manuscripta mathematica 28, 317 - 336 (1979)

manuscripta mathematica

SCHWACH MAJORISIERENDE ELEMENTE UND DIE BESONDEREN MONOTONIE-EIGENSCHAFTEN VON RANDWERTAUFGABEN ZWEITER ORDNUNG

Wolf-Jürgen Beyn

It is a well known theorem for Sturmian boundary value problems $Lx=r$, $Rx=0$ that the pair $(L,R=0)$ is inverse monotone (i.e. $Lx \geq 0$, $Rx=0 \Rightarrow x \geq 0$) if there exists a weak majorizing element, i.e. a function $z \geq 0$ satisfying $Lz \mathrel{\substack{\neq \\ \geq}} 0$, $Rz=0$. We show that this criterion carries over to ordinary boundary value problems of arbitrary order if in addition there exists an inverse monotone pair 'larger' than (L,R) in a certain sense. This follows from a variant of Schröder's theorem [10] combined with a result on strict monotonicity of nonnegative Green's functions. However, it will also be shown that the additional condition can only be dispensed with, if the boundary value problem is at most of the second order. Furthermore an analogous result holds for elliptic boundary value problems in arbitrary dimensions.

1. Einleitung

Gegeben sei eine lineare, reguläre Randwertaufgabe k-ter Ordnung

$$Lx: = \sum_{j=0}^{k} p_j x^{(j)} = r \text{ in } [a,b] \quad (p_j, r \in C[a,b],\ p_k \neq 0 \text{ in } [a,b]),$$

$$Rx: = \Big(\sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b)),\ i=1,\ldots,k\Big) = \gamma \in \mathbb{R}^k.$$

0025-2611/79/0028/0317/$04.00

Wir behandeln Kriterien für die in vielen Anwendungen nützliche Eigenschaft der Inversmonotonie des Paares (L,R), d.h.

$$Lx \geq 0,\ Rx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0,$$

bzw. der Inversmonotonie des Paares (L,R=0), d.h.

$$Lx \geq 0,\ Rx = 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

Hierbei sind die Halbordnungen jeweils punkt- bzw. komponentenweise zu verstehen.

Von besonderem Interesse sind solche Fälle, in denen die Inversmonotonie von (L,R) bzw. (L,R=0) aus der Existenz einer Funktion $z \in C^k[a,b]$ mit

(1a) $z \geq 0,\ Lz \geq 0,\ Rz \geq 0,$ aber nicht $Lz = 0,\ Rz = 0$

bzw. mit

(1b) $z \geq 0,\ Lz \overset{\neq}{\geq} 0,\ Rz = 0$

folgt. In Anlehnung an die majorisierenden Elemente bei Schröder [10,12], die in (1a) bzw. (1b) gewisse strikte Ungleichungen verlangen, nennen wir ein Element z mit (1a) bzw. (1b) ein schwach majorisierendes Element für das Paar (L,R) bzw. (L,R=0). Nach [10] ist nun (L,R) bzw. (L,R=0) inversmonoton, wenn es für dieses Paar ein majorisierendes Element gibt und wenn ein „größeres" inversmonotones Paar $(L+qI,R)$ bzw. $(L+qI,R=0)$ mit $q \in C[a,b], q \geq 0$, existiert.

Diesen Sachverhalt verschärft der in 3. bewiesene

SATZ 3:

Sei $(L+qI,R)$ bzw. $(L+qI,R=0)$ inversmonoton für ein $q\in C[a,b]$ mit $q(t) > 0$ für $t\in[a,b]$. Dann ist (L,R) bzw. $(L,R=0)$ inversmonoton, falls es für dieses Paar ein schwach majorisierendes Element gibt.

Beim Beweis nutzen wir wesentlich aus, daß die Greensche Funktion eines inversmonotonen Paares $(L,R=0)$ stets einen streng monotonen Integraloperator definiert (Satz 2, vgl. auch [3,4]). Hat das Paar (L,R) die Eigenschaft

(2a) $(L+\alpha I,R)$ ist inversmonoton für alle $\alpha \geq \alpha_0$ und ein $\alpha_0\in \mathbb{R}$,

bzw.

(2b) $(L+\alpha I,R=0)$ ist inversmonoton für alle $\alpha \geq \alpha_0$ und ein $\alpha_0\in \mathbb{R}$.

so folgt aus Satz 3 für jedes $p\in C[a,b]$ das Kriterium

($\ast$) $(L+pI,R)$ bzw. $(L+pI,R=0)$ ist inversmonoton, falls es für dieses Paar ein schwach majorisierendes Element gibt.

In Satz 3 ersetze man dazu L durch $L+pI$ und q durch $\alpha-p$ mit einem hinreichend großen $\alpha\in \mathbb{R}$. Außerdem erlauben (2a) bzw. (2b) den Nachweis von Stabilitätsungleichungen sowie Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für schwach nichtlineare Randwertaufgaben [2,6]. Für Sturm-Liouvillesche Randwertprobleme mit

$$Lx= -x''+p_1x', \; Rx=(\alpha_{11}x(a)+\alpha_{12}x'(a), \; \beta_{21}x(b)+\beta_{22}x'(b))$$

sind das Kriterium (✱) und (2a), (2b) bekannt (siehe [10] und für das allgemeine Resultat [9]). Andererseits wird in [11] ein Randwertproblem vierter Ordnung angegeben, bei dem die Inversmonotonie von $(L+\alpha I,R=0)$ an einer oberen Grenze $\alpha=\alpha_1$ endet. Hierzu zeigen wir in 4. den

SATZ 4:

Aus der Eigenschaft (2b) folgt, daß die Differentialgleichung eine Ordnung $k \leq 2$ besitzt und daß $p_2 < 0$ in $[a,b]$ im Fall $k=2$ gilt.

Überdies können die Eigenschaften (2a), (2b) für $k=1$ und $k=2$ vollständig durch Vorzeichenbedingungen an die Koeffizienten α_{ij}, β_{ij} aus den Randbedingungen charakterisiert werden (Satz 5,6). Schließlich weisen wir nach, daß (2a) und (2b) auch bei partiellen, elliptischen Problemen höchstens für Randwertaufgaben zweiter Ordnung auftreten können (Satz 7).

Die Paare (L,R) mit der Eigenschaft (2a) bzw. (2b) gehören zu der in [14] definierten Klasse abstrakter Z-Operatoren, die eine Verallgemeinerung der Matrizen mit nichtpositiven Außerdiagonalelementen darstellen. Unser Ergebnis kann also auch so interpretiert werden, daß Z-Operatoren im Zusammenhang mit (gewöhnlichen oder elliptischen) Randwertaufgaben nur bei Problemen von höchstens zweiter Ordnung auftreten können.

2. Ein abstraktes Ergebnis

Im folgenden seien X,Y halbgeordnete, archimedische Vektorräume (vgl. [3] Kap. I). Die Halbordnungen seien beide mit $\leq$ bezeichnet. Ferner schreiben wir $e > 0$ falls e eine Ordnungseinheit in X bzw. Y ist (vgl. [3]). Ein linearer Operator $A : X \longrightarrow Y$ heißt

inversmonoton (kurz i.m.):	$:\Leftrightarrow (x \in X,\ Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$
monoton	$:\Leftrightarrow (x \in X,\ x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0)$
streng monoton auf X	$:\Leftrightarrow$ ($Y = X$, A ist monoton, $\forall x \in X$, $x \gneq 0$, $\exists\, n = n(x) \in \mathbb{N}$ mit $A^n x > 0$).

Der folgende Satz faßt einige für die Anwendungen wichtige abstrakte Aussagen zusammen, die sich aus den Arbeiten [10,13] ergeben.

SATZ 1:

$A, B : X \longrightarrow Y$ seien lineare Operatoren, B sei monoton. Dann gilt

$$A \text{ i.m.} \Rightarrow A - B \text{ i.m.}$$

unter jeder der folgenden zusätzlichen Bedingungen

(i) $\exists\, z \in X,\ z \geq 0,\ (A - B)\, z > 0,$

(ii) $\exists\, z \in X,\ z > 0,\ (A - cB)\, z \geq 0$ *für ein* $c > 1$,

(iii) $\exists\, z \in X,\ z \geq 0,\ (A - B) z \gneq 0,\ A^{-1}B$ *existiert und ist streng monoton auf* X.

Unter den Annahmen (i) und (ii) folgt die Behauptung aus [10] Satz 1.1 und dessen Beweis. Der Fall (iii) läßt sich durch eine geeignete Anwendung von [13] Theorem 5.1 behandeln oder auch direkt auf (ii) zurückführen, denn wegen $z \gneq 0$ und $(I - A^{-1}B)z \gneq 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y :\,= (A^{-1}B)^{n+1} z > 0$, $(A^{-1}B)^n (I - A^{-1}B) z > 0$, und hieraus folgt $(A^{-1}B)^n (I - A^{-1}B) z \geq \rho y$ für ein $\rho > 0$, sowie $(A - B) y = B((A^{-1}B)^n z - (A^{-1}B)^{n+1} z) \geq \rho B y$.

Die Voraussetzung der strengen Monotonie von $A^{-1}B$ in (iii) ist wesentlich für die folgenden Überlegungen. Andere Ersetzungen dieser Eigenschaft in (iii) z. B. durch

$$Ax \geq 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x > 0 \quad (\text{vgl. [10]})$$

stellen für die späteren Anwendungen zu starke Voraussetzungen dar.
Im Falle der Matrizen kann man die strenge Monotonie von $A^{-1}B$ weiter durch eine von den Nullkomponenten des Vektors $(I-A^{-1}B)z$ abhängige Bedingung abschwächen (siehe [5]).

3. Anwendung auf gewöhnliche Randwertaufgaben

Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein (vgl. [3] Kap. VII)
$C_+ = \{x \in C[a,b]:\ x(t) \geq 0 \text{ für } t \in [a,b]\}$, $x \geq 0 :\Leftrightarrow x \in C_+$,
$C_e = \{x \in C[a,b]:\ \pm x \leq \rho e \text{ für ein } \rho > 0\}$ mit $e \in C_+$,
$C_{+e} = C_+ \cap C_e$,
$oC_{+e} = \{x \in C_{+e}:\ x \geq \rho e \text{ für ein } \rho > 0\}$, oC_{+e} ist die Menge der Ordnungseinheiten in C_e.

Sei jetzt speziell

$$(3) \qquad e(t) = (t-a)^{r_a}(b-t)^{r_b}, \quad t \in [a,b],$$

wobei $r_\tau(\tau = a,b)$ den maximalen Index $r \in \{0,\dots,k\}$ bezeichne mit $Rx=0$, $x \in C^k[a,b] \Rightarrow x^{(j)}(\tau)=0$ für $j=0,\dots,r-1$. Es gilt dann $x \in C_e$ für jedes $x \in C^k[a,b]$ mit $Rx=0$. Das für die Anwendung von Satz 1 (iii) wichtige Resultat über die strenge Monotonie Greenscher Integraloperatoren enthält der folgende

SATZ 2:

Sei $(L,R=0)$ i.m. und r_a, $r_b < k$.
Dann gilt für den zu (L,R) gehörigen Greenschen Integraloperator G die Beziehung

$$G^3(C_+ \setminus \{0\}) \subset oC_{+e},$$

insbesondere ist G ein streng monotoner Operator auf C_e.

Beweis: Wir nehmen $k \geq 2$ an und damit, daß der Integraloperator G durch einen auf $[a,b]^2$ stetigen Kern (den wir wieder mit G bezeichnen) definiert wird. Der Beweis läßt sich aber nach genauer Betrachtung auch für $k=1$ durchführen. Für $x \in C_+$ sei

$$\Omega_0(x)=\{t\in[a,b]:\ x(t)=0\},\quad \Omega_+(x)=\{t\in[a,b]:\ x(t)>0\}.$$

Da G ein nichtnegativer Kern ist, folgt

(4) $$G(t,s)=0 \text{ für } t\in\Omega_0(Gx),\ s\in \mathrm{cl}(\Omega_+(x)), x\in C_+,$$

(cl= top. Abschluß, int = top. Inneres). Ferner ist

(5) $$t \notin \mathrm{int}\,\Omega_0(G(t,\cdot))\ \forall\, t\in[a,b].$$

Andernfalls wähle man eine Funktion $z\in C^k \cap C_+$ mit kompaktem Träger in $\mathrm{int}\ \Omega_0(G(t,\cdot))$ und mit $z(t) > 0$. Wegen $Rz=0$ folgt dann aus $z(t)=\int_a^b G(t,s)\ (Lz)(s)ds=0$ ein Widerspruch.

(4) und (5) zusammen ergeben

(6) $$\mathrm{int}\ \mathrm{cl}\,\Omega_+(x) \subset \Omega_+(Gx)\ \forall\, x\in C_+.$$

Als nächstes zeigen wir

(7) $$Gx \in oC_{+e} \quad \forall\, x \in C_+ \text{ mit } \mathrm{cl}\,\Omega_+(x)=[a,b].$$

(6) liefert bereits $Gx(t) > 0$ für $t\in(a,b)$, und es bleiben $(Gx)^{(r_a)}(a) > 0$ und $(-1)^{r_b}(Gx)^{(r_b)}(b) > 0$ zu zeigen.

Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Ungleichung. Aus $RG(\cdot,s)=0$ für $s\in(a,b)$ und $G(t,s) \geq 0$ in $[a,b]^2$ folgt $D_1^j G(a,s)=0$ für $j=0,\ldots,r_a-1$, $D_1^{r_a}G(a,s) \geq 0$ für $s\in(a,b)$. Wäre nun $(Gx)^{(r_a)}(a) = 0$, so folgte wegen $r_a \leq k-1$ und $\mathrm{cl}(\Omega_+(x))=[a,b]$ auch $D_1^{r_a}G(a,s)=0$ für $s\in(a,b)$. Das aber bedeutet $y^{(r_a)}(a)=\int_a^b D_1^{r_a}G(a,s)(Ly)(s)ds=0$ für alle $y\in C^k[a,b]$ mit $Ry=0$ im Widerspruch zur Maximalität von r_a.
Aus (7) folgt insbesondere $G(oC_{+e}) \subset oC_{+e}$. Sei nun ein $x\in C_+ \setminus \{0\}$ gegeben. Dann existiert ein nichtleeres Intervall $(c,d) \subset \Omega_+(x) \cap (a,b)$. Im Fall $\mathrm{cl}\,\Omega_+(Gx)=[a,b]$ folgt $G^2x \in oC_{+e}$ bereits aus (7). Also können wir annehmen, daß $\Omega_0(Gx)$ ein nichtleeres offenes Intervall enthält. Dieses schneidet das Intervall (c,d) wegen (6) nicht, und es verbleiben die beiden folgenden Fälle

I. Sowohl $\Omega_0(Gx) \cap [a,c]$ als auch $\Omega_0(Gx) \cap [d,b]$ enthält ein nichtleeres, offenes Intervall.
Aus (4) und der homogenen Differentialgleichung für G erhalten wir dann $G(t,s)=0$ für $t\in[a,b]$, $s\in[c,d]$ im Widerspruch zu (5).

II. Entweder $\Omega_0(Gx)\cap [a,c]$ oder $\Omega_0(Gx)\cap [d,b]$ enthält ein nichtleeres, offenes Intervall. Dieses liege etwa in $\Omega_0(Gx)\cap [a,c]$. Dann ist aber nach (4)

(8) $$G(t,s)=0 \text{ für } t\in\Omega_o(G^2x),\ s\in[c,b].$$

Im Fall $cl\Omega_+(G^2x)=[a,b]$ folgt wieder $G^3x\in oC_{+e}$, so daß wir ein nichtleeres, offenes Intervall in $\Omega_o(G^2x)$ annehmen können. Dieses liegt wegen (6) auch in $[a,c]$, und die homogene Differentialgleichung für G liefert mit Hilfe von (8)

(9) $$G(t,s)=0 \text{ für } s\in[c,b],\ t\in[a,s].$$

Daher ist die Einschränkung $G_o=G|_{[c,b]^2}$ die Greensche Funktion zu der Anfangswertaufgabe
$Ly=r$ in $[c,b]$, $y^{(j)}(c)=0$, $j=0,\ldots,k-1$.
Aus $r_a < k$ und Rang $(\alpha_{ij},\beta_{ij})^{j=1,\ldots,k}_{i=1,\ldots,k} = k$ folgt, daß ein $v\in C^k[a,b]$ existiert mit

(10) $$v(t)=0 \text{ für } t\in[a,c],\ Rv \neq 0.$$

Es gilt $v(t)=\int_c^b G_o(t,s)(Lv)(s)ds=$

$\int_a^b G(t,s)(Lv)(s)ds$ für $t\in[c,b]$

Außerdem liefern (9) und (10) auch für $t\in[a,c]$

$$v(t)=0=\int_c^b G(t,s)(Lv)(s)ds=\int_a^b G(t,s)(Lv)(s)ds.$$

damit erhalten wir $Rv=0$ und einen Widerspruch zu (10).

q.e.d.

Bemerkung: Der Fall $r_a=k$ bzw. $r_b=k$ tritt offenbar genau dann ein, wenn $Rx=0$ Anfangsbedingungen bei a bzw. b beschreibt. In diesem Fall ist die Aussage von Satz 2 bekanntlich falsch (vgl. [3] Kap VII). Satz 2 wurde bereits in [4] mitgeteilt, dort wird auch seine Anwendung auf die zu (L,R) gehörige Eigenwertaufgabe diskutiert. Der Nachweis des richtigen Randverhaltens von Gx in (7) und die damit zusammenhängende Maximalitätsbedingung für r_a und r_b gehen auf J. Lorenz zurück.

Wir wenden nun Satz 1 (iii) an mit $X = \{x \in C^k[a,b]: Rx=0\}$, $Y = C[a,b]$, $Ax=Lx+qx$, $Bx=qx$, wobei $x,q \in C[a,b]$ und $q > 0$ in $[a,b]$ seien. $(L+q(\cdot)I, R=0)$ sei i.m. und G sei der zugehörige Greensche Integraloperator. Die Menge $X \cap \text{o}C_{+e}$ mit e aus (3) besteht dann aus den Ordnungseinheiten von X(vgl. [3]).

Für ein $c > 0$ ist $GB \geq cG$, so daß GB nach Satz 2 im Fall $r_a, r_b < k$ ein streng monotoner Operator auf C_e ist. Besitzt also $(L,R=0)$ ein schwach majorisierendes Element, so folgt seine Inversmonotonie. Damit ist die Aussage von Satz 3 für $(L,R=0)$ im Fall $r_a, r_b < k$ bewiesen.

Im Fall $r_a=k$ bzw. $r_b=k$ liegt eine Anfangswertaufgabe vor. Die Inversmonotonie von $(L,R=0)$ folgt dann ohne Verwendung von (1b) aus der Tatsache, daß durch $L=(L+qI)-qI$ eine reguläre Zerlegung des Operators $L: X \longrightarrow Y$ mit Spektralradius $((L+qI)^{-1}qI) = 0$ gegeben ist (zur Schlußweise vgl. [3] Kap. III,4 , VII,4).

Sei nun z ein schwach majorisierendes Element für (L,R) und sei v die Lösung der Randwertaufgabe

$$(L+qI)v = Lz, \quad Rv=Rz.$$

Wegen $(L+qI)(z-v)=qz$, $R(z-v)=0$, $L(z-v)=qv$ ist dann z-v ein schwach majorisierendes Element für $(L,R=0)$ und daher $(L,R=0)$ i.m.. Ist nun $Lx \geq 0$, $Rx \geq 0$ vorgegeben, so bestimme man y gemäß $(L+qI)y=0$, $Ry=Rx$ und zusammen mit $L(x-y)=Lx+qy \geq 0$, $R(x-y)=0$ folgt $x \geq y \geq 0$.

Es ist ungeklärt, ob Satz 3 im Fall $q \geq 0$ richtig bleibt. Allerdings bleibt seine Aussage für $q \geq 0$ nach [10] (siehe auch Satz 1 (i)) noch erhalten, wenn (L,R) bzw. $(L,R=0)$ ein majorisierendes Element z besitzt, d.h. wenn $z \geq 0$ und $Lz > 0$ in $[a,b]$, $Rz > 0$, bzw. $Lz > 0$ in $[a,b]$, $Rz = 0$ gilt. Ein solches z existiert stets, falls $(L+\bar{q}I,R)$ bzw. $(L+\bar{q}I,R=0)$ für ein $\bar{q} \in C[a,b]$ mit $\bar{q} \leq 0$ inversmonoton ist. Man wähle z etwa als Lösung der Aufgabe

$$(11) \qquad Lz+\bar{q}z \equiv 1,\ Rz=(1,\dots,1) \text{ bzw. } Rz = 0.$$

Hieraus ergibt sich die im folgenden wichtige Einschließungseigenschaft

$$(12) \qquad \begin{array}{l} (L+q_i I,R) \text{ bzw. } (L+q_i I,R=0) \text{ ist i.m.} \\ \text{für gewisse } q_i \in C[a,b] (i=0,1) \\ \Rightarrow (L+qI,R) \text{ bzw. } (L+qI,R=0) \text{ ist i.m.} \\ \text{für alle } q \in C[a,b] \text{ mit } q_0 \leq q \leq q_1. \end{array}$$

4. Charakterisierung der Eigenschaften (2a) und (2b)

Wie in der Einleitung bereits bemerkt, folgt aus (2a) bzw. (2b) nach Satz 3 für jedes $p \in C[a,b]$ das Kriterium (✱). Ist umgekehrt (✱) für jedes $p \in C[a,b]$ erfüllt, so erhalten wir (2a) bzw. (2b), falls es überhaupt ein $\bar{p} \in C[a,b]$ und ein $x \in C^k[a,b]$ mit $x \geq 0$, $(L+\bar{p}I)x \overset{\neq}{\geq} 0$ und $Rx \geq 0$ bzw. $Rx = 0$ gibt.

Wir geben im folgenden eine vollständige Charakterisierung von (2a) und (2b) durch Bedingungen an die Koeffizienten von L und R an.

Zunächst beweisen wir den bereits angekündigten Satz 4.

<u>Beweis</u>: Sei $L_o = L + \alpha_o I$. Wir konstruieren in den Fällen $k \geq 3$ und $k = 2$, $p_2 > 0$ in $[a,b]$ geeignete Funktionen $y \in C^k[a,b]$, $\bar{q} \in C[a,b]$ mit $\bar{q} \geq 0$, $(L_o + \bar{q}I)y \geq 0$, $Ry = 0$ aber $y \not\geq 0$. Dann ist $(L_o + \bar{q}I, R=0)$ nicht i.m. im Widerspruch zu (12) und (2b). Sei $t_o \in (a,b)$ fest gewählt und sei $\psi(t) = \varepsilon^{-k} p_k(t_o)(t-t_o)^k + c\varepsilon^{-2}(t-t_o)^2 - 1$ für $t \in \mathbb{R}$ mit $c, \varepsilon > 0$. Dann ist $\psi(t_o) = -1$ und bei geeigneter Wahl der Konstanten c auch

$$\psi(t) > 0 \text{ für } \varepsilon \leq |t-t_o| \leq 3\varepsilon. \tag{13}$$

In den Fällen $k \geq 3$ und $k = 2$, $p_k(t_o) > 0$ gilt ferner $p_k(t_o)\psi^{(k)}(t_o) = c_1\varepsilon^{-k}$ mit einer Konstanten $c_1 > 0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erreichen wir daher nach einer einfachen Abschätzung

$$L_o\psi(t) \geq 0 \text{ für } |t-t_o| \leq 2\varepsilon. \tag{14}$$

Sei nun $\varphi := \rho\psi$ und $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit

$$\rho(t) \begin{cases} = 1 & \text{für } |t-t_o| \leq 2\varepsilon, \\ \geq 0 & \text{für } 2\varepsilon < |t-t_o| < 3\varepsilon, \\ = 0 & \text{für } |t-t_o| \geq 3\varepsilon. \end{cases}$$

Ferner sei $v \in C^k[a,b]$ definiert durch $L_o v \equiv 1$, $Rv = 0$. Dann gilt $v > 0$ in (a,b) (vgl. (7)) und wir wählen $y = v + (v(t_o)+1)\varphi$ sowie ein $\bar{q} \in C[a,b]$ mit

$$\bar{q}(t) \begin{cases} = 0 & \text{für } |t-t_o| \leq \varepsilon \\ \geq 0 & \text{für } \varepsilon < |t-t_o| < 2\varepsilon \\ = \bar{c} > 0 & \text{für } |t-t_o| \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

Durch geeignete Wahl von $\bar{c} > 0$ erreichen wir $(L_o + \bar{q}I)y(t) \geq L_o y(t) + \bar{c}v(t) \geq 0$ für $2\varepsilon \leq |t-t_o| \leq 3\varepsilon$, während nach Konstruktion von $\bar{q}$, y und φ auch

$(L_o+\bar{q}I)y(t) \geq L_o v(t) \geq 0$ für $|t-t_o| \leq 2\varepsilon$ und $|t-t_o| \geq 3\varepsilon$ gilt. Schließlich sind $y(t_o)=-1$ und $Ry=0$ offensichtlich

q.e.d.

Wir diskutieren jetzt die Bedingungen (2a) und (2b) für den Fall $k=2$ und $p_2 < 0$ in $[a,b]$.

Dabei genügt es, wie wir später zeigen, den einfachsten Fall $L=-D^2$ zu betrachten.

Im folgenden bezeichne $d_{ij}(1 \leq i,j \leq 4)$ diejenige 2×2-Unterdeterminante, die aus der i-ten und der j-ten Spalte der

Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ entsteht.

Ferner sei

$$(15) \quad \sigma = \begin{cases} \operatorname{sign} d_{24}, & \text{falls } d_{24} \neq 0, \\ \operatorname{sign} (d_{23}-d_{14}), & \text{falls } d_{24}=0,\ d_{23}-d_{14} \neq 0 \\ -\operatorname{sign} (d_{13}), & \text{falls } d_{24}=d_{23}-d_{14}=0,\ d_{13} \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>LEMMA 1</u>:

<u>Für $L= -D^2$ ist die Eigenschaft</u> (2b) <u>bzw.</u> (2a) <u>äquivalent mit der Bedingung</u>

$$\begin{aligned} (A_o)\ & \sigma \neq 0,\ \sigma d_{12} \geq 0,\ \sigma d_{34} \geq 0 \ \underline{\text{und}} \\ & \sigma d_{14} \leq 0 \leq \sigma d_{23},\ \underline{\text{falls}}\ d_{24}=0,\ d_{23}-d_{14} \neq 0, \\ & d_{23}=0=d_{14},\ \underline{\text{falls}}\ d_{24}=d_{23}-d_{14}=0,\ d_{13} \neq 0, \end{aligned}$$

<u>bzw. mit der Bedingung</u>

(A) es gilt (A_o), und zusätzlich besitzen die Zeilenvektoren $\sigma(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{12})$ und $-\sigma(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{21}, \beta_{22})$ das Vorzeichenverhalten von genau einer der fünf nebenstehenden Zeilen (nicht notwendig derselben!).

$\ast$	$>$	$\ast$	$>$
$\leq$	0	$\ast$	$>$
$\ast$	$>$	$\geq$	0
$\leq$	0	$>$	0
$<$	0	0	0

Dabei steht $\ast$, $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, 0 für eine Zahl $\in \mathbb{R}$, >0, ≥ 0, <0, ≤ 0, $=0$.

Zum Beweis: Die Bedingungen (A_o) und (A) ergeben sich durch eine explizite Diskussion der Greenschen Funktion G_α zu $(-D^2+\alpha I,\ R=0)$ und der Lösung x_α bzw. y_α der Randwertaufgabe

$$-x'' + \alpha x = 0 \text{ in } [a,b], \quad Rx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } Rx = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung vereinfacht sich dabei erheblich, da G_α, x_α, y_α im Fall $\alpha \geq 0$ genau dann nichtnegativ sind, wenn dies für die Randwerte $G_\alpha(t,s)$, $x_\alpha(t)$, $y_\alpha(t)$ mit $t,s \in \{a,b\}$ gilt.

Die Bedingungen (A_o) und (A) werden übersichtlicher, wenn wir die Koeffizientenmatrix K durch zulässige Transformationen (die die Inversmonotonie von $(-D^2+\alpha I, R=0)$ bzw. $(-D^2+\alpha I, R)$ nicht stören) in eine Normalform bringen. Zulässige Transformationen seien dabei

1. $K \longrightarrow TK$ mit einer nichtsingulären 2×2-Matrix T, die im Fall (A) überdies nichtnegativ ist,
2. $K \longrightarrow \begin{pmatrix} \beta_{11}-\beta_{12} & \alpha_{11}-\alpha_{12} \\ \beta_{21}-\beta_{22} & \alpha_{21}-\alpha_{22} \end{pmatrix}$, dies entspricht einer Spiegelung der Differentialgleichung an der Intervallmitte.

LEMMA 2:

Für $L=-D^2$ gilt die Eigenschaft (2b) bzw. (2a) genau dann, wenn K sich durch zulässige Transformationen in eine der drei folgenden Normalformen bringen läßt

Fall 1: $d_{24} \neq 0$, $K_{1b} = \begin{pmatrix} * & < & \leq & 0 \\ \leq & 0 & * & > \end{pmatrix}$ bzw. $K_{1a} = K_{1b}$,

Fall 2: $d_{24} = 0$, $d_{23} - d_{14} \neq 0$,

$K_{2b} = \begin{pmatrix} > & 0 & \leq & 0 \\ 0 & \leq & * & > \end{pmatrix}$ oder $K_{2b} = \begin{pmatrix} > & 0 & < & 0 \\ 0 & < & * & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $K_{2a} = \begin{pmatrix} > & 0 & \leq & 0 \\ 0 & 0 & * & > \end{pmatrix}$,

Fall 3: $d_{24} = d_{23} - d_{14} = 0$, $d_{13} \neq 0$,

$K_{3b} = \begin{pmatrix} > & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \leq & > & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $K_{3a} = \begin{pmatrix} > & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & > & 0 \end{pmatrix}$.

Die Sturmschen Randbedingungen (vgl. [9]) sind hierin ebenso als Spezialfälle enthalten wie die in [8] behandelten periodischen Randbedingungen, die sich in Fall 2 einordnen lassen.

SATZ 5:

Das Paar $(L=p_2D^2+p_1D+p_0I,R)$ bzw. $(L,R=0)$ mit $p_1 \in C^1[a,b]$ genügt der Bedingung (2a) bzw. (2b) genau dann, wenn $p_2 < 0$ in $[a,b]$ und (A) bzw. (A_0) erfüllt sind. Im Fall $p_1 \in C[a,b]$ sind diese Bedingungen noch hinreichend für (2a) bzw. (2b).

Beweis: Wegen Satz 4 und (12) genügt es, die Bedingung (2a) bzw. (2b) im Fall $p_2 \equiv -1$ zu charakterisieren.
Für $x \in C^2[a,b]$ und $p_1 \in C^1[a,b]$ liefert die Transformation $x=wy$ mit
$w(t)=\exp(\frac{1}{2}\int_a^t p_1(s)ds)$(siehe [7] Kap. XI)

$Lx=w\tilde{L}y=w(-y''+(p_o+\frac{1}{4}p_1^2-\frac{1}{2}p_1')y)$, $Rx=\tilde{R}y$, wobei $\tilde{R}$ durch die Koeffizientenmatrix

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{12}w'(a) & \alpha_{12} & \beta_{11}w(b)+\beta_{12}w'(b) & \beta_{12}w(b) \\ \alpha_{21}+\alpha_{22}w'(a) & \alpha_{22} & \beta_{21}w(b)+\beta_{22}w'(b) & \beta_{22}w(b) \end{pmatrix}$$

definiert wird. Also genügt $(\tilde{L},\tilde{R})$ der Bedingung (2a) bzw. (2b) genau dann, wenn dies für (L,R) gilt. Aus (12) und Lemma 1 folgt die Behauptung, wenn wir noch beachten, daß die Bedingungen (A) bzw. (A_o) für die Matrizen K und $\tilde{K}$ dasselbe aussagen.

Seien nun $p_1 \in C[a,b]$ und die Bedingung (A_o) angenommen. Wir wählen ein $q \in C^1[a,b]$ mit $q(a)=p_1(a)$, $q(b)=p_1(b)$. Es gibt dann ein $\alpha_o > 0$, so daß $(L_q := p_2D^2+qD+(p_o+\alpha_o)I, R=0)$ i.m. ist. Sei $L_qv \equiv 1$, $Rv=0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ erhalten wir
$L_ov = (p_2D^2+p_1D+(p_o+\alpha_o)I)v > 0$ in $[a,a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon,b]$,
und wegen $v > 0$ in (a,b) (vgl. (7)) gibt es ein $\alpha_1 > 0$ mit

$$(L_o+\alpha_1 I)\, v > 0 \text{ in } [a,b],\ Rv=0. \tag{16}$$

Wir zeigen, daß $(L_o+\alpha I, R=0)$ für $\alpha \geq \alpha_1$ i.m. ist. Dazu sei $q_n \in C^1[a,b]$ eine gleichmäßig gegen p_1 konvergente Folge. Wegen (16) ist dann v für große n ein majorisierendes Element für $(p_2D^2+q_nD+(p_o+\alpha_o+\alpha)I, R=0)$, also ist dieses Paar i.m. nach dem bereits Bewiesenen. Ein einfacher Approximationsschluß liefert schließlich unter nochmaliger Ausnutzung von (16) die Behauptung. Völlig entsprechend verläuft der Beweis unter der Voraussetzung (A). q.e.d.

<u>Bemerkung</u>: Es ist zu vermuten aber unbewiesen, daß die Bedingungen (A) bzw. (A_o) auch im Fall $p_1 \in C[a,b]$ not-

wendig für (2a) bzw. (2b) sind.
Das Kritierium ($\divideontimes$) in den durch Satz 5 beschriebenen Fällen verallgemeinert die aus [8,9,10] bekannten Inversmonotoniekriterien für Randwertaufgaben zweiter Ordnung. Es ist offensichtlich, daß in Satz 5 die Bedingungen (A) und (A_o) für die Koeffizientenmatrix K nach zulässigen Transformationen durch die Normalformen aus Lemma 2 ersetzt werden können.

Um unsere Diskussion der Bedingungen (2a) und (2b) zu vervollständigen, bemerken wir den durch elementare Rechnung erhältlichen

SATZ 6:

Für $k = 1$ hat das Paar $(p_1 D + p_o I, R)$ die Eigenschaft (2a) bzw. (2b) genau dann, wenn $\alpha_{11}\beta_{11} \leq 0$ sowie
$\alpha_{11} > 0$ bzw. $\alpha_{11} = 0$ (im Fall $p_1 > 0$) und
$\beta_{11} > 0$ bzw. $\beta_{11} = 0$ (im Fall $p_1 < 0$)
gelten.

5. Elliptische Randwertaufgaben

Für lineare elliptische Randwertprobleme zweiter Ordnung sind Inversmonotoniekriterien der Form ($\divideontimes$) bekannt (siehe z.B. [9,10]). Wir zeigen im folgenden, daß auch im elliptischen Fall die Eigenschaften (2a) und (2b) (und damit ebenso die Implikation ($\divideontimes$) ohne Zusatzvoraussetzungen) auf Randwertaufgaben zweiter Ordnung beschränkt sind.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ein beschränktes Gebiet und sei $L = \sum_{|\beta| \leq k} a_\beta D^\beta$ ein elliptischer Operator auf Ω ([1] sec. 4) mit reellen Koeffizienten $a_\beta \in C(\bar{\Omega})$.
Dann ist $k = 2m$ gerade ([1]) und L ist entweder positiv

oder negativ elliptisch auf Ω, d.h. es gilt

$$\sum_{|\beta|=k} a_\beta(t)\xi^\beta > 0 \text{ (oder } < 0) \ \forall\, t\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \xi\neq 0.$$

Sei $V\subset C^k(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ ein linearer Teilraum mit $C_o^\infty(\Omega)\subset V$ und mit der Eigenschaft

(17) $$\sum_{1\leq|\beta|\leq k} a_\beta D^\beta v \text{ ist beschränkt auf } \Omega \text{ für jedes } v\in V.$$

Ferner sei ein linearer Randoperator $R: V\longrightarrow (C(\partial\Omega))^m$ mit

(18) $$Rv = 0 \text{ für alle } v\in C_o^\infty(\Omega)$$

gegeben.

Wir nennen dann das Paar $(L,R=0)$ inversmonoton bez. V, falls

$$x\in V,\ Lx\geq 0 \text{ in } \Omega,\ Rx = 0 \Rightarrow x\geq 0 \text{ in } \Omega$$

gilt.

<u>SATZ 7</u>:

<u>Es existiere ein</u> $\alpha_o\in\mathbb{R}$, <u>so daß</u> $(L+\alpha I, R=0)$ <u>für alle</u> $\alpha\geq\alpha_o$ <u>bez.</u> V <u>inversmonoton ist, und es gebe ein</u> $v\in V$ <u>mit</u>

(19) $$(L+\alpha_o I)v\geq 1 \text{ in } \Omega,\ Rv = 0.$$

<u>Dann folgt</u> $k=2$ <u>und</u> L <u>ist negativ elliptisch in</u> Ω.

<u>Beweis</u>: Der Beweis verläuft im wesentlichen wie derjenige von Satz 4. Zunächst gilt $v(t) > 0$ für alle $t\in\Omega$, denn zu jedem $t\in\Omega$ gibt es ein $w\in C_o^\infty(\Omega)$ mit $w\geq 0$ in Ω, $w(t) > 0$, und es ist $(L+\alpha_o I)w\leq c(L+\alpha_o I)v$ in Ω für ein $c > 0$, also $w\leq cv$. Anschließend zeigt man Hilfe von (17) ein

entsprechendes Resultat zu (12).

Dann wählen wir ein $t_o \in \Omega$ und setzen

$$\psi(t) = c_1\varepsilon^{-k} \sum_{|\beta|=k} a_\beta(t_o)(t-t_o)^\beta + c_2\varepsilon^{-2}\|t - t_o\|^2-1, \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

($\| \ \|$ = Euklidische Norm). Mit c_1=1 und geeignetem $c_2 > 0$ (im Fall $k \geq 4$) sowie $c_2 = 0$ und geeignetem $c_1 > 0$ (im Fall $k = 2$, L positiv elliptisch) läßt sich dann (13) und wegen

$$\sum_{|\beta|=k} a_\beta(t_o)D^\beta\psi(t_o) = \varepsilon^{-k}c_1 \sum_{|\beta|=k} \beta! \ a_\beta^2(t_o)$$

auch (14) für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ (mit $\| \ \|$ anstelle von $| \ |$) realisieren. Alle weiteren Schlüsse von Satz 4 sind unmittelbar übertragbar. q.e.d.

Wir bemerken abschließend, daß die Beweise von Satz 4 und Satz 7 im Prinzip konstruktiv sind, d.h. sie gestatten es ein α anzugeben, bei dem $(L + \alpha I, R = 0)$ nicht mehr i.m. ist. Dabei wird das kleinste α mit dieser Eigenschaft jedoch i.a. weit überschätzt und die zugehörigen Rechnungen werden sehr aufwendig.

Literatur

[1] AGMON, S.: Elliptic boundary value problems. D. van Nostrand Company. Princeton, New Jersey, 1965

[2] BEYN, W.-J.: Das Parallelenverfahren für Operatorgleichungen und seine Anwendung auf nichtlineare Randwertaufgaben. In: ISNM 31 (J. Albrecht und L. Collatz Hrsg.), 9-33. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1976

[3] BOHL, E.: Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Springer Tracts in Natural Philosophy Bd. 25, 1974

[4] BOHL, E., BEYN, W.-J., LORENZ, J.: Zur Anwendung der Theorie über den Spektralradius linearer, streng monotoner Operatoren. 23-31 in Numerische Bhenadlung von Eigenwertaufgaben (L. Collatz und K.P. Hadeler Hrsg.) ISNM 24, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1974

[5] BOHL, E.: Über eine Zeilensummenbedingung bei L-Matrizen. Lecture Notes in Mathematics 395, 247-262, Springer Verlag, 1974.
[6] BOHL, E.: On a stability-inequality for nonlinear operators. SIAM J. Numer. Anal. 14, 242-253 (1977)
[7] HARTMANN, P.: Ordinary differential equations. Wiley, New York, 1964
[8] LORENZ, J.: Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzenverfahren. Dissertation, Universität Münster, 1975
[9] PROTTER, M.H., WEINBERGER, H.F.: Maximum principles in differential equations. Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1967
[10] SCHRÖDER, J.: Lineare Operatoren mit positiver Inversen. Arch. Rat. Mech. Anal. 8, 408-434 (1961)
[11] SCHRÖDER, J.: Randwertaufgaben vierter Ordnung mit positiver Greenscher Funktion. Math. Zeitschr. 90, 429-440 (1965)
[12] SCHRÖDER, J.: On linear differential inequalities. J. math. Analysis Appl. 22, 188-216 (1968)
[13] SCHRÖDER, J.: Proving inverse-positivity of linear operators by reduction. Numer. Math. 15, 100-108 (1970)
[14] SCHRÖDER, J.: M-Matrices and generalizations using an operator theory approach. SIAM Review 20, 213-244 (1978)

Wolf-Jürgen Beyn
Westfälische Wilhelms-Universität
Institut für Numerische
und instrumentelle Mathematik
Roxeler Str. 64
4400 Münster

(Eingegangen am 21. November 1978)