $\varphi \in A(K')$. Die Entscheidung, φ relativ zu S als wahre Aussage einzustufen, ist reduzierbar genau dann, wenn es ein β mit $\langle \varphi, \beta \rangle \in G(S)$ gibt.

Die oben formulierte Reduzierbarkeitsbedingung wird nun folgendermaßen präzisiert:

S ist so zu einer K-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ zu erweitern, daß $I(W) \subset A(K')$ und daß für jedes $\varphi \in I'(W)$ die Entscheidung, φ relativ zu S als wahre Aussage einzustufen, reduzierbar ist.

2.9 *Definition:* Zu S werden zwei Mengen C (S) und D (S) erklärt.

$C(S) := \{ \varphi \in A(K') \cap X; \text{es gibt } \beta \text{ mit } \langle \varphi, \beta \rangle \in G(S) \}$;

$D(S) := \{ \varphi \in A(K'); \text{es gibt } \beta \text{ mit } \langle \varphi, \beta \rangle \in G(S) \text{ oder } \langle \neg\varphi, \beta \rangle \in G(S) \}$.

C (S) ist der relativ zu S maximale Bereich von Aussagen, die in einer die Reduzierbarkeitsbedingung erfüllenden Erweiterung von S mit W als wahr beschrieben werden können. Die optimale Erweiterung S' von S ist also bestimmt durch:

$S' = \langle X, I' \rangle$ und $I'(W) = C(S)$.

Zugleich kann gezeigt werden, daß S' auch als „schwächste" unter den Erweiterungen von S charakterisierbar ist, bei denen (E) für jede Aussage von D (S) erfüllt ist.

2.10 *Theorem:* W sei eine bezüglich K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante. Zu L wird eine Erweiterung L' definiert durch:

$K(L') := K(L) \cup \{W\}$;

$S' = \langle X, I' \rangle$ ist eine L'-Struktur genau dann, wenn

$S' \mid K(L)$ eine L-Struktur ist und wenn

$I'(W) = C(S' \mid K(L))$.[7]

Dann gilt:

---

7 Für Strukturen $S = \langle X, I \rangle$ und Konstantenmengen K wird gesetzt $S \mid K := \langle X, I \mid K \rangle$.

(1) Für jede L'-Struktur S' = ⟨X, I'⟩ und für jedes $\varphi \in D(S' \mid K(L))$ ist (E) erfüllt.

(2) L" sei eine Erweiterung von L mit der Eigenschaft, daß K (L") = K (L') und daß (E) für jede L"-Struktur S" = ⟨X, I"⟩ und jedes $\varphi \in D(S'' \mid K(L))$ erfüllt ist. Dann gilt für alle L'-Strukturen S' = ⟨X', I'⟩ und alle L"-Strukturen S" = ⟨X", I"⟩ mit $S' \mid K(L) = S'' \mid K(L)$, daß $I'(W) \subset I''(W)$.

Zum Nachweis von 2.10 (1) zeigt man allgemeiner für jede L'-Struktur S' = ⟨X, I'⟩, für jedes $\langle\varphi, \beta\rangle \in G(S' \mid K(L))$ und für jeden gemäß 2.7 die Zugehörigkeit zu $G(S \mid K(L))$ garantierenden Reduktionsbaum für $\langle\varphi, \beta\rangle$, daß für alle Punkte $\langle\psi, \beta'\rangle$ dieses Baumes $S' \models_{\beta'} \psi$ erfüllt ist. Der Beweis hierfür kann durch Induktion über den jeweils betrachteten Reduktionsbaum für $\langle\varphi, \beta\rangle$ geführt werden. Die nachgewiesene Eigenschaft ist dann insbesondere für $\langle\varphi, \beta\rangle$ erfüllt. Hieraus erhält man speziell im Falle $\varphi \in D(S' \mid K(L))$ daß sich $S' = \varphi$ aus $\varphi \in C(S' \mid K(L))$ und $S' = \neg\varphi$ aus $\varphi \in X - C(S' \mid K(L))$ ergibt. Letzteres ist äquivalent dazu, daß (E) für φ erfüllt ist.

Zum Nachweis von 2.10 (2) zeigt man in ähnlicher Weise wie bei (1) für die jeweils betrachteten Strukturen S" und S' und für jedes $\langle\varphi, \beta\rangle \in G(S' \mid K(L))$, daß $S'' \models_{\beta} \varphi$. Damit ergibt sich insgesamt für jedes $\langle\varphi, \beta\rangle \in D(S' \mid K(L))$, daß $S' \models_{\beta} \varphi$ genau dann, wenn $S'' \models_{\beta} \varphi$. Bei Ausnutzung von (E) erhält man schließlich $I'(W) \subset I''(W)$.

Die in 2.10 jeweils relativ zu einer L-Struktur S gewählte Interpretation von W durch C (S) ist unter Rückgriff auf die Bedingung definiert, daß bestimmte endliche Reduktionsbäume existieren. Es sei hier ohne Beweis erwähnt, daß es noch eine andere Charakterisierung von C (S) gibt, aus der hervorgeht, daß C (S) durch einen induktiven Definitionsprozeß gewonnen werden kann. Genauer gilt, daß sich G (S) durch eine rekursive Definition bestimmen läßt und daß danach C (S) wie in 2.9 definiert wird.

2.11 *Theorem:* Für S sei $G'(S) \subset M(S)$ definiert durch:

Falls $S \models_{\beta} \varphi$, so $\langle\varphi, \beta\rangle \in G'(S)$;
falls $\{\langle\varphi_j, \beta_j\rangle; j \in J\} \subset G'(S)$ und
$\langle\psi, \beta\rangle\, R(S)\, \{\langle\varphi_j, \beta_j\rangle; j \in J\}$, so
$\langle\psi, \beta\rangle \in G'(S)$.
Dann gilt $G'(S) = G(S)$.

2.11 besagt gerade, daß man G (S) ausgehend von der Menge der Formeln von L, die in S bei einer Belegung gelten durch Abschluß gegenüber der zu R (S) inversen Relation erhält.

3. Wahrheitsprädikate in partiell interpretierten prädikatenlogischen Sprachen

Die Diskussion in 2. hat ergeben, daß es prinzipiell nicht möglich ist, beliebige prädikatenlogische Sprachen – diese Sprachen werden im folgenden kurz PL-Sprachen genannt – durch Einführung einer neuen einstelligen Prädikatenkonstanten W so zu einer PL-Sprache L' zu erweitern, daß W in L' ein Wahrheitsprädikat ist. Man kann allerdings immer eine Erweiterung L' derart finden, daß W jeweils relativ zu einer Teilmenge von A (L') als Wahrheitsprädikat verwendbar ist. Dies trifft insbesondere für den Fall zu, daß man W in der Erweiterung jeder L-Struktur S durch C (S) interpretiert, was am angemessensten zu sein scheint; in diesem Fall ist W für die zu S gehörige Erweiterung relativ zu D (S) als Wahrheitsprädikat verwendbar.

Angesichts dieser Ergebnisse steht man vor der Alternative, entweder die Vorstellung aufzugeben, es müsse generell möglich sein, PL-Sprachen zu Sprachen mit Wahrheitsprädikat zu erweitern, oder aber an dieser Vorstellung festzuhalten und die Konsequenz zu ziehen, daß PL-Sprachen im allgemeinen nicht für eine adäquate Einführung von Wahrheitsprädikaten geeignet sind. M.E. ist nur die zweite Möglichkeit akzeptabel. Von den Ausdrucksmöglichkeiten der natürlichen Sprachen her beurteilt ist nämlich einerseits nicht einzusehen, warum man darauf verzichten sollte, die von einer Sprache in einer Struktur jeweils geltenden Aussagen in der Sprache selbst als wahr zu bezeichnen. Andererseits ist es wenig sinnvoll, in PL-Sprachen partiell verwendbare Wahrheitsprädikate einzuführen und dann zuzulassen, daß es Aussagen gibt, die in einer Struktur gelten, dort aber nicht als wahr beschrieben werden können. Und es scheint schließlich auch nicht zu rechtfertigen zu sein, sich auf die Betrachtung von PL-Sprachen zu beschränken, zu denen ausschließlich Strukturen gehören, in deren Individuenbereich jeweils höchstens solche Aussagen liegen, für die entweder selbst oder für deren Negation die in 2. formulierte Reduzierbarkeitsbedingung erfüllt ist; zumindest ist die dieser Restriktion zugrundeliegende Bedingung sehr kompliziert und geht in hohem Maße auf spezielle Eigenschaften der Strukturen ein, so daß man sich eine einfachere und globale Lösung wünschen würde.

Damit stellt sich die Frage, welcher Typ von formalen Sprachen ggf. für eine Einführung von Wahrheitsprädikaten geeignet ist bzw. im Rahmen welchen Sprachtyps eine Erweiterung von PL-Sprachen zu Sprachen mit Wahrheitsprädikat möglich ist. Aufgrund der vorangegangenen Überlegungen liegt es nahe zu fordern, daß der gesuchte Sprachtyp eine vollständige Kompatibilität der für eine Struktur bestehenden Gültigkeitsbeziehung mit der in 2. vorgeschlagenen Interpretation von W gestatten muß. Eine solche Kompatibilität ist aber in einer Sprache L' nur dann zu erreichen, wenn zugelassen wird, daß für einige der Aussagen φ, die bei dieser Interpretation in einer L'-Struktur S' = $\langle X, I' \rangle$ nicht als wahr zählen, weder S' $\models \varphi$ noch S' $\models \neg\varphi$ zutrifft. Beispielsweise müssen nämlich nach den Überlegungen in 2. unter der Voraussetzung von φ = Wa und I' (a) = Wa die Beziehung $\varphi \notin$ I' (W) und $\neg\varphi \notin$ I' (W) angesetzt werden; im Fall einer zugrundeliegenden PL-Sprache gilt dann aber S' $\models \neg\varphi$, was mit $\neg\varphi \notin$ I' (W) inkompatibel ist. Für eine Sprache der gewünschten Art dürfte also weder S' $\models \varphi$ noch S' $\models \neg\varphi$ erfüllt sein. Das S' $\models \neg\varphi$ zutrifft, ist aber unter den gegebenen Voraussetzungen nur zu verhindern, falls man den Schluß von $\varphi \notin$ I' (W) und I' (a) = φ auf S' $\models \neg$Wa verbietet. Ein derartiges Verbot kann z.B. ausgesprochen werden, wenn man W als nicht total definiertes Prädikat ansetzt, was im Rahmen von Sprachen mit partiell definierten Prädikaten (vgl. Ebbinghaus 1969) gestattet ist[8]. Man kann nun zeigen, daß in bestimmten Typen dieser Sprachen immer eine adäquate Einführung von Wahrheitsprädikaten möglich ist. Wir wollen dies im folgenden am Beispiel von Sprachen beweisen, die partiell interpretierte prädikatenlogische Sprachen (abgekürzt: PIPL-Sprachen) genannt werden sollen.

3.1 *Definition:* K sei eine Menge von Konstanten. S = $\langle X, I \rangle$ ist eine K-Struktur mit partieller Interpretation genau dann, wenn

(1) X $\neq$ O;

(2) I ist eine Funktion, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von K ist; I ordnet jeder Individuenkonstante aus dem Definitionsbereich ein Element von X zu und ordnet jeder n-stelligen Prädikatenkonstante aus dem Definitionsbereich ein geordnetes Paar $\langle Z_0, Z_1 \rangle$ von n-stelligen Relationen über X mit $Z_0 \cap Z_1 = 0$ zu.

Ist S = $\langle X, I \rangle$ eine K-Struktur mit partieller Interpretation und gilt für die Prädikatenkonstante P: I (P) = $\langle Z_0, Z_1 \rangle$, so heißt Z_1 Zutreffensbereich und Z_0 Nichtzutreffensbereich von P. Mit I ist einerseits insofern eine partielle Interpretation der Konstanten aus K gegeben, als I bzgl. K eine partielle Funktion ist. Andererseits ist I auch insofern partiell, als nicht notwendigerweise jedes n-Tupel von Elementen aus X entweder im Zutreffensbereich oder im Nichtzutreffensbereich einer n-stelligen Prädikatenkonstante liegt; m.a.W. die Prä-

---

8 Der Vorschlag, solche Sprachen zugrundezulegen, wird auch in dem von Martin selbst verfaßten Beitrag des Sammelbandes Martin 1970 gemacht; der genauere logische Zusammenhang zwischen diesem Vorschlag und der Einführung von Wahrheitsprädikaten wird dort jedoch nicht untersucht.

dikatenkonstanten werden bzgl. X als partiell definierte Eigenschaften interpretiert.

Die Belegungsfunktionen für Strukturen mit partieller Interpretation seien wie in 2. gewählt; die Gültigkeitsbeziehung wird dann folgendermaßen rekursiv definiert.

3.2 *Definition:* K sei eine Menge von Konstanten und $S = \langle X, I\rangle$ sei eine K-Struktur mit partieller Interpretation. Außerdem sei im folgenden jeweils $\beta \in X^V$.

(1) P sei eine n-stellige Prädikatenkonstante aus K und es seien $t_o, \ldots, t_{n-1} \in T(K)$. Weiter sei $I \cup \beta$ für t_i für jedes $i < n$ definiert.
Falls $\langle (I \cup \beta)(t_o), \ldots, (I \cup \beta)(t_{n-1})\rangle \in (I(P))_1$ (im Falle $n = O$ bedeute dies $O \in (I(P))_1$), so $S \models_\beta Pt_o \ldots t_{n-1}$.
Falls $\langle (I \cup \beta)(t_o), \ldots, (I \cup \beta)(t_{n-1})\rangle \in (I(P))_o$, so $S \models_\beta \neg Pt_o \ldots t_{n-1}$.

In den folgenden Bedingungen seien jeweils $\varphi, \psi \in F(K)$ und $v \in V$.

(2) Falls $S \models_\beta \varphi$, so $S \models_\beta \neg\neg\varphi$

(3) Falls $S \models_\beta \varphi$ oder $S \models_\beta \psi$, so $S \models_\beta \varphi \vee \psi$;
Falls $S \models_\beta \neg\varphi$ und $S \models_\beta \neg\psi$, so $S \models_\beta \neg(\varphi \vee \psi)$.

(4) Falls $S \models_{\beta^x_v} \varphi$ für ein $x \in X$, so $S \models_\beta \exists v\, \varphi$.
Falls $S \models_{\beta^x_v} \neg\varphi$ für alle $x \in X$, so $S \models_\beta \neg\exists v\, \varphi$.

In 3.2 wurde die mit 2.3 kompatible und die sich in vielen Fällen als besonders zweckmäßig erweisende Kleene-Interpretation[9] für $\neg$ und $\vee$ und die zu $\vee$ analoge Interpretation für $\exists$ gewählt; die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit gelten jedoch auch noch für andere Festlegungen.

Mithilfe von 3.2 wird eine Definiertheitsbeziehung erklärt.

---

9 Vgl. hierzu Kleene (1952:334).

3.3 *Definition:* Unter den Voraussetzungen von 3.2 wird gesetzt:

S def $\beta\,\varphi$ genau dann, wenn S $\models_\beta \varphi \vee \neg\varphi$;
S def φ genau dann, wenn $\varphi \in A$ (K) und S def $\beta\,\varphi$ für ein β.

Partiell interpretierte prädikatenlogische Sprachen werden nun durch folgende Definition bestimmt.

3.4 *Definition:* Eine PIPL-Sprache L ist das geordnete Paar aus einer Konstantenmenge K (L) und einer Menge von K (L)-Strukturen mit partieller Interpretation.

PL-Sprachen können in naheliegender Weise als spezielle PIPL-Sprachen aufgefaßt werden:

Eine PIPL-Sprache L ist eine PL-Sprache genau dann, wenn jede L-Struktur S = ⟨X, I⟩ die Eigenschaft hat, daß K (L) der Definitionsbereich von I ist und daß für jede n-stellige Prädikatenkonstante P aus K (L) die Beziehung $(I\,(P))_0 \cup (I\,(P))_1 = X^n$ erfüllt ist.

Der Unterschied zwischen dieser Bestimmung der PL-Sprachen und der Bestimmung in 2. liegt nur darin, daß bei den Strukturen im Sinne von 2. die Nichtzutreffensbereiche der Prädikatenkonstanten nicht gesondert aufgeführt werden, da sie sich als die Komplemente der Zutreffensbereich berechnen lassen.

Im weiteren werden die in 2. für PL-Sprachen eingeführten Notationen in entsprechendem Sinne auch für PIPL-Sprachen verwendet.

Die PIPL-Sprachen scheinen auf den ersten Blick gegenüber den PL-Sprachen den Nachteil zu haben, daß für sie relativ zum klassischen Prädikatenkalkül das wichtige Vollständigkeitstheorem verloren geht (genauer gesagt: der Kalkül ist zwar vollständig, aber nicht korrekt). Dies trifft zwar zu, wenn man als Folgerungsbegriff für die PIPL-Sprachen die folgende sich zunächst anbietende Verallgemeinerung des klassischen Folgerungsbegriffs wählt:

Es seien K eine Menge von Konstanten, $\varphi \in A$ (K) und $\Phi \subset A$ (K). φ folgt aus Φ genau dann, wenn jede PIPL-Sprache L mit K (L) = K für alle L-Strukturen S = ⟨X, I⟩ und alle $\beta \in X^V$ die Eigenschaft hat:

S $\models_\beta \varphi$, falls S $\models_\beta \psi$ für alle $\psi \in \Phi$.

Wenn man aber in das Definiens als zusätzliche Prämisse die Bedingung

S def $\beta\ \varphi$ aufnimmt – was naheliegend zu sein scheint, dann gilt nach wie vor ein Vollständigkeitstheorem.

3.5 *Theorem* (Vollständigkeit): Es seien K eine Menge von Konstanten, $\varphi \in A(K)$ und $\Phi \subset A(K)$. Dann gilt:
φ ist im klassischen Prädikatenkalkül ableitbar aus Φ genau dann, wenn jede PIPL-Sprache L mit K(L) = K für alle L-Strukturen S = $\langle X, I \rangle$ und alle $\beta \in X^V$ mit S def $\beta\ \varphi$ die Eigenschaft hat:

$$S \models_{\beta} \varphi, \text{ falls } S \models_{\beta} \psi \text{ für alle } \psi \in \Phi.$$

Zum Beweis des Theorems genügt es wegen des bekannten Vollständigkeitstheorems, daß man die Richtung von links nach rechts zeigt. Für den Beweis dieser Richtung verwendet man einen schnittfreien Ableitungskalkül, z.B. den Kalkül G 3 in Kleene (1952: 480); damit zeigt man durch Induktion, daß für alle Formelsequenzen Σ_1, Σ_2 gilt:

Wenn $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ ableitbar ist, dann gibt es für alle L-Strukturen S = $\langle X, I \rangle$ und alle $\beta \in X^V$ mit S def $\beta\ \psi$ für jedes ψ in Σ_2 und mit $S \models_{\beta} \rho$ für jedes ρ in Σ_1 ein φ in Σ_2 mit $S \models_{\beta} \varphi$.

Im folgenden wird nun dargestellt, wie PIPL-Sprachen zu Sprachen mit Wahrheitsprädikat erweitert werden können. Dabei soll im wesentlichen die schon in 2. für mögliche Wahrheitsprädikate vorgeschlagene Interpretation übernommen werden und es soll begründet werden, warum ausschließlich diese Interpretation als adäquat anzusehen ist.

Die Bestimmung, wann eine Prädikatenkonstante in einer PL-Sprache ein Wahrheitsprädikat ist, muß m.E. folgendermaßen für PIPL-Sprachen verallgemeinert werden (dabei sei für Formelmengen Φ gesetzt $\overline{\Phi} := \{ \neg\varphi; \varphi \in \Phi \}$).

3.6 *Definition:* L' sei eine PIPL-Sprache und W sei eine einstellige Prädikatenkonstante aus K(L'). W ist ein Wahrheitsprädikat in L' genau dann, wenn jede L'-Struktur S' = $\langle X, I' \rangle$ die Eigenschaft hat:

$$(E^*)\ (I'(W))_1 = \{ \varphi \in A(L') \cap X; S' \models \varphi \};$$

$$(I'(W))_0 = \overline{(I'(W))_1}$$

Statt (E*) kann man in 3.6 auch schreiben:

(E**) Für alle $\varphi \in A(L')$, alle $v \in V$ und alle $\beta \in X^V$ mit $\beta(v) = \varphi$ gilt:

$$S' \models_{\beta} Wv \text{ genau dann, wenn } S' \models_{\beta} \varphi;$$

$$S' \models_{\beta} \neg Wv \text{ genau dann, wenn } S' \models_{\beta} \neg\varphi.$$

Die Definition 2.1 für den Begriff der Spracherweiterung kann wortwörtlich für PIPL-Sprachen übertragen werden. Für den Vergleich von Spracherweiterungen untereinander sollen zwei neue Begriffe eingeführt werden.

3.7 *Definition:* K sei eine Menge von Konstanten und $S = \langle X, I \rangle$, $S' = \langle X', I' \rangle$ seien zwei K-Strukturen mit partieller Interpretation. Weiter sei $X = X'$. S heißt gröber als S' genau dann, wenn gilt:

(1) Der Definitionsbereich von I ist eine Teilmenge des Definitionsbereiches von I'.

(2) Für jede Individuenkonstante a, für die I definiert ist, gilt $I(a) = I'(a)$.

(3) Für jede Prädikatenkonstante P, für die I definiert ist, gilt $(I(P))_0 \subset (I'(P))_0$ und $(I(P))_1 \subset (I'(P))_1$.

3.8 *Definition:* L, L' und L'' seien PIPL-Sprachen, L' und L'' seien Erweiterungen von L und es gelte $K(L') = K(L'')$. L' heißt schwächer als L'' genau dann, wenn für alle L'-Strukturen $S' = \langle X', I' \rangle$ und alle L''-Strukturen $S'' = \langle X'', I'' \rangle$ mit $S' \mid K(L) = S'' \mid K(L)$ gilt: S' ist gröber als S''.

Schließlich sollen bezogen auf eine PIPL-Sprache L, eine L-Struktur S und die Konstantenmenge $K' = K(L) \cup \{W\}$ die Definitionen 2.3 – 2.9 übernommen werden.

3.9 *Theorem:* L sei eine PIPL-Sprache und W sei eine bzgl. K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante. Weiter sei L' diejenige Erweiterung von L mit der Eigenschaft, daß $K(L') = K(L) \cup \{W\}$ und daß

(A) Für jede L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ gilt:

$$I'(W))_0 = \overline{(I'(W))_1} \text{ und } I'(W))_1 = C(S' \mid K(L)).$$

Dann gilt:

(A') L' ist die schwächste unter den Erweiterungen von L, zu denen die Konstantenmenge K (L') gehört und in denen W ein Wahrheitsprädikat ist.

Man beachte, daß L' als Erweiterung von L auch durch die Bedingungen K (L') = K (L) ∪ {W} und (A') eindeutig bestimmt ist. Aufgrund von (A) hat L' außerdem die Eigenschaft, daß in jeder L'-Struktur S' genau die Aussagen aus A (L') im Zutreffensbereich bzw. im Nichtzutreffensbereich von W liegen, für die die Entscheidung, sie bzw. ihre Negation relativ zu der L-Struktur S' | K (L) als wahre Aussage einzustufen, reduzierbar ist; m.a.W. W beschreibt in einer L'-Struktur genau diejenigen Aussagen von A (L') als wahr bzw. als falsch, für die dieser Sachverhalt in den Verhältnissen der restringierten Struktur begründet liegt. Von L' aus gesehen führt diese Eigenschaft zu folgender Definition.

3.10 *Definition:* L' sei eine PIPL-Sprache und W sei eine einstellige Prädikatenkonstante aus K (L'). Weiter sei L die Restriktion von L' auf K (L') – {W}, d.h. L sei definiert durch:

K (L): = K (L') – {W};
S ist eine L-Struktur genau dann, wenn es eine L'-Struktur S' mit S = S' | K (L) gibt.
W ist eine fundiertes Wahrheitsprädikat in L' genau dann, wenn (A) erfüllt ist.

Bei Voraussetzung von 3.9 ergibt sich, daß ein fundiertes Wahrheitsprädikat in einer PIPL-Sprache L' insbesondere ein Wahrheitsprädikat ist.

Zum Nachweis von 3.9 zeigt man zunächst folgendes Theorem.

3.11 *Theorem:* Unter den Voraussetzungen von 3.9 gilt:

(A'') Jede L'-Struktur S' = ⟨X, I'⟩ hat für alle $\varphi \in$ F (L') und für alle $\beta \in X^V$ die Eigenschaft:

$\langle\varphi, \beta\rangle \in$ G (S' | K (L)) genau dann, wenn S' $\models_{\beta} \varphi$.

3.11 kann bei Verwendung der in 2.11 angegebenen Definition für G (S' | K (L)) sehr leicht durch Induktion bewiesen werden. Man beachte im übrigen, daß L' als Erweiterung von L auch durch K (L') = K (L) ∪ {W} und (A'') eindeutig bestimmt ist, weil mit der Gültigkeitsbeziehung einer L'-Struktur auch die Interpretation von W festliegt.

3.9 ergibt sich nun unmittelbar aus 3.11 und dem folgenden Theorem.

3.12 *Theorem:* L sei eine PIPL-Sprache, W sei eine bzgl. K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante und L' sei diejenige Erweiterung von L, für die $K(L') = K(L) \cup \{W\}$ und (A'') gilt.
Dann ist (A') für L' erfüllt.

Zum Nachweis von 3.12 zeigt man für jede L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ unter Ausnutzung der Definition von $G(S' \mid K(L))$, daß (E**) für S' erfüllt ist. Zugleich ist aufgrund dieser Definition klar, daß in jeder K (L')-Erweiterung S'' von $S' \mid K(L)$, die (E**) erfüllt, für alle $\varphi \in F(L')$ und alle $\beta \in X^V$ mit $S' \models_\beta \varphi$ jeweils auch $S'' \models_\beta \varphi$ zutrifft; damit erhält man aber, daß S' gröber als S'' ist. Zusammengefaßt liefern die bisherigen Ergebnisse folgendes Resultat.

3.13 *Korollar:* L sei eine PIPL-Sprache, W sei eine bzgl. K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante und L' sei eine Erweiterung von L mit $K(L') = K(L) \cup \{W\}$. Dann gilt, daß die Bedingungen (A), (A') und (A'') paarweise äquivalent zueinander sind.

Eine andere, sehr einfache und in ihrer Natürlichkeit unmittelbar einleuchtende Art der Konstruktion für die durch (A), (A') oder (A'') bestimmte Spracherweiterung wird im folgenden Theorem angegeben.

3.14 *Theorem:* L sei eine PIPL-Sprache und W sei eine bzgl. K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante. L' werde durch $K(L') := K(L) \cup \{W\}$ und dadurch definiert, daß zu jeder L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ auf folgende Weise eine Struktur S' konstruiert wird:

$S' := \langle X, I \cup \{\langle W, \langle Z_0, Z_1 \rangle \rangle\} \rangle$, wobei
$Z_0 := \overline{Z}_1$ und Z_1 rekursiv definiert wird durch:

Falls $\varphi \in A(L) \cap X$ und $S \models \varphi$, so $\varphi \in Z_1$;
falls $\varphi \in A(L') \cap X$, $\Phi \subset Z_1$ und
$\langle X, I \cup \{\langle W, \langle \overline{\Phi}, \Phi \rangle \rangle\} \rangle \models \varphi$, so $\varphi \in Z_1$

Dann ist (A') für L' erfüllt.

Der Beweis für 3.14 ist ohne Schwierigkeiten und kann ähnlich wie der für 3.12 geführt werden.

Nach den obigen Ergebnissen ist es insbesondere immer möglich, eine PIPL-Sprache zu einer Sprache mit Wahrheitsprädikat zu erweitern, und es bedarf bei der Bildung der Formeln der erweiterten Sprache auch keiner zusätzlichen

Sortenbeschränkung, um zu verhindern, daß das Wahrheitsprädikat außer den Aussagen unerwünschterweise noch anderen Individuen zu- oder abgesprochen wird. Eine solche Spracherweiterung ist m.E. aber nur dann adäquat, wenn sie zu einer Sprache mit fundiertem Wahrheitsprädikat führt. Genau in diesem Fall ist nämlich garantiert, daß für die Aussagen, auf die das Wahrheitsprädikat zutrifft, die in 2. formulierte Reduzierbarkeitsbedingung gilt; über die Notwendigkeit einer Erfüllung dieser Bedingung ist bereits ausführlich in 2. diskutiert worden. Die Berechtigung der Forderung, ausschließlich fundierte Wahrheitsprädikate als adäquat gelten zu lassen, zeigt sich neben der mit Hilfe von (A) formulierten Definition der Fundiertheitseigenschaft auch an den anderen, für sie angegebenen Charakterisierungen.

So ist es m.E. vernünftig, für die Erweiterung einer PIPL-Sprache L zu einer Sprache L' mit Wahrheitsprädikat zu fordern, daß in jeder L'-Struktur nur solche Formeln von F (L') bei einer Belegung gelten, für die dieser Sachverhalt auf die Gültigkeitsbeziehungen der zugrundeliegenden L-Struktur zurückgeführt werden kann; nach 3.13 ist diese Forderung nur bei fundierten Wahrheitsprädikaten erfüllt. In anderer Formulierung besagt diese Forderung, daß es möglich sein muß, die Gültigkeitsbeziehungen in jeder L'-Struktur konstruktiv aus den Gültigkeitsbeziehungen der zugehörigen L-Struktur zu gewinnen; für eine solche Konstruktion ist gerade die in 2.11 angegebenen Definition von G (S) einschlägig. Schließlich ist es auch natürlich und – wie wir gesehen haben – für eine eindeutige Bestimmung der Spracherweiterung hinreichend, wenn man verlangt, daß die Interpretation des Wahrheitsprädikats in einer L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ durch einen Definitionsprozeß zu bestimmen sein muß, der auf der sukzessiven Anwendung einer Regel basiert, die ungefähr folgendermaßen lautet:

Wenn $S' \models \varphi$, so $\varphi \in (I'(W))_1$.

Eine solche Definition für $(I'(W))_1$ ist in korrekter Formulierung in 3.14 beschrieben und führt zu fundierten Wahrheitsprädikaten.

4. Wahrheitsprädikate in Sprachen mit Zitatfunktion

Im nächsten Schritt soll nun das Problem der Einführung von Wahrheitsprädikaten am Beispiel von Sprachen mit Zitatfunktion behandelt werden.

Und zwar wollen wir hier diejenigen Sprachen untersuchen, die man erhält, wenn man in PIPL-Sprachen zusätzlich für alle Arten von Zeichenreihen die Bildung von Zitaten gestattet und die Zitate als normiert zu interpretierende Terme auffaßt. Dabei ist es zweckmäßig, das Zitatzeichen nicht als Funktionskonstante anzusehen sondern diesem Zeichen eine intern syntaktische Rolle für die Bildung von Individuenkonstanten zuzuweisen. Damit ist es auch möglich, PIPL-Sprachen mit Zitatfunktion (abgekürzt: PIPLZ-Sprachen) als spezielle PIPL-Sprachen aufzufassen und das Problem der Einführung von Wahrheitsprädikaten in PIPLZ-Sprachen auf das entsprechende Problem für die PIPL-Sprachen zu reduzieren.

Im folgenden werde vorausgesetzt, daß für beliebige Zeichenreihen ζ, die aus logischen Zeichen, dem Zitatzeichen ‚ ', Individuenvariablen oder Konstanten zusammengesetzt sind, stets ‚ζ' als eine Individuenkonstante gilt.

4.1 *Definition:* Für beliebige Konstantenmengen K sei die Konstantenmenge $\hat{K}$ definiert durch:

(1) $K \subset \hat{K}$

(2) Falls $\zeta \in (\{\neg, \vee, \exists, `\} \cup V \cup \hat{K})^*$, so ‚$\zeta$' $\in \hat{K}$[10].

4.2 *Definition:* Eine PIPL-Sprache L ist eine PIPLZ-Sprache genau dann, wenn

(1) $K(L) = \widehat{K(L)}$

(2) Für jede Individuenkonstante, die von der Form ‚ζ' ist, und für jede L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ gilt:

(a) I ist definiert für ‚ζ' genau dann, wenn $\zeta \in X$;
(b) wenn I für ‚ζ' definiert ist, dann $I(‚\zeta') = \zeta$.

Man beachte, daß in 4.2 nicht vorausgesetzt wird, daß in jeder L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ die Funktion I für alle Zitate in K definiert ist; folglich ist es auch nicht notwendig, daß alle Zitate in X liegen. Diese Art der Definition hat für uns den Vorteil, daß bei der Erweiterung von PIPLZ-Sprachen zu Sprachen desselben Typs eine Erweiterung der Individuenbereiche nicht erforderlich ist.

Nach den Ergebnissen von 3. läßt sich jede PIPLZ-Sprache L zu einer PIPL-Sprache mit fundiertem Wahrheitsprädikat erweitern. Die durch den Erweiterungsprozeß gewonnene Sprache ist aber i.a. selbst keine PIPLZ-Sprache. Damit stellt sich die Frage, ob es auch möglich ist, L zu einer PIPLZ-Sprache mit

---

10 Die *-Operation bewirkt den Übergang von einer Zeichenmenge zur Menge der zugehörigen Zeichenreihen.

fundiertem Wahrheitsprädikat zu erweitern, und zwar sollte die erweiterte Sprache L' gerade die Bedingung $K(L') = \overline{K(L) \cup \{W\}}$ erfüllen, wenn W als Wahrheitsprädikat für L' gewählt wird. Daß eine solche Erweiterung immer existiert, besagt folgendes Theorem.

4.3 *Theorem:* L sei eine PIPLZ-Sprache und W sei eine bzgl. K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante. Dann gibt es genau eine PIPLZ-Sprache L' derart, daß L' Erweiterung von L ist, $K(L') = \overline{K(L) \cup \{W\}}$ und daß W ein fundiertes Wahrheitsprädikat in L' ist. L' ist zugleich die schwächste unter den Erweiterungen L" von L mit der Eigenschaft, daß L" eine PIPLZ-Sprache ist, daß $K(L'') = \overline{K(L) \cup \{W\}}$ und daß W ein Wahrheitsprädikat in L" ist.

Zum Beweis von 4.3 definiert man zu L zunächst eine Erweiterung L^+ mit $K(L^+) := (\overline{K(L) \cup \{W\}}) - \{W\}$, indem man in den zu definierenden L^+-Strukturen, die nicht zu K (L) gehörigen Individuenkonstanten von $K(L^+)$ gemäß 4.2 (2) interpretiert. L^+ kann anschließend nach 3.9 zu einer Sprache L' erweitert werden, die die in 4.3 gewünschten Eigenschaften besitzt.

Im Bereich der PIPLZ-Sprachen läßt sich für Sprachen mit Wahrheitsprädikat folgende vereinfachte Charakterisierung angeben.

4.4 *Theorem:* L' sei eine PIPLZ-Sprache und W sei eine einstellige Prädikatenkonstante aus K (L'). Dann gilt: W ist ein Wahrheitsprädikat in L' genau dann, wenn jede L'-Struktur

$S' = \langle X, I' \rangle$ die Eigenschaft hat:

(E***) Für alle $\varphi \in A(L')$ gilt:

$S' \models W$ ‚φ' genau dann, wenn $S' \models \varphi$;

$S' \models \neg W$ ‚φ' genau dann, wenn $S' \models \neg\varphi$.

Der Beweis für 4.4 ist ohne Schwierigkeiten und soll daher nicht ausgeführt werden.

Von Bedeutung ist die Tatsache, daß es nicht möglich ist, die metasprachlichen Äquivalenzbeziehungen in (E***) vollständig in die Objektsprache zu übertragen und auf die Bedingung $S' \models W$ ‚φ' $\leftrightarrow \varphi$ zu reduzieren. Und zwar ist dies deshalb nicht möglich, weil in dem gewählten Junktorensystem die Biimplikation $\leftrightarrow$ nicht so definiert werden kann, daß $\varphi \leftrightarrow \psi$ auch dann in einer Struktur gilt, wenn für sie φ und ψ nicht definiert ist[11]. Wie sich leicht zeigen läßt, ist nur folgende Umformulierung von 4.4 erreichbar.

4.5 *Theorem:* L' sei eine PIPLZ-Sprache und W sei eine einstellige Prädikatenkonstante aus K (L'). Dann gilt: W ist ein Wahrheitsprädikat in L' genau dann, wenn jede L'-Struktur S' = ⟨X, I'⟩ für alle $\varphi \in A$ (L') die Eigenschaft hat:

Wenn S' def W ‚φ' oder (S def φ und $\varphi \in X$),
dann S $\models$ W ‚φ' $\leftrightarrow \varphi$.

Insgesamt erhält man mit 4.3 und 4.5 das für einen Vergleich mit den Diskussionsergebnissen in Abschnitt 1. wichtige Resultat, daß in PIPLZ-Sprachen eine Einführung von fundierten Wahrheitsprädikaten immer möglich ist, daß aber zur Charakterisierung der Interpretation dieser Prädikate weder die Bedingung (E***) in 4.4 schon ausreicht noch daß (E***) durch die Forderung nach der Allgemeingültigkeit von W ‚φ' $\leftrightarrow \varphi$ ersetzt werden kann.

5. Die Behandlung des Prädikats „Heterolog"

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß in PIPL-Sprachen auch der Begriff „heterolog" widerspruchsfrei eingeführt und die Antinomie von Grelling aufgelöst werden kann.

L sei eine PIPL-Sprache und H sei eine bzgl. K (L) neue einstellige Prädikatenkonstante. Gesucht wird eine Erweiterung L' von L derart, daß K (L') = K (L) $\cup$ $\{$ H $\}$ und daß jede L'-Struktur S' = ⟨X, I'⟩ die Eigenschaft hat:

(F) Für jede einstellige Prädikatenkonstante P $\in$ K (L') und für jedes $i < 2$ gilt:

P $\in (I'(H))_i$ genau dann, wenn P $\in (I'(P))_{1-i}$.

(F) kann äquivalent umformuliert werden in:

11 Man kann zwar im Gegensatz zu unserer Vorgehensweise auch ein Junktorensystem wählen, in dem eine solche Implikation definierbar ist. In diesem Fall muß aber bei der Interpretation von W ein neuer Typ von Undefiniertheit eingeführt werden, der nur metasprachlich und nicht zugleich objektsprachlich ausdrückbar ist. Somit verschiebt sich das Problem nur auf eine andere Ebene.

(F') Für jede einstellige Prädikatenkonstante $P \in K(L')$, für jedes $v \in V$ und für jedes $\beta \in X^V$ mit $\beta(v) = P$ gilt:

$$S' \models_{\beta} Hv \text{ genau dann, wenn } S' \models_{\beta} \neg Pv;$$

$$S' \models_{\beta} \neg Hv \text{ genau dann, wenn } S' \models_{\beta} Pv.$$

Es ist nun sofort zu sehen, daß S' durch (F) bzw. (F') eindeutig bestimmt ist, falls man zusätzlich fordert, daß in $(I'(H))_0 \cup (I'(H))_1$ nur einstellige Prädikatenkonstanten aus K (L') liegen. Die so definierte Sprache L' ist zugleich die schwächste Erweiterung von L mit der Konstantenmenge $K(L) \cup \{H\}$ und der Eigenschaft, daß jede der zu ihr gehörigen Strukturen (F) erfüllt. Darüberhinaus ist klar, daß die Prädikatenkonstante H selbst bei keiner L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ in $(I'(H))_0 \cup (I'(H))_1$ liegt. Die gegenteilige Annahme würde nämlich zu einer der Antinomie von Grelling entsprechenden Antinomie führen: es müßte dann eine L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ existieren, für die entweder $H \in (I'(H))_0$ oder $H \in (I'(H))_1$ erfüllt wäre; in beiden Fällen würde sich aber ein Widerspruch ergeben, weil nach (F) gilt:

$$H \in (I'(H))_0 \text{ genau dann, wenn } H \in (I'(H))_1.$$

Falls L eine PL-Sprache ist, kann die zu L bestimmte Erweiterung auch nur dann eine PL-Sprache sein, wenn für keine L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ die Konstante H in X liegt. Anders ausgedrückt: nicht jede PL-Sprache kann zu einer PL-Sprache erweitert werden, die ein Prädikat zur Beschreibung der „heterologen" Prädikate besitzt. Das zeigt erneut, daß eine Beschränkung auf PL-Sprachen nicht sinnvoll ist, wenn man von der Möglichkeit Gebrauch machen will, in einer Sprache auch über deren eigene sprachliche Ausdrücke zu sprechen.

Ist L eine PIPLZ-Sprache, dann ist die oben zu L bestimmte Erweiterung i.a. nicht selbst eine PIPLZ-Sprache. Aufgrund der Diskussion in Abschnitt 4. dürfte aber klar sein, daß es zu L auch eine schwächste Erweiterung L' derart gibt, daß L' eine PIPLZ-Sprache ist, daß $K(L) = \widehat{K(L) \cup \{H\}}$ und daß (F) für jede L'-Struktur S' erfüllt ist. Statt (F) kann für S' auch gefordert werden:

(F'') Für jede einstellige Prädikatenkonstante $P \in K(L')$ gilt: Wenn S' def H ‚P' oder S' def P ‚P', dann $S' \models H$ ‚P' $\leftrightarrow \neg P$ ‚P'.

Analog zu dem Ergebnis für fundierte Wahrheitsprädikate ist aber weder L' durch die Bedingung, daß (F'') für alle L'-Strukturen erfüllt ist, schon eindeutig bestimmt, noch kann diese Bedingung durch die Forderung nach der Allgemeingültigkeit von H ,P' $\leftrightarrow \neg$ P ,P' für alle einstelligen Prädikatenkonstanten P ϵ K (L') ersetzt werden.

6. Allgemeine Bemerkungen über Spracherweiterungen

Abschließend soll mit einigen Bemerkungen auf die generellen Konsequenzen eingegangen werden, die sich aus der Diskussion über die Einführung der Prädikate „wahr" und „heterolog" ergeben. Bei dieser Diskussion dürfte deutlich geworden sein, daß für das Auftreten der Antiomienprobleme der Umstand verantwortlich gemacht werden kann, daß die Problematik von Spracherweiterungsprozessen allgemeiner Art bisher nicht genau genug analysiert worden ist. Solche Prozesse können sehr unterschiedlich strukturiert sein. Relativ unproblematisch ist im Rahmen einer PIPL-Sprache L z.B. der Fall, wo unter Bezug auf eine fest vorgegebene Wahl von Variablen $v_o, \ldots, v_{n-1}$ und unter Rückgriff auf eine Formel $\psi \in F(L)$ eine neue n-stellige Prädikatenkonstante Q dadurch eingeführt wird, daß jede L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ so zu einer $K(L) \cup \{Q\}$-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ mit partieller Interpretation erweitert wird, daß S' die Bedingung erfüllt:

(B) Für alle $\beta \in X^V$ gilt:

$$S' \models_{\beta} Qv_o \ldots v_{n-1} \text{ genau dann, wenn } S' \models_{\beta} \psi;$$

$$S' \models_{\beta} \neg Qv_o \ldots v_{n-1} \text{ genau dann, wenn } S' \models_{\beta} \neg \psi.$$

In dem speziellen Fall, daß in L die Aussage $\neg \exists v_o \ldots \exists v_{n-1} \neg(\psi \vee \neg \varphi)$ allgemeingültig ist, kann (B) durch die Bedingung $S' \models \neg \exists v_o \ldots \exists v_{n-1} \neg(Qv_o \ldots v_{n-1} \leftrightarrow \psi)$ ersetzt werden. Bei PL-Sprachen liegt dieser Fall generell vor und damit ist ersichtlich, daß die hier angesprochene Art der Einführung von Prädikatenkonstanten gerade eine Verallgemeinerung des für PL-Sprachen einschlägigen Definitionstyp ist, bei dem Q durch die Forderung nach der Allgemeingültigkeit des Definitionsaxioms

$$\neg \exists v_o \ldots \exists v_{n-1} \neg(Q\, v_o \ldots v_{n-1} \leftrightarrow \psi)$$

eingeführt wird.

Die jeweils zu einer L-Struktur S zu definierende Erweiterung S' ist durch (B) bereits eindeutig bestimmt. Und zwar liegt das hauptsächlich daran, daß man in (B) statt $S' \models_{\beta} \psi$ bzw. $S' \models_{\beta} \neg \psi$ auch $S \models_{\beta} \neg \psi$ schreiben kann. Aus diesem Grund ergeben sich auch keine Schwierigkeiten daraus, daß man den für die Einführung von Q durchzuführenden Spracherweiterungsprozeß verkürzt darstellt als den Übergang von L zu der PIPL-Sprache L', die die Eigenschaft hat, daß $K(L') = K(L) \cup \{Q\}$ und daß für jede L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ erstens (B) erfüllt ist und zweitens $S' \mid K(L)$ eine L-Struktur ist. Diese Darstellung ist deshalb verkürzt, weil aus ihr nicht unmittelbar hervorgeht, daß L' eine Erweiterung von L ist und daß es nicht zwei L'-Strukturen S' und S'' mit $S' \neq S''$ und $S' \mid K(L) = S'' \mid K(L)$ geben kann. Daß bei diesem Typ von Spracherweiterung besonders einfache Verhältnisse vorliegen, zeigt sich auch daran, daß folgendes Eliminationstheorem gilt.

6.1 *Theorem:* Es seien L eine PIPL-Sprache $\psi \in F(L)$ und $v_o, \ldots, v_{n-1} \in V$. Weiter sei Q eine bzgl. K (L) neue n-stellige Prädikatenkonstante und L' sei die eindeutig bestimmte Erweiterung von L mit der Eigenschaft, daß $K(L') = K(L) \cup \{Q\}$ und daß (B) für jede L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ erfüllt ist. Schließlich sei die Funktion $e : F(L') \to F(L)$ definiert durch:

(a) $e(\varphi) := \varphi$ für alle $\varphi \in F(L)$.

(b) $e(Qt_o \ldots t_{n-1}) := \psi^{t_o \ldots t_{n-1}}_{v_o \ldots v_{n-1}}$ für alle $t_o, \ldots, t_{n-1} \in T(L')$[12].

(c) $e(\neg\varphi) := \neg e(\varphi)$, $e(\varphi \vee \rho) := e(\varphi) \vee e(\rho)$ und
$e(\exists v \varphi) := \exists v\, e(\varphi)$ für alle $\varphi, \rho \in F(L') - F(L)$ und alle $v \in V$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für jede L'-Struktur

$S' = \langle X, I' \rangle$, für jedes $\varphi \in F(L')$ und für jedes $\beta \in X^V$:

$S' \models_\beta \varphi$ genau dann, wenn $S' \mid K(L) \models_\beta e(\varphi)$.

Auf die Durchführung eines Beweises für 6.1 sei hier verzichtet.

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Spracherweiterungen zur Ein führung der Prädikate „wahr" und „heterolog" sind von allgemeinerem als dem soeben besprochenen Typ. Und zwar wird hier nach folgendem Schema verfahren:

---

12 $\psi^{t_o \ldots t_{n-1}}_{v_o \ldots t_{n-1}}$ entsteht aus ψ dadurch, daß in ψ durch verallgemeinerte Substitution der Reihe nach von links nach rechts t_o für $v_o, \ldots$ und t_{n-1} für v_{n-1} substituiert wird; vgl. Hermes (1972:114f).

Eine PIPL-Sprache L wird durch Einführung einer bzgl. K (L) neuen n-stelligen Prädikatenkonstanten Q zu einer PIPL-Sprache L' mit $K(L') = (L) \cup \{ Q \}$ erweitert. Dieser Erweiterungsprozeß wird unter Bezug auf eine fest vorgegebene Wahl von Variablen $v_o, \ldots, v_{n-1}$ und unter Rückgriff auf die über einer Menge Y definierte n-stellige Funktion $f\colon Y^n \to F(L')$ vollzogen. Jede L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ soll nun so zu einer L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ erweitert werden, daß S' die Bedingung erfüllt:

(B') Für alle $\varphi \in F(L')$, alle $y_o, \ldots, y_{n-1} \in Y$ und alle $\beta \in X^V$ mit $f(y_o, \ldots y_{n-1}) = \varphi$ und $\beta(v_i) = y_i$ für jedes $i < n$ gilt:

$S' \models_{\beta} Q v_o \ldots v_{n-1}$ genau dann, wenn $S' \models_{\beta} \varphi$;

$S' \models_{\beta} \neg Q v_o \ldots v_{n-1}$ genau dann, wenn $S' \models_{\beta} \neg \varphi$.

Im Gegensatz zum oben besprochenen Fall ist S' im allgemeinen noch nicht eindeutig durch (B') bestimmt, wie die Beispiele der Prädikate „wahr" und „heterolog" belegen. An diesen Beispielen wird aber auch deutlich, daß unter den Erweiterungen von S, die (B') erfüllen, eine als „natürliche" Erweiterung ausgezeichnet werden kann. Und zwar handelt es sich dabei um die gröbste Erweiterung S' von S, für die (B') erfüllt ist (die Existenz einer solchen Erweiterung kann nachgewiesen werden). Die Natürlichkeit dieser Wahl läßt sich auf verschiedene Arten rechtfertigen; wir haben das am Beispiel des Wahrheitsprädikats in Abschnitt 3. ausführlich diskutiert. Eine der möglichen Rechtfertigungen besteht darin, daß einzig und allein die genannte Wahl garantiert, daß anstelle eines Eliminationstheorems wie 6.1 wenigstens noch das folgende Reduktionstheorem gilt.

6.2 *Theorem:* Es seien L eine PIPL-Sprache, $v_o, \ldots, v_{n-1} \in V$ und Q eine bzgl. K (L) neue n-stellige Prädikatenkonstante. Weiterhin sei eine Menge Y und eine Funktion $f\colon Y^n \to F(K(L) \cup \{ Q \})$ gegeben und L' sei die schwächste Erweiterung von L mit der Eigenschaft, daß $K(L') = K(L) \cup \{ Q \}$ und daß (B') für jede L'-Struktur $S' = \langle X, I' \rangle$ erfüllt ist. Schließlich sei für jede L-Struktur $S = \langle X, I \rangle$ die Relation R (S) definiert durch

(1) Falls $t_o, \ldots, t_{n-1} \in T(L')$, $y_o, \ldots y_{n-1} \in Y$, $\beta \in X^V$ und $(I \cup \beta)(t_i) = y_i$ für $i < n$, so
$\langle Qt_o \ldots t_{n-1}, \beta \rangle \, R(S) \, \{ \langle f(y_o, \ldots, y_{n-1})\, {}^{t_o \ldots t_{n-1}}_{v_o \ldots v_{n-1}}, \beta \rangle \}$.

(2) Falls $\varphi \in F(L') - F(L)$ und $\beta \in X^V$, so
$\langle \neg\neg\varphi, \beta\rangle\, R(S)\ \{\langle\varphi, \beta\rangle\}$.

(3) Falls $\varphi \vee \psi \in F(L') - F(L)$ und $\beta \in X^V$, so
$\langle\varphi \vee \psi, \beta\rangle\, R(S)\ \{\langle\varphi\, \beta\rangle\}$,
$\langle\varphi \vee \psi, \beta\rangle\, R(S)\ \{\langle\psi\, \beta\rangle\}$ und
$\langle\neg(\varphi \vee \psi), \beta\rangle\, R(S)\ \{\langle\neg\varphi, \beta\rangle, \langle\neg\psi, \beta\rangle\}$.

(4) Falls $\exists v\, \varphi \in F(L') - F(L)$, $\beta \in X^V$ und $x \in X$, so
$\langle \exists v\, \varphi, \beta\rangle\, R(S)\ \{\langle\varphi, \beta^{x}_{v}\rangle\}$ und
$\langle \neg\exists v\, \varphi, \beta\rangle\, R(S) \{\langle\neg\varphi, \beta^{y}_{v}\rangle; y \in X\}$.

Unter diesen Voraussetzungen hat jede L'-Struktur $S' = \langle X, I'\rangle$ für jedes $\varphi \in F(L')$ und für jedes $\beta \in X^V$ die Eigenschaft:

$S' \models_{\beta} \varphi$ genau dann, wenn es für $\langle\varphi, \beta\rangle$ einen endlichen $R(S' \mid K(L))$-Reduktionsbaum derart gibt, daß $S' \mid K(L) \models_{\beta'} \psi$ für jeden Endpunkt $\langle\psi, \beta'\rangle$ des Baumes erfüllt ist.

6.2 kann durch Verallgemeinerung der in Abschnitt 3. durchgeführten Überlegungen bewiesen werden. Der Hauptgrund, warum für den zweiten Spracherweiterungstyp kein 6.1 entsprechendes Theorem gilt, ist darin zu sehen, daß die Gültigkeit solcher Formeln φ der erweiterten Sprache, in denen der Existenzquantor und die neue Prädikatenkonstante vorkommen, i.a. nicht durch die Gültigkeit einer einzigen, φ zugeordneten Formel der zugrundeliegenden Sprache beschrieben werden kann. Beispielsweise ist es im Falle des in 5. diskutierten Prädikats H nicht möglich, die Aussage $\exists v\, Hv$ durch eine Aussage der zugrundeliegenden Sprache L zu ersetzen, sofern in K (L) unendlich viele einstellige Prädikatenkonstanten liegen. Wenn L allerdings nur endlich viele solcher Konstanten $P_o, \ldots, P_n$ besitzt und z.B. außerdem eine Sprache mit Zitatfunktion ist, dann kann $\exists v\, Hv$ durch $\neg P_o\, ,P_o{}' \vee \ldots \vee \neg P_n\, ,P_n{}'$ ersetzt werden. Bei dem Vorhandensein unendlich vieler einstelliger Prädikatenkonstanten müßte in L auch die Bildung unendlicher Alternationen zulässig sein, wollte man eine Elimination von H erreichen. Im Falle einer Sprache mit fundiertem Wahrheitsprädikat W ist es demgegenüber prinzipiell unmöglich, einen geeigneten Ersatz für die Aussage $\exists v\, Wv$ zu finden, weil die Anwendung von W weder auf die Aussagen der zugrundeliegenden Sprache beschränkt ist noch Sprachen definiert werden können, welche die Bildung von Alternationen über die Menge aller ihrer Aussagen erlauben.

An den eben diskutierten Beispielen dürfte deutlich geworden sein, daß der Verlust des Eliminationstheorems für Spracherweiterungen des zweiten Typs mit einem erheblichen Gewinn an Ausdrucksstärke einhergeht. In diesem Zusammenhang stellt sich die generelle Frage, wie ausdrucksstark PIPL-Sprachen durch Spracherweiterungen dieses Typs gemacht und welche theoretisch oder empirisch wichtigen Prädikate im Rahmen dieses Typs eingeführt werden können. Darüberhinaus legen die Ergebnisse unserer Diskussion die Aufgabe nahe, das Spracherweiterungsproblem unter noch generellem Aspekt zu untersuchen und u.a. etwa die folgenden Fragen zu erörtern:

- Welche Spracherweiterungstypen sollten theoretisch unterschieden werden?
- Welche Eigenschaften haben die einzelnen Typen und welche Ausdrucksstärke kann mit ihnen erzielt werden?
- Welche Probleme ergeben sich bei einer Nacheinanderausführung von mehreren Spracherweiterungen im Hinblick auf die Anschließbarkeit und Fortsetzbarkeit der verschiedenen neu eingeführten Begriffe?
- Welche unter den möglichen Spracherweiterungstypen müssen z.B. für eine Rekonstruktion natürlicher Sprachen in Betracht gezogen werden und in welcher Reihenfolge können die notwendigen Erweiterungen durchgeführt werden?

Eine Beantwortung der hier aufgeworfenen Fragen muß anderen Untersuchungen vorbehalten bleiben; das Ziel der vorliegenden Arbeit war es diesbezüglich nur, auf die Notwendigkeit solcher Untersuchungen hinzuweisen.

Literaturverzeichnis

Bar-Hillel, Y. (1970): Do Natural Languages contain Paradoxes? In: Ders.: Aspects of Language. Jerusalem–Amsterdam. pp. 273–285.

Davis, Ch. (1974): Some Semantically Closed Languages. In: Journal of Philosophical Logic 3 (1974), pp. 229–240.

Ebbinghaus, H.-D. (1969): Über eine Prädikatenlogik mit partiell definierten Prädikaten und Funktionen. In: Archiv f. mathem. Logik u. Grundlagenf. 12, pp. 39–53.

Feferman, S. (1976): Comparison of some Type-Free Semantic and Mathematical Theories. Manuskript Universität Stanford (erscheint in: Journ. of Symb. Logic).

Hermes, H. (1972³): Einführung in die mathematische Logik. Stuttgart.

Kindt, W. (1972): Eine abstrakte Theorie von Dialogspielen. Dissertation Freiburg.

Kleene, S.C. (1952): Introduction to Metamathematics.

Kripke, S. (1975): Outline of a Theory of Truth. In: Journ. of Philosophy 72, pp. 690–716.

Martin, F.L. (1970): The Paradox of the Liar. London–New Haven.

Martin, R.L./Woodruff, P.W. (1976): On Representing ‚True in L' in L. In: Kasher, A. (ed.): Language in Focus, Dordrecht.

Parsons, Ch. 1974: The Liar Paradox. In: Journal of Philosophical Logic. 3 (1974), pp. 381–412.

Shoenfield, J.R. (1967): Mathematical Logic. New York.

Stegmüller, W. (1968²): Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Wien–New York.

Suppes, P. (1960): Axiomatic Set Theory. Princeton.

Tarski, A. (1935): Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. In: Studia Philosophica 1 (1935), pp. 261–405.

Thomason, R.H. (1973): Necessity, Quotation, and Truth: An Indexical Theory. Manuskript, University of Pittsburgh. Inzwischen erschienen in: Kasher, A. (ed.): Language in Focus. Dordrecht 1976.

Personenregister