ZUR ANWENDUNG DER THEORIE ÜBER DEN SPEKTRALRADIUS LINEARER, STRENG-MONOTONER OPERATOREN

von E. Bohl, W.-J. Beyn und J. Lorenz in Münster

Bei streng-monotonem und vollstetigem linearen Operator A auf einem halbgeordneten archimedischen Vektorraum $(X, \leq)$ mit Ordnungseinheiten gilt, daß der Spektralradius $\sigma(A)$ einfacher Eigenwert von A ist mit einer Ordnungseinheit als Eigenelement [10]; auf X ist dabei die Ordnungstopologie anzunehmen. Gleichzeitig kann $\sigma(A)$ eingeschlossen werden[1,2,15]. Hierbei heißt ein monotoner linearer Operator A streng-monoton, falls es zu jedem $x \geq \theta$ mit $x \neq \theta$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $A^n x$ Ordnungseinheit wird.

Ist $\mathbb{R}^m$ mit der natürlichen Halbordnung $\leq$ versehen, so liefert die Maximumnorm die zugehörige Ordnungstopologie, und die Ordnungseinheiten sind jene Vektoren $t \geq \theta$ mit $t_i > o$ für alle $i \in \tau = \{1, \ldots, m\}$. Den monotonen Operatoren entsprechen die Matrizen A mit nichtnegativen Elementen A_{ij} $(i, j \in \tau)$. Ein einfaches Kriterium dafür, daß eine nichtnegative Matrix A streng-monoton ist, besteht offenbar darin, daß eine Potenz A^r $(r \in \mathbb{N})$ lauter positive Elemente hat. Für diese Bedingung wiederum gibt es eine Reihe äquivalenter Aussagen [7, 11, 13], welche alle einzeln die strenge Monotonie charakterisieren. Man sieht leicht, daß eine streng-monotone Matrix A nicht zerfallen kann. Andererseits gilt [9], daß eine nichtnegative Matrix A eine positive Potenz besitzt, also streng-monoton ist, falls sie die folgende Bedingung

(S) $\qquad$ *A zerfällt nicht; es gibt ein $i \in \tau$ mit $A_{ii} > o$*

erfüllt. Wie einfache Beispiele zeigen, ist (S) für strenge Monotonie von A nicht notwendig. Man erhält jedoch eine zur strengen Monotonie äquivalente Bedingung, wenn man (S) für eine Potenz A^k anstelle von A fordert und $k \in \{1, \dots, m-1\}$ zuläßt. Das wollen wir im ersten Abschnitt zeigen.

Im zweiten Teil betrachten wir einen Integraloperator der Form

$$Ax(t) = \int_\Omega A(t,s)x(s)ds \tag{1}$$

auf einem Raum stetiger Funktionen x; Ω ist dabei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Bei nichtnegativem Kern $A(t,s)$ (und geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen) definiert A einen monotonen Operator im Raum $(S(\Omega), \leq)$ aller auf Ω stetigen reellwertigen Funktionen, wenn $\leq$ die natürliche Halbordnung ist. Falls $A(\bar{t}, s)$ für alle $s \in \Omega$ und ein $\bar{t} \in \Omega$ verschwindet, so kann A jedoch auf $(S(\Omega), \leq)$ nicht streng-monoton sein. Dieser Fall tritt aber bei so wichtigen Kernen wie Greenschen Funktionen für Differentialoperatoren meistens auf. In der vorliegenden Note soll auch diese Situation dem anfangs formulierten Konzept untergeordnet werden. Dazu fassen wir A als Operator auf einem geeigneten Teilraum $S_e(\Omega)$ von $S(\Omega)$ auf (zur Definition des Raumes $S_e(\Omega)$ mit Halbordnung und Topologie vgl. Teil 2). e ist hierbei eine nichtnegative Funktion aus $S(\Omega)$, welche das Verhalten des Kernes an den oben beschriebenen Punkten $\bar{t} \in \Omega$ berücksichtigt. Wir geben im zweiten Teil hinreichende Bedingungen an $A(t,s)$ für die Vollstetigkeit und strenge Monotonie des Operators (1) an. Dann können wir das obige Konzept [1, 2, 10, 15] anwenden und gewinnen auf diesem Wege die Aussagen, daß $\sigma(A)$ Eigenwert von A ist, daß zu diesem Eigenwert eine Eigenfunktion von A existiert, welche gewisse Positivitätseigenschaften besitzt, und daß $\sigma(A)$ einen Quotienteneinschluß der Form (6) gestattet. Der Raum $S_e(\Omega)$ liefert zugleich solche Ansatzfunktionen für den Quotienteneinschluß, welche die Nullstellen der Eigenfunktion nach Lage und Verhalten richtig erfassen. Dazu behandeln wir im letzten Abschnitt einige Anwendungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Quotientenaussagen der hier genannten Art gehen unter anderer Voraussetzung ursprünglich auf L. COLLATZ [3, 4] zurück, Ansatzfunktionen mit Nullstellen berücksichtigt auch K. P. HADELER [8].

1. STRENGE MONOTONIE BEI MATRIZEN

SATZ 1: *Sei A eine reelle $(m\times m)$-Matrix $(m \geq 2)$ mit nichtnegativen Elementen. A ist genau dann streng-monoton, wenn $k \in \{1,\dots,m-1\}$ existiert, so dass A^k nicht zerfällt und mindestens ein positives Hauptdiagonalelement besitzt.*

Bemerkung: Die in [14] angegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} o & 1 & o & . & . & . & o \\ o & o & 1 & o & . & . & o \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & & . & . & & \\ . & . & & & . & . & \\ o & o & & & & . & 1 \\ 1 & 1 & o & & & & o \end{pmatrix}$$

ist streng monoton, und $A, A^2, \dots, A^{m-2}$ haben Nulldiagonalen.

Beweis von Satz 1:

a) Ist A streng-monoton, so auch A^r für jedes $r \in \mathbb{N}$; daher zerfällt A^r nicht. Zu $i \in \tau$ existieren $r = r(i) \in \mathbb{N}$ und $r+1$ Indizes $l_o = i, l_1, \dots, l_{r-1}, l_r = i$ in τ mit $A_{l_{n+1} l_n} > o$ $(n = o,\dots,r-1)$; man spricht von einem Zyklus der Länge r durch i. Ist $x^o = e_i$ (= i-ter Einheitsvektor), $x^{n+1} = Ax^n$ $(n=o,\dots,r-1)$, so wird $x^n_{l_n} > o$, insbesondere $o < x^r_{l_r} = (A^r e_i)_i = (A^r)_{ii}$. Daher haben wir zu zeigen, daß ein Zyklus einer Länge $\leq m-1$ existiert. Da A nicht zerfällt, gibt es durch jedes $i \in \tau$ jedenfalls einen Zyklus einer Länge $\leq m$; tritt keine Zykellänge $< m$ auf, so wären alle Zykellängen durch m teilbar, und A wäre nicht streng-monoton [11, 13].

b) Besitzt die nichtnegative nichtzerfallende $(m \times m)$-Matrix B, $d \geq 1$ positive Hauptdiagonalelemente, so ist B^{2m-d-1} positiv [9]; daher ist $A^{r(2m-2)}$ positiv, also A streng-monoton.

2. VOLLSTETIGKEIT UND STRENGE MONOTONIE BEI INTEGRALOPERATOREN

Sei Ω eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $S_+(\Omega)$ die Menge aller nichtnegativen Funktionen aus $S(\Omega)$. Für $e \in S_+(\Omega)$ bezeichne $S_e(\Omega)$ die Menge aller $x \in S(\Omega)$, für welche es eine Zahl $\lambda = \lambda(x) \geq o$ gibt mit $|x(t)| \leq \lambda\, e(t)$ für alle $t \in \Omega$. Ist $\Omega(e) = \{t \in \Omega : e(t) = o\}$ und $\Omega_o = \Omega \setminus \Omega(e)$, so sind die Elemente $x \in S_e(\Omega)$ dadurch charakterisiert, daß $x(t) = o$ für $t \in \Omega(e)$ und $x(t) = e(t)\,y(t)$ für $t \in \Omega_o$ ist mit einer auf Ω_o stetigen und beschränkten Funktion y. Bezeichnet δ jene Funktion, welche identisch gleich 1 auf Ω ist, so liefert $S_\delta(\Omega)$ genau alle stetigen und beschränkten Funktionen auf Ω. In $S_e(\Omega)$ werde die natürliche Halbordnung $\leq$ angenommen, welche durch den Kegel $S_{+e}(\Omega) = S_e(\Omega) \cap S_+(\Omega)$ gegeben ist. Die Menge $oS_{+e}(\Omega)$ aller Ordnungseinheiten besteht aus allen $x \in S_{+e}(\Omega)$, zu denen es eine Zahl $m = m(x) > o$ gibt mit $me(t) \leq x(t)$ für alle $t \in \Omega$. Die Ordnungstopologie auf $S_e(\Omega)$ wird durch die Norm $\|x\|_e = sup\,\{\,|x(t)|\,e(t)^{-1}:\ t \in \Omega_o\,\}$ definiert.

SATZ 2: *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $e \in S_+(\Omega)$; $\Omega_o = \Omega \setminus \Omega(e)$ *sei nichtleer, messbar und beschränkt. Es sei* $A \in \mathbb{R}^{\Omega^2}$ *mit*

(i) $A(t,s) = o$ *für alle* $(t,s) \in \Omega(e) \times \Omega_o$;

(ii) $e(t)^{-1} A(t,s)\,e(s)$ *ist gleichmässig stetig auf* Ω_o^2.

Dann existiert für $x \in S_e(\Omega)$ *und* $t \in \Omega$ *das Integral* (1); *es ist* $Ax \in S_e(\Omega)$, *und* A *ist vollstetiger Operator auf* $(S_e(\Omega),\ \|\ \|_e)$.

Beweis:

a) $A(t,\,.)e(.)$ und $x(.)e(.)^{-1}$ sind stetige, beschränkte Funktionen auf der meßbaren Menge Ω_o, welche endliches Maß hat. Daher existiert (1).

b) Nach (i) ist $Ax(t) = o$ für $t \in \Omega(e)$. Wir untersuchen Ax auf Ω_o. Dazu sei $\tilde{x}$ die auf der kompakten Menge $\bar{\Omega}_o$ durch $\tilde{x}(s) = x(s)\,e(s)^{-1}$ für $s \in \Omega_o$ und $\tilde{x}(s) = o$ für $s \in \bar{\Omega}_o \setminus \Omega_o$ definierte Funktion; es ist $|\tilde{x}(s)| \leq \|x\|_e$ für alle $s \in \bar{\Omega}_o$. $e(t)^{-1} A(t,s)\,e(s)$ läßt sich wegen (ii) von Ω_o^2 zu einer auf $\overline{\Omega_o^2} = \bar{\Omega}_o^2$ stetigen Funktion $F(t,s)$ fortsetzen. Definieren wir für $t \in \bar{\Omega}_o$: $F\tilde{x}(t) = \int_{\bar{\Omega}_o} F(t,s)\,\tilde{x}(s)\,ds$, so gilt

$$Ax(t) = e(t)\,F\tilde{x}(t) \text{ für alle } t \in \Omega_o. \tag{2}$$

Sind $t_1, t_2 \in \bar{\Omega}_o$, so wird

$$|F\tilde{x}(t_1) - F\tilde{x}(t_2)| \leq \|x\|_e \int_{\bar{\Omega}_o} |F(t_1,s) - F(t_2,s)|\,ds, \tag{3}$$

woraus $F\tilde{x} \in S_\delta(\bar{\Omega}_o)$ folgt. Wegen (2) ist daher $Ax \in S_e(\Omega)$ gezeigt.

c) Ist $\{x_n\} \subset S_e(\Omega)$ eine beschränkte Folge, so ist die Folge $\{F\tilde{x}_n\} \subset S(\bar{\Omega}_o)$ gleichgradig stetig wegen (3) und gleichmäßig beschränkt. Also existiert $f \in S(\bar{\Omega}_o)$ und eine Teilfolge $F\tilde{x}_{k_n}$ mit $-\epsilon_n \leq F\tilde{x}_{k_n}(t) - f(t) \leq \epsilon_n$ für alle $t \in \bar{\Omega}_o$ und einer Nullfolge ϵ_n.

Es folgt $-\epsilon_n e(t) \leq Ax_{k_n}(t)-e(t)f(t) \leq \epsilon_n e(t)$ für alle $t \in \Omega_o$. Ist x die auf Ω durch $x(t) = e(t)f(t)$ für $t \in \Omega_o$ und $x(t) = o$ für $t \in \Omega(e)$ definierte Funktion aus $S_e(\Omega)$, so folgt $Ax_{k_n} \to x$ in $\| \ \|_e$.

In den Anwendungen wird meist $\Omega = \bar{\Omega}_o$ sein; die gleichmäßige Stetigkeit von $e(t)^{-1}A(t,s)\,e(s)$ auf Ω_o^2 ist dann mit der stetigen Fortsetzbarkeit dieser Funktion auf Ω^2 äquivalent. Diese wird man durch Differenzierbarkeitseigenschaften von A sichern. Für $m = 1$ geben wir hierzu ein Beispiel.

SATZ 3: I. *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\Delta = \{(t,t) : t \in [a,b]\}$. Für $A \in S([a,b]^2)$ gelte:*

$$D_1^i A \in S_\delta([a,b]^2 \setminus \Delta) \qquad (i = 1,\dots,k;\ k \geq 1).$$

Es seien $t_1,\dots,t_N \in [a,b]$ paarweise verschieden mit $D_1^i A(t_j,s) = o$ für $s \neq t_j$ und $i = o,\dots,r_j-1$; dabei sei $r_j \in \{1,\dots,k\}$ und r_j gerade, falls $a < t_j < b$; $(j = 1,\dots,N)$. Dann ist durch

$$Ax(t) = \int_a^b A(t,s)\,x(s)\,ds, \qquad t \in [a,b]$$

ein Integraloperator definiert, welcher $(S_e[a,b], \| \ \|_e)$ vollstetig in sich abbildet, wenn man

$$e(t) = \prod_{i=1}^{N} |t-t_i|^{r_i}$$

wählt.

II. *Gilt überdies $A(t,s) \geq o$ auf $[a,b]^2$, und verschwinden $A(t,.)$ bei festem $t \in [a,b] \setminus \{t_1,\dots,t_N\}$ sowie $D_1^{r_j} A(t_j,.)$ $(j = 1,\dots,N)$ auf keinem Teilintervall von $[a,b]$, so bildet A die Menge $S_{+e}[a,b] \setminus \{\theta\}$ in $oS_{+e}[a,b]$ ab. A liefert also einen vollstetigen und streng-monotonen Operator auf $(S_e[a,b], \leq, \| \ \|_e)$.*

Beweis: Es ist $[a,b]\,(e) = \{t_1,\dots,t_N\}$ und (i) von Satz 2 erfüllt. Setzt man

$$h_j = \frac{1}{r_j!} \prod_{i \neq j} |t_j - t_i|^{-r_i},$$

so wird die stetige Fortsetzung von $e(t)^{-1}A(t,s)\,e(s)$ auf $[a,b]^2$ gegeben durch

$$F(t,s) = \begin{cases} e(t)^{-1}A(t,s)e(s) & \text{für } t \notin \{t_1,\ldots,t_N\},\ s \in [a,b] \\ \pm\, h_j D_1^{r_j} A(t_j,s)e(s) & \text{für } t = t_j,\ s \neq t_j \\ o & \text{für } t = s = t_j \end{cases}$$

wobei das Minuszeichen in der mittleren Definition nur gilt, wenn $t_j = b$ und gleichzeitig r_j gerade ist. Satz 2 zeigt die Vollstetigkeit von A.

Unter obiger Zusatzvoraussetzung ist $F(t,s) \geq o$ auf $[a,b]^2$ und $F(t,.)$ verschwindet für jedes feste $t \in [a,b]$ auf keinem Teilintervall von $[a,b]$. Ist $x \in S_{+e}[a,b] \setminus \{\theta\}$, so ist

$$\int_a^b F(.,s)\,x(s)\,e(s)^{-1} ds$$

eine stetige, positive Funktion auf $[a,b]$. Ist $m > o$ ihr Minimum, so folgt $me(t) \leq Ax(t)$ auf $[a,b]$; das sichert $Ax \in oS_{+e}[a,b]$.

3. EINE ANWENDUNG

Wir betrachten einen Integraloperator

$$Ax(t) = \int_a^b A(t,s)\,x(s)ds \tag{4}$$

unter allen Voraussetzungen des Satzes 3. Das in der Einleitung am Anfang erwähnte abstrakte Konzept aus [1, 2, 10, 15] liefert die folgenden Aussagen:

a) $\sigma(A)$ ist Eigenwert von A mit einer Eigenfunktion $z \in S[a,b]$, welche

$$me(t) \leq z(t) \leq Me(t) \qquad \text{auf } [a,b] \tag{5}$$

mit positiven Zahlen m und M und $e(t) = \prod_{i=1}^{N} |t-t_i|^{r_i}$ erfüllt.

b) Für jedes $e_o \in oS_{+e}[a,b]$ gilt der Einschluß

$$o < inf \frac{Ae_o(t)}{e_o(t)} \leq \sigma(A) \leq sup \frac{Ae_o(t)}{e_o(t)} < +\infty, \tag{6}$$

wobei beim Infimum und Supremum alle $t \in [a,b]$ zu berücksichtigen sind, für welche $e(t) > o$ ist.

c) z ist (bis auf Normierung) die einzige Eigenfunktion in $S_e[a,b]$, welche nicht das Vorzeichen wechselt.

Beispiel:

(7) $$x^{IV} = \lambda f(t)x; \; x(o) = x''(o) = x(1) = x''(1) = o, \; f(t) = 2t^2-2t+1.$$

die zugehörige Greensche Funktion [5]

$$A(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{6} t(1-s)(2s-t^2-s^2)f(s), & o \le t \le s \le 1 \\ \frac{1}{6} s(1-t)(2t-s^2-t^2)f(s), & o \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

erfüllt sämtliche Bedingungen von Satz 3 mit $t_1 = o$, $t_2 = 1$, $r_1 = r_2 = 1$. Daher gelten a), b) und c) für $e(t) = t(1-t)$. Die Wahl $e_o(t) = t(1-t)$ in (6) liefert den Einschluß

$$166,4 \le \lambda_1 \le 210,$$

wenn $\lambda_1 = \frac{1}{\sigma(A)}$ der kleinste positive Eigenwert von (7) ist.

Im vorliegenden Beispiel konnten die Voraussetzungen des Satzes 3 unmittelbar verifiziert werden, weil die Greensche Funktion explizit bekannt ist. Im allgemeineren Fall

(8) $$Lx = \sum_{j=o}^{k} p_j(\cdot) D^j x = \lambda f(\cdot)x \quad \text{in} \quad [a,b], \quad R_j x = o \qquad (j=1,\dots,k)$$
$$p_j, f \in S[a,b], \; p_k(t) \ne o, \; f(t) > o \qquad (t \in [a,b], \; j = o,\dots,k)$$

mit linearen Randausdrücken R_j $(j=1,\dots,k)$ weiß man, daß die bei homogenen Randbedingungen zu L gehörige Greensche Funktion $A(t,s)$ alle Voraussetzungen von Teil I des Satzes 3 erfüllt, falls $k \ge 2$ ist, und wenn man für die t_j nur die Werte a und b berücksichtigt. Als Exponent r_j bei a bzw. b kann jede natürliche Zahl r_1 bzw. r_2 gewählt werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß für alle k-mal stetig differenzierbaren Funktionen x in $[a,b]$ mit $R_i x = o$ $(i=1,\dots,k)$ stets $x^{(i)}(a) = o$ $(i=o,\dots,r_1-1)$ bzw. $x^{(i)}(b)$ $(i=o,\dots,r_2-1)$ folgt. r_1 oder r_2 ist gleich Null zu setzen, wenn diese Bedingung von keiner natürlichen Zahl bei a oder b erfüllt wird. Das Maximum aller in diesem Sinne zulässigen Exponenten bei a

bzw. b bezeichnen wir mit r_a bzw. r_b. Die Funktion $e(t)$, von welcher in Satz 3 die Rede ist, erhält also die Gestalt:

$$e(t) = (t-a)^{r_1}(b-t)^{r_2}, \tag{9}$$

wobei r_1 und r_2 unmittelbar den Randbedingungen entnommen werden können.

Es gibt nun eine Klasse von Aufgaben der Form (8), bei denen die Greensche Funktion $A(t,s) \geq o$ auf $[a,b]^2$ ausfällt (L zusammen mit R_j $(j=1,\dots,k)$ wird dann "von monotoner Art" oder "inversmonoton" genannt, vgl. [6, 12]). Nach Satz 3 definiert $A(t,s)$ einen Operator gemäß (4), welcher den Raum $S_e[a,b]$ (e wie in (9)) vollstetig und monoton in sich abbildet. Interessanterweise liefert die Greensche Funktion $A(t,s)$ sogar einen streng-monotonen Operator in $S_e[a,b]$, falls man $r_1 = r_a$ und $r_2 = r_b$ wählt. Genauer gilt der

SATZ 4: *Vorgelegt sei eine Eigenwertaufgabe* (8), $R_j x = o$ $(j=1,\dots,k)$ *seien keine Anfangsbedingungen, und die Greensche Funktion* $A(t,s)$ *sei nichtnegativ. Dann definiert* (4) *einen vollstetigen und streng-monotonen Operator auf* $S_e[a,b]$, *wenn man*

$$e(t) = (t-a)^{r_a}(b-t)^{r_b} \qquad (t \in [a,b])$$

setzt.

Einen Beweis dieses Satzes geben wir an anderer Stelle, stattdessen formulieren wir hier noch seine Implikation im Falle der Eigenwertaufgabe (8):

Zu (8) existiere eine nichtnegative Greensche Funktion. Dann besitzt (8) einen positiven Eigenwert. Sei λ_1 der kleinste unter den positiven Eigenwerten, so gibt es eine zugehörige Eigenfunktion $z(t)$ und positive Konstanten c, C mit

$$c(t-a)^{r_a}(b-t)^{r_b} \leq z(t) \leq C(t-a)^{r_a}(b-t)^{r_b} \qquad (t \in [a,b]).$$

Jede weitere von z linear unabhängige Eigenfunktion gehört zu einem Eigenwert $\neq \lambda_1$ und wechselt in $[a,b]$ mindestens einmal das Vorzeichen. Für je zwei Funktionen e_1, $e_2 \in S[a,b]$ mit

$$Le_2(t) = f(t)\,e_1(t) \qquad \text{in } [a,b], \quad R_j e_2 = o \quad (j=1,\dots,k)$$

$$m(t-a)^{r_a}(b-t)^{r_b} \leq e_1(t) \leq M(t-a)^{r_a}(b-t)^{r_b} \quad (t \in [a,b])$$

für zwei positive Zahlen m und M gilt

$$o < inf\{e_1(t)\, e_2(t)^{-1}: t \in (a,b)\} \le \lambda_1 \le sup\{e_1(t) e_2(t)^{-1}: t \in (a,b)\} < +\infty .$$

Bemerkungen: Fordert man anstelle der Nichtnegativität der Greenschen Funktion ihre Symmetrie, so kann man bekanntlich ebenfalls die Existenz eines Eigenwertes und eine Quotienteneinschließung aussagen.

Aufgrund von Satz 4 hätten wir unser obiges Beispiel auch ohne analytische Kenntnis der Greenschen Funktion behandeln können.

LITERATUR

1. Bohl, E.: Eigenwertaufgaben bei monotonen Operatoren und Fehlerabschätzungen für Operatorgleichungen. Arch. Rat. Mech. Anal. 22 (1966), 313-332.
2. Bohl, E.: Linear operator equations on a partially ordered vector space. Aeq. Math. 4 (1970), 89-98.
3. Collatz, L.: Schrittweise Näherung bei Integralgleichungen und Eigenwertschranken. Math. Z. 46 (1940), 692-705.
4. Collatz, L.: Einschließungssatz für die Eigenwerte von Integralgleichungen. Math. Z. 47 (1942), 395-398.
5. Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig (1963).
6. Collatz, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin, Heidelberg, New York (1968).
7. Frobenius, G.: Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss., Berlin (1912), 456-477.
8. Hadeler, K. P.: Einschließungssätze bei normalen und bei positiven Operatoren. Arch. Rat. Mech. Anal. 21 (1966), 58-88.
9. Holladay, J. C. and R. S. Varga: On powers of non-negative matrices. Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 631-634.
10. Krasnoselskij, M. A.: Positive solutions of operator equations. Groningen (1964).
11. Romanovsky, V.: Recherches sur les chains de Markoff. Acta Math. 66 (1936), 147-251.
12. Schröder, J.: Proving inverse-positivity of linear operators by reduction. Num. Math. 15 (1970), 100-108.
13. Varga, R. S.: Matrix Iterativ Analysis. Prentice-Hall, Inc. (1962).
14. Wielandt, H.: Unzerlegbare, nicht negative Matrizen. Math. Z. 52 (1950), 642-648.
15. Bohl, E.: Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Springer-Tracts in Natural Philosophy. Bd. 25. Erscheint demnächst.