ZAMM 59, T 47 – T 49 (1979)

W.-J. Beyn

Die Konvergenz der diskreten Greenschen Funktionen beim gewöhnlichen Differenzenverfahren

1. Die Lösungen von linearen, gewöhnlichen Randwertaufgaben

$$Lx := \sum_{j=0}^{k} p_j x^{(j)} = r \quad \text{in} \quad J = [a, b]\,, \qquad \left(r, p_j \in C(J),\, p_k \neq 0 \text{ in } J\right)\,, \tag{1}$$

$$Rx := \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(\alpha_{ij} x^{(j)}(a) + \beta_{ij} x^{(j)}(b)\right);\, i = 1, \dots, k\right) = 0$$

lassen sich bekanntlich mit Hilfe der Greenschen Funktion $G(t, s)$ in der Form

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)\, r(s)\, \mathrm{d}s\,, \qquad t \in J\,, \tag{2}$$

darstellen, falls die homogene Randwertaufgabe nur die triviale Lösung besitzt. Jedoch kann G nur in Spezialfällen explizit berechnet werden (siehe [2] für einige Beispiele). Es liegt nun nahe, G durch diskrete Greensche Funktionen G_h zu approximieren, die als inverse Matrizen bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens

$$L_h x_h = r_h\,, \qquad R_h x_h = 0\,, \qquad \text{zur Schrittweite } h = \frac{b-a}{N}\ (N \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

auftreten. Dabei seien x_h bzw. r_h Gitterfunktionen auf den äquidistanten Gittern

$$J_h = \{a, a + h, \dots, b - h, b\} \quad \text{bzw.} \quad J'_h = \{a + k_1 h, \dots, b - k_2 h\} \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 + k_2 = k),$$

und $L_h\colon \mathbb{R}^{J_h} \to \mathbb{R}^{J'_h}$, $R_h\colon \mathbb{R}^{J_h} \to \mathbb{R}^k$ seien lineare Abbildungen.

Ist das lineare Gleichungssystem (3) eindeutig lösbar, so ist die Lösung x_h analog zu (2) darstellbar in der Form

$$x_h(t) = h \sum_{s \in J'_h} G_h(t, s)\, r_h(s) \quad \text{für} \quad t \in J_h .$$

Hierdurch wird die *diskrete* GREEN*sche Funktion* G_h als $(N + 1) \times (N + 1 - k)$-Matrix definiert.

2. Über die Differenz

$$G(t, s) - G_h(t, s), \qquad t \in J_h, \qquad s \in J'_h,$$

ist nur in wenigen Fällen etwas bekannt. So gilt

$$G(t, s) = G_h(t, s) \quad \text{für alle} \quad t \in J_h,\ s \in J'_h = \{a + h, \dots, b - h\}$$

im Fall $Lx = x''$, Rx wie in (1),

$$x''(t) \sim h^{-2}\big(x(t - h) - 2x(t) + x(t + h)\big), \qquad x'(a) \sim h^{-1}\big(x(a + h) - x(a)\big),$$
$$x'(b) \sim h^{-1}\big(x(b) - x(b - h)\big) \quad \text{(siehe u. a. [4, 7, 9])}.$$

Ändert man in diesem Beispiel nur die Diskretisierung von $x'(a)$ durch Verwendung einer Formel höherer Ordnung, so ist nach [7] bereits der Fall

$$|G(t, a + 2h) - G_h(t, a + 2h)| \geqq C > 0 \quad \text{für alle } t \in J_h, \quad \text{und alle } h,$$

möglich. In randnahen Spalten kann also keine Konvergenz der diskreten GREENschen Funktionen gegen G erwartet werden.

Dieses Verhalten spiegelt auch der folgende Satz wieder, den wir hier ohne Beweis mitteilen.

Satz: *Sei $k \geqq 2$. Die Aufgabe* (1) *sei eindeutig lösbar, und die Diskretisierung* (3) *entstehe aus* (1) *auf die folgende Weise:*

(i) *Alle Ableitungen bis zur Ordnung $k - 1$ in den Randbedingungen und in der Differentialgleichung werden durch* (*endlich viele verschiedene*) *konsistente Differenzenformeln ersetzt.*

(ii) *Die höchste Ableitung $x^{(k)}(t)$ wird durch Differenzenformeln ersetzt, die sich als Mittelung der k-ten dividierten Differenz $\Delta^k x$ an benachbarten Gitterpunkten darstellen lassen. Diese Mittelung genügt den Wurzelbedingungen* (siehe [1], zur allgemeinen Konvergenztheorie des Differenzenverfahrens vgl. [1, 3, 5, 6]).

Dann gilt für jedes $C > 0$

$$\max_{\substack{t \in J_h,\, s \in J'_h \\ |s - a|,\, |s - b| \geqq Ch \ln(h^{-1})}} |G_h(t, s) - G(t, s)| \to 0 \quad \textit{für} \quad h \to 0. \tag{4}$$

Darüber hinaus gilt die (im Sinne von (4)) *gleichmäßige Konvergenz der Differenzenquotienten von $G_h(t, s)$* (*bez.* t) *bis zur Ordnung $k - 2$ gegen die entsprechenden Ableitungen von $G(t, s)$* (bez. t).

3. Sei nun $s \in (a, b)$ so gewählt, daß $s \in J'_h$ für eine Nullfolge von h-Werten gilt. Aus (4) folgt dann, daß die Lösung $x(t) = G(t, s)$ der Randwertaufgabe

$$Lx = \delta_s \text{ (im Distributionssinne, } \delta_s = \delta\text{-Distribution in } s), \ Rx = 0,$$

durch die Lösungen $x_h(t) = G_h(t, s)$ der Differenzengleichungen

$$L_h x_h = \delta_s^h \quad \text{mit} \quad \delta_s^h(t) = \begin{cases} h^{-1} & \text{für} \quad t = s, \\ 0 & \text{für} \quad t \in J'_h,\ t \neq s, \end{cases} \qquad R_h x_h = 0,$$

gleichmäßig approximiert wird.

Gewöhnliche Randwertaufgaben der Mechanik, in denen Punktlasten als Inhomogenitäten auftreten, sind also mit den üblichen Differenzenverfahren lösbar. Dies zeigt sich auch in zahlreichen numerischen Beispielen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß Differenzenverfahren, die bei glatten Lösungen zu einer hohen Konvergenzordnung führen, i. a. keine besseren Ergebnisse als das einfachste Differenzenverfahren liefern.

Ferner ergibt der obige Satz eine über die Stabilität hinausgehende Aussage für alle Differenzenverfahren, die (i) und (ii) erfüllen. U. a. sind diese Verfahren stark stabil im Sinne von [8] und für die Operatornormen von G_h bzw. G bezüglich der Maximum-Norm $||.||$ auf J_h bzw. J gilt

$$\lim_{h \to 0} ||G_h|| = ||G||.$$

Erst diese Aussage ermöglicht es, zum Beispiel die Konvergenz einer Iteration zur Lösung einer nichtlinearen Randwertaufgabe auf die entsprechende Iteration für das diskrete Gleichungssystem zu übertragen. Diese Eigenschaft wird in numerischen Anwendungen häufig ohne Beweis angenommen.

Literatur

1 BEYN, W.-J., Zur Stabilität von Differenzenverfahren für Systeme linearer gewöhnlicher Randwertaufgaben. Numer. Math. 29, 209–226 (1978).

2 COLLATZ, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akad. Verlagsgesellschaft Leipzig 1963.

3 ESSER, H., Stabilitätsungleichungen für Diskretisierungen von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen, Numer. Math. 28, 69—100 (1977).
4 GAINES, R., Difference equations associated with boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations, SIAM J. Numer. Analysis 11, 411—433 (1974).
5 GRIGORIEFF, R. D., Die Konvergenz des Rand- und Eigenwertproblems linearer gewöhnlicher Differenzengleichungen, Numer. Math. 15, 15—48 (1970).
6 KREISS, H.-O., Difference approximations for boundary and eigenvalue problems for ordinary differential equations, Math. Comput. 26, 605—624 (1972).
7 LORENZ, J., GREENsche Funktionen und diskrete Inverse (unveröffentlicht, 1977).
8 STETTER, H. J., A study of strong and weak stability in discretization algorithms, SIAM J. Numer. Analysis 2, 265—280 (1965).
9 STETTER, H. J., Instability and non-monotonicity phenomena in discretizations to boundary problems, Numer. Math. 12, 139—145 (1968).

Anschrift: Dr. WOLF-JÜRGEN BEYN, Institut für Numerische u. instrumentelle Mathematik, Universität Münster, Roxeler Str. 64, D-4400 Münster, BRD