

regions is greater than 1,5 m – in order to correct the cable response so as $R_2(F_2) \rightarrow \min$ and then, $z_2 = [0.1, 0.6, 0.7, 0.0, 1.1, 0.4, 0.0, 1.3, 1.3, 1.4, 0.3]^T$ gives the controlled position of the cable which is in contact with the sea bottom in nodes (4) and (7).

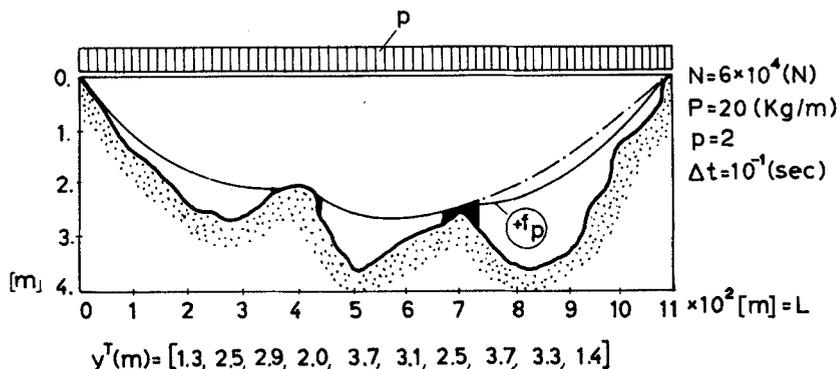


Fig. 2. On the numerical example: Initial and controlled configuration of the cable ($p = 2$)

Acknowledgements

The author would like to express his grateful thanks to Prof. Dr. habil. P. D. PANAGIOTOPOULOS for his continuous encouragement and support and to the Alexander von Humboldt-Stiftung for the financial support of his research work.

References

- 1 KARAKOSTAS, C. Z.; BANIOPOULOS, C. C.; PANAGIOTOPOULOS, P. D.: Sea-bed-structure interaction for submarine cables. *Comp. Struct.* **22** (1986), 213–224.
- 2 BANIOPOULOS, C. C.: Optimal control of submarine cables in unilateral contact with the sea-bed profile. *Comp. Struct.* **33** (1989), 601–608.
- 3 MEIROVITCH, L.; VANLANDINGHAM, H. F.; OZ, H.: Control of spinning flexible spacecraft by modal synthesis. *Acta Astronautica* **4** (1977), 985–1010.
- 4 ADALI, S.; BRUCH, J. C.; SADEK, I. S.; SLOSS, J. M.: Feedback control of a vibrating beam by stiffening action. *Mech. Res. Comm.* **15** (1988) 1, 21–29.
- 5 MOREAU, J. J.: *Mecanique classique I, II*. Masson, Paris 1972.
- 6 MITSOPOULOU, E.: Unilateral contact, dynamic analysis of beams by a time stepping, quadratic programming procedure. *Meccanica* **18** (1983), 254–265.
- 7 BATHE, K. K.; WILSON, E. L.: *Numerical Methods in finite element analysis*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Jersey 1976.
- 8 HOUBOLT, J. C.: A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. Aeronautical Sciences* **17** (1950), 540–550.
- 9 PANAGIOTOPOULOS, P. D.: *Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions*. Birkhäuser Verlag, Basel/Boston 1985.
- 10 PANAGIOTOPOULOS, P. D.: A variational inequality approach to the inelastic stress-strain analysis of cable structures. *Comp. Struct.* **6** (1976), 133–149.
- 11 YANG, J.-N.: Application of optimal control theory to Civil Engineering structures. *J. Mech. Div. ASCE* **101** (1975) 6, 819–838.
- 12 BISBOS, C.: *Optimal control of linear structures*. Doctoral Dissertation, Aristotle University, Thessaloniki 1982.
- 13 BANIOPOULOS, C. C.: A linear approach to the solution of the unilateral contact problem of a submarine cable. *Technica Chronika-A* **5** (1985), 23–35.

Adresse: Dr. C. C. BANIOPOULOS, Institute of Steel Structures, Aristotle University, 54006 Thessalonki, Greece

Verzweigung in einem Finite-Elemente Modell für das hydrostatische Skelett

1. Das mathematische Modell

Das ursprüngliche Konstruktionsprinzip für tierische Organismen ist das Hydroskelett. Dabei wird eine inkompressible Flüssigkeit von einer muskulösen Körperwand umschlossen [1]. Die Steifigkeit und Körperform werden durch Änderung des Tonus in den verschiedenen Muskelgruppen verändert. Für die Gleichgewichtszustände eines wurmförmigen Hydroskeletts haben wir in [7] ein mathematisches Modell aufgestellt und analysiert. Es verwendet Finite Elemente in

Form allgemeiner Sechsfächner, deren Anzahl, nämlich 21, sich an der anatomischen Segmentierung eines mit diesem Skelettyp ausgestatteten Tieres, des Blutegels *Hirudo medicinalis* L., orientiert. Hier betrachten wir den Spezialfall einer aus Pyramidenstümpfen bestehenden Form (Fig. 1A) und untersuchen den Einfluß des Gesamtvolumens auf die Gleichgewichtszustände, u. a. auch im Hinblick auf die 5–10fache Zunahme des Körpervolumens bei einer Blutmahlzeit des Egels [4].

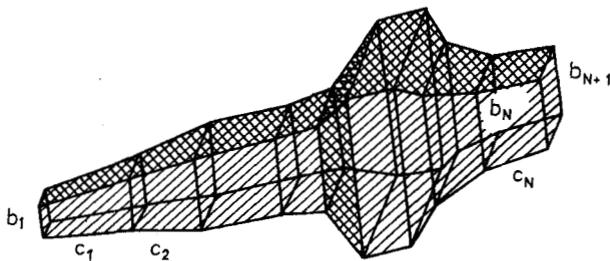


Fig. 1A

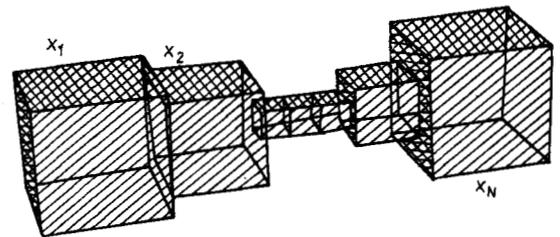


Fig. 1B

Das System aus Fig. 1A wird durch den Vektor

$$x = (b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_N, c_N, b_{N+1}) \in \mathbb{R}^{2N+1}$$

beschrieben, und wir nehmen an, daß es sich im Gleichgewicht befindet, wenn die Summe der potentiellen Energien in den Kantelementen (\cong Muskeln) minimal ist bei konstantem Gesamtvolumen v , in Formeln

$$E(x) = 4 \left(\sum_{i=1}^{N+1} P_{Ri}(b_i) + \sum_{i=1}^N P_{Li}(c_i) \right) \stackrel{!}{=} \text{Min} \tag{1}$$

$$V(x) := \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N h_i (b_i^2 + b_i b_{i+1} + b_{i+1}^2) = v, \quad h_i^2 = c_i^2 - \frac{1}{2} (b_{i+1} - b_i)^2.$$

Die Funktionen P_{Ri} und P_{Li} beschreiben dabei den Potentialverlauf des i -ten Ring- bzw. Längselementes, ihre Ableitungen die jeweiligen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall des „Einheitswurms“ [7], d. h. gleiche Minimallänge und Hookesches Federgesetz für alle Muskeln ($P_{Ri}(l) = P_{Li}(l) = \frac{1}{2} (l - 1)^2$).

Für die Unterstützung bei den Rechnungen danken wir H. SCHROPP, S. FESSLER und D. WALTHER.

2. Das Verzweigungsdiagramm für den Einheitswurm

An einem lokalen Minimum des restringierten Optimierungsproblems (1) existiert ein Lagrange-Multiplikator p (= Innendruck, siehe [7]) mit

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}(x) = p \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \quad (i = 1, \dots, 2N + 1), \quad V(x) = v. \tag{2}$$

Bei Variation des Parameters v besitzt dieses nichtlineare $(2N + 2)$ -dimensionale System, und damit unter Ausgangsproblem, eine komplizierte Lösungsstruktur. Fig. 2 zeigt einen wesentlichen Teil des im Fall $N = 21$ numerisch berechneten Verzweigungsdiagramms. Es wurde mit Hilfe bekannter Techniken zur Verfolgung von Lösungszweigen und zur Bestimmung singulärer Punkte berechnet, wobei außerdem die Bandstruktur der Jacobi-Matrix zum System (2) berücksichtigt wurde (vgl. [6, 7]).

Die bei kleinen Volumina stabilen Wurmformen aus nahezu gleichgroßen Segmenten bilden bei Erhöhung von v zunächst in der Mitte eine Verdickung aus, bis sie schließlich bei etwa $v = 242,7$ an einem Verzweigungspunkt (mit \square markiert) ihre Stabilität verlieren, d. h. von einem Minimum der Aufgabe (1) zu einem Sattelpunkt übergehen. Am Verzweigungspunkt wird die Symmetrie bez. der Körpermitte gebrochen, und man findet unsymmetrische, stabile Formen. Außerdem gibt es weitere Zweige stabiler und instabiler Formen, bei denen die Verdickung in weiter vorn liegenden Segmenten auftritt; die jeweiligen durch Spiegelung entstehenden Lösungen sind in Fig. 2 weggelassen. Schließlich gibt es auch Lösungen mit mehreren Verdickungen (in Fig. 2 nicht gezeigt), die jedoch alle instabil sind. Die gestrichelte Linie in Fig. 2 begrenzt Wurmformen, bei denen in keinem Muskel der Dehnungsfaktor 5, ein bei Blutegeln üblicher Wert [3], überschritten wird. Bistabilitäten erschweren die eindeutige Feststellung der Körperform durch die neurale Steuerung. Wir erwarten deshalb, daß sie durch die Blutegel typischen nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (vgl. [7]) unterdrückt werden.

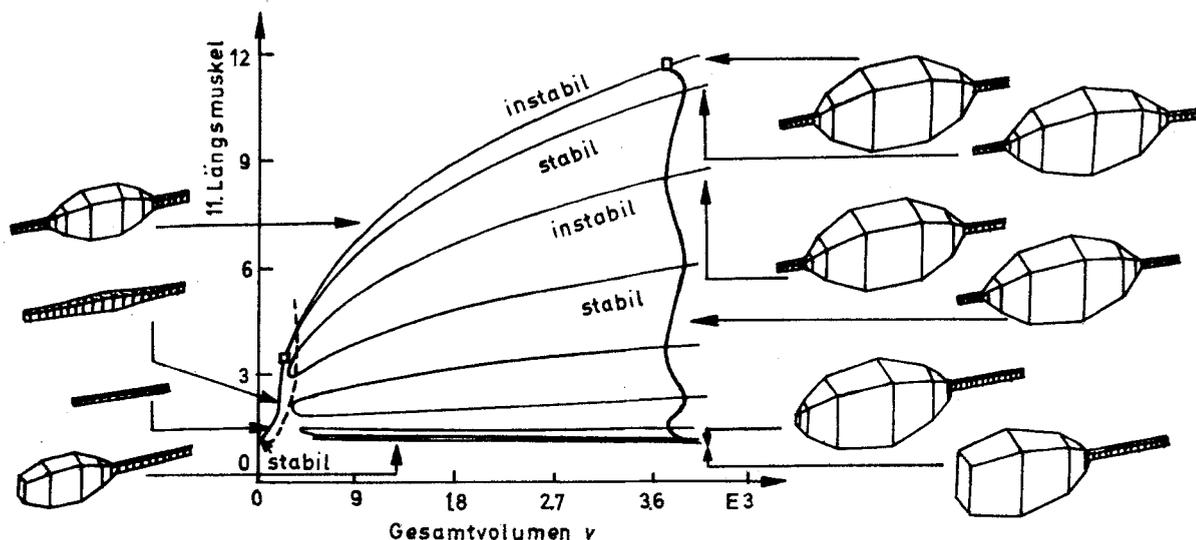


Fig. 2

Eine mathematische Erklärung für die in Fig. 2 dargestellten Phänomene erhält man, wenn man die geometrische Form weiter vereinfacht und nur noch Würfel als Segmente zuläßt (Fig. 1 B). An die Stelle von (1) tritt dann die Aufgabe

$$E(x) = 2 \sum_{i=1}^N (x_i - 1)^2 \stackrel{!}{=} \text{Min}, \quad \text{wobei } V(x) = \sum_{i=1}^N x_i^3 = v. \quad (3)$$

Eine elementare Diskussion der Lagrange-Gleichungen (2) zeigt, daß es für $v > N$ zu jedem stationären Punkt x einen Lagrange-Multiplikator (= Druck) $p \in (0, \frac{1}{2}]$ und ein $M \in \{0, \dots, N\}$ gibt, so daß $x_i = x_+ := (1 + \sqrt{1 - 2p})/p$ für M Indizes i und $x_i = x_- := (1 - \sqrt{1 - 2p})/p$ für die restlichen $N - M$ Indizes sowie $v = Mx_+^3 + (N - M)x_-^3$ gilt. Stabil sind nur die Zustände mit $M = 0$ oder ($M = 1$ und $0 < p < 2(N - 1)^{1/4}/((N - 1)^{1/4} + 1)^2$), d. h. Formen mit höchstens einer Verdickung.

Die Ursache für das Auftreten mehrerer stabiler Zustände liegt darin, daß ein einzelnes Segment ($N = 1$ in (3)) bereits eine nichtmonotone Druck-Volumen Relation besitzt. Die Kopplung solcher Segmente führt dazu, daß einzelne Segmente sich auf Kosten anderer aufblähen. Damit zeigt sich ein analoges Verhalten wie bei dem Modell gekoppelter Luftballone in [2].

Literatur

- 1 BARRINGTON, E. J. W.: Invertebrate structure and function. Van Nostrand Reinhold, Wokingham 1979.
- 2 KITSCHKE, W.; MÜLLER, I.; STREHLOW, P.: Simulation of pseudo-elastic behaviour in a system of rubber balloons. In: S. ANTMANN et al. (eds.): Metastability and incompletely posed problems. Springer, Berlin 1987.
- 3 LANZAVECCHIA, G.; DE EGUILLEOR, M.; VALVASSORI, R.: Superelongation in helical muscles of leeches. J. Muscle Res. Cell Mot. **6** (1985), 569–584.
- 4 LENT, C. M.; FLIEGNER, K. H.; FREEDMAN, E.; DICKINSON, M. H.: Ingestive behaviour and physiology of the medicinal leech. J. exp. Biol. **137** (1988), 513–527.
- 5 RHEINBOLDT, W. C.: Numerical analysis of parametrized nonlinear equations. Wiley & Sons, New York 1986.
- 6 SCHROPP, H.: Effektive Berechnung von quadratischen Umkehrpunkten und einfachen Verzweigungspunkten. Diplomarbeit, Univ. Konstanz 1987.
- 7 WADEPUHL, M.; BEYN, W.-J.: Computer simulation of the hydrostatic skeleton. The physical equivalent, mathematics and application to worm-like forms. J. theor. Biol. **136** (1989), 379–402.

Anschriften: Dr. WOLF-JÜRGEN BEYN, Fakultät für Mathematik, Universität Konstanz, Postfach 5560, D-7750 Konstanz 1, BRD;
Dr. MARTIN WADEPUHL, Biologie IV, Universität Ulm, Postfach 4066, D-7900 Ulm, BRD