

weiterer Intervallverkleinerungen bei den Iterationsvektoren \hat{x}_m , wenn die gewünschte Genauigkeit der Fixpunkteinschließung wesentlich geringer ist als die bei der jeweiligen Ziffernlänge maximal mögliche. Bei technischen Problemen genügt etwa häufig eine Genauigkeit von 1% ($\varepsilon = 0.01$); alle Iterationsschritte, die die Genauigkeit der Fixpunkteinschließung weiter erhöhen, sind dann für die Praxis ohne Bedeutung und lassen sich durch das angegebene Abbruchkriterium vermeiden.

Als Spezialfall kontrahierender intervallaritmetischer Abbildungen wurden das intervallaritmetische Gesamt- und Einzelschrittverfahren genauer untersucht. Zur Bestimmung des Kontraktionsfaktors k können dabei die intervallaritmetischen Analoga des sogenannten Zeilensummenkriteriums bzw. SASSENFELD-Kriteriums gewählt werden. Numerische Tests mit Zufallsmatrizen zeigten, daß sich mit dem Abbruchkriterium erheblicher Rechenaufwand einsparen läßt. Bei $\varepsilon = 10^{-3}$ zum Beispiel sind durchschnittlich nur ein Drittel der Iterationen bis zum üblichen intervallaritmetischen Iterationsabbruch, dem Ausbleiben weiterer Intervallverkleinerungen bei den \hat{x}_m , erforderlich (Rechnung mit ca. 16.8 Dezimalstellen), bei $\varepsilon = 10^{-5}$ durchschnittlich nur etwa 45%. Die Ergebnisse sind dabei unabhängig von der Dimension n .

Literatur

- 1 MOORE, R. E., Intervallanalyse, Oldenbourg-Verlag, München 1969.
- 2 NICKEL, K., Über die Stabilität und Konvergenz numerischer Algorithmen. Teil I und II, Computing 15, 291–328 (1975).

Anschrift: Dr. WOLFGANG APPELT, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn; Schloß Birlinghoven, D-5205 St. Augustin 1, BRD

ZAMM 58, T 405 - T 406 (1978)

W.-J. BEYN

Höhere Konvergenzordnungen beim Differenzenverfahren für gewöhnliche Randwertaufgaben

1. Für die lineare, gewöhnliche Randwertaufgabe der Ordnung k

$$Lx = \sum_{j=0}^k p_j D^j x = r \quad \text{in } J = [a, b], \quad Rx = \gamma \in \mathbb{R}^k, \tag{RAWA}$$

mit $p_j, r \in C(J)$ ($j = 0, \dots, k$), $p_k \neq 0$ in J und einer linearen Abbildung $R: C^k(J) \rightarrow \mathbb{R}^k$, betrachten wir ein allgemeines Differenzenverfahren zur Schrittweite $h > 0$ in der folgenden Form

$$L_h x_h = r_h, \quad R_h x_h = \gamma. \tag{DRAWA}$$

Dabei seien $x_h \in X_h := \mathbb{R}^{J_h}$ bzw. $r_h \in X'_h := \mathbb{R}^{J'_h}$ Gitterfunktionen auf den äquidistanten Gittern $J_h = \{a_h, a_h + h, \dots, b_h - h, b_h\}$ bzw. $J'_h = \{a'_h = a_h + k_a h, a'_h + h, \dots, b'_h - h, b'_h = b_h - k_b h\}$, wobei $k_a, k_b \in \mathbb{N}$ mit $k_a + k_b = k$ und $a_h \rightarrow a, b_h \rightarrow b$ für $h \rightarrow 0$ angenommen werde. $L_h: X_h \rightarrow X'_h$ und $R_h: X_h \rightarrow \mathbb{R}^k$ seien lineare Abbildungen.

Wir bestimmen die *Konvergenzordnung des Differenzenverfahrens* für den in Anwendungen häufig auftretenden Fall, daß bei der Diskretisierung von L im Gitterinneren Differenzenformeln hoher Ordnung, in Randnähe jedoch solche von niedrigerer Ordnung verwendet werden. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen zeigen wir die folgende

Konvergenzregel: Liegen an der Lösung x von RAWA die Konsistenzordnungen τ für R_h und für L_h im Gitterinneren, sowie $\tau - (k - \mu)$ für L_h in Randnähe vor (k bzw. μ bezeichne dabei die höchste in L bzw. in R auftretende Ableitung), so konvergieren die Lösungen x_h von DRAWA gegen x von der Ordnung τ .

Dies bedeutet, daß aus $\|R_h[x]_h - Rx\| = O(h^\tau)$, $\|L_h[x]_h - [Lx]'_h\|_{J_h^0} = O(h^\tau)$ und $\|L_h[x]_h - [Lx]'_h\|_{J_h^1} = O(h^{\tau - (k - \mu)})$ stets $\|[x]_h - x_h\| = O(h^\tau)$ folgt. Dabei sei $J_h^i = \{a'_h, \dots, a'_h + n_a h, b'_h - n_b h, \dots, b'_h\}$ mit von h unabhängigen $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ und $J_h^0 = J'_h \setminus J_h^1$. $\|\cdot\|$ bezeichne die Maximum-Norm, und $\|\cdot\|_i$ gibt an, daß das Maximum auf J_h^i ($i = 0, 1$) einzuschränken ist. $[\cdot]_h$ bzw. $[\cdot]'_h$ sei die Restriktion auf das Gitter J_h bzw. J'_h . Ferner sei $r_h = [r]_h$ und die Funktionen r, p_j ($j = 0, \dots, k$) und damit x sind gegebenenfalls geeignet auf eine Umgebung von J fortzusetzen.

Diese Konvergenzregel ist für Differenzenschemata (L_h, R_h) , die zu einer inversmonotonen Matrix führen, weitgehendst bekannt (siehe [2, 3, 7, 8]). Die dabei verwendete Methode erfaßt einerseits Diskretisierungen sowohl gewöhnlicher als auch elliptischer Randwertprobleme, ist aber andererseits auf Randwertaufgaben zweiter Ordnung, die selbst inversmonoton sind, beschränkt.

Für das allgemeine gewöhnliche Differenzenverfahren wurde die obige Regel in den Fällen $k - \mu = 1$ und $k - \mu = 2$ in [6] gezeigt, allerdings läßt sich die dort verwendete Methode nicht unmittelbar verallgemeinern.

2. Entsprechend der Darstellung $L = p_k D^k + L'$ mit $L' = \sum_{j=0}^{k-1} p_j D^j$ nehmen wir nun für L_h eine Zerlegung $L_h = p_k^h D_h^k + L'_h$ in einen diskreten Hauptteil und Terme niedrigerer Ordnung an. Dabei sei $D_h^k: X_h \rightarrow X'_h$ die

Bei der betrachteten Diskretisierung stehen die Randwerte σ , der Schnittkräfte und die Randschnittkräfte σ_R nicht im Gleichgewicht. Das wird grafisch dadurch gekennzeichnet, daß die kurzen dünnen und dicken Striche gegeneinander versetzt sind. Bei stetigen Schnittkräften sind die Striche nicht gegeneinander versetzt, sondern fallen zusammen.

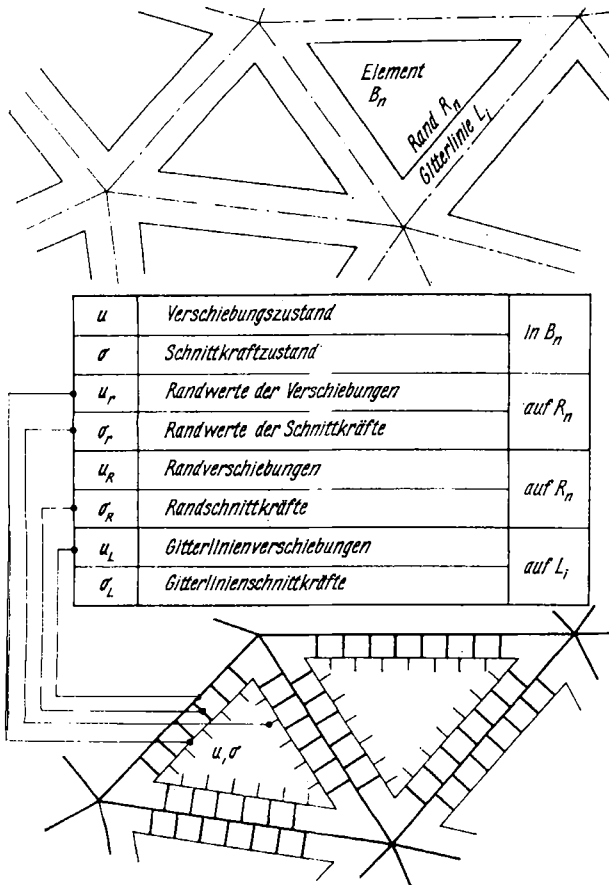


Bild 1

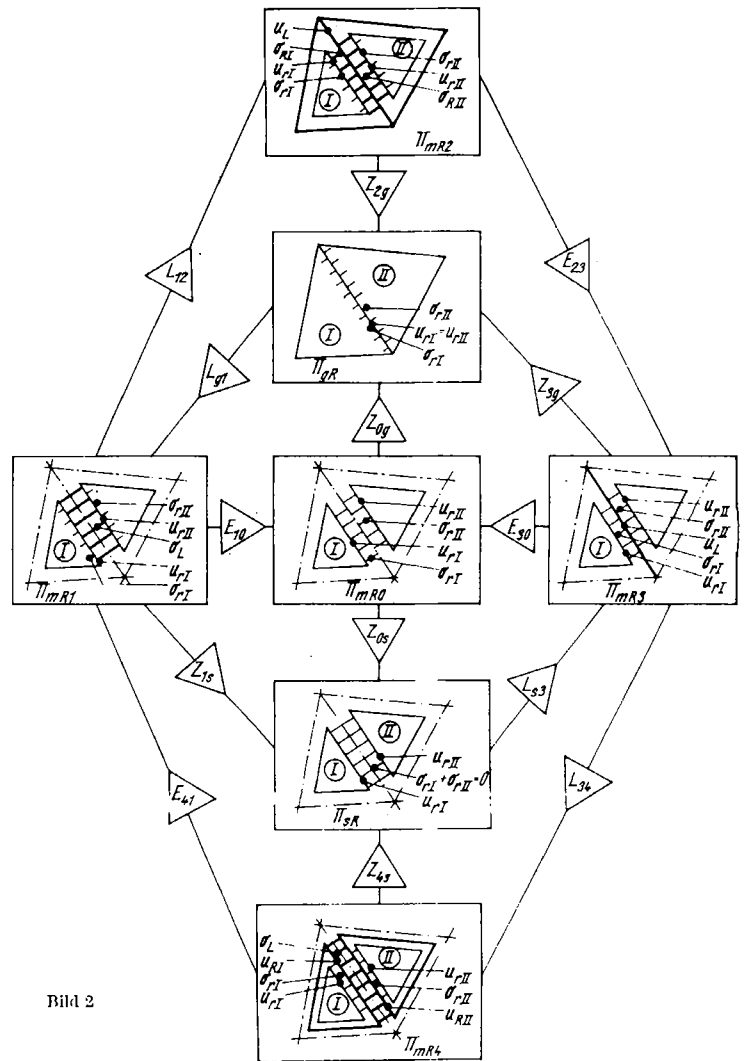


Bild 2

1.2 Übersicht über 7 Variationsprinzipien vom Typ HELLINGER-REISSNER

Mit den vereinbarten Bezeichnungen lassen sich die zu den verschiedenen Variationsprinzipien vom Typ HELLINGER-REISSNER gehörenden Finite-Element-Diskretisierungen grafisch darstellen. Das ist in Bild 2 für 2 nebeneinanderliegende Elemente I und II geschehen.

Das Bild enthält, von Rechtecken eingerahmt, die grafischen Darstellungen der verschiedenen Diskretisierungen und zusätzlich die Angabe, welche Funktionen am Rand oder auf Gitterlinien auftreten und welche Stetigkeitsbedingungen sie erfüllen müssen. Im Inneren der Elemente treten stets ein Verschiebungszustand u und ein Schnittkraftzustand σ auf.

Ausgangspunkt bilden die Diskretisierungen zu den Funktionalen Π_{gR} und Π_{sR} .

Im Funktional Π_{gR} werden Verschiebungszustände verwendet, die an den Elementengrenzen die geometrischen Übergangsbedingungen erfüllen, während die Schnittkräfte die statischen Übergangsbedingungen verletzen dürfen.

Im Funktional Π_{sR} werden Schnittkraftzustände verwendet, die an den Elementengrenzen die statischen Übergangsbedingungen erfüllen, während die Verschiebungen die geometrischen Übergangsbedingungen verletzen dürfen.

Bei allen anderen Funktionalen vom Typ HELLINGER-REISSNER brauchen die auftretenden Verschiebungszustände und Schnittkraftzustände an den Elementengrenzen weder die geometrischen noch die statischen Übergangsbedingungen zu erfüllen. Die Funktionale unterscheiden sich dadurch, ob und welche zusätzlichen Funktionen auf den Gitterlinien L_i und den Elementändern R_n eingeführt werden.

Das Funktional Π_{mR0} verwendet Schnittkräfte und Verschiebungen, die weder die statischen noch die geometrischen Übergangsbedingungen zu erfüllen brauchen.

Beim Funktional Π_{mR1} werden zusätzlich Gitterlinienschnittkräfte σ_L eingeführt.

Beim Funktional Π_{mR3} werden zusätzlich Gitterlinienverschiebungen u_L eingeführt.