Numer. Math. 29, 209–226 (1978)

Numerische
Mathematik

Zur Stabilität von Differenzenverfahren für Systeme linearer gewöhnlicher Randwertaufgaben

Wolf-Jürgen Beyn

Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik der Universität Münster, Roxeler Str. 64, D-4400 Münster, Germany (Fed. Rep.)

On the Stability of Difference Approximations to Systems of Linear Ordinary Boundary Value Problems

Summary. In this paper we give a simple stability theory for finite difference approximations to linear ordinary boundary value problems. In particular we consider stability with respect to a maximum norm including all difference quotients up to the order of the differential equation. It is shown that stability in this sense holds if and only if the principal part of the differential equation is discretized in a "stable way". This last property is characterized by root conditions which we prove to be satisfied for some classes of finite difference schemes. Our approach simplifies and generalizes some known results of the literature where Sobolev norms or merely the maximum norm are used.

Subject Classifications. AMS(MOS): 65L10; CR: 5.17.

1. Einleitung

Wir untersuchen die Konvergenz allgemeiner Differenzenverfahren für ein System von m linearen gewöhnlichen Randwertaufgaben

$$Lx := \sum_{i=0}^{k} p_i x^{(i)} = r \quad \text{in } [a,b], \qquad Rx = \gamma \quad (x \in (C^k[a,b])^m). \tag{1}$$

Dabei seien $p_i(t)$ $(i=0,\ldots,k)$ für $t \in [a,b]$ stetige $m \times m$-Matrizen, und $p_k(t)$ sei für alle $t \in [a,b]$ nicht singulär. Ferner seien $r \in (C[a,b])^m$, $\gamma \in \mathbb{R}^{mk}$, und $R: (C^{k-1}[a,b])^m \to \mathbb{R}^{mk}$ sei eine lineare Abbildung.

Für jede Schrittweite h aus einer positiven Nullfolge $H \subset \mathbb{R}$ ordnen wir der Randwertaufgabe (1) ein diskretes Problem der Form

$$L_h x_h = r_h, \qquad R_h x_h = \gamma \tag{2}$$

zu.

0029-599X/78/0029/0209/$3.60

Dabei sei x_h eine auf einem Gitter mit der Maschenweite h erklärte Funktion, und L_h, R_h und r_h seien diskrete Analoga zu L, R und r (s. 2. für eine genaue Definition).

Ist L_h bzw. R_h eine konsistente Approximation für L bzw. R, so erhält man die gleichmäßige Konvergenz der Lösungen von (2) und ihrer Differenzenquotienten bis zur j-ten Ordnung ($j \in \mathbb{N}$) gegen die Lösung von (1) und ihre entsprechenden Ableitungen, wenn die Paare (L_h, R_h) bez. $\| \ \|_j$ stabil sind, d.h. wenn eine Stabilitätsungleichung

$$\|x_h\|_j \leqq C(\|L_h x_h\|_0 + \|R_h x_h\|_0) \tag{3}$$

für alle Gitterfunktionen x_h und hinreichend kleines $h \in H$ gilt. Dabei bezeichnet $\| \ \|_0$ die Maximum-Norm für Vektoren aus $\mathbb{R}^{mk}$ und für Gitterfunktionen, und die Norm $\| \ \|_j$ schließt das Maximum über alle Differenzenquotienten bis zur Ordnung j ein.

Das Ziel der Arbeit ist, die $\| \ \|_k$-Stabilität von Paaren (L_h, R_h) unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen durch einfache, für ein gegebenes Differenzenschema nachprüfbare Bedingungen zu charakterisieren.

Eine Abschätzung der Schrittweiten h, für die die Ungleichung (3) gilt, ist dabei in dieser Allgemeinheit nicht mehr möglich. Hierfür benötigt man i.allg. speziellere Voraussetzungen an die Paare (L, R) und (L_h, R_h), wie sie etwa beim Nachweis der $\| \ \|_0$-Stabilität mit Hilfe der Inversmonotonie in [1–3, 5, 17] beschrieben werden.

Ausgangspunkt unserer Stabilitätsuntersuchung ist die Tatsache, daß die Operatoren L_h und R_h eines bez. $\| \ \|_j$ stabilen Paares (L_h, R_h) ($j \in \{0, \ldots, k\}$) unter Erhaltung der Stabilität abgeändert werden dürfen (Satz 1). Dieser Satz läßt sich als Folgerung einiger abstrakter Resultate von Grigorieff [10] aus der Theorie diskreter Approximationen (s. [19]) auffassen. Er verallgemeinert gleichzeitig ein Ergebnis von Keller u. White [13], welches für Systeme erster Ordnung die Unabhängigkeit der $\| \ \|_0$-Stabilität von den Randfunktionalen R und R_h liefert.

Wir verwenden Satz 1 im folgenden zur Charakterisierung der Stabilität von (L_h, R_h) bez. $\| \ \|_k$. Als Vergleichsproblem kann eine Anfangswertaufgabe gewählt werden, bei der L durch seinen Hauptteil $p_k D^k$ und L_h durch einen entsprechenden diskreten Hauptteil $p_k^h D_h^k$ (mit einer k-ten dividierten Differenz $D_h^k = E^{-k_1} \Delta^k$ vgl. 2.) ersetzt wird.

In einfacher Weise folgt hieraus, daß die $\| \ \|_k$-Stabilität von (L_h, R_h) äquivalent zur $\| \ \|_0$-Stabilität des Mittelungsoperators p_k^h ist (Satz 2).

Damit gelangen wir zu einer Erweiterung der Ergebnisse von Kreiss [14]. Dort wird im wesentlichen bereits gezeigt, daß die Stabilität der Mittelung p_k^h hinreichend für die Stabilität von (L_h, R_h) bez. $\| \ \|_0$ ist.

Außerdem erreichen wir eine einfache Herleitung von gleichmäßigen Konvergenzaussagen, wie sie von Grigorieff [7, 8] mit Hilfe einer Stabilitätstheorie bez. diskreter Sobolew-Normen gewonnen wurden.

Im Abschnitt 3 wird die Stabilität des Mittelungsoperators p_k^h bez. $\| \ \|_0$ durch Wurzelbedingungen charakterisiert, und es wird gezeigt, daß diese äquivalent zu den in [8, 9] bei der Stabilitätsanalyse bez. Sobolew-Normen aufgestellten Polynombedingungen sind.

Schließlich wenden wir in 4. die Wurzelbedingungen an, um die Stabilität für eine Klasse von Differenzenverfahren bei Randwertaufgaben gerader Ordnung nachzuweisen.

Herrn Prof. Dr. E. Bohl gilt mein herzlicher Dank für eine Reihe von Hinweisen und anregende Diskussionen über den Gegenstand dieser Arbeit.

2. Zwei Stabilitätssätze

Wir beschreiben zunächst die dem Gleichungssystem (2) zugrunde gelegte Diskretisierung. Jeder Schrittweite $h\in H$ sei eine Menge $J_h=\{a_h, a_h+h, \dots, b_h-h, b_h\}$ von äquidistanten Gitterpunkten zugeordnet, für die wir

$$h^{-1}(b_h-a_h)\in\mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_h\to a, \quad b_h\to b \quad \text{für } h\to 0 \tag{4}$$

annehmen. In den Anwendungen wird i.allg. $H=\{h=N^{-1}(b-a): N\in\mathbb{N}, N\geqq N_0\}$ mit einem $N_0\in\mathbb{N}$ und $a_h=a-n_1 h$, $b_h=b+n_2 h$ mit $n_1, n_2\in\mathbb{Z}$ sein. Sei $X_h=\{x_h: J_h\to\mathbb{R}^m\}$. In (2) sei $x_h\in X_h$ eine Gitterfunktion und $R_h: X_h\to\mathbb{R}^{mk}$ ein linearer Operator. Durch $R_h x_h=\gamma$ sind also mk Gleichungen in (2) gegeben. Bezeichnet $|J_h|$ die Anzahl der Elemente von J_h, so verbleiben $m(|J_h|-k)$ Gleichungen zur Bestimmung von x_h. Diese mögen durch Diskretisierung von $Lx=r$ an den Gitterpunkten von $J_{k,h}=\{a'_h=a_h+k_1 h, a'_h+h, \dots, b'_h-h, b'_h=b_h-k_2 h\}$ entstehen. Dabei seien $k_1, k_2\in\mathbb{N}$ und $k_1+k_2=k$. Mit $X_{k,h}$ bezeichnen wir den Raum der Gitterfunktionen $x_h: J_{k,h}\to\mathbb{R}^m$. In (2) setzen wir nun $L_h: X_h\to X_{k,h}$ als linearen Operator und $r_h\in X_{k,h}$ voraus. Alle üblichen Differenzverfahren für die Randwertaufgabe (1) lassen sich in die Form (2) bringen. Wir betrachten etwa das folgende

Beispiel. Auf die skalare Randwertaufgabe

$$x''+qx=r \ \text{ in } [a,b], \quad x'(a)=\gamma_a, \quad x(b)=\gamma_b,$$

wenden wir zur Schrittweite $h=(b-a)N^{-1}$, $N\geqq 4$, das folgende Differenzenverfahren an

$$\begin{aligned} r(t)&=q(t)x_h(t)\\ &+\begin{cases} h^{-2}(x_h(t-h)-2x_h(t)+x_h(t+h)) & \text{für } t=a,\\ (12h^2)^{-1}(-x_h(t-2h)+16x_h(t-h)-30x_h(t) & \\ \quad +16x_h(t+h)-x_h(t+2h)) & \text{für } t=a+h,\dots,b-2h,\\ h^{-2}(x_h(t-h)-2x_h(t)+x_h(t+h)) & \text{für } t=b-h,\end{cases}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\gamma_a&=(6h)^{-1}(-2x_h(a-h)-3x_h(a)+6x_h(a+h)-x_h(a+2h)),\\ \gamma_b&=x_h(b).\end{aligned} \tag{6}$$

Setzen wir $a_h=a-h$, $b_h=b$, $k_1=1$, $k_2=1$ und definieren die rechte Seite von (5) als $L_h x_h(t)$, die linke Seite von (5) als $r_h(t)$ und die rechten Seiten von (6) als $R_h x_h$, so ist das Gleichungssystem (5), (6) unmittelbar von der Form (2).

Auf X_h definieren wir für $j \in \mathbb{N}$ mit $j h \leqq b_h - a_h$ die Norm $\| \ \|_j$ durch

$$\|x_h\|_j = \sum_{\nu=0}^{j} \|\Delta^\nu x_h\|_0, \qquad x_h \in X_h. \tag{7}$$

Dabei sei $\Delta^\nu x_h(t) = h^{-\nu}(E-I)^\nu x_h(t)$ für $t = a_h, a_h + h, \ldots, b_h - \nu h$ die ν-te dividierte Differenz von x_h, und es sei $E^\mu x_h(t) = x_h(t + \mu h)$ für $\mu \in \mathbb{Z}$, $t = a_h - \mu h, \ldots, b_h - \mu h$.

Mit $\| \ \|_0$ bezeichnen wir sowohl die Maximumnorm in $\mathbb{R}^{mk}$ wie auch die Maximumnorm für Gitterfunktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsgebiet, also z.B.

$$\|\Delta^\nu x_h\|_0 = \mathrm{Max}\,\{|(\Delta^\nu x_h)_i(t)|: i = 1, \ldots, m,\ t = a_h, \ldots, b_h - \nu h\} \quad \text{für } x_h \in X_h.$$

Wegen (4) existiert ein reelles Intervall $[A, B]$ mit $[a, b]$, $J_h \subset [A, B]$ für alle $h \in H$. Für eine Funktion $x \in (\mathbb{R}^{[A,B]})^m$ wird durch $[x]_h(t) = x(t)$ für $t \in J_h$ bzw. $[x]_{k,h}(t) = x(t)$ für $t \in J_{k,h}$ eine Restriktion $[x]_h \in X_h$ bzw. $[x]_{k,h} \in X_{k,h}$ erklärt.

Das folgende Kompaktheitslemma ist im wesentlichen bekannt (vgl. ähnliche Schlußweisen bei Lees u. Schultz [15] und Kreiss [14]), so daß wir uns auf eine Beweisskizze beschränken können.

Lemma 1. Sei eine Folge $x_h \in X_h$ $(h \in H)$ gegeben mit der Eigenschaft

$$\|x_h\|_j \leqq C \qquad \text{für ein } C > 0, \text{ ein } j \in \mathbb{N} \text{ und für fast alle } h \in H. \tag{8}$$

Dann existiert ein $x \in (C^{j-1}[A, B])^m$ und eine Teilfolge $H' \subset H$ mit $\|x_h - [x]_h\|_{j-1} \to 0$ für $h \to 0$ $(h \in H')$.

Beweis. Es genügt, den Fall $m = 1$ zu behandeln. Man interpoliert $\Delta^{j-1} x_h$ stückweise linear und erhält eine Folge von Funktionen, die wegen (8) gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind. Daher konvergiert eine Teilfolge gleichmäßig gegen ein $y \in C[A, B]$. Wegen (8) können o.B.d.A. auch die Folgen $\Delta^\nu x_h(a_h)$, $\nu = 0, \ldots, j-2$, als konvergent, etwa mit dem Grenzwert v_ν, angenommen werden. Die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$x^{(j-1)} = y \quad \text{in } [A, B], \qquad x^{(\nu)}(a) = v_\nu \quad (\nu = 0, \ldots, j-2),$$

leistet dann das Geforderte. q.e.d.

Im folgenden nehmen wir die Koeffizienten aller Differentialoperatoren L, wie sie in (1) auftreten, als stetig fortgesetzt auf $[A, B]$ an.

Eine Folge von linearen Abbildungen $L_h: X_h \to X_{k,h}$ $(h \in H)$ bzw. $R_h: X_h \to \mathbb{R}^{mk}$ $(h \in H)$ heißt konsistent mit L bzw. R, wenn $\|L_h[x]_h - [Lx]_{k,h}\|_0 \to 0$ bzw. $\|R_h[x]_h - Rx\|_0 \to 0$ $(h \to 0)$ für alle $x \in (C^k[A, B])^m$ gilt. Ist beides der Fall, so nennen wir (L_h, R_h) konsistent mit (L, R).

Für den folgenden Satz nehmen wir an, daß zwei Differentialoperatoren L^0 und L^1 der Ordnung k sowie zwei Randfunktionale R^0 und R^1 der in 1. beschriebenen Form vorgegeben sind. Ferner seien $L_h^i: X_h \to X_{k,h}$ und $R_h^i: X_h \to \mathbb{R}^{mk}$ $(i = 0, 1)$ für jedes $h \in H$ gegebene Operatoren.

Satz 1. Es sei $j \in \{0, \dots, k\}$ und $L^0 - L^1$ ein Differentialoperator höchstens von der Ordnung $j-1$. Im Fall $j=0$ bedeute dies $L^0 = L^1$. Ferner gelte

(i) 0 ist kein Eigenwert von (L^i, R^i) $(i=0,1)$,

(ii) (L^i_h, R^i_h) ist konsistent mit (L^i, R^i) $(i=0,1)$.

(iii) Es existiert eine Konstante $C>0$ mit

$$\left.\begin{aligned} &\|(R^0_h - R^1_h)x_h\|_0 \leqq C\|x_h\|_j \\ &\|(L^0_h - L^1_h)x_h\|_0 \begin{cases} \leqq C\|x_h\|_{j-1} & \text{falls } j \geqq 1, \\ =0 & \text{falls } j=0, \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } x_h \in X_h,\ h \in H.$$

Dann ist (L^0_h, R^0_h) genau dann bez. $\| \ \|_j$ stabil, wenn (L^1_h, R^1_h) bez. $\| \ \|_j$ stabil ist.

Bemerkungen. 1. Kombiniert man die Sätze 2(2), 1(5) aus [10, II], 2(5), 2(7) aus [10, I] sowie 1.2(6) aus [18] (vgl. [10, I] 1(21)), so erhält man in der Theorie diskreter Approximationen einen Satz, der zeigt, daß die Stabilität einer Operatorfolge (dort inverse Stabilität genannt) unter einer sog. diskret kompakten Störung erhalten bleibt. Satz 1 kann dann in der vorliegenden Situation als Folgerung dieses abstrakten Satzes gewonnen werden. Wir geben hier statt dessen einen einfachen direkten Beweis an.

2. Im Fall $k=1$, $j=0$ liefert Satz 1 ein Ergebnis von Keller u. White [13]. (1) ist dann ein System erster Ordnung, und die Paare (L^0_h, R^0_h) und (L^1_h, R^1_h) unterscheiden sich nur in den Randfunktionalen. In [13] werden auch nicht äquidistante Gitter zugelassen. Dies ist in Satz 1 ebenfalls ohne weiteres möglich.

Beweis von Satz 1. Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen genügt es, eine Richtung der Behauptung zu beweisen. Sei also (L^0_h, R^0_h) bez. $\| \ \|_j$ stabil. Gilt dies für (L^1_h, R^1_h) nicht, so gibt es eine Teilfolge $H' \subset H$ und eine Folge $x_h \in X_h$ $(h \in H')$ mit $\|x_h\|_j = 1$, $\|L^1_h x_h\|_0 \to 0$ und $\|R^1_h x_h\|_0 \to 0$. Nach (iii) und Lemma 1 können wir außerdem $(R^0_h - R^1_h)x_h \to g$ für $h \in H'$ und ein $g \in \mathbb{R}^{mk}$, sowie im Fall $j \geqq 1$ auch $\|x_h - [x]_h\|_{j-1} \to 0$ für $h \in H'$ und ein $x \in (C^{j-1}[A,B])^m$ annehmen. Für $j=0$ sei $x \equiv 0$. Wegen (i) besitzt die Randwertaufgabe

$$L^0 z = (L^0 - L^1)x \quad \text{in } [A,B], \quad R^0 z = g, \tag{9}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $z \in (C^k[A,B])^m$.

Aus der Stabilität von (L^0_h, R^0_h) bez. $\| \ \|_j$ folgt dann

$$\begin{aligned} \|[z]_h - x_h\|_j &\leqq C(\|L^0_h[z]_h - L^0_h x_h\|_0 + \|R^0_h[z]_h - R^0_h x_h\|_0) \\ &\leqq C(\|L^0_h[z]_h - [L^0 z]_{k,h}\|_0 + \|[(L^0 - L^1)x)]_{k,h} - (L^0_h - L^1_h)[x]_h\|_0 \\ &\quad + \|(L^0_h - L^1_h)([x]_h - x_h)\|_0 + \|L^1_h x_h\|_0 + \|R^0_h[z]_h - R^0 z\|_0 \\ &\quad + \|g - (R^0_h - R^1_h)x_h\|_0 + \|R^1_h x_h\|_0 \end{aligned}$$

für fast alle $h \in H'$. Aufgrund unserer Annahmen und der Voraussetzungen (ii) und (iii) streben alle Summanden der rechten Seite für $h \to 0$ $(h \in H')$ gegen 0. Bei der Abschätzung des zweiten Summanden im Fall $j \geqq 1$ bestimmen wir dabei zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $y \in (C^k[A,B])^m$, so daß $\|[(L^0 - L^1)(y-x)]_{k,h}\|_0 \leqq \varepsilon$ und $\|[y-x]_h\|_{j-1} \leqq \varepsilon$ für alle hinreichend kleinen $h \in H$ gilt. Anschließend wird h

nach (ii) so klein gewählt, daß $\|(L_h^0-L_h^1)[y]_h-[(L^0-L^1)\,y]_{k,h}\|_0\leqq\varepsilon$ gilt. Zusammen mit (iii) folgt dann die Behauptung aus

$$\begin{aligned}\|[(L^0-L^1)\,x]_{k,h}-(L_h^0-L_h^1)[x]_h\|_0 &\leqq \|[(L^0-L^1)(x-y)]_{k,h}\|_0\\ &+\|[(L^0-L^1)\,y]_{k,h}-(L_h^0-L_h^1)[y]_h\|_0+\|(L_h^0-L_h^1)([y]_h-[x]_h)\|_0.\end{aligned}$$

Im Fall $j\geqq 1$ ergibt sich mit Hilfe von (4) aus $\|[z]_h-x_h\|_j\to 0$ und $\|[x]_h-x_h\|_{j-1}\to 0$, daß $z(t)=x(t)$ für alle $t\in[a,b]$ gilt.

Schließlich erhalten wir mit (ii) und (iii)

$$\begin{aligned}\|g-(R^0-R^1)z\|_0 &\leqq \|g-(R_h^0-R_h^1)x_h\|_0+\|(R_h^0-R_h^1)(x_h-[z]_h)\|_0\\ &+\|(R_h^0-R_h^1)[z]_h-(R^0-R^1)z\|_0\to 0 \qquad (h\in H').\end{aligned}$$

Daher folgen aus (9) sowohl für $j=0$ als auch für $1\leqq j\leqq k$ die Gleichungen $L^0 z=(L^0-L^1)z$ in $[a,b]$, $R^0 z=(R^0-R^1)z$, und die Bedingung (i) liefert $z\equiv 0$ in $[a,b]$. Wegen $\|x_h-[z]_h\|_j\to 0$ $(h\in H')$ und (4) hat dies aber $\|x_h\|_j\to 0$ $(h\in H')$ und daher einen Widerspruch zur Folge. q.e.d.

Sei wiederum die Randwertaufgabe (1) gegeben. Wir untersuchen die $\|\ \|_k$-Stabilität von Paaren (L_h, R_h) linearer Operatoren $L_h\colon X_h\to X_{k,h}$ und $R_h\colon X_h\to\mathbb{R}^{mk}$ unter Annahme einer bestimmten Darstellung für L_h.

Durch $L=p_k D^k+L'$ mit $L'=\sum_{j=0}^{k-1} p_j D^j$ wird L in seinen Hauptteil $p_k D^k$ und in Terme niedrigerer Ordnung zerlegt. Eine entsprechende Aufspaltung wollen wir für L_h annehmen.

Ein einfaches Differenzenanalogon zu D^k ist Δ^k ebenso wie $E^{-k_1}\Delta^k$, welches wir hier verwenden wollen, da $E^{-k_1}\Delta^k(X_h)\subset X_{k,h}$ gilt. Nun lassen sich Differenzenformeln für D^k, insbesondere solche von hoher Konsistenzordnung, i.allg. als Mittelungen von $E^{-k_1}\Delta^k$ darstellen (vgl. 3.), so daß wir für den diskreten Hauptteil auf die Form $p_k^h E^{-k_1}\Delta^k$ mit einem linearen Operator $p_k^h\colon X_{k,h}\to X_{k,h}$ geführt werden. Im folgenden sei nun $L_h=p_k^h E^{-k_1}\Delta^k+L'_h$ mit linearen Operatoren $p_k^h\colon X_{k,h}\to X_{k,h}$, $L'_h\colon X_h\to X_{k,h}$. In unserem obigen Beispiel ist etwa

$$L'_h x_h(t)=q(t)\,x_h(t) \qquad \text{für } t\in J_{2,h},$$

$$p_2^h x_h(t)=\begin{cases} x_h(t) & \text{für } t=a \text{ und } t=b-h\\ \frac{1}{12}(-x_h(t-h)+14x_h(t)-x_h(t+h)) & \text{für } t=a+h,\dots,b-2h.\end{cases} \tag{10}$$

Setzen wir nun $j=k$ in Satz 1 und wählen

$$L^1=L,\quad L_h^1=L_h,\quad R^1=R,\quad R_h^1=R_h \quad\text{sowie}\quad L^0=p_k D^k,\quad L_h^0=p_k^h E^{-k_1}\Delta^k,$$
$$R^0 x=(x^{(j-1)}(a),\ j=1,\dots,k) \qquad \text{für } x\in(C^{k-1}[a,b])^m,$$
$$R_h^0 x_h=(\Delta^{j-1}x_h(a_h),\ j=1,\dots,k) \qquad \text{für } x_h\in X_h,$$

so ist unter den Voraussetzungen von Satz 1 (L_h, R_h) genau dann $\|\ \|_k$-stabil, wenn ein $C>0$ existiert, so daß für fast alle $h\in H$ die Ungleichung

$$\|y_h\|_k\leqq C(\|p_k^h E^{-k_1}\Delta^k y_h\|_0+\operatorname{Max}\{\|\Delta^{j-1}y_h(a_h)\|_0\colon j=1,\dots,k\}) \qquad \forall\, y_h\in X_h \tag{11}$$

besteht. Ist nun $x_h \in X_{k,h}$ gegeben und wählt man $y_h \in X_h$ als Lösung der Aufgabe $\Delta^k y_h = E^{k_1} x_h$, $\Delta^{j-1} y_h(a_h) = 0$, $j = 1, \ldots, k$, so folgt aus (11)

$$\|x_h\|_0 \leqq C \|p_k^h x_h\|_0 \quad \forall\, x_h \in X_{k,h} \quad \text{und für fast alle } h \in H. \tag{12}$$

p_k^h ist also stabil bezüglich $\|\ \|_0$. Ist umgekehrt (12) vorausgesetzt, so folgt (11). Sei dazu $y_h \in X_h$ gegeben. Angewandt auf $x_h = E^{-k_1} \Delta^k y_h$ liefert (12)

$$\|\Delta^k y_h\|_0 = \|E^{-k_1} \Delta^k y_h\|_0 \leqq C \|p_k^h E^{-k_1} \Delta^k y_h\|_0.$$

Hieraus folgt wegen

$$\|\Delta^{j-1} y_h\|_0 \leqq C(\|\Delta^{j-1} y_h(a_h)\|_0 + \|\Delta^j y_h\|_0) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, k$$

die Behauptung. Insgesamt erhalten wir den

Satz 2. 0 sei kein Eigenwert von $(L = p_k D^k + L', R)$. Die Operatoren $p_k^h E^{-k_1} \Delta^k$, L'_h und R_h seien mit den entsprechenden Operatoren $p_k D^k$, L' und R konsistent. Ferner existiere ein $C > 0$ mit

$$\|L'_h x_h\|_0 \leqq C \|x_h\|_{k-1}, \quad \|R_h x_h\|_0 \leqq C \|x_h\|_k \qquad \forall\; x_h \in X_h,\ h \in H.$$

Dann ist $(L_h = p_k^h E^{-k_1} \Delta^k + L'_h, R_h)$ genau dann bez. $\|\ \|_k$ stabil, wenn p_k^h bez. $\|\ \|_0$ stabil ist, d.h. wenn es ein $C_0 > 0$ gibt mit

$$\|x_h\|_0 \leqq C_0 \|p_k^h x_h\|_0 \qquad \forall\; x_h \in X_{k,h} \text{ und für fast alle } h \in H.$$

Bemerkungen. 1. Satz 2 enthält das Ergebnis von Kreiss [14], Theorem 3.1, 3.2, welches in unsere Schreibweise übertragen besagt, daß aus der Stabilität von p_k^h bez. $\|\ \|_0$ die Stabilität von (L_h, R_h) bez. $\|\ \|_0$ folgt. Dabei können wir gegenüber [14] auf einige Bedingungen an die explizite Darstellung von L_h und R_h und die Forderung der Konsistenz von (L_h, R_h) mit der Ordnung 1 verzichten.

2. Ein Resultat der Form

„Stabilität von $p_k^h \Rightarrow$ Stabilität von (L_h, R_h)"

ist im Prinzip auch in der Hilbertraumtheorie von Grigorieff [8] 1.7, [7] 3.5 und den Stabilitätsaussagen bez. diskreter Sobolew-Normen (s. [8], 4(10)) enthalten.

3. Im Fall $p_k^h = I$, d.h. D^k wird durch $E^{-k_1} \Delta^k$ diskretisiert, ist (12) stets erfüllt und damit das Paar (L_h, R_h) unter den sehr allgemein gültigen Voraussetzungen von Satz 2 bez. $\|\ \|_k$ stabil (vgl. [14], Theorem 3.3).

3. Die Wurzelbedingungen

Durch Satz 2 wird das allgemeine Stabilitätsproblem für Paare (L_h, R_h) $(h \in H)$ auf die Stabilität eines Mittelungsoperators p_k^h: $X_{k,h} \to X_{k,h}$ zurückgeführt, falls die Differenzenapproximation des Hauptteils $p_k D^k$ die Gestalt $p_k^h E^{-k_1} \Delta^k$ hat.

Wir nehmen im folgenden an, daß (1) eine skalare Randwertaufgabe ist (also $m = 1$) und daß $p_k \equiv 1$ gilt.

Eine übliche Differenzenformel liefert als Approximation von $x^{(k)}(t)$ einen Ausdruck $h^{-k}\sum_{i=i_0}^{i_1}\gamma_i x(t+ih)$ mit von h unabhängigen Koeffizienten $\gamma_i \in \mathbb{R}$ und ganzen Zahlen i_0, i_1, für die $i_1-i_0 \geqq k$ gilt. Bei der Konstruktion solcher Formeln geht man i. allg. von einem Mehrstellenansatz:

$$F_h = h^{-k}\sum_{i=i_0}^{i_1}\gamma_i E^i - \sum_{j=j_0}^{j_1}\eta_j E^j D^k \qquad (i_0, i_1, j_0, j_1 \in \mathbb{Z},\ i_1-i_0 \geqq k,\ j_1 \geqq j_0) \tag{13}$$

aus (s. Collatz [4], III, §2; oder für Anwendungen symmetrischer Formeln Bohl [2]). Bestimmt man die Koeffizienten eines Operators F_h: $C^k(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ der Form (13) aus dem Gleichungssystem

$$\sum_{j=j_0}^{j_1}\eta_j = 1, \quad (F_h(t^{i-1}))(0) = 0 \qquad \text{für } i=1,\dots,\rho := j_1-j_0+i_1-i_0+1, \tag{14}$$

so folgt bekanntlich für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$(F_h x)(t) = \begin{cases} O(h^{\rho-k}) & \text{für } x \in C^\rho(\mathbb{R}) \\ O(h^{\rho+1-k}) & \text{für } x \in C^{\rho+1}(\mathbb{R}), \text{ falls } k \text{ gerade ist und} \\ & \gamma_i = \gamma_{-i} \quad \text{für } i=1,\dots,i_1=-i_0, \text{ sowie} \\ & \eta_j = \eta_{-j} \quad \text{für } j=1,\dots,j_1=-j_0 \text{ gilt.} \end{cases} \tag{15}$$

Allgemein gilt für Formeln der Form (13) das folgende

Lemma 2. Sei F_h von der Form (13), und es gelte

$$\sum_{j=j_0}^{j_1}\eta_j = 1, \quad \lim_{h\to 0}(F_h q)(0) = 0 \qquad \text{für alle Polynome } q \text{ vom Grade } \leqq k. \tag{16}$$

Dann existiert ein Polynom p vom Grade $\leqq i_1-i_0-k$ mit $p(1)=1$ und

$$F_h = E^{i_0}p(E)\Delta^k - \sum_{j=j_0}^{j_1}\eta_j E^j D^k. \tag{17}$$

Beweis. Sei $j \in \{0,\dots,k\}$ und δ_{jk} das Kroneckersymbol. Aus (16) folgt

$$0 = \lim_{h\to 0}(F_h(t^j))(0) = \lim_{h\to 0}\left(h^{j-k}\sum_{i=i_0}^{i_1}\gamma_i i^j - k!\,\delta_{jk}\right)$$

und damit $\sum_{i=i_0}^{i_1}\gamma_i i^j = k!\,\delta_{jk}$. Für das Polynom $r(z) = \sum_{i=i_0}^{i_1}\gamma_i z^{i-i_0}$ ist daher $r^{(j)}(1) = k!\,\delta_{jk}$, und es existiert ein Polynom p vom Grade $\leqq i_1-i_0-k$ mit $r(z)=p(z)(z-1)^k$. k-malige Differentiation und Einsetzen von $z=1$ liefert dann $p(1)=1$. q.e.d.

Bemerkung. Thomée u. Westergren [19] (s. auch [6]) haben für allgemeinere Ausdrücke F_h mit nicht notwendig konstanten Koeffizienten eine etwas schwächere Darstellung als (17) gezeigt, die noch Terme mit niedrigeren Differenzen als Δ^k enthält.

Zu den Formeln der Form (13), die sich in der Gestalt (17) darstellen lassen, gehören nach Lemma 2 insbesondere jene, deren Koeffizienten aus (14) bestimmt werden. Wir schreiben (17) in der Form

$$F_h = P(E)E^{-k_1}\Delta^k - M(E)D^k$$

mit (18)

$$P(E) = E^{k_1 - i_0}p(E) = \sum_{i=-\alpha}^{\bar\alpha} \xi_i E^i \, (\alpha, \bar\alpha \in \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad M(E) = \sum_{j=j_0}^{j_1} \eta_j E^j.$$

Eine vorgegebene Differenzenformel (18) mit $\alpha, \bar\alpha \in \mathbb{N}$ kann höchstens an den Stellen $t \in J_{k,h}$ zur Approximation von $x^{(k)}(t)$ verwendet werden, für die $t-\alpha h$, $t+\bar\alpha h \in J_{k,h}$ gilt, also für $t = a'_h + \alpha h, \ldots, b'_h - \bar\alpha h$. In den randnahen Punkten $a'_h, \ldots, a'_h + (\alpha-1)h$ und $b'_h - (\bar\alpha - 1)h, \ldots, b'_h$ sind jeweils andere Formeln der Form (18) zu verwenden, die nur Funktionswerte an Gitterpunkten aus J_h benutzen. Wir nehmen daher für p_k^h die folgende kanonische Form an (vgl. [8]):

$$p_k^h x_h(t) = \begin{cases} (q_j(E)x_h)(a'_h) & \text{für } t = a'_h + jh, \ j = 0, \ldots, \alpha - 1, \\ (P(E)x_h)(t) & \text{für } t = a'_h + \alpha h, \ldots, b'_h - \bar\alpha h, \qquad x_h \in X_{k,h}. \\ (\bar q_j(E^{-1})x_h)(b'_h) & \text{für } t = b'_h - jh, \ j = 0, \ldots, \bar\alpha - 1, \end{cases} \tag{19}$$

Dabei sei $P(E) = \sum_{i=-\alpha}^{\bar\alpha} \xi_i E^i (\alpha, \bar\alpha \in \mathbb{N})$, und q_j, $j = 0, \ldots, \alpha - 1$, $\bar q_j$, $j = 0, \ldots, \bar\alpha - 1$, seien von h unabhängige, reelle Polynome.

Die Definition von p_k^h ist sinnvoll, falls h so klein gewählt wird, daß

$$\operatorname{Grad}(q_i), \operatorname{Grad}(\bar q_j) \leqq h^{-1}(b'_h - a'_h) \qquad \text{für } i = 0, \ldots, \alpha - 1, \ j = 0, \ldots, \bar\alpha - 1$$

gilt. In unserem obigen Beispiel erhält der Operator p_2^h aus (10) die Form (19), wenn wir

$$\alpha = \bar\alpha = 1, \quad q_0(E) = \bar q_0(E) = I \quad \text{und} \quad P(E) = \tfrac{1}{12}(-E^{-1} + 14I - E)$$

setzen.

Es seien nun $\sigma_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, d$, bzw. $\bar\sigma_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, \bar d$, die Nullstellen von $z^\alpha P(z)$ bzw. $z^{\bar\alpha} P(1/z)$, die im Innern des Einheitskreises liegen. σ_i besitze die Vielfachheit v_i und $\bar\sigma_j$ die Vielfachheit $\bar v_j$.

$\beta = \sum_{j=1}^{d} v_j$ bzw. $\bar\beta = \sum_{j=1}^{\bar d} \bar v_j$ ist also die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) von $z^\alpha P(z)$ bzw. $z^{\bar\alpha} P(1/z)$ im Einheitskreis. Ist $P(z) \neq 0$ für $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar\beta &= |\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \ z \neq 0, \ P(1/z) = 0\}| + (\alpha + \bar\alpha - \operatorname{Grad}(z^\alpha P(z))) \\ &= \operatorname{Grad}(z^\alpha P(z)) - \beta + \alpha + \bar\alpha - \operatorname{Grad}(z^\alpha P(z)), \end{aligned}$$

also die Gleichung

$$\alpha + \bar\alpha = \beta + \bar\beta. \tag{20}$$

Satz 3. Der Operator $p_k^h (h \in H)$ sei von der Form (19) mit $\alpha, \bar{\alpha} > 0$. Dann ist die Stabilität von p_k^h bez. $\| \|_0$ mit jeder der beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Es gelten die Wurzelbedingungen

W1: $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

W2: Es gilt $\alpha = \beta$, $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, und die quadratischen Matrizen

$$Q = \left(q_{i-1}^{(\nu-1)}(\sigma_j) \colon \begin{matrix} i = 1, \dots, \alpha \\ \nu = 1, \dots, v_j,\ j = 1, \dots, d \end{matrix} \right) \quad \text{und}$$

$$\bar{Q} = \left(\bar{q}_{i-1}^{(\nu-1)}(\bar{\sigma}_j) \colon \begin{matrix} i = 1, \dots, \bar{\alpha} \\ \nu = 1, \dots, \bar{v}_j,\ j = 1, \dots, \bar{d} \end{matrix} \right) \quad \text{sind invertierbar.}$$

(ii) Es gilt W1 und jedes komplexe Polynom läßt sich in der Form

$$q(z) \prod_{j=1}^{d} (z - \sigma_j)^{v_j} + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \mu_i q_i(z) \quad \text{und} \quad \bar{q}(z) \prod_{j=1}^{\bar{d}} (z - \bar{\sigma}_j)^{\bar{v}_j} + \sum_{i=0}^{\bar{\alpha}-1} \bar{\mu}_i \bar{q}_i(z)$$

mit geeigneten Polynomen q, $\bar{q}$ und Zahlen $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, \alpha - 1$, $\bar{\mu}_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, \bar{\alpha} - 1$, darstellen.

Bemerkungen. 1. Wir geben hier ohne Beweis an, daß Satz 3 gültig bleibt, wenn die Norm $\| \|_0$ durch irgendeine diskrete L_s-Norm $1 \leqq s < \infty$ ersetzt wird. Die Bedingung (ii) geht auf Grigorieff ([9], 2(4), 3(6)) zurück. Dort wird die Äquivalenz von (ii) mit der Stabilität von p_k^h bez. der Euklidischen Norm ($s = 2$) mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation bewiesen.

2. Der Fall $\bar{\alpha} = 0$ (und ebenso $\alpha = 0$), der im wesentlichen bei Differenzenverfahren für Anfangswertaufgaben auftritt, kann in Satz 3 berücksichtigt werden. Wie der folgende Beweis zeigt, entfallen dann in (i) und (ii) die Bedingungen an $\bar{\sigma}_j$, $j = 1, \dots, \bar{d}$, und $\bar{q}_i$, $i = 0, \dots, \bar{\alpha} - 1$, und in (ii) ist $\alpha = \beta$ einzufügen. Die Charakterisierung der Stabilität von p_k^h bez. einer diskreten L_s-Norm, $1 \leqq s \leqq \infty$, durch (ii) ist im Fall $\bar{\alpha} = 0$ in den Ergebnissen von Müller [18] enthalten.

Beweis von Satz 3. Da p_k^h ein reeller Operator ist, ist seine Stabilität bez. $\| \|_0$ äquivalent zu der Stabilität des komplexifizierten Operators

$$(S_n x)(j) = \begin{cases} (q_j(E) x)(0), & j = 0, \dots, \alpha - 1, \\ (P(E) x)(j), & j = \alpha, \dots, n - \bar{\alpha}, \\ (\bar{q}_{n-j}(E^{-1}) x)(n), & j = n - \bar{\alpha} + 1, \dots, n, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{C}^{n+1},\ n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

bez. der Norm

$$\|x\|_0 = \operatorname{Max} \{ |x(j)| \colon j = 0, \dots, n \} \qquad \text{für } x \in \mathbb{C}^{n+1}. \tag{22}$$

Dabei ist $X_{k,h} = \mathbb{R}^{J_{k,h}}$ mit $\mathbb{R}^{n+1}$, $n = h^{-1}(b_h' - a_h')$, identifiziert worden. Sei $\mathbb{C}_0^{n+1} = \{ x \in \mathbb{C}^{n+1}, (S_n x)(j) = 0$ für $j = \alpha, \dots, n - \bar{\alpha} \}$. Dann ist die Stabilität von S_n bez. $\| \|_0$ äquivalent mit der Bedingung

(i′) Es gilt W1 und es existiert ein $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x\|_0 \leqq C \|S_n x\|_0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{C}_0^{n+1},\ n \geqq N.$$

Diese Rückführung der Stabilität von S_n auf die Wurzelbedingung an P und die Stabilität von S_n im „halbhomogenen" Fall ist bereits in der Arbeit von Kreiss [14], Lemma 3.1, enthalten. Wir beschränken uns daher auf den Nachweis der Äquivalenz (i′)⇔(i)⇔(ii)

(i)⇔(i′): Wir nehmen zunächst nur die Bedingung W1 an, die in (i′) und (i) vorausgesetzt wird. $\mathbb{C}_0^{n+1}$ enthält die Fundamentalfunktionen des Differenzenoperators $P(E)$. Für $\alpha+\bar{\alpha}\leqq n+1$ wird eine geeignete Basis von $\mathbb{C}_0^{n+1}$ durch die folgenden Funktionen gegeben (vgl. [11] 5.2-1):

$$\varphi_{\nu j}^n(i)=\Big(\prod_{\mu=i-\nu+2}^{i}\mu\Big)\,\sigma_j^{i-\nu+1}\qquad \text{für } \nu=1,\dots,v_j,\ j=1,\dots,d\ (i=0,\dots,n),$$

$$\bar{\varphi}_{\nu j}^n(i)=\Big(\prod_{\mu=n-i-\nu+2}^{n-i}\mu\Big)\,\bar{\sigma}_j^{n-i-\nu+1}\qquad \text{für } \nu=1,\dots,\bar{v}_j,\ j=1,\dots,\bar{d}\ (i=0,\dots,n).$$

Dabei ist $\prod_{\mu=\mu_1}^{\mu_2}\mu=1$ für $\mu_1>\mu_2$ und $0^j=\delta_{j0}$ gesetzt.

Unser Ziel ist, S_n bez. dieser Basis auf $\mathbb{C}_0^{n+1}$ durch eine $(\alpha+\bar{\alpha})\times(\alpha+\bar{\alpha})$-Matrix darzustellen. Zunächst bemerken wir für jedes Polynom q vom Grade $\leqq n$ die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}(q(E)\,\varphi_{\nu j}^n)(0)&=q^{(\nu-1)}(\sigma_j)\qquad &&\text{für } \nu=1,\dots,v_j,\ j=1,\dots,d,\\ (q(E^{-1})\,\bar{\varphi}_{\nu j}^n)(n)&=q^{(\nu-1)}(\bar{\sigma}_j)\qquad &&\text{für } \nu=1,\dots,\bar{v}_j,\ j=1,\dots,\bar{d}.\end{aligned}\tag{23}$$

Jedes $x\in\mathbb{C}_0^{n+1}$ hat nun eine Darstellung $x=\sum_{\nu,j}\gamma_{\nu j}\varphi_{\nu j}^n+\sum_{\nu,j}\bar{\gamma}_{\nu j}\bar{\varphi}_{\nu j}^n$ mit gewissen Koeffizienten $\gamma_{\nu j}\in\mathbb{C}$, $\nu=1,\dots,v_j$, $j=1,\dots,d$, bzw. $\bar{\gamma}_{\nu j}\in\mathbb{C}$, $\nu=1,\dots,\bar{v}_j$, $j=1,\dots,\bar{d}$. Wir bringen diese Koeffizienten in dieselbe Reihenfolge wie die Zeilenelemente von Q bzw. $\bar{Q}$ und erhalten so Vektoren $\gamma\in\mathbb{C}^\beta$ bzw. $\bar{\gamma}\in\mathbb{C}^{\bar{\beta}}$.

Es existieren von $x\in\mathbb{C}_0^{n+1}$ und von $n\geqq\alpha+\bar{\alpha}-1$ unabhängige Konstanten $C_1, C_2>0$ mit

$$\|x\|_0\leqq C_1\left\|\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\right\|_0\leqq C_2\,\|x\|_0,\tag{24}$$

wobei $\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{\beta+\bar{\beta}}=\mathbb{C}^{\alpha+\bar{\alpha}}$ der aus γ und $\bar{\gamma}$ zusammengesetzte Vektor ist. (24) ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß die Basisfunktionen $\varphi_{\nu j}^n$ bzw. $\bar{\varphi}_{\nu j}^n$ wegen $|\sigma_j|<1$ für $j=1,\dots,d$ bzw. $|\bar{\sigma}_j|<1$ für $j=1,\dots,\bar{d}$ in geometrischer Weise nach rechts bzw. links abklingen.

Sei $S_n^{(0)}x\in\mathbb{C}^{\alpha+\bar{\alpha}}$ der durch Restriktion von $S_n x$, $x\in\mathbb{C}_0^{n+1}$, auf $\{0,\dots,\alpha-1, n-\bar{\alpha}+1,\dots,n\}$ entstehende Vektor. Wir erhalten mit Hilfe von (23)

$$S_n^{(0)}x=\begin{pmatrix}\sum_{\nu,j}\gamma_{\nu j}q_i^{(\nu-1)}(\sigma_j)+\sum_{\nu,j}\bar{\gamma}_{\nu j}(q_i(E)\,\bar{\varphi}_{\nu j}^n)(0), & i=0,\dots,\alpha-1\\ \sum_{\nu,j}\gamma_{\nu j}(\bar{q}_{n-i}(E^{-1})\,\varphi_{\nu j}^n)(n)+\sum_{\nu,j}\bar{\gamma}_{\nu j}\bar{q}_{n-i}^{(\nu-1)}(\bar{\sigma}_j), & i=n-\bar{\alpha}+1,\dots,n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}Q & Q_n\\ \bar{Q}_n & \bar{Q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}.$$

Dabei ist Q_n eine $\alpha\times\beta$-Matrix, $\bar{Q}_n$ eine $\bar{\alpha}\times\beta$-Matrix, und es gelten

$$\lim_{n\to\infty} Q_n=0, \quad \lim_{n\to\infty}\bar{Q}_n=0.$$

Für $V_n=\begin{pmatrix} Q & Q_n \\ \bar{Q}_n & \bar{Q}\end{pmatrix}$ folgt also $\lim\limits_{n\to\infty} V_n=\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{Q}\end{pmatrix}=:V_\infty$.

Ist die Bedingung W2 erfüllt, so ist V_∞ invertierbar. Nach dem Banachschen Lemma (s. [12], V2.6) ist daher V_n $(n\in\mathbb{N})$ bez. $\|\ \|_0$ stabil. Mit Hilfe von (24) folgt dann für ein $C>0$ und ein $N\in\mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|x\|_0\leqq C_1\left\|\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\right\|_0\leqq C\left\|V_n\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\right\|_0=C\,\|S_n^{(0)}x\|_0=C\,\|S_n x\|_0 \qquad \forall\ x\in\mathbb{C}_0^{n+1},\ n\geqq N.$$

Damit ist (i) $\Rightarrow$ (i') gezeigt.

Ist nun (i') erfüllt und (i) verletzt, so existiert ein Vektor $\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{\alpha+\bar{\alpha}}$ mit $\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\neq 0$ und $V_\infty\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}=0$.

Setzen wir

$$x^n=\sum_{\nu,j}\gamma_{\nu j}\,\varphi_{\nu j}^n+\sum_{\nu,j}\bar{\gamma}_{\nu j}\,\bar{\varphi}_{\nu j}^n,$$

so folgt

$$0<\left\|\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\right\|_0\leqq C_2\|x^n\|_0\leqq C\,C_2\|S_n x^n\|_0=C\,C_2\left\|V_n\begin{pmatrix}\gamma\\ \bar{\gamma}\end{pmatrix}\right\|_0=C\,C_2\left\|\begin{pmatrix}Q_n\bar{\gamma}\\ \bar{Q}_n\gamma\end{pmatrix}\right\|_0\to 0$$

und damit ein Widerspruch.

(i)$\Leftrightarrow$(ii): Es bleibt die Äquivalenz von W2 mit der Polynombedingung von (ii) zu zeigen. Diese ist rein algebraischer Natur. Wir setzen zur Abkürzung $p_0(z)=\prod\limits_{j=1}^{d}(z-\sigma_j)^{v_j}$.

Ist W2 erfüllt, so existieren für jedes Polynom r Koeffizienten $\mu_i\in\mathbb{C}, i=0,\dots,\alpha-1$, mit

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1}\mu_i q_i^{(\nu-1)}(\sigma_j)=r^{(\nu-1)}(\sigma_j) \qquad \text{für } \nu=1,\dots,v_j,\ j=1,\dots,d.$$

Da p_0 vom Grad β ist, existiert ein Polynom q, so daß $\hat{q}=r-\sum\limits_{i=0}^{\alpha-1}\mu_i q_i-q\,p_0$ vom Grad $\leqq\beta-1$ ist. Für $\hat{q}$ gilt offenbar $\hat{q}^{(\nu-1)}(\sigma_j)=0$ für $\nu=1,\dots,v_j, j=1,\dots,d$. Also ist $\hat{q}\equiv 0$. Entsprechend folgt die zweite Polynombedingung von (ii).

Wir setzen nun (ii) voraus. Es seien β Zahlen $r_{\nu j}\in\mathbb{C}$, $\nu=1,\dots,v_j$, $j=1,\dots,d$, gegeben. Dann existiert das Interpolationspolynom r vom Grade $\leqq\beta-1$ mit den Vorgaben $r^{(\nu-1)}(\sigma_j)=r_{\nu j}$ für $\nu=1,\dots,v_j$, $j=1,\dots,d$.

Andererseits existieren $\mu_i \in \mathbb{C}$, $i=0,\dots,\alpha-1$, und ein Polynom q mit $r = q\,p_0 + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \mu_i\, q_i$. Hieraus erhalten wir

$$r_{\nu j} = r^{(\nu-1)}(\sigma_j) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \mu_i\, q_i^{(\nu-1)}(\sigma_j) \qquad \text{für } \nu = 1,\dots,v_j,\ j=1,\dots,d.$$

Daher hat Q den Rang β und es ist $\alpha \geqq \beta$. Entsprechend folgt, daß $\bar{Q}$ den Rang $\bar{\beta}$ hat und daß $\bar{\alpha} \geqq \bar{\beta}$ gilt. Wegen (20) erhalten wir schließlich $\alpha = \beta$ und $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ und damit die Behauptung. q.e.d.

Wir bemerken abschließend, daß der Satz 3 auch im Fall $m > 1$ eines Systems von Randwertaufgaben angewandt werden kann. Ist dann nämlich der Operator p_k^h: $X_{k,h} \to X_{k,h}$ komponentenweise von der Form (19), so ist seine Stabilität bez. $\|\ \|_0$ nach Satz 3 äquivalent damit, daß in jeder Komponente die Wurzelbedingungen W1 und W2 erfüllt sind.

4. Anwendungen

Die Wurzelbedingungen W1 und W2 lassen sich für ein gegebenes Differenzenschema unmittelbar nachprüfen, gegebenenfalls auch durch eine numerische Rechnung. So wird für unser Beispiel (5), (6) in der Darstellung (19), wie oben bemerkt,

$$\alpha = \bar{\alpha} = 1, \qquad P(z) = \tfrac{1}{12}(-z^{-1} + 14 - z), \qquad q_0(z) = \bar{q}_0(z) \equiv 1,$$

und hierfür gelten die Wurzelbedingungen W1 und W2. Nach Satz 2 und Satz 3 folgt dann die Stabilität des zu unserem Beispiel (5), (6) gehörigen Paares (L_h, R_h) bez. $\|\ \|_2$, falls die gegebene Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Stabilität einiger Differenzenschemata für Randwertaufgaben gerader Ordnung nachweisen. Es sei also $k = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir stellen zunächst für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ einige Differenzenformeln der Form (13) auf, die dem Gleichungssystem (14) genügen.

Dabei nutzen wir aus, daß wir nach Lemma 2 dieselben Formeln erhalten, wenn wir anstelle von (13) den reduzierten Ansatz

$$F_h = P(E)\,E^{-n}\,\Delta^{2n} - M(E)\,D^{2n} \quad \text{mit } P(E) = \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_1} \xi_\nu E^\nu, \quad M(E) = \sum_{j=j_0}^{j_1} \eta_j E^j \tag{25}$$

wählen und anstelle von (14) das kleinere Gleichungssystem

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} \eta_j = 1, \ (F_h(t^{j-1}))(0) = 0 \quad \text{für } j = 2n+1,\dots,2n+1+j_1-j_0+\nu_1-\nu_0 = \rho \tag{26}$$

lösen, denn jede Formel F_h der Form (25) genügt den Gleichungen $(F_h(t^{j-1}))(0) = 0$ für $j = 1,\dots,2n$. Wir bezeichnen die so gewonnenen Formeln mit $F_{h,a}^\tau$, $F_{h,b}^\tau, \dots$ usw., wobei τ jeweils die gemäß (15) größtmögliche Konsistenzordnung angibt. Im Fall $j_0 = j_1 = 0$ wird $\eta_0 = 1$, es liegt also keine „echte" Mehrstellenformel vor, und wir geben dann nur die Koeffizienten ξ_ν, $\nu = \nu_0, \dots, \nu_1$, von P an.

Formel	ξ_{-2}	ξ_{-1}	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3
$F^2_{h,a}$			1			
$F^3_{h,a}$			$1-\frac{n}{12}$	$\frac{n}{6}$	$-\frac{n}{12}$	
$F^3_{h,b}$	$-\frac{n}{12}$	$\frac{n}{6}$	$1-\frac{n}{12}$			
$F^4_{h,a}$		$-\frac{n}{12}$	$1+\frac{n}{6}$	$-\frac{n}{12}$		
$F^4_{h,b}$			$1-\frac{n}{6}$	$\frac{5n}{12}$	$-\frac{n}{3}$	$\frac{n}{12}$
$F^6_{h,a}$	$\frac{n}{1440}(5n+11)$	$-\frac{n}{360}(5n+41)$	$1+\frac{n}{240}(5n+51)$	$-\frac{n}{360}(5n+41)$	$\frac{n}{1440}(5n+11)$	

	ξ_{-1} η_{-1}	ξ_0 η_0	ξ_1 η_1
$F^4_{h,M}$		1	
	$\frac{n}{12}$	$1-\frac{n}{6}$	$\frac{n}{12}$
$F^6_{h,M}$	$-\frac{1}{120}(5n-11)$	$\frac{1}{60}(5n+49)$	$-\frac{1}{120}(5n-11)$
	$\frac{1}{120}(5n+11)$	$-\frac{1}{60}(5n-49)$	$\frac{1}{120}(5n+11)$

Durch Symmetriebetrachtungen läßt sich ebenso wie $F^3_{h,b}$ aus $F^3_{h,a}$ die Formel

$$F^4_{h,c}=\left(\frac{n}{12}E^{-3}-\frac{n}{3}E^{-2}+\frac{5n}{12}E^{-1}+\left(1-\frac{n}{6}\right)I\right)E^{-n}\Delta^{2n}-D^{2n}$$

aus $F^4_{h,b}$ gewinnen.

Die obige Tabelle enthält für die Fälle $n=2$ unter Berücksichtigung der Darstellung (25) eine Reihe der bei Collatz [4] angegebenen Differenzenformeln.

Wir nehmen im folgenden an, daß die Randwertaufgabe

$$x^{(2n)}+\sum_{j=0}^{2n-1} p_j x^{(j)}=r \quad \text{in } [a,b],\ Rx=\gamma\in\mathbb{R}^{2n}, \tag{27}$$

eindeutig lösbar ist. Zur Diskretisierung von (27) wählen wir eine Gittermenge $J_h=\{a_h, a_h+h, \ldots, b_h-h, b_h\}$ mit der Eigenschaft (4) und setzen $k_1=k_2=n$, also $J_{2n,h}=\{a_h+nh, \ldots, b_h-nh\}$.

Unser Differenzenschema für (27) wird durch eine Folge von Formeln beschrieben, die der obigen Tabelle entnommen sind. Wir erläutern dies an einem Beispiel.

Schema I. $(F^2_{h,a}, F^4_{h,a}, F^2_{h,a})$.

Hierdurch sind die folgenden Gleichungen gegeben:

$$r(t)=\begin{cases} E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)+L'_h x_h(t) & \text{für } t=a_h+nh,\\ \left(-\frac{n}{12}E^{-1}+\left(1+\frac{n}{6}\right)I-\frac{n}{12}E\right)E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)+L'_h x_h(t) & \\ & \text{für } t=a_h+(n+1)h,\dots,b_h-(n+1)h,\\ E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)+L'_h x_h(t) & \text{für } t=b_h-nh,\end{cases} \tag{28}$$

$$R_h x_h=\gamma.$$

Dabei können für $L'_h x_h$ und $R_h x_h$ beliebige konsistente Differenzenersetzungen von $\sum_{j=0}^{2n-1} p_j x^{(j)}$ bzw. Rx eingesetzt werden, solange diese nur die Werte von x_h an den Gitterpunkten von J_h benötigen und durch $\|x_h\|_{2n-1}$ bzw. $\|x_h\|_{2n}$ abgeschätzt werden können. Für die Stabilität des Schemas I bez. $\| \quad \|_{2n}$ kommt es nach Satz 2 nur auf den diskreten Hauptteil $p^h_{2n}E^{-n}\Delta^{2n}$ an, der aus (28) unmittelbar abzulesen ist. p^h_{2n} hat die Form (19), wenn man $\alpha=\bar{\alpha}=1$,

$$P(z)=-\frac{n}{12}z^{-1}+\left(1+\frac{n}{6}\right)-\frac{n}{12}z \quad \text{und} \quad q_0(z)=\bar{q}_0(z)=1$$

setzt. P hat die Nullstellen $\sigma_n=n^{-1}(6+n-\sqrt{12n+36})$ und $1/\sigma_n$, wobei $\sigma_n\in(0,1)$ gilt. $Q=\bar{Q}=(q_0(\sigma_n))=(1)$ ist trivialerweise nicht singulär. Damit sind die Wurzelbedingungen W1 und W2 von Satz 3 erfüllt, und zusammen mit Satz 2 folgt für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Stabilität des Differenzenverfahrens (28) bez. $\| \quad \|_{2n}$. Der Fall $n=1$ enthält auch unser obiges Beispiel (5), (6).

Wir bemerken außerdem, daß im Schema I wie auch in allen folgenden Schemata P stets symmetrisch ist, d.h. daß $P(1/z)=P(z)$ gilt. Da ferner $\alpha=\bar{\alpha}$ und $q_j=\bar{q}_j$ für $j=0,\dots,\alpha-1$ wird, braucht man wegen $Q=\bar{Q}$ für die Bedingung W2 nur die Matrix Q zu untersuchen.

Schema II. $(F^3_{h,a}, F^4_{h,a}, F^3_{h,b})$.

Für $t=a_h+nh$ bzw. $t=b_h-nh$ ist jetzt in (28) anstelle von $F^2_{h,a}$ die Formel $F^3_{h,a}$ bzw. $F^3_{h,b}$ einzusetzen. Gegenüber Schema I ändern sich in der Darstellung (19) lediglich q_0 und $\bar{q}_0$. Es wird

$$q_0(z)=\bar{q}_0(z)=-\frac{n}{12}z^2+\frac{n}{6}z+\left(1-\frac{n}{12}\right).$$

Aus $q_0(z)-zP(z)=1-z$ folgt $q_0(\sigma_n)=1-\sigma_n\neq 0$ und damit nach Satz 2 und Satz 3 die Stabilität von Schema II für jedes $n\in\mathbb{N}$.

Schema III. $(F^2_{h,a}, F^4_{h,a}, F^6_{h,a}, F^4_{h,a}, F^2_{h,a})$.

Das Differenzenschema lautet jetzt:

$$E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)+L'_h x_h(t)=r(t)$$
$$\text{für } t=a_h+nh \text{ und } t=b_h-nh,$$

$$\left(-\frac{n}{12}E^{-1}+\left(1-\frac{n}{6}\right)I-\frac{n}{12}E\right)E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)+L'_h x_h(t)=r(t)$$
$$\text{für } t=a_h+(n+1)h \text{ und } t=b_h-(n+1)h,$$

$$\left(\sum_{i=-2}^{2}\xi_i E^i\right)E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)+L'_h x_h(t)=r(t)$$
$$\text{für } t=a_h+(n+2)h,\dots,b_h-(n+2)h.$$

Dabei sind für ξ_i, $i=-2,\dots,2$, die Koeffizienten von $F^6_{h,a}$ einzusetzen. Der diskrete Hauptteil läßt sich wieder als $p^h_{2n}E^{-n}\Delta^{2n}$ und p^h_{2n} in der Form (19) schreiben. Dabei ist zu setzen $\alpha=\bar{\alpha}=2$,

$$P(z)=\frac{1}{1440}(n(5n+11)(z^2+z^{-2})-4n(5n+41)(z+z^{-1})$$
$$+1440+6n(5n+51)),$$

$$q_0(z)=\bar{q}_0(z)=1,\qquad q_1(z)=\bar{q}_1(z)=-\frac{n}{12}z^2+\left(1+\frac{n}{6}\right)z-\frac{n}{12}.$$

Eine Aufspaltung von $z^2P(z)$ in zwei quadratische Faktoren zeigt, daß die Wurzeln von P von der Form $\mu_n, \mu_n^*, \mu_n^{-1}, \mu_n^{*-1}$ mit einem $\mu_n\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ sind, für das $|\mu_n|<1$ gilt (μ_n^* sei dabei konjugiert komplex zu μ_n). Hieraus folgt W1. Ferner erhalten wir für die 2×2-Matrix Q aus W2:

$$\det Q=q_1(\mu_n^*)-q_1(\mu_n)=(\mu_n-\mu_n^*)\left(1+\frac{n}{6}(1-\operatorname{Re}(\mu_n))\right)\neq 0.$$

Damit ist das Schema III für alle $n\in\mathbb{N}$ stabil.

Schema IV. $(F^3_{h,a}, F^4_{h,a}, F^6_{h,a}, F^4_{h,a}, F^3_{h,b})$.

Die Änderungen gegenüber Schema III sind durch

$$q_0(z)=\bar{q}_0(z)=-\frac{n}{12}z^2+\frac{n}{6}z+\left(1-\frac{n}{12}\right)$$

gegeben. Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\det Q=(\mu_n-\mu_n^*)\left(1+\frac{n}{12}(1-\mu_n)(1-\mu_n^*)\right)\neq 0 \qquad \text{für jedes } n\in\mathbb{N},$$

also gelten die Wurzelbedingungen von Satz 3.

Schema V. $(F^4_{h,b}, F^4_{h,a}, F^6_{h,a}, F^4_{h,a}, F^4_{h,c})$.

Damit wird $q_0(z)=\bar{q}_0(z)=\frac{n}{12}z^3-\frac{n}{3}z^2+\frac{5n}{12}z+1-\frac{n}{6}$, und für die Matrix Q aus der Bedingung W2 liefert eine längere Rechnung, die wir hier übergehen,

$$\det Q = d_n|\mu_n|^{-2}|1-\mu_n|^4(\mu_n^*-\mu_n)(1-|\mu_n|^2+d_n|1-\mu_n|^4)\neq 0$$

mit

$$d_n=\frac{n}{1440}(5n+11).$$

Schema VI. $(F^4_{h,M}, F^6_{h,M}, F^4_{h,M})$.

Hierdurch ist das folgende Mehrstellenschema gegeben:

$$\begin{aligned}
&E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t)=\left(\frac{n}{12}E^{-1}+\left(1-\frac{n}{6}\right)I+\frac{n}{12}E\right)(r(t)-L'_h x_h(t))\\
&\qquad \text{für } t=a_h+nh \text{ und } t=b_h-nh,\\
&((11-5n)E^{-1}+2(5n+49)I+(11-5n)E)E^{-n}\Delta^{2n}x_h(t) \qquad (29)\\
&\qquad =((5n+11)E^{-1}+2(49-5n)I+(5n+11)E)(r(t)-L'_h x_h(t))\\
&\qquad \text{für } t=a_h+(n+1)h,\dots,b_h-(n+1)h,\ R_h x_h=\gamma.\\
&R_h x_h=\gamma.
\end{aligned}$$

Für R_h und L'_h dürfen wieder wie im Schema I konsistente Formeln für R bzw. $L'=\sum_{j=0}^{2n-1} p_j D^j$ eingesetzt werden, wobei jetzt zu berücksichtigen ist, daß die Auswertung der gesamten rechten Seite von (29) nur Funktionswerte von x_h auf J_h benötigt. Für den durch die linke Seite von (29) gegebenen Operator p^h_{2n} ist $q_0(z)=\bar{q}_0(z)=1$ und $120\ P(z)=(11-5n)(z+z^{-1})+2(5n+49)$ in der Darstellung (19) zu setzen. Hierfür sind die Wurzelbedingungen W1 und W2 bei beliebigem $n\in\mathbb{N}$ erfüllt.

Bemerkungen. 1. Bei den obigen Schemata haben wir in Randnähe Differenzenformeln von niedrigerer Konsistenzordnung als im Gitterinnern verwendet. Dies ist durchaus sinnvoll, da in vielen Fällen die höhere Konvergenzordnung hiervon unberührt bleibt (vgl. [3], [14], [17]).

2. Die Stabilität des Schemas I wird für $n=1$ in [14] und für $n=1, 2$ bez. Sobolew-Normen in [8] gezeigt. Für die meisten der obigen Schemata ist bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung die Stabilität der zugehörigen Paare (L_h, R_h) bez. $\|\ \|_0$ auch mit Hilfe ihrer Inversmonotonie nachgewiesen worden (siehe u.a. [1], [3], [5], [16], [17]). Dort werden i. allg. über die Konsistenz hinausgehende Bedingungen an die Differenzenapproximationen L_h und R_h benötigt.

3. Nach einem Hinweis, den ich J. Lorenz verdanke, gilt für alle Formeln F_h der Gestalt (13), die aus dem Gleichungssystem (14) für $j_0=j_1=0, i_0=-i_1$ und gerades k bestimmt werden, die Bedingung $P(z)\neq 0$ für $|z|=1$. Damit ist die Wurzelbedingung W1 für diese symmetrischen Formeln stets erfüllt (s. Schema I – V). Auch beim Nachweis der zweiten Wurzelbedingung W2 kommt man, wie die obigen Beispiele zeigen, häufig ohne die explizite Kenntnis der Wurzeln von P aus.

Nachtrag bei der Korrektur

Inzwischen erschien eine Arbeit von Esser [21], in der Stabilitätsungleichungen der Form (3) mit $j \leq k-l$ untersucht werden, bei denen außerdem auf der rechten Seite $\|L_h x_h\|_0$ durch die diskrete L_1-Norm von $L_h x_h$ ersetzt wird. Dort wird u.a. gezeigt, daß sich auch die Stabilität in diesem Sinne ergibt, wenn der diskrete Hauptteil gewissen Wurzelbedingungen (die zu unseren aus Satz 3 (i) äquivalent sind) genügt.

Literatur

1. Bohl, E.: On finite difference methods as applied to boundary value problems. Istituto per le applicazioni del Calcolo (IAC), pubblicazioni Serie III – Nr. 100, pp. 4 – 35, 1975
2. Bohl, E.: Zur Anwendung von Differenzenschemen mit symmetrischen Formeln bei Randwertaufgaben. ISNM 32, S. 25 – 47. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1976
3. Bramble, J.H., Hubbard, B.E.: On a finite difference analogue of an elliptic boundary value problem which is neither diagonally dominant nor of nonnegative type. J. Mathematical and Physical Sci. **43**, 117 – 132 (1964)
4. Collatz, L.: The numerical treatment of differential equations, 3rd ed. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1966
5. Gorenflo, R.: Über S. Gerschgorins Methode der Fehlerabschätzung bei Differenzenverfahren. In: Lecture notes in mathematics, Vol. 333. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
6. Grigorieff, R.D.: Verallgemeinert approximativ kompakte Operatoren und Anwendungen. Habilitationsschrift, Frankfurt a.M., 1969
7. Grigorieff, R.D.: Approximation von Eigenwertproblemen und Gleichungen zweiter Art in Hilbertschen Räumen. Math. Ann. **183**, 45 – 77 (1969)
8. Grigorieff, R.D.: Die Konvergenz des Rand- und Eigenwertproblems linearer gewöhnlicher Differenzengleichungen. Numer. Math. **15**, 15 – 48 (1970)
9. Grigorieff, R.D.: Über die Koerzitivität gewöhnlicher Differenzenoperatoren und die Konvergenz von Mehrschrittverfahren. Numer. Math. **15**, 196 – 218 (1970)
10. Grigorieff, R.D.: Zur Theorie linearer approximationsregulärer Operatoren. I und II. Math. Nachr. **55**, 233 – 249, 251 – 263 (1972)
11. Henrici, P.: Discrete variable methods in ordinary differential equations. New York-London-Sydney: Wiley 1962
12. Kantorowitsch, L.W., Akilow, G.P.: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964
13. Keller, H.B., White, A.B.: Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations. SIAM J. Numer. Anal. **12**, 791 – 802 (1975)
14. Kreiss, H.-O.: Difference approximations for boundary and eigenvalue problems for ordinary differential equations. Math. Comput. **26**, 605 – 624 (1972)
15. Lees, M., Schultz, M.H.: A Leray-Schauder principle for A-compact mappings and the numerical solution of nonlinear two point boundary value problems. In: Numerical solution of nonlinear differential equations (D. Greenspan, ed.), pp. 167 – 181. New York-London-Sydney: Wiley 1966
16. Lorenz, J.: Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzenverfahren. Dissertation, Universität Münster, 1975
17. Lorenz, J.: Zur Inversmonotonie diskreter Probleme. Numer. Math. **27**, 227 – 238 (1977)
18. Müller, K.H.: Stabilitätsungleichungen für lineare Differenzenoperatoren. ISNM 27, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 227 – 253. Basel-Stuttgart: Birkhäuser 1975
19. Stummel, F.: Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. I. Math. Ann. **190**, 45 – 92 (1970)
20. Thomée, V., Westergren, B.: Elliptic difference equations and interior regularity. Numer. Math. **11**, 196 – 210 (1968)
21. Esser, H.: Stabilitätsungleichungen für Diskretisierungen von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen. Numer. Math. **28**, 69 – 100 (1977)

Eingegangen am 22. April 1977