

SEKTION NUMERISCHE ANALYSIS

SECTION NUMERICAL ANALYSIS

ZAMM · Z. Angew. Math. u. Mech. 65 (1985) 5, T 370 – T 371

BEYN, W.-J.

Zur numerischen Berechnung mehrfacher Verzweigungspunkte

1. Reguläre und singuläre Punkte

Bei der numerischen Lösung eines Verzweigungsproblems geht es um die Berechnung von Lösungskurven eines unterbestimmten Gleichungssystems

$$G(z) = 0, \quad G: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Eine Lösung z_0 von (1) mit $\text{Rang } G_z(z_0) = n$ ($G_z =$ Ableitung nach z) wird *regulär* genannt. Durch sie verläuft ein glatter Lösungsweig von (1) (siehe [3]). Wir interessieren uns hier für die *singulären*, d. h. die nichtregulären Lösungen von (1). Sie haben entscheidenden Einfluß auf die Struktur des Lösungsdiagramms. Die einfachsten singulären Punkte sind einfache Verzweigungspunkte bzw. Einsiedler; sie liegen vor, wenn $\text{Rang } G_z(z_0) = n - 1$ und zusätzlich eine Nichtentartungsbedingung für $G_{zz}(z_0)$ erfüllt ist (vgl. [3, S. 336]). Man kennt numerisch stabile Methoden zu ihrer Berechnung (etwa [6, 8, 9]). Wir zeigen in dieser Arbeit Möglichkeiten zur Berechnung singulärer Punkte mit $\text{Rang } G_z(z_0) < n - 1$ auf. Hierzu gehören insbesondere die mehrfachen Verzweigungspunkte, welche bei der sog. Verzweigung am doppelten Eigenwert auftreten [5, 7].

2. Definierende Gleichungssysteme durch Erweiterung

Für ein gegebenes $k \in \{1, \dots, n\}$ sei eine Lösung $z_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ von (1) mit $\text{Rang } G_z(z_0) = n - k$ gesucht. Dazu führen wir in das System (1) weitere $p = k^2 + k - 1$ Parameter ein. Wir betrachten also ein Gleichungssystem

$$F(z, c) = 0, \quad F: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

wobei $F(z, 0) = G(z)$ voraus gesetzt sei. In Verallgemeinerung des Ansatzes aus [8] (siehe auch die Übersicht in [9]) verlangen wir nun die Auflösung des sog. *definierenden Gleichungssystems*

$$D(z, \Phi, c) := (F(z, c), F_z(z, c) \Phi, \Psi^T \Phi - I) = 0 \quad (3)$$

nach den Variablen $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n+1, k+1}$ (Φ ist eine $(n+1) \times (k+1)$ Matrix) und $c \in \mathbb{R}^p$. Dabei ist $\Psi \in \mathbb{R}^{n+1, k+1}$ eine vorab zu wählende Matrix vom Rang $k+1$. Sie wird zur Normierung der Matrix Φ verwendet, deren Spalten den Nullraum von $F_z(z, c)$ aufspannen. Die Zahl $p = k^2 + k - 1$ ist gerade so gewählt, daß das Gleichungssystem (3) quadratisch und damit das Newtonverfahren im Prinzip anwendbar wird. Man zeigt leicht, daß für eine reguläre Lösung (z_0, Φ_0, c_0) von (3) stets $\text{Rang } F_z(z_0, c_0) = n - k$ gilt. Besitzt bereits das System (1) eine Lösung z_0 mit $\text{Rang } G_z(z_0) = n - k$, so kann man $c_0 = 0$ als Ergebnis der numerischen Rechnung erwarten.

Häufig haben die Gleichungssysteme (1), (2) spezielle Eigenschaften, die man zur Verringerung der Dimension des Systems (3) verwenden kann (siehe [9]). Es liege z. B. der Fall der Verzweigung von der trivialen Lösung vor:

$$z = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad F(0, \lambda, c) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^p. \quad (4)$$

Dann können wir für Φ und Ψ die spezielle Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}^{n, k}$$

annehmen, und (3) vereinfacht sich zu

$$D(\lambda, \varphi, c) = (F_x(0, \lambda, c) \varphi, \varphi^T \varphi - I) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^p, \quad p = k^2 - 1. \quad (5)$$

Man beachte, daß sich die Zahl der Zusatzparameter verringert hat.

Wir betrachten nun speziell den Fall $k = 2$, also die Verzweigung am doppelten Eigenwert. Über (4) hinaus nehmen wir für F wie in [9] eine Symmetriebedingung an, d. h. es gibt $S \in \mathbb{R}^{n, n}$ mit $S^2 = I$ und

$$F(Sx, \lambda, c) = SF(x, \lambda, c) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^p. \quad (6)$$

Wir setzen $X_s = \{x \in \mathbb{R}^n: Sx = x\}$, $X_a = \{x \in \mathbb{R}^n: Sx = -x\}$. Das System (5) läßt sich dann weiter verkleinern zu

$$D(\varphi_0, \varphi_1, \lambda, c) = (F_x(0, \lambda, c) \varphi_i (i = 0, 1), \varphi_i^T \varphi_i - 1 (i = 0, 1)) = 0, \quad (7)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in X_s$, $\varphi_1 \in X_a$, $c \in \mathbb{R}$ gilt. Die Vektoren $\varphi_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind mit der Eigenschaft $\varphi_0^T S = \varphi_0^T$, $\varphi_1^T S = -\varphi_1^T$ zu wählen, so daß $\varphi_0^T \varphi_1 = \varphi_1^T \varphi_0 = 0$ gesichert ist. Schließlich folgt $D(X_s \times X_a \times \mathbb{R}^2) \subset X_s \times X_a \times \mathbb{R}^2$ aus (6) (vgl. [9]), so daß (7) nur noch ein Gleichungssystem der Dimension $n + 2$ darstellt.

Als Anwendung von (7) behandeln wir einen „diskreten Brusselator“ (zum kontinuierlichen Modell siehe z. B. [7])

$$\left. \begin{aligned} D_1 h^{-2}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + L^2(f(u_j, v_j, A, B) - u_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad u_0 = u_{N+1} = 0 \\ D_2 h^{-2}(v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) + L^2f(u_j, v_j, A, B) &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad v_0 = v_{N+1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

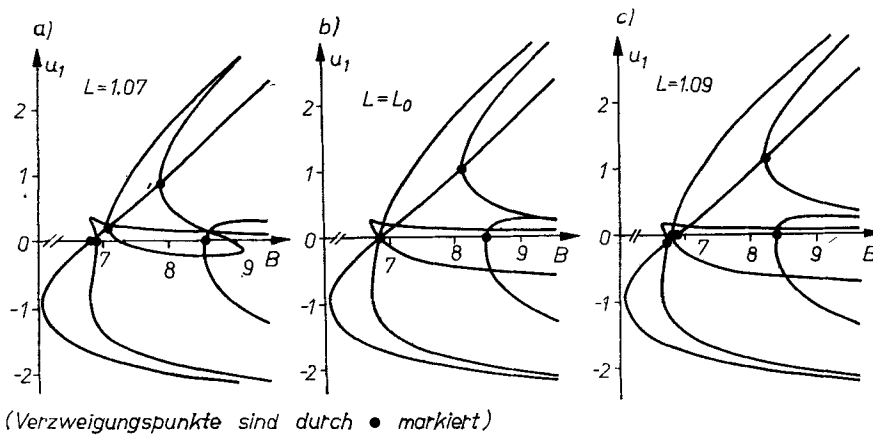


Fig. 1

mit $h = \pi(N + 1)^{-1}$, $f(u, v, A, B) = Bu - A^2v + \frac{B}{A}u^2 + 2Auv + u^2v$ und den positiven Parametern D_1, D_2, L, A, B . Mit $z = (x, \lambda) = (u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N, B)$ und $c = (L, D_1, D_2, A)$ erhält (8) die Form (2), wobei die Symmetrie (6) für $S(u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N) := (u_N, \dots, u_1, v_N, \dots, v_1)$ erfüllt ist. Im Falle der Parameterwerte $N = 3, D_1 = 1, D_2 = 4, A = 3$ lieferte das Newtonverfahren für (7) mit $c = L$ eine Lösung bei $L_0 = 1.081575, B_0 = 6.833433$. Die Figuren 1 a, b, c zeigen die numerisch berechneten (x, B) -Lösungsdiagramme für (8) in den Fällen $L = 1.07, L_0, 1.09$. Für $L = L_0$ verlaufen durch den Verzweigungspunkt $(0, B_0)$ drei nichttriviale Zweige. Die übrigen Bilder stehen im Einklang mit der Störungstheorie mehrfacher Verzweigungspunkte [7].

3. Definierende Gleichungssysteme durch Reduktion

Eine alternative Methode zu den erweiterten Gleichungssystemen aus 2. besteht in einer Liapunow-Schmidt ähnlichen Reduktion des Systems (2) (vgl. [1, 4]). Wir gehen dazu von einer Zerlegung in lineare Teilräume aus $\mathbb{R}^{n+1} = V \oplus W \ni (v, w) = z, \mathbb{R}^n = X \oplus Y$, wobei $\dim X = \dim V = n - k$ gelte. Es bezeichne $P: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ den Projektor entlang Y . Wir nehmen an, daß die projizierte Gleichung $PF(v, w, c) = 0$ eine eindeutige Lösungsfunktion $v = v(w, c), w \in W, c \in \mathbb{R}^p$ besitzt. Die Reduktion von F ist dann durch

$$R: W \times \mathbb{R}^p \rightarrow Y \\ (w, c) \rightarrow R(w, c) = (I - P)F(v(w, c), w, c)$$

gegeben. Unser definierendes Gleichungssystem lautet jetzt

$$D(w, c) = (R(w, c), R_w(w, c)) = 0, \quad w \in W, \quad c \in \mathbb{R}^p. \quad (9)$$

Es wird wie (3) für $p = k^2 + k - 1$ quadratisch. Eine Lösung (w_0, c_0) von (9) liefert eine Lösung $(z_0, c_0) = (v(w_0, c_0), w_0, c_0)$ von (2) mit $\text{Rang } F_z(z_0, c_0) \leq n - k$, wobei sogar die Gleichheit eintritt, falls $(I - P)F_v(z_0, c_0): V \rightarrow X$ invertierbar ist. Wir betrachten auch hier den Fall $k = 2$ also $p = 5$ genauer. Ist (w_0, c_0) eine reguläre Lösung von (9), so kann man unter einer Nichtentartungsbedingung für $R_{ww}(w_0, c_0)$ ((A3) in [1]) zeigen, daß durch $z_0 = (v(w_0, c_0), w_0)$ entweder 0, 2 oder 4 Lösungszweige des Systems $F(z, c_0) = 0$ verlaufen. Die Verzweigungsrichtungen sind dabei nicht entartet im Sinne von [3]. Wir haben in [1] mit Hilfe von (9) einen nichttrivialen Verzweigungspunkt, durch den 4 Lösungszweige wie in Fig. 1 b verlaufen, numerisch bestimmt. Bei dem nichtlinearen Gleichungssystem handelt es sich um ein diskretes Reaktions-Diffusionsmodell (Gleichungen (8), (9), (15) aus [2]). Wir fügen hier an, daß wir inzwischen ausgehend von dem System (8), (9), (10) aus [2] durch Einführung von 5 Parametern wie in [1, Abschnitt 4] eine reguläre Lösung des definierenden Gleichungssystems (9) bestimmt haben, die zu einem singulären Punkt ohne hindurchlaufenden Lösungszweig, also einem „mehrfachen Einsiedler“ gehört.

Literatur

- 1 BEYN, W.-J., Defining equations for singular solutions and numerical applications. in Proceedings "Numerical Methods for Bifurcation Problems", Dortmund, 1983. ISNM Bd. 70, Birkhäuser Verlag, pp. 42–56.
- 2 BOHL, E.; BEYN, W.-J., Organizing centers for discrete reaction diffusion models. in siehe [1], pp. 57–67.
- 3 DESCLoux, J.; RAPPAZ, J., Approximation of solution branches of nonlinear equations. R.A.I.R.O. Analyse numérique 16, 319 to 349 (1982).
- 4 MACKENS, W., A note on an adaptive Lyapunov-Schmidt reduction at simple secondary bifurcation points. Preprint, RWTH Aachen (1983).
- 5 MCLEOD, J. B.; SATTINGER, D. H., Loss of stability and bifurcation at a double eigenvalue. J. Funct. Anal. 14, 62–84 (1973).
- 6 MOORE, G., The numerical treatment of non-trivial bifurcation points. Numer. Funct. Anal. Optimiz. 2, 441–472 (1980).
- 7 SCHAEFFER, D. G.; GOLUBITSKY, M. A., Bifurcation analysis near a double eigenvalue of a model chemical reaction. Arch. Rat. Mech. Anal. 75, 315–341 (1981).
- 8 SEYDEL, R., Numerical computation of branch points in nonlinear equations. Numer. Math. 33, 339–352 (1979).
- 9 SPENCE, A.; WERNER, B., The computation of symmetry-breaking bifurcation points. Erscheint in SIAM J. Numer. Anal.

Anschrift: Dr. W.-J. BEYN, Fakultät für Mathematik, Universität Konstanz, Postfach 5560, D-7750 Konstanz, BRD