DAS PARALLELENVERFAHREN FÜR OPERATORGLEICHUNGEN UND SEINE ANWENDUNG AUF NICHTLINEARE RANDWERTAUFGABEN

Wolf-Jürgen Beyn

In this paper we consider the numerical solution of operator equations of the form $Ax = Fx$, where $x \in Z$, A is a linear and F (in general) a nonlinear operator on Z. Using the contraction mapping theorem in a space Z with a generalized distance ρ we get convergence results and error estimates for the parallel chord method. Basically we assume a Lipschitz condition for F and inverse isotonicity for A. Finally we apply the general results to discrete analogues of nonlinear boundary value problems and we give several numerical examples.

Wir betrachten Operatorgleichungen der Form

(1) $Ax = Fx, \ x \in D(A) \subset Z.$

Hierbei sei Z ein reeller Vektorraum, $F: Z \longrightarrow Z$ sei ein (i.a. nichtlinearer) Operator auf Z, und es gelte $A \in L_o[Z]$. Dabei sei $L_o[Z]$ die Menge der linearen Operatoren B mit linearem Definitionsbereich D(B) in Z und Wertebereich in Z. Ferner sei

$L[Z] = \{ B \in L_o[Z] : \ D(B) = Z \}$.

Wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen an A und F sich ein geeigneter Operator $\Lambda \in L[Z]$ finden läßt, so daß das Parallelenverfahren

PAV $\quad (A - \Lambda)x^{n+1} = (F - \Lambda)x^n, \ n \in \mathbb{N}, \ x^o \in Z,$

eine Folge $\{x^n\}$ liefert, die gegen eine Lösung von (1) konvergiert.

Wählt man den Operator Λ im PAV speziell, so erhält man bekannte Iterationsverfahren:

$\Lambda = 0$ ergibt die direkte oder Picard-Iteration [1,4,8]

und $\Lambda = F'(x^o)$ das vereinfachte Newton-Verfahren [8,18].

In zahlreichen speziellen Situationen ist das PAV in der Literatur behandelt worden,

für nichtlineare Randwertaufgaben u.a. in [1,21,22,23],

für endlichdimensionale Gleichungssysteme, insbesondere Diskretisierungen von nichtlinearen Randwertaufgaben in [11,12,13,18],

für Integral- oder allgemeiner Operatorgleichungen vom Hammersteinschen Typ in [4,10,14]

und übertragen auf Operatorgleichungen der Form $Tx = 0$, $x \in Z$, T ein Operator auf Z, in [15,18,25].

In einigen Fällen, in denen der Kontraktionssatz auf das PAV angewandt wird, beinhalten die Voraussetzungen neben Lipschitzbedingungen an F Symmetrie- und Spektraleigenschaften von A (siehe [10,11,14,18]) oder Inversmonotoniebedingungen an A (siehe [11,12,22,23]).

Wir geben in dieser Arbeit einen allgemeinen Konvergenzsatz für das PAV an, wobei wir uns auf den Kontraktionssatz in Abstandsräumen stützen (vgl. [4]).
Dabei zeigt sich, daß die oben zitierten Konvergenzbedingungen für das PAV sich auf eine gemeinsame Wurzel zurückführen lassen und daß sich überdies Gleichungen der Form (1) mit einseitig lipschitzbeschränkten Operatoren F erfassen lassen.
Im Abschnitt 2. erhalten wir außerdem lokale und globale Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die Gleichung (1).
Wir geben eine Fehlerabschätzung für die Folge $\{x^n\}$ an

und vergleichen die Konvergenzgeschwindigkeiten des PAV für verschiedene Operatoren Λ (siehe 2. Satz 3).
In 3. und 4. werden die Resultate von 2. in normierten und halbgeordneten Vektorräumen diskutiert, auf denen jeweils in kanonischer Weise ein Abstand gegeben ist.

In 5. wenden wir die Ergebnisse des 4. Abschnitts auf nichtlineare gewöhnliche Randwertaufgaben an. Über die Resultate in [16,22,23] hinaus zeigt sich u.a., daß die Lösbarkeit nichtlinearer Sturm-Liouvillescher Randwertaufgaben mit einseitig lipschitzbeschränkten Nichtlinearitäten allein aus der Kontraktion des Parallelenverfahrens folgt.

Der Abschnitt 6. ist der Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme gewidmet, für die wir eine etwas speziellere Gestalt als (1) annehmen, wie sie bei der Anwendung von Differenzenverfahren auf nichtlineare Randwertaufgaben oft auftritt. In den Ergebnissen sind u.a. Resultate aus [11,12] enthalten, und es wird die Beziehung zu dem Fall aufgezeigt, daß das PAV zwei die Lösung von (1) monoton einschließende Folgen liefert ([13,18]).

Einige numerische Beispiele zeigen die Anwendbarkeit des PAV auf Diskretisierungen nichtlinearer Randwertaufgaben, insbesondere solchen, bei denen Differenzenformeln höherer Ordnung oder Mehrstellenformeln benutzt wurden.

Diese Arbeit enthält Teile meiner Dissertation [2] an der an der Universität Münster.
Ich bin Herrn Prof. Dr. E. Bohl für zahlreiche Anregungen und die stete Diskussion über den Gegenstand dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

1. Das Kontraktionsprinzip in Abstandsräumen

Für die in diesem Abschnitt verwendeten Begriffsbildungen sei auf [4] verwiesen.
$(X, \leq)$ sei im folgenden ein halbgeordneter, archimedischer

Vektorraum, für den die Menge der Ordnungseinheiten

$oK = \{e \in X : \forall x \in X \; \exists c \in \mathbb{R}, c \geq 0, \text{ mit } \pm x \leq c e\}$

nicht leer ist. Durch

$\|x\|_e = \inf\{c \geq 0 : \pm x \leq c e\}$, $x \in X$, $e \in oK$,

wird dann eine Schar von paarweise äquivalenten Normen auf X erklärt. Die linearen, monotonen Operatoren auf X bilden die Menge

$L_+[X] = \{A \in L[X] : x \in X, x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0\}$.

Mittels der Relation

$A_1 \leq A_2 :\Longleftrightarrow A_2 - A_1 \in L_+[X] \quad (A_1, A_2 \in L[X])$

wird $(L[X], \leq)$ ein halbgeordneter Vektorraum. Einen Operator $A \in L_0[X]$ nennen wir inversmonoton, wenn A^{-1} existiert und zu $L_+[X]$ gehört.

Bei der Behandlung der Fixpunktaufgabe

(2) $x = Tx$, $x \in Y$,

für einen Operator $T : Y \to Y$ nehmen wir an, daß auf der Menge Y ein symmetrischer Abstand ρ mit Werten in $(X, \leq)$ gegeben ist, d.h. die Abbildung $\rho : Y \times Y \to X$ habe die Eigenschaften

$\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$, $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ und $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

jeweils für drei Elemente $x,y,z \in Y$. Das Tupel (Y, ρ, X) heißt auch Abstandsraum.

Sei $P \in L_+[X]$. T heißt P-beschränkt in einer Teilmenge $Y_0 \subset Y$, wenn $\rho(Tx, Ty) \leq P\rho(x,y)$ für alle $x,y \in Y_0$ gilt.

Auf Y wird durch

$d_e(x,y) = \|\rho(x,y)\|_e$, $x,y \in Y$, $e \in oK$,

eine Schar von paarweise äquivalenten Metriken definiert (siehe [3]). Der Abstandsraum (Y, ρ, X) heißt vollständig, falls der metrische Raum (Y, d_e), $e \in oK$, vollständig ist.

Für $w \in X$, $w \geq 0$, und $y \in Y$ führen wir

$\varkappa_\rho(y,w) = \{x \in Y : \rho(x,y) \leq w\}$

als die Abstandskugel mit dem Mittelpunkt y und dem Radius w ein.
Nach [4] gilt der

SATZ 1: (Y,ρ,X) sei ein vollständiger Abstandsraum und T ein P-beschränkter Operator auf Y. $I-P$ sei inversmonoton. Dann besitzt (2) eine eindeutig bestimmte Lösung $\bar{x}\in Y$. Die Iteration

(3) $x^{n+1} = Tx^n,\ n\in\mathbb{N},\ x^0\in Y,$

liefert eine Folge x^n, die bezüglich $d_e, e\in \mathring{K}$, gegen $\bar{x}$ konvergiert. Es gilt die Abschätzung

(4) $\rho(\bar{x},x^{n+1}) \le (I-P)^{-1}P\,\rho(x^n,x^{n+1})$ für $n\in\mathbb{N}$.

Wir bemerken, daß die Aussage von Satz 1 für eine Kugel $\varkappa_\rho(y,w)$ anstelle von Y erhalten bleibt, wenn nur T in $\varkappa_\rho(y,w)$ P-beschränkt ist und $\rho(y,Ty)\le (I-P)w$ gilt; denn $(\varkappa_\rho(y,w),\rho,X)$ ist ein vollständiger Abstandsraum, und wegen $\rho(Tx,y)\le\rho(Tx,Ty)+\rho(Ty,y)\le Pw+(I-P)w=w$ für $x\in\varkappa_\rho(y,w)$ bildet T die Abstandskugel $\varkappa_\rho(y,w)$ in sich ab.

Bemerkung : Für eine allgemeinere Formulierung des Kontraktionsprinzips, in welcher die Bedingungen an X und die Konvergenzbedingung an P abgeschwächt werden und in der ein i.a. unsymmetrischer Abstand ρ zugelassen wird, sei auf [3,4] verwiesen. Dem Satz 1 entsprechende Aussagen, welche die Theorie der P-Räume verwenden und in denen auch nichtlineare Majoranten zugelassen werden, werden in [8,20] angegeben.

2. Der Konvergenzsatz für das Parallelenverfahren

Bei der Behandlung der Gleichung (1) legen wir stets die folgende Voraussetzung zugrunde:

GV: Z ist ein reeller Vektorraum und (Z,ρ,X) ein vollständiger Abstandsraum mit $\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)\ \forall\, x,y,z\in Z$. Ferner ist $A\in L_o[Z]$ und $F\colon Z\longrightarrow Z$.

Für $\Lambda\in L[Z]$ ist (1) äquivalent zu

(5) $(A-\Lambda)x=(F-\Lambda)x,\ x\in D(A)$.

Setzen wir $R_Z(A)=\{\Lambda\in L[Z]:\ (A-\Lambda)^{-1}$ existiert auf $Z\}$ und wählen ein $\Lambda\in R_Z(A)$, so ist (5) äquivalent zu

(6) $x=(A-\Lambda)^{-1}(F-\Lambda)x,\ x\in Z$.

SATZ 2: Es sei GV erfüllt, und es gebe Operatoren $\Lambda\in R_Z(A)$, $\bar A\in L_o[X]$, $\bar\Lambda,\bar\Lambda_2\in L[X]$ mit den Eigenschaften

(IMon) $\bar A-\bar\Lambda$ und $\bar A-\bar\Lambda_2$ sind inversmonoton,

(LipA) $(A-\Lambda)^{-1}$ ist $(\bar A-\bar\Lambda)^{-1}$-beschränkt in Z,

(LipF) $F-\Lambda$ ist $(\bar\Lambda_2-\bar\Lambda)$-beschränkt in $\mathscr{K}_\rho(y,w)$ für ein $y\in D(A)$ und ein $w\in D(\bar A)$ mit

(7) $\rho(Ay,Fy)\le(\bar A-\bar\Lambda_2)w$.

Dann besitzt (1) eine eindeutig bestimmte Lösung $\bar x$ in $\mathscr{K}_\rho(y,w)\cap D(A)$. Das PAV liefert für jeden Startvektor $x^o\in\mathscr{K}_\rho(y,w)$ eine Folge x^n in $\mathscr{K}_\rho(y,w)$, die bezüglich d_e, $e\in oK$, gegen $\bar x$ konvergiert. Es gilt die Fehlerabschätzung

(8) $\rho(\bar x,x^{n+1})\le(\bar A-\bar\Lambda_2)^{-1}(\bar\Lambda_2-\bar\Lambda)\,\rho(x^n,x^{n+1}),\ n\in\mathbb{N}$.

Beweis: Wir wenden Satz 1 und die darauf folgende Aussage mit $T=(A-\Lambda)^{-1}(F-\Lambda)$ und $P=(\bar A-\bar\Lambda)^{-1}(\bar\Lambda_2-\bar\Lambda)$ an. Nach (LipA) und (LipF) ist T in $\mathscr{K}_\rho(y,w)$ P-beschränkt. Aus
$\rho((A-\Lambda)y,(F-\Lambda)y)=\rho(Ay,Fy)\le(\bar A-\bar\Lambda_2)w$ folgt
$\rho(y,Ty)=\rho((A-\Lambda)^{-1}(A-\Lambda)y,(A-\Lambda)^{-1}(F-\Lambda)y)$
$\le(\bar A-\bar\Lambda)^{-1}(\bar A-\bar\Lambda_2)w=(\bar A-\bar\Lambda)^{-1}(\bar A-\bar\Lambda-\bar\Lambda_2+\bar\Lambda)w=(I-P)w.$

Für den Operator $V = I + (\bar{A} - \bar{\Lambda}_2)^{-1}(\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda}) \in L_+[X]$ erhält man nach einigen Umformungen $V(I-P) = (I-P)V = I$, also die Inversmonotonie von $I-P$. Daher ist (6) in $\mathscr{K}_\rho(y,w)$ und (1) in $D(A) \cap \mathscr{K}_\rho(y,w)$ eindeutig lösbar und das PAV konvergent. Die Abschätzung (8) ergibt sich aus (4) mittels der Gleichung $(I-P)^{-1}P = VP = V - I = (\bar{A} - \bar{\Lambda}_2)^{-1}(\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda})$. q.e.d.

Bemerkungen zu Satz 2:

1. In Satz 2 gilt offenbar eine globale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die Gleichung (1) und die Konvergenz des PAV für alle $x^0 \in Z$, wenn die Bedingung (LipF) auf Z besteht.

2. (1) ist ebenfalls in Z eindeutig lösbar, wenn wir annehmen, daß es zu jedem $v \in D(\bar{A})$, $v \geq 0$, Operatoren $\Lambda(v) \in R_Z(A)$ und $\bar{\Lambda}(v) \in L[X]$ gibt, die anstelle von Λ und $\bar{\Lambda}$ den Bedingungen (IMon) und (LipA) genügen und für die (LipF) auf $\mathscr{K}_\rho(y,v)$ gilt. Für die iterative Berechnung der Lösung von (1) gelten die Aussagen von Satz 2, wobei lediglich Λ durch $\Lambda(w)$ und $\bar{\Lambda}$ durch $\bar{\Lambda}(w)$ zu ersetzen ist.

Zum Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von (1) in D(A) wählen wir ein $z \in \mathrm{o}K$ mit $z \geq \rho(Ay, Fy)$, setzen $w = (\bar{A} - \bar{\Lambda}_2)^{-1}z$ und wenden für jedes $c \geq 1$ den Satz 2 mit $cw, \Lambda(cw), \bar{\Lambda}(cw)$ anstelle von $w, \Lambda, \bar{\Lambda}$ an. Es folgt dann die Eindeutigkeit der Lösung in $D(A) \cap (\cup\{\mathscr{K}_\rho(y,cw) : c \geq 1\})$. Sei nun $x \in D(A)$. Dann existiert ein $c \geq 1$ mit $\rho((A - \Lambda(w))x, (A - \Lambda(w))y) \leq cz$. Mit Hilfe von (LipA) folgt $\rho(x,y) \leq c(\bar{A} - \bar{\Lambda}(w))^{-1}z =$ $c(w - (\bar{A} - \bar{\Lambda}(w))^{-1}(\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda}(w))w) \leq cw$.

Damit ist $D(A) \subset \cup\{\mathscr{K}_\rho(y,cw) : c \geq 1\}$ gezeigt.

Im folgenden Satz vergleichen wir die Konvergenzgeschwindigkeiten des PAV für verschiedene Operatoren Λ.

Als Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit verwenden wir den Spektralradius $\sigma(P)$, wobei $P \in L_+[X]$ den Operator $(A-\Lambda)^{-1}(F-\Lambda)$, mit dem im PAV iteriert wird, beschränkt.

SATZ 3: Es seien die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Seien ferner $\Gamma \in R_Z(A)$ und $\bar{\Gamma} \in L[X]$ gegeben, welche anstelle von Λ und $\bar{\Lambda}$ den Bedingungen (IMon) und (LipA) genügen. Schließlich gelte

(9) $\Lambda - \Gamma$ ist $(\bar{\Lambda} - \bar{\Gamma})$-beschränkt in Z.

Dann sind alle Voraussetzungen von Satz 2 sowohl mit den Operatoren $\Lambda, \bar{\Lambda}$ als auch mit $\Gamma, \bar{\Gamma}$ anstelle von $\Lambda, \bar{\Lambda}$ erfüllt. Für die beschränkenden Operatoren

$P = (\bar{A} - \bar{\Lambda})^{-1}(\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda})$ und $Q = (\bar{A} - \bar{\Gamma})^{-1}(\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Gamma})$ gilt

(10) $\sigma(P) \leq \sigma(Q)$.

Beweis: Wir zeigen die $(\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Gamma})$-Beschränktheit von $F - \Gamma$ in $\mathscr{X}_\rho(y,w)$. Seien $u, v \in \mathscr{X}_\rho(y,w)$ gegeben. Mit (LipF), GV und (9) folgt

$$\begin{aligned}&\rho((F-\Gamma)u,(F-\Gamma)v) \leq \rho((F-\Gamma)u,(F-\Lambda)v + (\Lambda-\Gamma)u)\\ &+ \rho((F-\Lambda)v + (\Lambda-\Gamma)u,(F-\Gamma)v) = \rho((F-\Lambda)u,(F-\Lambda)v)\\ &+ \rho((\Lambda-\Gamma)u,(\Lambda-\Gamma)v) \leq (\bar{\Lambda}_2-\bar{\Lambda})\rho(u,v) + (\bar{\Lambda}-\bar{\Gamma})\rho(u,v)\\ &= (\bar{\Lambda}_2-\bar{\Gamma})\rho(u,v).\end{aligned}$$

Es bleibt (10) nachzuweisen. Nun sind $\bar{A} - \bar{\Lambda}_2 = \bar{A} - \bar{\Lambda} - (\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda}) = \bar{A} - \bar{\Gamma} - (\bar{\Lambda}_2 - \bar{\Gamma})$ zwei Zerlegungen des inversmonotonen Operators $\bar{A} - \bar{\Lambda}_2$, wobei $\bar{A} - \bar{\Lambda}$ und $\bar{A} - \bar{\Gamma}$ inversmonoton sind und $0 \leq \bar{\Lambda}_2 - \bar{\Lambda} \leq \bar{\Lambda}_2 - \bar{\Gamma}$ gilt. Nach einem bekannten Vergleichssatz für Spektralradien folgt dann (10) (siehe [4] III 4.5, wobei die Aussagen dort auch gelten, wenn die beteiligten inversmonotonen Operatoren in $L_0[X]$ liegen). q.e.d.

Bemerkungen:

1. Nehmen wir die Vollständigkeit des Raumes $(X, \|\ \|_e)$, $e \in \mathring{K}$, an, so bleibt die Aussage von Satz 3 erhalten,

wenn wir die Bedingungen (IMon) und (LipA) nicht voraussetzen; denn man kann zeigen, daß diese aus (9) und den entsprechenden Bedingungen für Γ und $\tilde{\Gamma}$ folgen.

2. Satz 3 besagt, vereinfacht ausgedrückt, daß das PAV mit Λ höchstens „schneller" konvergiert als mit Γ.

3. In [2] werden diesem Abschnitt 2. entsprechende Aussagen für Operatorgleichungen vom Hammersteinschen Typ

(11) $\quad x = GFx, \quad x \in Z, \quad F: Z \to Z, \quad G \in L[Z]$,

auf welche sich (1) i.a. zurückführen läßt, hergeleitet. Dort werden auch unsymmetrische Abstände zugelassen.

3. Das Parallelenverfahren im normierten Raum

Wir diskutieren die Ergebnisse aus 2. in diesem und dem nächsten Abschnitt für zwei spezielle Abstandsräume (Z,ρ,X). Zunächst sei $(Z,\|\ \|)$ ein normierter Raum. Wir verwenden die Abstandsmenge $X = \mathbb{R}$ und den Abstand

$\rho(x,y) = \|x - y\|$, $x,y \in Z$.

Setzen wir für die Operatoren $\bar{A}, \bar{\Lambda}, \bar{\Lambda}_2$ in Satz 2 reelle Zahlen a, λ, λ_2 ein, so fordert (IMon) lediglich die Ungleichungen $\lambda < a$, $\lambda_2 < a$. Es sei ferner

$R(A) = \{\mu \in \mathbb{R} : (A - \mu I)^{-1}$ existiert auf Z und ist stetig$\}$

$S(A) = \mathbb{R} \setminus R(A)$ (das reelle Spektrum von A).

Für $\Lambda = \lambda I$ mit einem $\lambda \in R(A)$ ist dann $\Lambda \in R_Z(A)$ und (LipA) fordert die Ungleichung $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \le (a - \lambda)^{-1}$. Diese Bedingung realisieren wir durch eine Forderung an S(A).

SATZ 4: Es gelte

(GV, $\|\ \|$) $(Z,\|\ \|)$ ist ein Hilbertraum, $F: Z \to Z$, $A \in L_0[Z]$ ist symmetrisch und D(A) dicht in Z.

$[\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R}$ sei ein nichtleeres Intervall mit

(LipA, $\|\ \|$) $\mu \notin [\lambda_1, \lambda_2]$ für alle $\mu \in S(A)$

(LipF,$\| \ \|$) $F - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)I$ <u>ist</u> $\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$-<u>beschränkt in</u>

$\mathcal{H}(y,w) = \{x \in Z : \|x - y\| \le w\}$ <u>für ein</u> $y \in D(A)$ <u>und ein</u> $w \in \mathbb{R}$ <u>mit</u>

(12) $w \ge (a - \lambda_2)^{-1}\|Ay - Fy\|, \quad 0 < a - \lambda_2 \le \operatorname{dist}([\lambda_1, \lambda_2], S(A))$.

<u>Dann besitzt</u> (1) <u>eine in</u> $\mathcal{H}(y,w) \cap D(A)$ <u>eindeutig bestimmte Lösung</u> $\bar{x}$. <u>Das</u> PAV <u>mit</u> $\Lambda = \lambda I$, $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, <u>konvergiert für alle</u> $x^0 \in \mathcal{H}(y,w)$, <u>und es gilt die Fehlerabschätzung</u>

(13) $\|\bar{x} - x^{n+1}\| \le (\lambda_2 - \lambda)(a - \lambda_2)^{-1}\|x^n - x^{n+1}\|, n \in \mathbb{N}, \lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Beweis: Wir wenden Satz 2 in der oben beschriebenen Weise mit $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ an. Da A höchstens ein reelles Spektrum hat, folgt aus dem Spektralsatz (siehe [24] Kap.5)

$S((A - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)I)^{-1}) \setminus \{0\} = \{(\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2))^{-1} : \mu \in S(A)\}$

und damit $\|(A - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)I)^{-1}\| = \sigma((A - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)I)^{-1})$

$= \sup\{|\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)|^{-1} : \mu \in S(A)\} \le (a - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2))^{-1}$.

(LipF) ergibt sich unmittelbar aus (LipF,$\| \ \|$). q.e.d.

Entsprechend der Bemerkung 2. zu Satz 2 erhalten wir im Fall (GV,$\| \ \|$) die Existenz und globale Eindeutigkeit einer Lösung $\bar{x}$ von (1) unter den Voraussetzungen

(i) $\mu \ge a > \lambda_2$ für alle $\mu \in S(A)$,

(ii) zu jedem $v \in \mathbb{R}$, $v \ge 0$, existiert ein $\lambda_1(v) \in \mathbb{R}$ und zu je zwei $x_1, x_2 \in \mathcal{H}(y,v)$ ein selbstadjungierter Operator $dF(x_1,x_2) \in L[Z]$ mit

$Fx_1 - Fx_2 = dF(x_1,x_2)(x_1 - x_2)$ und

$\lambda_1(v)(z,z) \le (dF(x_1,x_2)z,z) \le \lambda_2(z,z)$ für alle $z \in Z$;

denn aus (ii) folgt, daß $F - \frac{1}{2}(\lambda_1(v) + \lambda_2)I$ in $\mathcal{H}(y,v)$ $\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1(v))$-beschränkt ist.

Zur iterativen Berechnung der Lösung von (1) unter den Voraussetzungen (i) und (ii) gelten die Aussagen von Satz 4 mit $\lambda_1(w)$ anstelle von λ_1. Setzen wir im Satz 3
$\Gamma = \lambda I$, $\bar{\Gamma} = \lambda$ sowie $\Lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1(w) + \lambda_2)I$, $\bar{\Lambda} = \frac{1}{2}(\lambda_1(w) + \lambda_2)$ ein,
so folgt weiter, daß das PAV für alle $\Lambda = \lambda I$ mit

(14) $\lambda \leq \frac{1}{2}(\lambda_1(w) + \lambda_2)$

und jeden Startvektor $x^0 \in \varkappa(y,w)$ konvergiert und zwar im Fall $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1(w) + \lambda_2)$ am „schnellsten".

Bemerkung: Das PAV für die Gleichung (11) lautet ([2])

(15) $(I - G\Lambda)x^{n+1} = G(F - \Lambda)x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x^0 \in Z$.

In [14] wird ein Konvergenzsatz für die Iteration (15) mit $\Lambda = \lambda I$ bewiesen, wobei eine (ii) entsprechende Voraussetzung angenommen wird, die von F eine lokale Lipschitzbeschränkung und eine Monotoniebedingung im Hilbertraum fordert.
In leicht modifizierter Weise wird die Iteration (15) mit $\Lambda = \lambda I$, wobei λ zwischen aufeinanderfolgenden charakteristischen Zahlen von G liegt, auch in [10] benutzt, um einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Hammersteinsche Integralgleichung zu gewinnen (vgl. [2]).

4. Das Parallelenverfahren im halbgeordneten Vektorraum

Es sei $(X, \leq)$ im folgenden ein Rieszscher, halbgeordneter Vektorraum; zu je zwei Elementen $x,y \in X$ existiert also ein Element $z = \sup(x,y) \in X$ mit $z \geq x,y$ und der Eigenschaft $v \in X$, $v \geq x,y \Longrightarrow v \geq z$ (vgl. [8]).
Setzen wir $|x| = \sup(x,-x)$ für $x \in X$, so können wir in Abschnitt 2. $Z = X$ annehmen, wenn wir den symmetrischen Abstand $\rho(x,y) = |x-y|$, $x,y \in X$, verwenden.

Sei $Y \subset X$. X^Y bezeichne die Menge der Operatoren $T: Y \longrightarrow X$.
Ein Operator $T \in X^Y$ heißt monoton in Y, wenn

$x \leq y, \quad x,y \in Y \Longrightarrow Tx \leq Ty$ gilt.

Für die Beschreibung von Lipschitzbedingungen ist es zweckmäßig auf X^Y eine Relation „$\leq$" einzuführen, welche die in 1. auf $L[X]$ definierte Halbordnung erweitert.

(16) $T_1 \leq T_2$ in Y $:\Longleftrightarrow T_2 - T_1$ ist monoton in Y $(T_1, T_2 \in X^Y)$.

Für die Relation „$\leq$" hat man offenbar bis auf die Antisymmetrie die üblichen Rechenregeln einer Halbordnung, und es gilt die Implikation

$T_1 \leq T_2$ in Y, $P \in L_+[X] \Longrightarrow PT_1 \leq PT_2$ in Y.

Den Zusammenhang zwischen der P-Beschränkung eines Operators $T \in X^Y$ und der Relation „$\leq$" aus (16) stellt das folgende Lemma her.

<u>LEMMA</u> : <u>Sei</u> $P \in L_+[X]$ <u>und</u> $T: Y \subset X \longrightarrow X$. <u>Aus</u>

(17) T <u>ist</u> P-<u>beschränkt</u> <u>in</u> Y

<u>folgt</u>

(18) $\pm T \leq P$ <u>in</u> Y.

<u>Ist</u> Y <u>bezüglich</u> <u>der</u> <u>Bildung</u> <u>des</u> <u>Supremums</u> <u>abgeschlossen</u>, <u>so</u> <u>sind</u> (17) <u>und</u> (18) <u>äquivalent</u>.

Beweis: (17)$\Longrightarrow$(18): Seien $x,y \in Y$ mit $x \leq y$ gegeben. Dann folgt $|y-x| = y-x$ und nach (17)

$\pm(Ty - Tx) \leq |Ty - Tx| \leq P|y-x| = Py - Px$, also $\pm T \leq P$ in Y.

(18)$\Longrightarrow$(17): Seien $x,y \in Y$ gegeben. Dann ist $v = \sup(x,y) \in Y$, und nach (18) folgt

$Ty - Tx = -Tv - (-Ty) + Tv - Tx \leq Pv - Py + Pv - Px = P(2v-x-y)$
$= P|y-x|$. Ebenso erhalten wir $Tx - Ty \leq P|y-x|$ und damit
$|Ty - Tx| \leq P|y-x|$. q.e.d.

Wir setzen jetzt voraus

(GV, $\leq$) $(X, \leq)$ sei ein Rieszscher, archimedischer, halbgeordneter Vektorraum mit Ordnungseinheiten, und $(X, \|\ \|_e)$, $e \in oK$, sei vollständig. Sei $A \in L_o[X]$, $F \in X^X$.

Es sei $\Lambda_1 \le F \le \Lambda_2$ in $[y-w, y+w]$, wobei $y,w \in X$, $w \ge 0$ und $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L[X]$ angenommen sind. Hieraus erhalten wir mit Hilfe des Lemmas, daß $F - \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ in $[y-w, y+w]$ $\frac{1}{2}(\Lambda_2 - \Lambda_1)$-beschränkt ist. Setzen wir $\bar{A} = A, \bar{\Lambda}_2 = \Lambda_2, \bar{\Lambda} = \Lambda$, $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ in Satz 2 und verwenden den obigen Abstand, so folgt (LipA) aus (IMon), und wir erhalten den

<u>SATZ</u> 5: <u>Es sei</u> (GV, $\le$) <u>erfüllt, und es gebe</u> $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L[X]$ <u>mit</u> $\Lambda_1 \le \Lambda_2$ <u>und</u>

(IMon, $\le$) $A - \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ <u>und</u> $A - \Lambda_2$ <u>sind inversmonoton</u>,

(LipF, $\le$) $\Lambda_1 \le F \le \Lambda_2$ <u>in</u> $[y-w, y+w]$ <u>für zwei Elemente</u> $y, w \in D(A)$ <u>mit</u>

(19) $|Ay - Fy| \le (A - \Lambda_2)w$.

<u>Dann besitzt</u> (1) <u>eine eindeutig bestimmte Lösung</u> $\bar{x}$ <u>in</u> $[y-w, y+w] \cap D(A)$. <u>Das</u> PAV <u>mit</u> $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ <u>liefert für alle</u> $x^o \in [y-w, y+w]$ <u>eine gegen</u> $\bar{x}$ <u>konvergente Folge</u> x^n <u>in</u> $[y-w, y+w]$, <u>und es gilt die Fehlerabschätzung</u>

$$|\bar{x} - x^{n+1}| \le (A - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_2 - \Lambda)|x^n - x^{n+1}|, n \in \mathbb{N}, \Lambda = \tfrac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2).$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 5 erhalten wir ferner nach Satz 3, daß das PAV auch mit jedem $\Lambda \in L[X]$, für das $\Lambda \le \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ gilt und $A - \Lambda$ inversmonoton ist, konvergiert und zwar im Fall $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ am „schnellsten". Ist überdies $\Lambda \le \Lambda_1$ und sind x^n bzw. y^n die für die Startvektoren $x^o = y - w$ bzw. $y^o = y + w$ sich ergebenden Folgen, so gilt

(20) $x^o \le x^1 \le \ldots \le x^n \le x^{n+1} \le \bar{x} \le y^{n+1} \le y^n \le \ldots \le y^1 \le y^o, n \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis von (20) bemerken wir, daß $(A - \Lambda)^{-1}(F - \Lambda)$ in $[y-w, y+w]$ monoton ist und daß $x^o \le x^1$, $y^1 \le y^o$ nach Satz 5 gilt. Hieraus folgen die Ungleichungen

$x^o \le \ldots \le x^n \le x^m$, $y^m \le y^n \le \ldots \le y^o$ für alle $m \ge n$ und damit (20) nach Ausführung des Grenzüberganges $m \longrightarrow \infty$.

Entsprechend den Bemerkungen zu Satz 2 gilt in Satz 5 eine globale Eindeutigkeitsaussage, wenn (LipF, $\leq$) auf ganz X gültig ist oder wenn es zu jedem $v \in D(A), v \geq 0$, ein $\Lambda_1(v) \in L[X]$ gibt, für das (IMon) mit $\Lambda_1 = \Lambda_1(v)$ und

(21) $\Lambda_1(v) \leq F \leq \Lambda_2$ in $[y - v, y + v]$

gilt. Diese letzte Bedingung stellt dabei eine einseitige Beschränkung für F verbunden mit einer lokalen Lipschitzbedingung dar.

Bemerkungen :

1. Setzen wir $X = \mathbb{R}^m$ und wählen A als $m \times m$ - Matrix, so ist die Bedingung (GV, $\leq$) für die komponentenweise Halbordnung und das komponentenweise genommene Supremum im $\mathbb{R}^m$ erfüllt. In Satz 5 kann ferner $D(A) = \mathbb{R}^m$ angenommen werden.
2. Satz 5 und die darauf folgenden Ergebnisse lassen sich für die Operatorgleichung

(22) $Tx = 0, \; x \in X, \; T: X \to X,$

formulieren. Setzen wir $F = -T, \Lambda_1 = -\Gamma_2, \Lambda_2 = -\Gamma_1$ und $A = 0$ in Satz 5, so ergeben sich die Bedingungen

(IMon, $\leq$) $\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ und Γ_1 sind inversmonoton,

(LipF, $\leq$) $\Gamma_1 \leq T \leq \Gamma_2$ in $[y - w, y + w]$, wobei $|Ty| \leq \Gamma_1 w$ gilt.

Das PAV erhält dann die Form

(23) $x^{n+1} = x^n - \Gamma^{-1} T x^n, \; n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma = \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2).$

Dies ist die in [18] als "parallel chord method" bezeichnete Iteration. Für $\Gamma = T'(x^0)$ erhält man wieder das vereinfachte Newton-Verfahren. Anwendungen des lokalen Kontraktionsprinzips auf (23) sind u.a. in [15,25] dargestellt, worin jeweils direkt für $I - \Gamma^{-1}T$ eine Beschränkung P, welche kontrahiert, angenommen wird.
Übertragen wir den monotonen Einschluß (20) auf die Iteration (23), so läßt sich dieser bereits aus einem Satz in [18] 13.2.3 entnehmen, wobei die dort geforderten Startvektoren sich gerade aus unseren Voraussetzungen ergeben.

5. Anwendungen auf Randwertaufgaben

Wir wenden die Aussagen von 4. auf nichtlineare, gewöhnliche Randwertaufgaben der Form

(24) $\quad Lx = f(\cdot,x)$ in $[a,b]$, $Rx = 0$, $\quad x \in C^k[a,b]$,

an. Dabei sei L ein gewöhnlicher, regulärer Differentialoperator der Ordnung $k \in \mathbb{N}$, $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ und R sei eine Abbildung von $C^{k-1}[a,b]$ nach $\mathbb{R}^k$ mit den Komponenten

$$R_i x = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b)), \quad i=1,\dots,k .$$

Wir setzen $D(L) = \{x \in C^k[a,b] : Rx = 0\}$ und definieren für zwei Funktionen $x, y \in X = C[a,b]$

$x \le y \;:\Longleftrightarrow\; x(t) \le y(t) \;\forall t \in [a,b]$; $\sup(x,y)(t) = \sup(x(t),y(t))$ für $t \in [a,b]$. Mit $A = L$ und

$(Fx)(t) = f(t,x(t))$ für $t \in [a,b]$ und $x \in C[a,b]$

ist dann die Bedingung (GV, $\le$) erfüllt.

Bekanntlich besitzt der Operator $L: D(L) \to C[a,b]$ genau dann eine monotone Inverse, wenn das Paar (L,R) inversmonoton (oder von monotoner Art vgl. [8]) ist, d.h. wenn für alle $x \in C^k[a,b]$ stets $Lx \ge 0$, $Rx = 0 \Rightarrow x \ge 0$ gilt.

Es seien jetzt zwei Funktionen $K_1, K_2 \in C[a,b]$ mit den folgenden Eigenschaften bekannt:

(i) $\quad (L - K_2(\cdot)I, R), (L - \frac{1}{2}(K_1(\cdot) + K_2(\cdot))I, R)$ sind inversmonoton,

(ii) $\quad$ für alle $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u > v$ und alle $t \in [a,b]$ gilt
$$K_1(t) \le \frac{f(t,u) - f(t,v)}{u - v} \le K_2(t) .$$

Dann ist die Randwertaufgabe (24) eindeutig lösbar.

Setzen wir $\Lambda_1 = K_1(\cdot)I$ und $\Lambda_2 = K_2(\cdot)I$, so folgt dies unmittelbar aus der im Anschluß an Satz 5 getroffenen globalen Eindeutigkeitsaussage.

Fordern wir die Bedingung (ii) nur für $u, v \in [y(t)-w(t), y(t)+w(t)]$, $t \in [a,b]$, wobei die Funktionen $y, w \in D(L)$ der Ungleichung

(25) $(L - K_2(\cdot)I)w \geq |Ly - Fy|$

genügen, so folgt nach Satz 5, daß (24) in $[y-w, y+w] \cap D(L)$ eindeutig lösbar ist und daß das Parallelenverfahren

(26) $Lx^{n+1} - Kx^{n+1} = f(\cdot, x^n) - Kx^n, \ Rx^{n+1} = 0, \ n \in \mathbb{N},$

mit $K = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ für alle $x^0 \in [y - w, y + w]$ konvergiert. Ein ähnliches Ergebnis wird für den Fall $K = 0$ in [8] §15 angegeben. Dort wird zunächst ein Iterationsschritt (26) ausgeführt und dann ein Intervall mit dem Mittelpunkt x^1 konstruiert, in welchem eine Lösung von (24) liegt.

Wir betrachten nun spezieller als (24) die Sturmsche Randwertaufgabe

$$\text{(27)} \quad \begin{aligned} &Lx = -x'' + p_1 x' = f(\cdot, x) \text{ in } [a,b], \ x \in C^2[a,b], \\ &Rx = (\alpha_a x(a) - \beta_a x'(a), \alpha_b x(b) + \beta_b x'(b)) = 0 , \end{aligned}$$

wobei wir $p_1 \in C[a,b]$, $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ und die Normierung

$\beta_s > 0$ oder ($\beta_s = 0$ und $\alpha_s > 0$) für s=a,b annehmen.

Für ein $K_2 \in C[a,b]$ ist dann nach [19] die Inversmonotonie von $(L - K_2(\cdot)I, R)$ äquivalent mit der Forderung

(28) Es gibt ein $v \in C^2[a,b]$ mit $v \geq 0$, $(L - K_2(\cdot)I)v \geq 0$, $Rv \geq 0$, und es gilt nicht $(L - K_2(\cdot)I)v = 0$, $Rv = 0$.

$Rv \geq 0$ bedeutet dabei $R_1 v, R_2 v \geq 0$. Aus (28) erhalten wir unmittelbar, daß die zweite Inversmonotoniebedingung in (i) stets erfüllt ist.

<u>SATZ</u> 7: <u>Es existiere ein</u> $K_2 \in C[a,b]$ <u>mit</u> (28) <u>und zu jedem Intervall</u> $[w_1, w_2] \subset C[a,b]$ <u>ein</u> $K_1(\cdot; w_1, w_2) \in C[a,b]$ <u>mit der Eigenschaft</u>

$$K_1(t;w_1,w_2) \leq \frac{f(t,u)-f(t,v)}{u-v} \leq K_2(t) \text{ für } u,v \in [w_1(t),w_2(t)]$$
$$\text{mit } u > v \text{ und alle } t \in [a,b].$$

Dann besitzt (27) eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis : Setzen wir $\Lambda_1(v) = K_1(\cdot;-v,v)I$, so ist mit $y=0$ die Lipschitzbedingung (21) erfüllt, und damit folgt die Behauptung des Satzes. q.e.d.

Nach den Aussagen von 4. erhält man die Lösung von (27) iterativ auf die folgende Weise:
Man wähle ein $y \in D(L)$, bestimme ein $w \in D(L)$ mit (25) und iteriere nach (26) mit einem $x^0 \in [y-w, y+w]$ und einem $K \in C[a,b]$, für das $K \leq \frac{1}{2}(K_1(\cdot;y-w,y+w)+K_2)$ gilt. Die Iteration (26) ist für den Fall, daß K seine obere Schranke annimmt, am „schnellsten". Im Fall $K \leq K_1(\cdot;y-w,y+w)$ liefert (26) für die Startfunktionen $y-w$ und $y+w$ zwei die Lösung von (27) monoton einschließende Folgen.

Bemerkungen :
1. Satz 7 enthält eine Reihe von bekannten Aussagen (siehe [16,22,23]). In [22,23] wird für die Fälle $\beta_a = \beta_b = 0$ und $\alpha_b = \beta_a = 0$ die Kontraktion der Iteration (26) unter beidseitigen Lipschitzbedingungen an f und ihr monotones Verhalten auch im einseitigen Fall gezeigt. (26) wird dort als modifizierte Picard-Iteration bezeichnet (vgl. auch [1]). Die Erzwingung der Monotonie der Folge x^n in (26) durch ein geeignetes $K \in C[a,b]$ wird auch in [21,26] behandelt.
2. Für Abschwächungen der Stetigkeitsbedingungen an f in Satz 7 und weitere Anwendungen der Aussagen von 4. auf Systeme von Anfangswertaufgaben und elliptische Randwertprobleme sei auf [2] verwiesen.

6. Anwendungen auf Diskretisierungen von Randwertaufgaben

Wir wenden die Aussagen von 3. und 4. auf endlichdimensionale Gleichungssysteme an, die wir in einer spezielleren Gestalt als (1) annehmen:

(29) $Ax = B\phi x + r, \; x \in \mathbb{R}^m$.

Dabei seien $A, B \in L[\mathbb{R}^m]$, $r \in \mathbb{R}^m$ und $\phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei ein Diagonalfeld, d.h. es existieren Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$\phi_i(x) = \varphi_i(x_i)$ für $i = 1,\dots,m$ und alle $x \in \mathbb{R}^m$.

Für $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $i = 1,\dots,m$ setzen wir im Fall $x_i \neq y_i$

$d_i\,\phi\,(x,y) = \dfrac{\phi_i(x) - \phi_i(y)}{x_i - y_i}$. Für $x_i = y_i$ ist $d_i\phi\,(x,y)$ im folgenden stets so zu wählen, daß eventuell auftretende Restriktionen an $d\,\phi_i(x,y)$ erfüllt sind.

Gleichungen der Form (29) treten bei der Diskretisierung nichlinearer Randwertaufgaben auf. Sie werden in [6] eingeführt, und in [5,6] werden hierfür Stabilitätsungleichungen bewiesen.

I Symmetrischer Fall

Wir wenden die Aussagen von 3. auf (29) an. $\|\;\|_2$ sei die Euklidische Norm des $\mathbb{R}^m$. Die bei der Anwendung des PAV durchzuführenden Rechnungen geben wir in einer Schrittfolge an, wobei wir annehmen, daß die Prüfschritte positiv verlaufen.

Voraussetzung : A ist symmetrisch und $B = I$.

Schritt 1: Wähle eine Näherung $y \in \mathbb{R}^m$ für eine Lösung von (29).

Schritt 2: Wähle einen Bereich $Y \subset \mathbb{R}^m$ mit $y \in Y$ und bestimme ein Intervall $[K_1, K_2]$, das in einem eigenwertfreien Intervall $(\bar{K}_1, \bar{K}_2)$ von A liegt und gleichzeitig alle $d_i\,\phi\,(u,v)$ $(u, v \in Y,$ $i = 1,\dots,m)$ enthält ($\bar{K}_1 = -\infty$, $K_1 = -\infty$ zugelassen).

Schritt 3: Berechne $w = (\mathrm{Min}(\bar{K}_2 - K_2, K_1 - \bar{K}_1))^{-1} \|Ay - B\phi\,y - r\|_2$.
(Minimum $= \bar{K}_2 - K_2$, falls $\bar{K}_1 = -\infty$ gilt).

Schritt 4: Bestimme reelle Zahlen M_1 und M_2 mit

$$\left.\begin{matrix} M_1 \leq \text{Min} \\ M_2 \geq \text{Max} \end{matrix}\right\} \{ d_i \phi\,(u,v):\ u,v \in \mathscr{K}(y,w) \}.$$

Setze $\lambda_1 = M_1$, $\lambda_2 = M_2$ und prüfe, ob $[\lambda_1, \lambda_2] \subset [K_1, K_2]$ gilt.

Schritt 5: Iteriere gemäß

$$(A - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)I)x^{n+1} = B\,\phi\, x^n - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)x^n + r,\ \ n \in \mathbb{N},\ x^o \in \mathscr{K}(y,w).$$

Schritt 6: (29) besitzt genau eine Lösung $\bar{x}$ in $\mathscr{K}(y,w)$ (bzw. in $\mathbb{R}^m$ im Fall $\bar{K}_1 = -\infty$). Schätze den Fehler ab nach

$$\|\bar{x} - x^{n+1}\|_2 \leq (\lambda_2 - \lambda_1)(2\text{Min}(\bar{K}_2 - \lambda_2,\ \lambda_1 - \bar{K}_1))^{-1}\|x^n - x^{n+1}\|_2$$

(im Fall $\bar{K}_1 = -\infty$ ist das Minimum gleich $\bar{K}_2 - \lambda_2$ zu setzen).

Der Beweis der Aussagen von Schritt 6 ergibt sich im Fall $\bar{K}_1 > -\infty$ unmittelbar aus Satz 4, wenn wir dort $F = \phi + r$ und $a = \lambda_2 + \text{Min}(\bar{K}_2 - \lambda_2,\ \lambda_1 - \bar{K}_1)$ einsetzen und $K_1 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq K_2$ berücksichtigen. Im Fall $\bar{K}_1 = -\infty$ sind entsprechend die Bedingungen (i) und (ii) von 3. erfüllt.

Bemerkungen :

1. Der Test in Schritt 4 verläuft stets positiv, wenn der Schritt 2 für $Y = \mathbb{R}^m$ durchführbar ist, d.h. wenn alle Differenzenquotienten von ϕ in einem eigenwertfreien Intervall von A liegen. Für den Fall, daß die Differenzenquotienten unterhalb des kleinsten Eigenwertes liegen und außerdem eine untere Schranke besitzen, wird die Kontraktion des PAV in [11] und [18] 12.1.3. bewiesen.
2. Die obige Schrittfolge läßt sich mit geringen Änderungen auch für symmetrische Matrizen B beibehalten, wie wir hier ohne Beweis angeben. Man bestimmt dabei zusätzlich in Schritt 2 ein Intervall $[\mu_1, \mu_2]$ mit $\mu_1 > 0$, das alle Eigenwerte von B enthält und setzt im Schritt 4

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\mu_2\,\mu_1^{-1}}\ \ (\alpha_2 - \alpha_1) \text{ mit}$$

$\alpha_1 = \text{Min}(\mu_1 M_1, \mu_2 M_1)$ und $\alpha_2 = \text{Max}(\mu_1 M_2, \mu_2 M_2)$.

<u>Beispiel</u> : Auf die nichtlineare Randwertaufgabe

(30) $\quad -x'' = f(\cdot,x)$ in $[a,b]$, $x(a) = \gamma_a$, $x(b) = \gamma_b$

wenden wir ein einfaches Mehrstellenverfahren mit der Schrittweite $h = (b-a)(m+1)^{-1}$, $m \in \mathbb{N}$, an ([9]) :

$$h^{-2}(-x(t-h)+2x(t)-x(t+h)) =$$

(31) $$\frac{1}{12}(f(t-h,x(t-h))+10f(t,x(t))+f(t+h,x(t+h)))$$

für $t = a + ih$ $(i = 1,\ldots,m)$; $x(a) = \gamma_a$, $x(b) = \gamma_b$.

Für den Fall $[a,b] = [0,1]$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0, f(t,x) = 120\sinh(\frac{x}{5}) + 1$ $(t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R})$ und $h = \frac{1}{40}$ ergaben die obigen Schritte:

Schritt 1: $y = 0$;

Schritt 2: $\bar{K}_i = 2h^{-2}(1-\cos(i\pi h))$ für $i=1,2$; $[K_1,K_2] = [15,34]$ und $0 < \mu_1 = \frac{1}{6}(5+\cos(\pi mh))$, $\mu_2 = \frac{1}{6}(5+\cos(\pi h))$.

Schritt 3: $w = 1.216\,052$;

Schritt 4: $[\lambda_1,\lambda_2] = [15.039\,421,\ 25.675\,534]$;

Schritt 5: es wurden 10 Iterationsschritte des PAV mit $x^0 = y$ ausgeführt.

t	$x^{10}(t)$	$\Vert\bar{x} - x^{10}\Vert_2 \leq$
0.1	-0.021 148	$4 \cdot 10^{-5}$
0.3	-0.071 813	(nach Schritt 6)
0.5	-0.095 777	

II Inversmonotoner Fall

Bei der Anwendung von Satz 5 auf Gleichungen der Form (29) verfahren wir ähnlich wie im symmetrischen Fall, indem wir eine für die numerische Rechnung zu durchlaufende Schrittfolge angeben. Die Bedingung (GV, $\leq$) sei wie in 4. Bemerkung 1. realisiert.

<u>Voraussetzung</u> : Es sei $B \geq 0$.

<u>Schritt</u> 1: Wähle eine Näherung y für eine Lösung von (29).

<u>Schritt</u> 2: Wähle einen Bereich $Y \subset \mathbb{R}^m$ mit $y \in Y$ und bestimme obere Schranken K_2^i $(i=1,\dots,m)$ für $d_i\,\phi\,(u,v)$ $(u,v \in Y)$, so daß $A - \Lambda_2$ mit $\Lambda_2 = BD_2$, $D_2 = \mathrm{diag}(K_2^i : i=1,\dots,m)$, inversmonoton ist.

<u>Schritt</u> 3: Berechne $w \in \mathbb{R}^m$ aus $(A - \Lambda_2)w = |Ay - B\phi y - r|$.

<u>Schritt</u> 4: Bestimme reelle Zahlen M_1^i, M_2^i $(i=1,\dots,m)$ mit

$$\left\{\begin{matrix} M_1^i \leq \mathrm{Min} \\ M_2^i \geq \mathrm{Max} \end{matrix}\right\} \quad \{d_i\,\phi\,(u,v) :\ u,v \in [\,y-w, y+w\,]\}.$$

Setze $\Lambda_1 = BD_1$, $D_1 = \mathrm{diag}(M_1^i :\ i=1,\dots,m)$ und prüfe, ob $M_2^i \leq K_2^i$ für $i = 1,\dots,m$ gilt.

<u>Schritt</u> 5: Wähle eine $m\times m$ - Matrix Λ mit $\Lambda \leq \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$, so daß $A - \Lambda$ inversmonoton ist, und iteriere gemäß

$$(A - \Lambda)x^{n+1} = B\,\phi\, x^n - \Lambda x^n + r, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x^o \in [\,y-w, y+w\,].$$

<u>Schritt</u> 6: (29) besitzt genau eine Lösung $\bar{x}$ in $[y-w, y+w]$. Schätze den Fehler ab nach

$$|\bar{x} - x^{n+1}| \leq (A - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_2 - \Lambda)\,|x^n - x^{n+1}|\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zum Beweis der Behauptung von Schritt 6 wenden wir Satz 5 und die darauf folgenden Aussagen mit $F = B\,\phi + r$ an. $\Lambda_1 \leq F \leq \Lambda_2$ in $[\,y-w, y+w\,]$ folgt aus $B \geq 0$ und der nach Schritt 4 gültigen Ungleichung $D_1 \leq \phi \leq D_2$ in $[\,y-w, y+w\,]$.

Wir erhalten überdies aus 4. , daß das PAV in Schritt 5 für $\Lambda = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ am „schnellsten" ist und daß sich für $\Lambda \leq \Lambda_1$ mit $x^o = y - w$ und $y^o = y + w$ der monotone Einschluß (20) ergibt.

<u>Bemerkungen</u> :

1. Der Test in Schritt 4 verläuft stets positiv, wenn der Schritt 2 mit $Y = \mathbb{R}^m$ durchführbar ist. Gilt überdies

(32) $B = I$ und $A - D_2$ ist eine M-Matrix,

so kann in Schritt 5 jede Diagonalmatrix $\Lambda \leq \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$ verwendet werden; denn mit $A - D_2$ ist nach [4] VI6.12 auch $A - \Lambda = (A - D_2) + (D_2 - \Lambda)$ eine M-Matrix, also inversmonoton.

2. Die Kontraktion des PAV im Fall (32), wenn zusätzlich $D_2 = cI$ für ein $c < 0$ gilt und eine untere Schranke für die Differenzenquotienten von ϕ existiert, wird für Diskretisierungen elliptischer Randwertaufgaben in [11,12] gezeigt. Für die Monotonie des PAV im Fall (32) mit $D_2 = 0$ siehe [13].

<u>Beispiele</u> : Für die Randwertaufgabe (30) behandeln wir die Diskretisierungen

$$h^{-2}(-x(t-h)+2x(t)-x(t+h)) = f(t,x(t)) \text{ für } t=a+h,a+mh,$$

$$(33)\quad \frac{1}{12}h^{-2}(x(t-2h)-16x(t-h)+30x(t)-16x(t+h)+x(t+2h))$$
$$= f(t,x(t)) \text{ für } t=a+ih,\ i=2,\dots,m-1,\ x(a)=\gamma_a, x(b)=\gamma_b,$$

$$\frac{1}{20}h^{-2}(-x(t-2h)-16x(t-h)+34x(t)-16x(t+h)-x(t+2h))$$
$$(34)\quad = \frac{1}{15}(2f(t-h,x(t-h))+11f(t,x(t))+2f(t+h,x(t+h)))$$

für $t=a+ih$, $i=2,\dots,m-1$; die Mehrstellenformel aus (31) für $t=a+h,a+mh$ und $x(a) = \gamma_a$, $x(b) = \gamma_b$.

In [7] wird das Konvergenzverhalten der Diskretisierungen (31),(33) und (34) untersucht.
Wir behandeln hier die Aufgabe (33) nach der obigen Schrittfolge für den Fall $[a,b] = [0,1]$, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ und $f(t,x) = e^{-x} - 1$ für $t \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{R}$. Für $h = \frac{1}{50}$ ergab sich:
Schritt 1: y wurde aus $Ay = B\delta + r$ ($\delta_i = 1$ für $i=1,\dots,m$) berechnet; Schritt 2: $D_2 = 0$; Schritt 3: w wurde aus der Gleichung $Aw = |B(\delta - \phi y)|$ bestimmt; Schritt 4: Die berechneten Werte M_1^i, M_2^i lagen in $[-1.31, -0.98]$, $i=1,\dots,m$.
Schritt 5: wurde bis zum ersten Index N mit $|x^{N+1} - x^N| \leq 10^{-6}\delta$ ausgeführt. Die exakte Lösung von (33) ist $\bar{x} = 0$, so daß $|x^{N+1}|$ der tatsächliche Fehler von x^{N+1} ist.

t	Kontraktion des PAV $\Lambda=\frac{1}{2}\Lambda_1$, $N=5$, $x^0=y$: $x^{N+1}(t)$	$\lvert\bar{x}-x^{N+1}\rvert(t)\leq$	monotoner Einschluß $N=5$, $\Lambda=\Lambda_1$, $N=4$: $x^{N+1}(t)$	$y^{N+1}(t)$
0.1	0.2584 E-8	0.4657 E-8	-0.0275 E-8	0.1195 E-8
0.3	0.6613 E-8	1.2300 E-8	-0.0769 E-8	0.3338 E-8
0.5	0.8079 E-8	1.5267 E-8	-0.0982 E-8	0.4262 E-8
0.1	3,305 785 12	2.5 E-8	3.305 785 07	3.305 785 19
0.3	2.366 863 90	5.3 E-8	2.366 863 76	2.366 864 10
0.5	1.777 777 77	5.2 E-8	1.777 777 60	1.777 777 80
		$N=6$	$N=11$	$N=11$

(E-8 $=10^{-8}$).

Der zweite Teil der Tabelle enthält die entsprechenden Daten für die Aufgabe (34) im Fall $[a,b]=[0,1]$, $\gamma_0=4$, $\gamma_1=1$ und $f(t,x)=-\frac{3}{2}x^2$ für $t\in[0,1]$ und $x\in\mathbb{R}$. (vgl. [9] III§1, dort wird auch eine exakte Lösung der Randwertaufgabe angegeben). Im Verlauf der obigen Rechenschritte wurde $y=A^{-1}r$, $D_2=0$ und $w=A^{-1}\lvert B\phi y\rvert$ gesetzt.

Bemerkungen :

1. Die inverse Monotonie von Matrizen, wie sie in den Schritten 2 und 5 gefordert wird, wurde im Fall (33) mit Hilfe von Kriterien aus [17] und im Fall (34) mit bekannten Aussagen über L-Matrizen gezeigt (vgl. [4]).
In [7] wird das PAV auf die Gleichungen (31),(33) und (34) angewandt, wobei sowohl ein a-priori Bereich für die Lösungen (vgl. Schritt 3) als auch eine Fehlerabschätzung (vgl. Schritt 6) aus einer Stabilitätsungleichung gewonnen werden.
2. Das PAV wird im Fall $\Lambda=F'(\bar{x})$ ($\bar{x}$ sei eine Lösung von (29)) lokal quadratisch konvergent (vgl. [18]). Wie auch die Beispiele zeigen, beeinflußt daher neben der Vergleichsaussage über die lineare Konvergenzrate auch die Nähe von Λ zu $F'(\bar{x})$ die Konvergenzgeschwindigkeit des PAV in numerischen Rechnungen.

Literaturverzeichnis

[1] Bailey, P.B., Shampine, L.F., Waltman, P.E.: Nonlinear two point boundary value problems. New York - London, Acad. Press 1968.

[2] Beyn, W.-J.: Theorie und Anwendung eines iterativen Verfahrens zur Lösung von Operatorgleichungen Hammersteinschen Typs. Dissertation, Münster 1975.

[3] Bohl, E.: Die metrische Struktur von Räumen mit allgemeinerem Abstandsbegriff und ihre Verwendung bei der Behandlung nichtlinearer Probleme. Comp 5(1970), 189-199.

[4] Bohl, E.: Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Berlin-Heidelberg-New York, Springer Tracts in Natural Philosophy Band 25 1974.

[5] Bohl, E.: Stabilitätsungleichungen für diskrete Analoga nichtlinearer Randwertaufgaben. ISNM 27 Birkhäuser Verlag (1975), 9-28.

[6] Bohl, E.: On finite difference methods as applied to boundary value problems. Instituto per le Applicazioni del Calcolo(IAC) Serie III - Nr.100(1975), 4-35.

[7] Bohl, E.: Zur Anwendung von Differenzenschemen mit symmetrischen Formeln bei Randwertaufgaben. Erscheint in der ISNM-Reihe des Birkhäuser-Verlages 1975/76.

[8] Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1964.

[9] Collatz, L.: The numerical treatment of differential equations. Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1966.

[10] Dolph, C.L.: Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. Trans. Amer. Math. Soc. 66(1949), 289-307.

[11] Douglas, J.jr.: Alternating direction iteration for mildly nonlinear elliptic difference equations. Num. Math. 3(1961), 92-98.

[12] Douglas, J.jr.: Alternating direction methods for three space variables. Num. Math. 4(1962), 41-63.

[13] Greenspan, D., Parter, S.V.: Mildly nonlinear elliptic partial differential equations and their numerical solution II. Num. Math. 7(1965), 129-146.

[14] Kolodner, I.I.: Equations of Hammerstein type in Hilbert spaces. Journ. of Math. Mech. 13(1964), 701-750.

[15] Krawczyk, R.: Gleichungen in halbgeordneten Räumen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 36(1971), 150-165.

[16] Lees, M.: Discrete methods for nonlinear two point boundary value problems. Numerical solution of partial differential equations (Ed.: J.H. Bramble). New York London, Acad. Press(1966), 59-72.

[17] Lorenz, J.: Die Inversmonotonie von Matrizen und ihre Anwendung beim Stabilitätsnachweis von Differenzenverfahren. Dissertation, Münster 1975.

[18] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York London, Acad. Press 1970.

[19] Protter, M.H., Weinberger, H.F.: Maximum principles in differential equations. Englewood Cliffs, Prentice Hall Inc. 1967.

[20] Schröder, J.: Das Iterationsverfahren bei allgemeinem Abstandsbegriff. Math. Z. 66(1956), 111-116.

[21] Schröder, J.: Operatorungleichungen und ihre numerische Anwendung bei Randwertaufgaben. Num. Math.9 (1966), 149-162.

[22] Shampine, L.F.: Boundary value problems for ordinary differential equations I. SIAM, J. Num. Anal. 5(1968), 219-242.

[23] Shampine, L.F.: Contraction mappings for nonlinear boundary value problems. Comp. 3(1968), 205-214.

[24] Taylor, A.E.: Introduction to functional analysis. New York, Wiley & Sons 1958.

[25] Urabe, M.: A posteriori component-wise error estimation of approximate solutions to nonlinear equations. Lecture Notes in Computer Science 29, Springer 1975, 99-117.

[26] Werner, J.: Einschließungssätze bei nichtlinearen, gewöhnlichen Randwertaufgaben und erzwungenen Schwingungen. Num. Math. 13(1969) 24-38.

Dr. Wolf-Jürgen Beyn

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Universität Münster

Roxeler Str. 62
4400 Münster