E I N E A B S T R A K T E T H E O R I E

V O N D I A L O G S P I E L E N

Inaugural - Dissertation zur Erlangung des

Doktorgrades der Mathematischen Fakultät

an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

vorgelegt von Walther Kindt Freiburg 1972

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Idee des Dialogspiels geht auf Lorenzen [9],[10] zurück. Dieses Spiel wurde zum ersten Mal 1961 von Lorenz in [7] untersucht. Seitdem ist es in verschiedenen Fassungen hauptsächlich von Lorenzen [4],[11],[12],[13] und Lorenz [8] propagiert und zur Begründung der Logik verwendet worden. Daneben gibt es Untersuchungen von Drieschner [3] und Stegmüller [15].

Dialogspiele sind Zweipersonenspiele im Sinne von Berge [2]. Die beiden teilnehmenden Spieler heißen Proponent und Opponent. Die Spielregel eines Dialogspiels setzt sich aus gewissen Teilregeln zusammen, von denen im Anschluß an Lorenz [8] kurz als den "Regeln" gesprochen wird. Jeder Dialog, d.i. eine Partie im Dialogspiel, beginnt damit, daß der Proponent eine Behauptung aufstellt und der Opponent diese bestreitet. Im weiteren Verlauf des Dialoges bringen die beiden Kontrahenten abwechselnd und den Regeln entsprechend neue Argumente vor; z.B. greifen sie Behauptungen des Gegners an, indem sie Fragen an ihn richten oder Gegenbehauptungen aufstellen. Dies geht solange, bis einer der beiden Spieler aufgrund der Regeln keine neuen Argumente mehr vorbringen kann. Damit gewinnt der andere den Dialog. Eine Aussage heißt (dialogisch) "wahr", wenn der Proponent unabhängig von der Argumentation des Opponenten jeden Dialog, den er mit der Behauptung dieser Aussage eröffnet, gewinnen kann. Die Regeln eines Dialogspiels sind so eingerichtet, daß die Argumentation im Dialog stets auf die Diskussion gewisser elementarer Aussagen ("Primaussagen") zurückführt. Bei "inhaltlichen" Dialogspielen geht man davon aus, daß über Wahrheit und Falschheit der Primaussagen bereits entschieden ist; dementsprechend sind in der Spielregel auf Primaussagen je nach ihrem Wahrheitswert unterschiedliche Reaktionen vorgesehen. Bei "formalen" Dialogspielen ist dagegen die Argumentation unabhängig von einer möglichen Bewertung der Primaussagen. Bereits in [7] gab Lorenz formale Dialogspiele an, die zur intuitionistischen bzw. klassischen Logik führen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Theorie der von Lorenz in [7],[8] untersuchten Dialogspiele systematisch zu entwickeln. Das geschieht durch eine mehr abstrakte Behandlung, bei der es sich empfiehlt, neue Grundbegriffe zu verwenden ("permanente", "tabuisierte","konjugierte" Argumente). Eine solche Behandlung erleichtert einerseits die exakte Durchführung der Beweise, die Lorenz in [8] nur angedeutet hatte. Andererseits rückt sie die Frage nach den Beziehungen verschiedener Dialogspiele zueinander stärker in den Vordergrund und eröffnet den Zugang zu neuen Resultaten. Insgesamt gesehen wird eine größere Geschlossenheit der Theorie erreicht. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, die Theorie unmittelbar auch auf Dialogspiele über unendlichen Sprachen anzuwenden. Zwei Beispiele mögen zeigen, was sich in der allgemeinen Theorie herleiten läßt:

(a) Die Regeln eines Dialogspiels können stets in gewisser Weise verschärft werden, ohne daß sich dabei die Gewinnchancen des Proponenten und damit der Bereich wahrer Aussagen ändern; so bedeutet etwa die Voraussetzung der Alternativität, d.h. der Zugabwechslung, keine Einschränkung.
(b) Bereits auf allgemeiner Stufe gilt für Dialogspiele eine Beziehung, die dem Gentzenschen Schnittsatz entspricht.

Anlaß für die vorliegende Arbeit war der Wunsch, die Darstellung in [5] zu vereinfachen und zu ergänzen. Außerdem sollten wie schon in [5] Beweislücken von Lorenz [8] ausgefüllt werden. Im folgenden werden einige genauere Bemerkungen über das Verhältnis der vorliegenden Untersuchung zu Lorenz [7],[8] gemacht:

(a) In [8] postulierte Lorenz für seine intuitionistischen m,n- bzw. n- Spiele zwei Sätze, welche die Reduktion der Regeln betreffen. Diese Sätze begründete er mit unzureichenden Plausibilitätsbetrachtungen. Ein erster detaillierter Beweis steht in [5]. Die Hauptschwierigkeit bei diesem Beweis beruht auf der von Lorenz für intuitionistische Spiele eingeführten "Einlösung der zuletzt entstandenen Verteidigungspflicht". In der vorliegenden Schrift wird demgegenüber eine leichter handzuhabende Regel benutzt ("Elimination nichtpermanenter Argumente"). Diese neue Regel gestattet auch die simultane Behandlung klassischer und intuitionistischer Dialogspiele.

(b) Neben den m,n- und n- Spielen wird hier in abstrakter Form auch das Dialogspiel untersucht, das Lorenz in [7] diskutiert, in [8] aber verworfen hatte, weil es im Gegensatz zu den lokal partienbeschränkten m,n- und n- Spielen nicht einmal partienendlich ist. Durch eine Zusatzregel läßt sich aber auch bei diesem Spiel die Partienendlichkeit erreichen und es ergibt sich dann ein einfacher Zusammenhang zwischen ihm und den zugehörigen m,n- bzw. n- Spielen.

(c) In [8] behauptete Lorenz, daß der Schnittsatz für alle intuitionistischen n- Spiele gelte. Mit den Gegenbeispielen aus §11 wird hier nachgewiesen, daß der Schnittsatz für keines der intuitionistischen und ebensowenig der klassischen n- Spiele gilt. Tatsächlich kann man den Satz erst jeweils für die Vereinigung der n- Spiele zeigen und dort die von den üblichen Tableauxbeweisen (vgl. z.B. Smullyan [14]) übernommene Beweisidee realisieren. Von derselben Idee macht auch der hier vorgeführte Beweis Gebrauch.

(d) Für die Aufzählung der Gewinnsituationen von den intuitionistischen und klassischen Dialogspielen führte Lorenz in [7] und [8] jeweils bestimmte Zwischenkalküle ein und ging erst danach zu den üblichen Sequenzenkalkülen über. In dieser Arbeit wird dagegen ein direkter Anschluß an die Sequenzenkalküle erreicht.

In der vorliegenden Untersuchung wird die klassische Logik und die Mengenlehre von Zermelo - Fraenkel ohne Auswahlaxiom verwendet. Beschränkt man sich auf die Betrachtung von konstruktiv zulässigen Bereichen, so sind abgesehen von §1 die Beweise konstruktiv im Sinne von Lorenzen [10].

Inhaltsübersicht:
§1 - §3 haben vorbereitenden Charakter. Nach Besprechung der wichtigsten spieltheoretischen Begriffe wird in §1 eine Beschreibung der Gewinnsituationen angegeben, die den Strategiebegriff vermeidet. Mit dem in §2 eingeführten Kriterium der Quasifinitheit wird in §10 nachgewiesen, daß die Reduktionssätze aus §7 auf die intuitionistischen und klassischen Dialogspiele anwendbar sind. In §3 werden zwei Sätze aufgestellt, die beim Vergleich ähnlicher Dialogspiele in §6 und §7 von Nutzen sind. Die allgemeine Dialogspieldefinition und ihre Motivierung findet man in §4. In §5 werden einige charakteristische Eigenschaften von Dialogspielen und ein erstes Reduktionsresultat (Alternativität) bewiesen. §6 beschäftigt sich mit dem Vergleich einiger Grundtypen von Dialogspielen; u.a. wird gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen der Bereich der wahren Aussagen nicht davon abhängt, welche der im Rahmen der allgemeinen Definition möglichen Regeln ausgewählt werden (dies trifft in gewissem Sinne auf die inhaltlichen Dialogspiele zu). In §7 werden m,n- und n- Spiele

behandelt und die auf Lorenz [8] zurückgehenden Reduktionssätze bewiesen. Insgesamt gesehen legen es die Ergebnisse von §6 und §7 nahe, sich auf die Diskussion eines bestimmten Dialogspieltyps zu beschränken (1-Optimalität). In §8 werden u.a. der Begriff des inhaltlichen und des formalen Dialogspiels präzisiert und einige damit zusammenhängende Fragen erörtert. §9 beschäftigt sich mit den "Standarddialogspielen", an die im Rahmen der allgemeinen Theorie die weitesten Anforderungen gestellt werden. Für diese Spiele wird der Schnittsatz bewiesen und außerdem ein den Gentzenkalkülen ähnlicher Sequenzen - Halbformalismus angegeben, in dem genau die wahren Argumente herleitbar sind. In §10 werden als konkrete Standarddialogspiele das intuitionistische und das klassische formale Dialogspiel behandelt. Von diesen Spielen wird zunächst die Quasifinitheit bewiesen. Danach werden Kalküle vom Typ G3 (s. Kleene [14]) angegeben und für sie wird mit Hilfe der Ergebnisse von §9 der Korrektheits- und Vollständigkeitssatz bzgl. des intuitionistischen bzw. des klassischen Spiels gezeigt. §11 bringt zum Abschluß einige Beispiele, mit denen die Unterschiede einiger formaler Dialogspiele beleuchtet werden.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor H. Hermes für sein Interesse an dieser Arbeit und seine fördernde Kritik danken; insbesondere im Zusammenhang mit [5] gilt mein Dank außerdem Herrn Dr. habil. H.-D. Ebbinghaus und Herrn Professor W. Felscher, der mich auch auf einen Fehler in [5] II.4 hinwies.

Terminologische Vereinbarungen

Ordinalzahlen werden durch a,b,c,... angedeutet; speziell sei ω die Menge der natürlichen Zahlen. Elemente von ω werden mitgeteilt durch j,k,l,m,n,... . Als Ordinalzahladdition und -multiplikation werden ausschließlich die "natürlichen" Operationen nach Hessenberg benutzt, welche die finite Arithmetik als Spezialfall enthalten und mit denen man wie dort rechnen kann (es gelten Absorptionsfreiheit, Assoziativ-, Kommutativ-, und Distributivgesetze; vgl. Bachmann [1]).

Mit $|X|$ wird für wohlordenbare Mengen X die Mächtigkeit von X bezeichnet.

Def f bzw. Bild f sei wie üblich der Definitions- bzw. Bildbereich der Funktion f.

Ist f eine Folge und $a \in \mathrm{Def}\, f$, so enstehe $f\frac{x}{a}$ aus f durch Ersetzung von f_a durch x. Endliche Folgen $(x_0,\ldots,x_{n-1})$ werden auch durch $\overset{n}{x}$ angedeutet. Folgen mit nur einem Glied werden mit diesem identifiziert.

R sei eine binäre Relation in X, d.h. $R \subset X^2$. Gilt $x\,R\,y$, so heißt y wie üblich R-Nachfolger von x. Außerdem wird gesetzt

$$Rx := \{y \in X;\ x\,R\,y\}.$$

Eine Folge f heißt R-Kette in X, wenn $\mathrm{Def}\, f \leq \omega$, $\mathrm{Bild}\, f \subset X$ und für alle j mit $j+1 \in \mathrm{Def}\, f$: $f_j\,R\,f_{j+1}$.

Bezeichnungen und Symbole

Dialogspiele	X, x, sx 9; Γ, R 10; G_i, ${}_aG_i$ 2; G, ${}_aG$ 13; br Δ, Δ^{st} 18; Δ^-, Δ^+ 19; $\Delta^{m,n}$ 25.
Argumente und Sequenzen	$\varphi \in \Sigma$, $\Sigma-\varphi$, $\Sigma\Phi$ 9; $P(\Sigma)$, Σ_φ 10; $h(\varphi,\Sigma)$, $\Sigma \leq \Phi$, $\Sigma \in \Phi$, Σ^n 13.
Situationen	$x \leq y$, $x \in y$, xy, $x^{m,n}$, x^m, $P(x)$ 13.

§1 Spieltheoretische Grundbegriffe

In diesem Paragraphen werden kurz die wichtigsten spieltheoretischen Begriffe zusammengestellt. Dabei schließen wir uns der Darstellung von Berge [2] an, beschränken uns aber auf die Diskussion von speziellen Zweipersonenmattspielen mit vollständiger Information.

1.1 Definition: Es sei $\Gamma = (X,R,s)$. Γ heißt Spiel, wenn

(1) $R \subset X^2$,

(2) $s: X \to 2$.

$\Gamma = (X,R,s)$ sei im folgenden ein Spiel. Die Elemente von X (angedeutet durch x,y,...) heißen Spielsituationen, R ist die Spielregel und s gibt in jeder Situation an, welcher der beiden Spieler ($0,1 \in 2$) am Zuge ist; dementsprechend heißt sx Spieler von x. Als Variable für 0,1 benutzen wir i. In der Situation x besteht ein Zug des Spielers sx in der Wahl eines R-Nachfolgers von x. Situationen x mit $Rx=0$ heißen Endsituationen und es wird gesetzt

$$X_e := \{x;\ Rx=0\}.$$

1.2 Definition: Unter einer Partie in Γ (angedeutet durch p) versteht man eine nichtleere R-Kette in X. p heißt Partie um x, wenn $p_0 = x$. p heißt vollständig, wenn p unendlich ist oder wenn p endlich und das letzte Glied von p Endsituation ist.

1.3 Definition: Γ heißt partienendlich, wenn jede Partie in Γ endlich ist. Γ heißt lokal partienbeschränkt, wenn zu jedem x eine Zahl n existiert derart, daß für jede Partie p um x: $|p| \leq n$.

1.4 Definition: Der Spieler i gewinnt p, wenn p endlich und beim letzten Glied von p $1-i$ (also der Gegenspieler) am Zuge ist.

1.5 Definition: Es sei $X_i := \{x;\ sx=i\}$.
σ heißt i-Strategie, wenn

(1) $\sigma: X_i - X_e \to X$,

(2) für alle $x \in X_i - X_e$: $x\ R\ \sigma x$.

1.6 Definition: σ sei eine i-Strategie. p heißt σ-Partie, wenn für alle j mit $j+1 \in Def\,p$ und $s\,p_j = i$ gilt: $p_{j+1} = \sigma\, p_j$.

1.7 Definition: σ sei eine i-Strategie. σ heißt i-Gewinnstrategie für x, wenn i jede vollständige σ-Partie um x gewinnt.

Als einfache Konsequenz aus den vorangegangenen Definitionen erhält man

1.8 Satz: σ sei eine i-Strategie. Dann gilt:
(1) Falls $sx=1-i$, so ist σ eine i-Gewinnstrategie für x genau dann, wenn σ i-Gewinnstrategie für jedes $y \in Rx$ ist.

(2) Falls $sx=i$ und $x \notin X_e$, so ist σ eine i-Gewinnstrategie für x genau dann, wenn σ i-Gewinnstrategie für σx ist.

Eine Situation x, für die es eine i-Gewinnstrategie gibt, heißt auch i-Gewinnsituation. Zum Abschluß von §1 wird noch eine andere Charakterisierung der i-Gewinnsituationen angegeben.

1.9 Definition: Rekursiv wird für alle Ordinalzahlen b definiert:

$$_bG_i := \bigcup_{a<b} \{x;\ sx=1-i \text{ und } Rx \subset {}_aG_i\} \cup \bigcup_{a<b} \{x;\ sx=i \text{ und } Rx \cap {}_aG_i \neq 0\}.$$

Weiterhin sei $G_i := \bigcup_a {}_aG_i$ und für $x \in G_i$ sei $niv_i\, x$ (das "i-Niveau von x") die kleinste Ordinalzahl a mit $x \in {}_aG_i$.

Unmittelbar aus 1.9 ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$_0G_i = 0$; $_1G_i = X_e - X_i$; $_\omega G_i = \bigcup_{n<\omega} {}_nG_i$;

falls $a \le b$, so $_aG_i \subset {}_bG_i$;

falls $x \in {}_bG_i$, so existiert $a < b$ mit $x \in {}_{a+1}G_i$.

Außerdem gilt

1.10 Satz: Wenn $sx=1-i$ und $Rx \subset G_i$, so $x \in G_i$.

Zum Nachweis von 1.10 setzt man $a := \bigcup \{niv_i\, y\,;\ y \in Rx\}$ und erhält dann $x \in {}_{a+1}G_i$.

Das wichtigste Resultat in diesem Zusammenhang liefert

1.11 Satz:

(1) $x \in G_i$ genau dann, wenn x i-Gewinnsituation ist.

(2) $x \in {}_nG_i$ genau dann, wenn es eine i-Gewinnstrategie σ für x gibt derart, daß für jede σ-Partie p um x: $|p| \leq n$.

In den folgenden Paragraphen werden wir ausschließlich auf diese Charakterisierung der Gewinnsituationen zurückgreifen.

Im Falle, daß Γ partienendlich ist, kann man übrigens leicht $X = G_0 \cup G_1$ erschließen und erhält mit 1.11, daß jede Situation entweder 0- oder 1-Gewinnsituation ist (Satz von Zermelo / v. Neumann; vgl. Berge [2]).

Zum Beweis von 1.11: Im Hinblick auf die Anwendungen wird vorausgesetzt, daß X wohlordenbar ist; damit kommt man beim Beweis ohne Auswahlaxiom aus. Wir zeigen von 1.11 zunächst die

Richtung von links nach rechts: Sei $(x_b;\ b < b^*)$ eine Aufzählung von X. Man definiert nun eine i-Strategie σ, indem man für $x \in X_i - X_e$ setzt

$$\sigma x := x_b, \text{ wobei}$$

$$b := \begin{cases} \min\{c;\ x_c \in Rx\} & \text{falls } x \notin G_i, \\ \min\{c;\ x_c \in Rx \text{ und } niv_i\, x_c < niv_i\, x\} & \text{falls } x \in G_i. \end{cases}$$

Unter Benutzung von 1.8 wird durch Induktion über a gezeigt, daß σ für alle $x \in {}_aG_i$ eine i-Gewinnstrategie ist und im Falle $a < \omega$ für dieses σ auch die rechte Seite von 1.11 (2) erfüllt ist.

Richtung von rechts nach links: σ sei eine i-Gewinnstrategie für x. Zum Nachweis von 1.11 (1) führt man die Annahme $x \notin G_i$ zum Widerspruch, indem man induktiv und unter Benutzung von 1.10 eine unendliche σ-Partie p um x mit der Eigenschaft: $p_j \notin G_i$ für $j < \omega$ definiert.

Im Falle, daß für alle σ-Partien p um x $|p| \leq n$ gilt, führt man zum Nachweis von 1.11 (2) die Annahme $x \notin {}_nG_i$ zum Widerspruch, indem man eine σ-Partie p um x mit der Eigenschaft: $|p| = n+1$ und $p_j \notin {}_{n-j}G_i$ für $j < n$ definiert.

Bemerkung: Der Beweis der ersten Richtung von 1.11 läßt sich "konstruktiver" gestalten, wenn man Strategien verwendet, die im Gegensatz zu 1.5 über Partien erklärt sind und damit die Information über den bisherigen Verlauf einer Partie einbeziehen.

§2 Quasifinitheit

Ist $\Gamma = (X,R,s)$ ein lokal partienbeschränktes Spiel, so ergibt sich mit Hilfe von 1.11 (2), daß jede i-Gewinnsituation schon in $_\omega G_i$ liegt. Allgemein soll Γ lokal einschränkbar für i heißen, wenn $G_i = {}_\omega G_i$ (für jede i-Gewinnsituation sind die Partien bei geeigneter Spielweise von i beschränkt; s.a.§7 S.26). In §10 werden wir zeigen, daß die dort untersuchten, nichtpartienendlichen intuitionistischen und klassischen Dialogspiele lokal einschränkbar für beide Spieler sind. Zum Nachweis benötigt man das in diesem Paragraphen entwickelte Kriterium der Quasifinitheit. Dialogspiele über unendlichen Sprachen sind dagegen nicht mehr lokal einschränkbar für die Spieler (vgl. a. 11.4) und aus diesem Grund wird die vorliegende Untersuchung allgemeiner formuliert, als es im Hinblick auf die intuitionistischen und klassischen Dialogspiele notwendig wäre.

Zunächst werden einige Vorbetrachtungen angestellt. $\Gamma = (X,R,s)$ sei ein Spiel. Eine Abbildung φ heißt Automorphismus von Γ, wenn φ eine bijektive Abbildung von X nach X ist und für alle x,y:

(1) $s\varphi x = sx$,

(2) $x\ R\ y$ genau dann, wenn $\varphi x\ R\ \varphi y$.

Ist φ ein Automorphismus von Γ, so hat φ die folgende Erhaltungseigenschaft:

wenn $x \in {}_aG_i$, so auch $\varphi x \in {}_aG_i$.

Diese Eigenschaft bleibt bestehen, wenn man die Automorphismusdefinition folgendermaßen abschwächt:

2.1 Definition: E heißt i-Erhaltungsrelation von Γ, wenn $E \subset X^2$ und für alle x,y mit $x\ E\ y$ gilt:

(1) $sx = sy$,

(2) falls $sx=1-i$, so für alle $y' \in Ry$ existiert $x' \in Rx$ mit $x'\ E\ y'$,

(3) falls $sx=i$, so für alle $x' \in Rx$ existiert $y' \in Ry$ mit $x'\ E\ y'$.

Die Bedingungen (2) und (3) bedeuten hierbei, daß jeweils bestimmte Diagramme vervollständigt werden können:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, dash, "R"] \arrow[d, dash, "E"'] & y' \arrow[d, dash, dashed, "E"] \\ x \arrow[r, dash, dashed, "R"'] & x' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, dash, dashed, "R"] \arrow[d, dash, "E"'] & y' \arrow[d, dash, dashed, "E"] \\ x \arrow[r, dash, "R"'] & x' \end{tikzcd}$$

(2) (3)

Jeder Automorphismus ist insbesondere 0- und 1-Erhaltungsrelation. Die "Erhaltungseigenschaft" einer Erhaltungsrelation wird nun formuliert in

2.2 Satz: E sei eine i-Erhaltungsrelation von Γ und es gelte $x \mathrel{E} y$ und $x \in {}_aG_i$. Dann ist auch $y \in {}_aG_i$.

Den Beweis von 2.2 führen wir in verallgemeinerter Form in §3 und kommen jetzt zur Definition der Quasifinitheit.

2.3 Definition: Γ heißt quasifinit für i, wenn für alle x mit $sx=1-i$ existiert $Y \subset Rx$ mit den Eigenschaften:

(1) Y ist endlich,

(2) für alle $z \in Rx$ existiert eine i-Erhaltungsrelation E von Γ und ein $y \in Y$ mit $y \mathrel{E} z$.

Jedes finite Spiel (d.h. Rx ist endlich für jedes x) ist quasifinit für 0 und 1; zum Beweis setzt man jeweils $Y := Rx$ und nimmt für E die Identität. Für quasifinite Spiele gilt nun

2.4 Satz: Γ sei quasifinit für i. Dann ist $G_i = {}_\omega G_i$.

Zum Nachweis von 2.4 zeigt man durch Induktion über a:

(B) Für alle $x \in {}_aG_i$: $x \in {}_\omega G_i$. Dazu wird angenommen

(V): (B) gelte schon für alle $a < b$.

Sei nun $x \in {}_bG_i$.

Falls $sx=1-i$, so liefern 1.9 und (V): $Rx \subset {}_\omega G_i$. Wegen der Quasifinitheit für i existiert dann $Y \subset Rx$ mit (1),(2) in 2.3. Wegen 2.3 (1) gibt es ein n mit $Y \subset {}_nG_i$; wegen 2.3(2) und 2.2 gilt dann $Rx \subset {}_nG_i$. Damit erhält man $x \in {}_{n+1}G_i \subset {}_\omega G_i$.

Falls $sx=i$, erhält man $x \in {}_\omega G_i$ unmittelbar aus 1.9 und (V).

Zum Abschluß von §2 werden zwei Spiele angegeben, die für 1 nicht quasifinit sind und von denen eines die Bedingung $G_i \neq {}_\omega G_i$ und das andere $G_i = {}_\omega G_i$ erfüllt.

Beispiel 1: $\Gamma = (X,R,s)$ wird definiert durch:

$X := \{(n,i);\ n \in \omega,\ i \in 2\} \cup \{(\omega,0)\}$,

$s(a,i) := i$,

$(a,i)\ R\ (b,i')$ genau dann, wenn

(1) $i' = 1-i$,

(2) falls $a=\omega$, so $b < \omega$ und b ungerade,

(3) falls $a < \omega$, so $a = b+1$.

Für die Situation $x = (\omega,0)$ gilt $x \in G_1$ aber $x \notin {}_{\omega}G_1$.
Nach 2.4 ist Γ daher nicht quasifinit für 1.

Beispiel 2: X und s seien erklärt wie in Beispiel 1. R wird definiert durch:

$(a,i)\ R\ (b,i')$ genau dann, wenn

(1) $a > b$,
(2) falls $b > 0$, so $i' = 0$,
(3) falls $b = 0$, so $i' = 1$.

Für das zugehörige Spiel $\Gamma = (X,R,s)$ gilt $G_1 = 0$. Die Quasifinitheit für 1 ist außerdem bei $x = (\omega,0)$ verletzt. Zum Beweis zeigt man durch Induktion über $n > 0$, daß für alle $m > n$ keine 1-Erhaltungsrelation E mit $(n,0)\ E\ (m,0)$ existiert.

§3 Zwei Vergleichssätze

Die beiden im folgenden hergeleiteten Sätze sind ein wichtiges Hilfsmittel für §6 und §7 und werden beim Vergleich von Dialogspielen angewendet.

Zunächst wird die in §2 angegebene Definition der Erhaltungsrelation verallgemeinert.

3.1 Definition: Es seien $\Gamma = (X,R,s)$ und $\Gamma' = (X,R',s)$ Spiele. E heißt i-Erhaltungsrelation von Γ zu Γ', wenn $E \subset X^2$ und für alle x,y mit $x\,E\,y$ gilt:

(1) $sx = sy$,

(2) falls $sx = 1-i$, so für alle $y' \in R'y$ existiert $x' \in Rx$ mit $x'\,E\,y'$,

(3) falls $sx = i$, so für alle $x' \in Rx$ existiert $y' \in R'y$ mit $x'\,E\,y'$.

Eine i-Erhaltungsrelation von Γ gemäß 2.1 ist im Sinne von 3.1 eine i-Erhaltungsrelation von Γ zu Γ. Im folgenden werden die zu einem Spiel Γ' gehörigen Gewinnsituationsmengen (1.9) ebenfalls mit ' gekennzeichnet. In Verallgemeinerung von 2.2 wird jetzt formuliert

3.2 Satz: Es seien $\Gamma = (X,R,s)$ und $\Gamma' = (X,R',s)$ Spiele und E sei eine i-Erhaltungsrelation von Γ zu Γ'. Dann gilt: Wenn $x \in {}_aG_i$ und $x\,E\,y$, so $y \in {}_aG_i'$.

Der Beweis von 3.2 wird durch Induktion über a geführt.
(V): Die Behauptung von 3.2 gelte schon für alle $a < b$.
Induktionsschritt: Es sei $x \in {}_bG_i$ und $x\,E\,y$. Nach 1.9 gibt es $a < b$ mit $x \in {}_{a+1}G_i$.

Falls $sx=1-i$, so reicht nach 1.9 für $y \in {}_bG_i'$ der Nachweis von $R'y \subset {}_aG_i'$. Sei also $y\,R\,y'$. Nach 3.1(2) gibt es x' mit $x\,R\,x'$ und $x'\,E\,y'$. Wegen $x \in {}_{a+1}G_i$ und 1.9 gilt $x' \in {}_aG_i$. Damit liefert (V) $y' \in {}_aG_i'$.

Falls $sx=i$, so gibt es wegen 1.9 $x' \in Rx$ mit $x' \in {}_aG_i$. Nach 3.1(3) existiert dann $y' \in Ry$ mit $x'\,E\,y'$. Damit liefert (V) $y' \in {}_aG_i'$ und mit 1.9 erhält man $y \in {}_bG_i'$.

Vor der Formulierung des zweiten Satzes wird rekursiv eine Funktion g definiert, die Abschätzungszwecken dient.

3.3 <u>Definition:</u> Es wird gesetzt

$g(a,0) := 0$ und $g(a,b) := a(1 + \bigcup_{c<b} g(a,c))$ für $b > 0$.

Insbesondere ist für $n > 0$: $g(m,n) = \sum_{0\leq j<n} m^j$ (geom. Reihe).

3.4 <u>Voraussetzungen für Satz 3.5:</u> Es seien $\Gamma' = (X,R',s)$ und $\Gamma'' = (X,R'',s)$ Spiele. Weiter seien vorgegeben i, $Y \subset X$ und $\pi: X \to \bigcup_{n\in\omega} X^n$. Schließlich gelte für alle $x \in Y$, k und $\overset{k}{z}$ mit $\pi x = \overset{k}{z}$:

(1) Für alle $\overset{k}{c}$, c mit $c = \sum_{j<k} c_j$: wenn $z_j \in {}_{c_j}G''_i$ für alle $j < k$, so $x \in {}_cG''_i$.

(2) Für alle $j < k$ gilt:

(a) $s\,z_j = sx$,

(b) falls $sx=1-i$, so $R''z_j \subset R'x \subset Y$,

(c) falls $sx=i$, so $R'x \subset R''z_j \subset Y$.

3.5 <u>Satz:</u> Die Voraussetzungen von 3.4 seien erfüllt. Außerdem sei $a := \min\{ c \leq \omega;$ für alle $y \in Y$: $|\pi y| \leq c \}$.
Dann gilt:
wenn $x \in Y$ und $x \in {}_bG'_i$, so $x \in {}_{g(a,b)}G''_i$.

<u>Beweis von 3.5</u> durch Induktion über b.

(V): Die Behauptung von 3.5 gelte schon für alle $b < c$.

Induktionsschritt: Sei $x \in Y$, $\pi x = \overset{k}{z}$ und $x \in {}_cG'_i$.

Dann ist insbesondere $c\neq 0$. Für $x \in {}_{g(a,c)}G''_i$ reicht nach 3.4 (1) der Nachweis von: für alle $j < k$ gilt $z_j \in {}_{1+d}G''_i$, wobei $d := \bigcup_{b<c} g(a,b)$. Sei also $j < k$ gewählt.

<u>Falls $s\,z_j = 1-i$</u>, so genügt es wegen 1.9 und 3.3 zu zeigen, daß $R''z_j \subset {}_dG''_i$. Sei also $z_j\, R''\, y$. Dann gilt wegen 3.4 (2) (a), (b) $x\, R'\, y$ und $y \in Y$; wegen 1.9 existiert außerdem $b < c$ mit $y \in {}_bG'_i$. (V) liefert schließlich $y \in {}_{g(a,b)}G''_i \subset {}_dG''_i$.

<u>Falls $s\,z_j = i$</u>, so $sx=i$ und nach 1.9 existiert $y \in R'x$ und $b < c$ mit $y \in {}_bG'_i$. Nach 3.4 (2) (c) gilt $y \in Y$ und $z_j\, R''\, y$. (V), 1.9 und 3.3 liefern dann $y \in {}_{g(a,b)}G''_i$ und $z_j \in {}_{1+d}G''_i$.

§4 Dialogspieldefinition

Nachdem mit §1 - 3 die Vorbereitungen auf allgemein spieltheoretischem Gebiet abgeschlossen sind, wenden wir uns jetzt den Dialogspielen zu.

Zunächst werden einige Bezeichnungen eingeführt.
Mit L deuten wir im folgenden jeweils eine wohlordenbare Menge an, die wir Sprache nennen und deren Elemente im Hinblick auf die Verwendung in Dialogen Argumente heißen. Argumente werden durch $\varphi, \psi, \ldots$ mitgeteilt.

Endliche Argumentefolgen heißen auch Sequenzen und werden durch $\Sigma, \Phi, \Psi, \ldots$ angedeutet.

$\mathfrak{S}$ sei die zu L gehörige Menge der Sequenzen.

$\varphi \in \Sigma$ bedeute, daß φ Glied von Σ ist.

$\Sigma - \varphi$ entstehe aus Σ durch Streichung des letzten in Σ vorkommenden φ, falls $\varphi \in \Sigma$, und wird anderenfalls identisch Σ gesetzt.

$\Sigma\Phi$ sei wie üblich die aus Σ durch Anhängen von Φ gebildete Sequenz.

In einem über L operierenden Dialogspiel dient

$$X := \mathfrak{S}^2 \times 2$$

als Situationsmenge. X ist mit L selbst wohlordenbar.

In der Dialogsituation $x \in X$ werden die Argumente von x_0 bzw. x_1 als die augenblicklich vom Spieler 0 bzw. 1 zu verantwortenden Argumente gedeutet. x_2 gibt den Spieler an, der bei x am Zuge ist. Im Anschluß an 1.1 wird gesetzt

$$sx := x_2.$$

Schließlich identifizieren wir den Spieler 0 mit dem Opponenten und 1 mit dem Proponenten im Dialog.

4.1 Ein Dialogspiel Δ wird gegeben durch:

1.) eine Sprache L,
2.) eine Menge $P \subset L$ von permanenten Argumenten,
3.) eine Menge $T \subset L$ von tabuisierten Argumenten,
4.) zwei Argumenterelationen $A_0, A_1 \subset L \times \mathfrak{S}$,
5.) eine Ergebnisfunktion $e: X \times L \times \mathfrak{S} \to X$.

Zu Δ wird ein Spiel Γ in der Normalform 1.1 erklärt:

4.2 $\Gamma := (X,R,s)$, wobei R definiert ist durch:

$x\ R\ y$ genau dann, wenn es gibt φ, Σ mit

(1) $\varphi \in x_{1-sx}$, $\varphi\ A_{sx}\ \Sigma$ und $y = e(x,\varphi,\Sigma)$,

(2) falls $sx=0$ und $\varphi \in T$, so $\varphi \notin x_0$.

In der Situation x besteht nach 4.2 ein Zug des Spielers sx in der Auswahl eines gegnerischen Arguments φ und einer mit A_{sx} zu vereinbarenden Argumentation Σ gegen φ. Dabei ist für den Opponenten der Angriff auf Argumente aus T verboten, wenn er sie selbst verantworten muß (sie sind dann "tabuisiert").

Für die Ergebnisfunktion von Δ werden schließlich noch zwei Axiome D0 und D1 gefordert; vor ihrer Formulierung wird definiert:

$P(\Sigma)$ heißt <u>permanenter Kern</u> von Σ und entstehe aus Σ durch Streichung der nicht zu P gehörigen Argumente in Σ. Außerdem sei

$$\Sigma_\varphi := \begin{cases} P(\Sigma) & \text{falls } \varphi \in P \text{ oder } P=0, \\ \Sigma & \text{sonst.} \end{cases}$$

Σ_φ heißt <u>φ-Kern</u> von Σ.

4.3 <u>Dialogspielaxiome:</u>

D0 (1) Für alle x mit $sx=0$: $e(x,\varphi,\Sigma) = (\ (x_0)_\varphi\Sigma,\ (x_1-\varphi)_\varphi,\ 1)$
oder
(2) Für alle x mit $sx=0$: $e(x,\varphi,\Sigma) = (\ (x_0)_\varphi\Sigma,\ 0\ ,\ 1)$.

D1 (1) Für alle x mit $sx=1$: $e(x,\varphi,\Sigma) = (\ x_0-\varphi\ ,\ x_1\Sigma\ ,\ 0)$
oder
(2) Für alle x mit $sx=1$: $e(x,\varphi,\Sigma) = (\ x_0\ ,\ x_1\Sigma\ ,0)$.

In D0 und D1 unterscheiden sich die Fälle (1) und (2) jeweils durch die Art, wie bei einem Zug von sx die gegnerischen Argumente x_{1-sx} reduziert werden. Von den eigenen Argumenten x_{sx} müssen alle bzw. mindestens die permanenten weiter verantwortet werden. Die bei der Argumentation gegen φ gerichteten Argumente Σ kommen zu den eigenen Argumenten neu hinzu. Schließlich ist durch D0 und D1 bestimmt, daß Opponent und Proponent abwechselnd zu Wort kommen. Durch DO und D1 sind gerade die vier für uns interessanten Fälle möglicher Ergebnisfunktionen beschrieben. Es sei aber angemerkt, daß auch bei allgemeinerer Formulierung der Axiome die meisten Resultate aus den folgenden Paragraphen erhalten bleiben. Dies wird in §5 noch näher erläutert werden.

Zur Motivierung der sich in 4.1 - 4.3 ausdrückenden Dialogspielregeln sollen jetzt einige Überlegungen angestellt werden. Während man die Alternativität des Spiels und die Bestimmung, daß bei jedem Zug genau ein gegnerisches Argument angegriffen wird, evtl. akzeptieren wird, sind die Unsymmetrien in 4.1 - 4.3 zunächst unverständlich, sofern man die Kriterien von Alltagsdialogen zugrunde legt. Damit berücksichtigt man aber letztlich nur Dialoge, in denen es um inhaltsbezogene Aussagen über endliche Bereiche geht. Für solche Dialoge symmetrische Regeln zu vereinbaren, ist vernünftig und problematisch ist hierbei nur die Frage, wie die von einem Spieler schon bestrittenen Argumente des Gegners unangreifbar gemacht bzw. reduziert werden sollen. Denn mindestens der Opponent muß daran gehindert werden, die Argumente des Proponenten unbegrenzt oft und womöglich stets mit denselben Einwänden bestreiten zu können; anderenfalls würden Dialoge nie zu einem Ende kommen und der Proponent hätte keine Chance, eine Behauptung erfolgreich zu verteidigen. Die einfachste hier angebrachte Regel lautet: "jeweils das angegriffene Argument wird eliminiert" (DO (1), D1 (1)). Wenn man außerdem noch vereinbart, daß alle Argumente permanent und nichttabuisiert sind und daß die Argumenterelationen übereinstimmen, so ist damit im Rahmen von 4.1 - 4.3 eine akzeptable Version für die Regeln eines inhaltlichen Dialogspiels umschrieben. Tatsächlich ist aber die so getroffene Entscheidung für P=L und DO (1), D1 (1) nicht vor anderen Lösungen ausgezeichnet, wie wir in §6 zeigen werden.

Die in 4.1 - 4.3 enthaltenen Unsymmetrien lassen sich erst für formale Dialogspiele rechtfertigen. Wie bereits kurz in der Einleitung erwähnt muß in formalen Spielen die Argumentation unabhängig von Wahrheitswerten der Primaussagen gemacht werden. Dies erreicht man durch Einführung einer unsymmetrischen "formalen Primregel", die in der vorliegenden Arbeit eine gegenüber Lorenz [8] leicht abgeänderte Fassung hat. Erstens werden nach dieser Regel Primaussagen des Opponenten als Hypothesen für den weiteren Dialog aufgefaßt, d.h. sie werden wie wahre Primaussa-

gen behandelt und dürfen vom Proponenten nicht bestritten werden. Dagegen zählen Primaussagen des Proponenten als falsch und können vom Opponenten durch einen trivialen Einwand widerlegt werden. Hieraus erklärt sich die in 4.1 vorgesehene Möglichkeit, daß die beiden Spieler unterschiedliche Argumenterelationen besitzen. Eine zweite Bestimmung der formalen Primregel verbietet dem Opponenten, solche Primaussagen des Proponenten anzugreifen, die er selber behauptet und als Hypothesen in den Dialog eingebracht hat. Genau diesem Teil der Primregel entspricht die in 4.2(2) formulierte Bedingung für tabuisierte Argumente.
Aus dem bisher Gesagten ergibt sich, daß die Argumente des Opponenten in formalen Dialogen einen anderen Stellenwert als die Argumente des Proponenten haben, daß sie evtl. Vorentscheidungen über Wahrheit oder Falschheit von Primaussagen treffen und daß sie damit selbst Hypothesen sein können, auf die beide Spieler ihre Argumentation einrichten müssen. Aus genau diesem Grund gibt es in formalen Dialogspielen neben den permanenten ggf. auch nichtpermanente Argumente, deren Funktion im Dialog in Abhängigkeit vom jeweiligen Stand der Hypothesen gesehen werden muß. Als nichtpermanent faßt man z.B. solche Argumente auf, die in einer bestimmten Situation und bei einem bestimmten Stand der Hypothesen berechtigte Einwände darstellen, die aber überholt sind und daher eliminiert werden, sobald der Opponent neue Hypothesen in den Dialog einbringt. Eine durch den Opponenten ausgelöste "Elimination nichtpermanenter Argumente" ist in DO vorgesehen.

Zum Abschluß soll die obige Dialogspieldefinition noch folgendermaßen zusammengefaßt werden:

4.4 <u>Definition:</u> Sei $\Delta = (L,P,T,A_0,A_1,e)$. Δ heißt <u>Dialogspiel</u>, wenn

(1) $P,T \subset L$,

(2) $A_0,A_1 \subset L \times \mathfrak{S}$,

(3) $e: X \times L \times \mathfrak{S} \to X$,

(4) für alle σ,Σ gelten DO und D1 in 4.3.

Die zu Δ gehörige Spielnormalform Γ ist durch 4.2 gegeben.
Mit Δ, Δ',... werden im folgenden Dialogspiele angedeutet; dabei werden die Komponenten und abhängigen Größen eines Dialogspiels mit denselben Indizes bzw. Merkmalen wie dieses versehen. Z.B. werden die Komponenten von Δ' mit L',P',... und die Spielregel mit R' bezeichnet.

§5 Abgeschlossenheitseigenschaften

In Präzisierung der in der Einleitung angegebenen Definition heißt im Dialogspiel Δ ein Argument φ wahr, wenn der Proponent in Δ eine Gewinnstrategie für die Situation $(0,\varphi,0)$ besitzt bzw. $(0,\varphi,0)$ zu G_1 gehört (nur diese Charakterisierung soll benutzt werden). Im folgenden werden Dialogspiele auf den Bereich ihrer wahren Argumente hin untersucht. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird künftig bei den zu Δ gehörigen 1-Gewinnsituationsmengen ${}_aG_1$ und G_1 der rechte Index 1 weggelassen.

In diesem Paragraphen wird bewiesen, daß die Menge G von Δ gegenüber gewissen Operationen abgeschlossen ist. Außerdem wird gezeigt, daß die Voraussetzung der Alternativität keinen Einfluß auf G hat und somit eine nur unwesentliche Einschränkung der Spielregel ist.
Zunächst werden einige neue Bezeichnungen eingeführt.

$h(\varphi,\Sigma)$ gebe die Häufigkeit an, mit der φ in Σ vorkommt.

$\Sigma \leq \Phi$ bedeute, daß für alle φ: $h(\varphi,\Sigma) \leq h(\varphi,\Phi)$.

$\Sigma \subset \Phi$ bedeute, daß für alle $\varphi \in \Sigma$ auch $\varphi \in \Phi$.

Σ^n wird definiert durch: $\Sigma^0 := 0$ und $\Sigma^{n+1} := \Sigma^n\Sigma$.

$x \leq y$ besage, daß $x_0 \leq y_0$, $y_1 \leq x_1$ und $x_2 = y_2$.

$x \subset y$ besage, daß $x_0 \subset y_0$, $y_1 \subset x_1$ und $x_2 = y_2$.

Schließlich wird gesetzt:

$xy := (x_0y_0, x_1y_1, x_2 \cup y_2)$,

$x^{m,n} := ((x_0)^m, (x_1)^n, x_2)$ und $x^m := x^{m,1}$,

$P(x) := (P(x_0), P(x_1), x_2)$.

P(x) heißt <u>permanenter Kern von x</u>.

Damit formulieren wir

5.1 <u>Satz:</u> In Δ sei $x \in {}_aG$ und $z \in {}_bG$. Dann gilt:

(1) Wenn $x \leq y$, so $y \in {}_aG$.
(2) Wenn $sx=1$, so existiert $c < a$ mit $x_2^0 \in {}_cG$.
(3) Wenn $sx=0$, so $P(x) \in {}_aG$.
(4) $xz \in {}_{a+b}G$.
(5) Wenn $0 < n \leq m$, so $x^{m,n} \in {}_{na}G$.

Die Abgeschlossenheitsaussagen von 5.1 gelten auch für die Dialogspiele in der Version von Lorenz [7],[8], wie in [5] nachgewiesen wurde. Insbesondere der Beweis von (3) und (4) ist dort aber sehr kompliziert, weil in den Spielen von Lorenz auch die Reihenfolge der Argumente berücksichtigt werden muß.

Vor dem Beweis von 5.1 werden noch einige Lemmata angegeben.

5.2 <u>Lemma:</u> Δ und Δ' seien Dialogspiele mit $L=L'$ und $T \subset T'$. Weiter sei $sx=sy=0$, $y\ R'\ e'(y,\varphi,\Sigma)$, $\varphi \in x_1$ und $\varphi\ A_0\ \Phi$. Schließlich gelte $x_0 \sqsubset y_0$ oder $(P(x_0) \sqsubset y_0$ und $\varphi \in P)$. Dann gilt $x\ R\ e(x,\varphi,\Phi)$.

Für 5.2 muß gemäß 4.2 gezeigt werden, daß im Falle $\varphi \in T$: $\varphi \not\in x_0$. Sei also $\varphi \in T$. Dann $\varphi \in T'$, also $\varphi \not\in y_0$ wegen 4.2 und $y\ R'\ e'(y,\varphi,\Sigma)$. Falls $x_0 \sqsubset y_0$, erhält man $\varphi \not\in x_0$. Falls $P(x_0) \sqsubset y_0$ und $\varphi \in P$, erhält man $\varphi \not\in P(x_0)$, also auch $\varphi \not\in x_0$.

5.3 <u>Lemma:</u> Δ und Δ' seien Dialogspiele mit $L=L'$ und $T \subset T'$. Weiter sei $E \subset X^2$ und es gelte für alle x,y mit $x\ E\ y$ und für alle φ,Σ:

(1) $x \sqsubset y$,

(2) $A_0'\varphi \subset A_0\varphi$ und $A_1\varphi \subset A_1'\varphi$,

(3) $e(x,\varphi,\Sigma)\ E\ e'(y,\varphi,\Sigma)$.

Dann ist E 1-Erhaltungsrelation von Δ zu Δ'.

Zum Nachweis von 5.3 überprüft man die Bedingungen (2) und (3) in 3.1 und nutzt dabei 5.2 aus. E ist sogar eine "effektive" Erhaltungsrelation insofern, als die für (2) und (3) von 3.1 zu bestimmenden Nachfolger effektiv angegeben werden können (dieselbe Argumentation Σ gegen φ wird beibehalten). Alle für Dialogspiele im folgenden benutzten Erhaltungsrelationen sind effektiv.

Im nächsten Lemma werden einige Eigenschaften der Ergebnisfunktion zusammengefaßt.

5.4 <u>Lemma:</u> Für die Ergebnisfunktion e von Δ gilt:

(1) Falls $sx=0$, so $(x_0)_\varphi \leq e(x,\varphi,\Sigma)_0$ und $e(x,\varphi,\Sigma)_1 \leq (x_1-\varphi)_\varphi$.

(2) Falls $sx=1$, so $e(x,\varphi,\Sigma)_0 \leq x_0$ und $x_1 \leq e(x,\varphi,\Sigma)_1$.

(3) Falls $sx=0$ und $\varphi \in P(x)_1$, so $e(x,\varphi,\Sigma) = e(P(x),\varphi,\Sigma)$.

(4) Falls $x \leq y$, so $e(x,\varphi,\Sigma) \leq e(y,\varphi,\Sigma)$.

(5) Falls $sx=sy=0$ und $\varphi \in x_1$, so

$$e(x,\varphi,\Sigma)((y_0)_\varphi,(y_1)_\varphi,0) \leq e(xy,\varphi,\Sigma).$$

(6) Falls $sx=1$ und $\varphi \in x_0$, so

$$e(x,\varphi,\Sigma)(y_0, y_1,0) \leq e(xy,\varphi,\Sigma).$$

(7) $s\, e(x,\varphi,\Sigma) = 1-sx$.

5.4 ergibt sich unmittelbar aus 4.3, wenn man folgende Beziehungen des φ-Kerns berücksichtigt:

Wenn $\Sigma \leq \Phi$, so $\Sigma_\varphi \leq \Phi_\varphi$;

$(\Sigma\Phi)_\varphi = \Sigma_\varphi\Phi_\varphi$.

Beweis von 5.1

Für 5.1(1) genügt es wegen 2.2 zu zeigen, daß $\leq$ eine 1-Erhaltungsrelation von Δ ist. Dazu wendet man 5.3 an, setzt dort $\Delta':=\Delta$ und nutzt 5.4(4) aus.

Zu 5.1(2): Sei $x \in {}_aG$ und $sx=1$. Nach 1.9 und 4.2 gibt es $c < a$, x',φ,Σ mit: $x'=e(x,\varphi,\Sigma)$, $x\ R\ x'$ und $x' \in {}_cG$. Wegen 5.4(7) ist $s\,x' = 0$; 5.4(2) liefert $x' \leq x\frac{0}{2}$. Mit 5.1(1) erhält man schließlich $x\frac{0}{2} \in {}_cG$.

Zu 5.1(3): Sei $x \in {}_aG$ und $sx=0$. Mit Hilfe von 5.2 ($\Delta':=\Delta$ und $y:=P(x)$) und 5.4(3) zeigt man $R\ P(x) \subset Rx$. Nach 1.9 existiert $c < a$ mit $Rx \subset {}_cG$. Also ist auch $R\ P(x) \subset {}_cG$ und $P(x) \in {}_aG$.

5.1(4) wird durch Induktion über $a+b$ bewiesen.

(V): Die Behauptung von 5.1(4) gelte schon für alle a,b mit $a+b < c$.

Induktionsschritt: Sei nun $x \in {}_aG$, $z \in {}_bG$ und $a+b=c$. Nach 1.9 existieren $a' < a$ und $b' < b$ mit $x \in {}_{a'+1}G$ und $z \in {}_{b'+1}G$. Man setzt $c':=a'+b'+1$ und hat $c' < c$.

Falls $sx=sz=0$, so reicht für $xz \in {}_cG$ der Nachweis von $Rxz \subset {}_{c'}G$. Sei also $xz\ R\ y$ und $y=e(xz,\varphi,\Sigma)$. Dann ist $\varphi \in x_1z_1$. Sei zunächst $\varphi \in x_1$. Man setzt $x':=e(x,\varphi,\Sigma)$ und zeigt mit 5.2 $x\ R\ x'$. Nach 1.9 erhält man $x' \in {}_{a'}G$ und wegen 5.4(5) gilt:

$x'((z_0)_\varphi,(z_1)_\varphi,0) \leq y$. Ggf. nach vorheriger Anwendung von 5.1(3) (falls $\varphi \in P$ oder $P=0$) liefern (V) und 5.1(1) $y \in {}_{c'}G$.
Wenn $\varphi \equiv z_1$, so schließt man analog, muß aber berücksichtigen, daß $e(zx,\varphi,\Sigma) \leq y$ wegen $zx \leq xz$ und 5.4(4).

Falls $sx=1$ und $sz=0$, so existieren nach 1.9, 4.2 x',φ,Σ mit: $x\ R\ x'$, $x'= e(x,\varphi,\Sigma)$ und $x' \in {}_{a'}G$. Man setzt $y:=e(xz,\varphi,\Sigma)$ und zeigt $xz\ R\ y$. Wegen 5.4(6) erhält man $x'z \leq y$. (V) und 5.1(1) liefern $y \in {}_{c'}G$. Damit ergibt sich nach 1.9 $xz \in {}_cG$.
Der Fall $sx=0$ und $sz=1$ wird wieder fast analog behandelt.
Falls $sx=sz=1$, so ist $xz = x\frac{0}{2}\ z$ und wegen $x\frac{0}{2} \in {}_{a'}G$ nach 5.1(2) liefert (V) sogar $xz \in {}_{c'}G$.

Zu 5.1(5): Sei $0 < n \leq m$ und $x \in {}_aG$. Wegen $x^{n,n} \leq x^{m,n}$ genügt es nach 5.1(1) $x^{n,n} \in {}_{na}G$ zu zeigen. Dies wird durch Induktion über n und unter Benutzung von 5.1(4) bewiesen.

Bemerkung. Beim Beweis von 5.1 wurde nicht auf die Axiome D0,D1 in 4.3 zurückgegriffen sondern nur 5.4 benutzt. Man könnte daher 5.4 zu einer allgemeineren Formulierung der Dialogaxiome verwenden. Diese Möglichkeit soll im weiteren aber nicht näher untersucht werden. Dagegen wollen wir noch zeigen, daß einerseits auf die beim Nachweis von 5.1 nur für (2) ausgenutzte Alternativität verzichtet werden kann und daß sich andererseits die Gewinnchancen des Proponenten nicht ändern, wenn beide Spieler nur alternative Züge machen.

5.5 Satz: Anstatt D0,D1 gelte für Δ 5.4 (1)-(6). Weiter sei $x \in {}_aG$ und $sx=1$. Dann existieren x' und $c < a$ mit: $x\ R\ x'$, $s\ x' = 0$ und $x' \in {}_cG$.

Wegen 5.5 kann der Beweis von 5.1(2) ohne Benutzung von 5.4(7) durchgeführt werden. Zugleich ergibt sich, daß dem Proponenten die zusätzliche Voraussetzung der Alternativität seiner Züge nicht schadet.

5.6 Satz: Anstatt D0,D1 gelte für Δ 5.4 (1)-(6). Dann gilt:

(1) Wenn $sx=0$ und $x \notin G$, so existiert x' mit: $x\ R\ x'$, $s\ x' = 1$ und $x' \notin G$.

(2) Wenn $sx=0$ und $x \in {}_aG_0$, so existieren x', $c < a$ mit: $x\ R\ x'$, $s\ x' = 1$ und $x' \in {}_cG_0$.

Aus 5.6 ergibt sich insbesondere, daß dem Proponenten die zusätzliche Voraussetzung der Alternativität der Opponentenzüge nicht nützt.

Der Beweis von 5.5 wird durch Induktion über a geführt.

(V): Die Behauptung von 5.5 gelte schon für alle $a < b$.
Induktionsschritt: Sei $sx=1$ und $x \in {}_bG$. Nach 1.9 gibt es x' und $a < b$ mit: $x R x'$ und $x' \in {}_aG$. Falls $s x' = 0$, ist nichts zu zeigen. Anderenfalls gibt es nach (V) y, ω, Σ und $c < a$ mit: $x' R y$, $y=e(x',\omega,\Sigma)$, $sy=0$ und $y \in {}_cG$. Man setzt nun $y':=e(x,\omega,\Sigma)$. Wegen $x' \leq x$ nach 5.4(2) erhält man $x R y'$ und wegen 5.4(4) außerdem $y \leq y'$. Daraus ergibt sich $s y' = 0$ und $y' \in {}_c G$ wegen 5.1(1).

Zum Beweis von 5.6 zeigt man zunächst durch zweimalige Anwendung von 5.4(4), daß mit $sx=sy$ auch $s\, e(x,\omega,\Sigma) = s\, e(y,\omega,\Sigma)$ gilt. Der Beweis von 5.6 wird dann durch Induktion über $|x_1|$ geführt. Wir beweisen 5.6(1); 5.6(2) läßt sich dann analog nachweisen, wenn man noch zeigt, daß $\geqslant$ eine 0-Erhaltungsrelation ist.

(V): Die Behauptung von 5.6(1) gelte schon für alle x mit $|x_1| < n$.
Induktionsschritt: Sei nun $|x_1| = n$ und $x \notin G$. Nach 1.9, 4.2 gibt es x', ψ, Ψ mit : $x R x'$, $x'=e(x,\psi,\Psi)$ und $x' \notin G$. Falls $s x' = 1$, ist nichts zu beweisen. Anderenfalls zeigt man mit 5.4(1), daß $|x_1'| < n$. Nach (V) gibt es dann y, φ, Σ mit: $x' R y$, $y=e(x',\varphi,\Sigma)$, $sy=1$ und $y \notin G$. Insbesondere ist dann auch $P \neq 0$. Man setzt nun $y':=e(x,\varphi,\Sigma)$ und erhält $s y' = 1$ wegen $sy=1$. Außerdem gilt wegen 5.4(1):
$(x_0)_\psi \leq x_0'$ und $x_1' \leq (x_1-\psi)_\psi$. Daher ist mit $\varphi \in x_1'$ auch $\varphi \in x_1$. Es genügt nun zu zeigen, daß $x R y'$ und $y' \notin G$.

Dazu unterscheidet man die Fälle $\psi \in P$ und $\psi \notin P$.

Falls $\psi \notin P$, so $x_0 \leq x_0'$ wegen $P \neq 0$; 5.2 liefert dann $x R y'$. Weiter hat man $x \leq x'$ und nach 5.4(4) $y' \leq y$. Wegen $y \notin G$ ergibt sich somit $y' \notin G$ nach 5.1(1).

Falls $\psi \in P$, so $P(x_0) \leq x_0'$; 5.2 liefert dann $x R y'$. Weiter hat man $P(x) \leq x'$ und $\varphi \in P(x_1)$. 5.4(3) und (4) ergeben $y' \leq y$ und wegen $y \notin G$ erhält man $y' \notin G$ nach 5.1(1).

§6 Vergleich von Dialogspielen

In diesem Paragraphen wird untersucht, in welcher Beziehung Dialogspiele zueinander stehen, die durch Abänderung gewisser Regeln auseinander hervorgehen. Ein Dialogspiel Δ' heiße Erweiterung von Δ, wenn $G \subset G'$. Δ und Δ' heißen äquivalent, wenn $G = G'$. Im folgenden stellt sich für bestimmte Dialogspiele heraus, daß beim Übergang zu äquivalenten Spielen die Regeln für den Opponenten erheblich verschärft werden können. Außerdem wird gezeigt, daß im Fall $T = 0$ der Bereich der wahren Argumente von Δ in gewissem Sinne unabhängig von der Wahl von P und e ist.
Wir unterscheiden hier folgende Arten von Dialogspielen:

6.1 Definition: Δ heißt

streng, wenn $P = 0$,
0-streng, wenn für alle x,φ,Σ mit $sx=0$: $e(x,\varphi,\Sigma)_1 = 0$,
begrenzt, wenn für alle x,φ,Σ: $e(x,\varphi,\Sigma)_{sx} \leq x_{sx} - \varphi$,
1-unbegrenzt, wenn für alle x,φ,Σ mit $sx=1$: $e(x,\varphi,\Sigma)_0 = x_0$,
1-optimal, wenn Δ 0-streng und 1-unbegrenzt ist.

Aus D0 in 4.3 ergibt sich, daß jedes strenge Dialogspiel auch 0-streng ist. Außerdem hat die Bedingung $P = 0$ für den Spieler 1 fast denselben Effekt, als wenn eine der 0-Strenge analoge Forderung an 1 gestellt würde. Genau gilt dies im Fall $T=0$ und bei Ausschluß von Anfangssituationen x mit $sx=0$ und $x_0 \neq 0$.
Zunächst soll jetzt gezeigt werden, daß jedes Dialogspiel Erweiterung eines ihm zugehörigen strengen Spiels ist.

6.2 Definition: Zu jedem Δ wird ein strenges Dialogspiel Δ^{st} definiert und zwar wird gesetzt:

$\Delta^{st} := (L,0,T,A_0,A_1,e^{st})$, wobei

$$e^{st}(x,\varphi,\Sigma) := \begin{cases} (\Sigma,0,1) & \text{falls } sx=0, \\ e(x,\varphi,\Sigma) & \text{falls } sx=1. \end{cases}$$

Eine Überprüfung von 4.4 zeigt, daß mit Δ auch Δ^{st} ein Dialogspiel ist.

6.3 Definition: Als Argumentationsbreite von Δ wird erklärt

$\text{br}\,\Delta := \min\{a \leq \omega;$ für alle φ,Σ,i mit $\varphi\, A_i\, \Sigma$: $|\Sigma| \leq a\}$.

6.4 Satz: Für Δ gilt: Wenn $x \in {}_bG^{st}$ und $a := \min(\omega, \text{br}\,\Delta + |x_1|)$, so $x \in {}_{g(a,b)}G$. (Zu g vgl. 3.3)

6.4 besagt insbesondere, daß Δ Erweiterung von Δ^{st} ist. Im Falle $a < \omega$ gilt auch $_{\omega}G^{st} \subset {_{\omega}G}$; m.a.W. 1-Gewinnsituationen mit "gleichmäßiger Gewinngarantie" (vgl. dazu 1.11(2)) behalten diese Eigenschaft bei. Die Beweise von 6.4 und aller folgenden Sätze werden am Ende von §6 geführt.

Als nächster Schritt wird der Übergang von einem Dialogspiel zu einem entsprechenden 0-strengen bzw. 1-unbegrenzten Spiel vollzogen.

6.5 Definition: Zu Δ wird erklärt:

$\Delta^- := (L,P,T,A_0,A_1,e^-)$, wobei

$$e^-(x,\omega,\Sigma) := \begin{cases} ((x_0)_\omega\Sigma,0,1) & \text{falls } sx=0, \\ e(x,\omega,\Sigma) & \text{falls } sx=1. \end{cases}$$

$\Delta^+ := (L,P,T,A_0,A_1,e^+)$, wobei

$$e^+(x,\omega,\Sigma) := \begin{cases} e(x,\omega,\Sigma) & \text{falls } sx=0, \\ (x_0,x_1\Sigma,0) & \text{falls } sx=1. \end{cases}$$

Eine Überprüfung von 4.4 zeigt, daß mit Δ auch Δ^- und Δ^+ Dialogspiele sind; Δ^- ist 0-streng, Δ^+ ist 1-unbegrenzt und $(\Delta^-)^+ = (\Delta^+)^-$ ist 1-optimal.

6.6 Satz: Für Δ gilt:
Wenn $x \in {_aG}$, so $x \in {_aG^-}$ und $x \in {_aG^+}$.

Insbesondere sind also Δ^- und Δ^+ Erweiterungen von Δ, ein Ergebnis, das nicht überrascht. Interessanter ist das Resultat, daß Δ^- Erweiterung von Δ ist, falls Δ 1-unbegrenzt ist.

6.7 Satz: Δ sei 1-unbegrenzt. Dann gilt:
Wenn $x \in {_bG^-}$ und $a := \min(\omega, \text{br}\,\Delta + |x_1|)$, so
$x \in {_{g(a,b)}G}$.

6.8 Korollar: Δ sei 1-unbegrenzt. Dann gilt:

(1) $G = G^-$.

(2) $_{\omega}G = {_{\omega}G^-}$, falls $\text{br}\,\Delta < \omega$.

Eine 6.8(1) in etwa entsprechende Behauptung formulierte Lorenzen in [4] und [12] für die dort angeführten intuitionistischen Dialogspiele, gab aber keinen Beweis für seine Behauptung an. Da auch Lorenzen die Regel "Einlösung der zuletzt entstandenen Verteidigungspflicht" benutzt, gilt für den Schwie-

rigkeitsgrad eines solchen Beweises das im Anschluß an Satz 5.1 Gesagte.
Für Dialogspiele Δ mit T=0 ist klassisch folgendes Resultat beweisbar:

6.9 Satz: Δ sei 0-streng und T=0. Außerdem habe x die Gestalt $x = (\Sigma,0,1)$ oder $x = (0,\Sigma,0)$. Dann gilt:
Wenn $x \in {}_aG$, so $x \in {}_aG^{st}$.

Mit Hilfe von 6.4, 6.6 und 6.9 kann man zeigen

6.10 Satz: Für Δ und Δ' gelte L=L', T=T' und $A_i = A_i'$ für $i < 2$. Außerdem habe x die Gestalt $x = (\Sigma,0,1)$ oder $x = (0,\Sigma,0)$. Dann gilt:

(1) $x \in G$ genau dann, wenn $x \in G'$.
(2) Es sei $\mathrm{br}\,\Delta < \omega$.
Dann ist $x \in {}_\omega G$ genau dann, wenn $x \in {}_\omega G'$.

Zum Beweis von 6.10 zeigt man (1) und (2) zunächst für Δ und Δ^{st} und wendet dabei 6.4, 6.6 und 6.9 unter Berücksichtigung von $(\Delta^-)^{st} = \Delta^{st}$ an. Danach überlegt man sich, daß wegen T=0 für alle a: ${}_aG^{st} = {}_aG'^{st}$.
6.10 besagt insbesondere, daß im Fall T=0 (also z.B. für inhaltliche Spiele) der Bereich der wahren Argumente unabhängig von P und e ist. Da 6.9 nur klassisch gilt, ist es natürlich i.a. nicht möglich, aus einer im 1-optimalen Spiel bekannten Gewinnstrategie eine solche für das strenge Spiel effektiv herzustellen. 6.9 ist aber auch konstruktiv beweisbar, falls A_0 finit ist ($A_0\varphi$ ist endlich für jedes φ). In diesem Fall gilt dann auch 6.10 effektiv. Spiele mit nichtfiniten Argumenterelationen können bei strenger Auslegung ohnehin nicht als rein inhaltlich aufgefaßt werden, wie wir in §8 noch darlegen werden; insofern kommt schon aus diesem Grund eine Anwendung von 6.10 nicht in Frage.
Zum Abschluß geben wir noch eine Beziehung zwischen Spielen mit verschiedenem P und eine Verschärfung von 5.1(1) an.

6.11 Satz: Δ sei 0-streng, $P \subset P'$ und $\Delta' = (L,P',T,A_0,A_1,e')$. Außerdem sei e' vom selben Typ wie e. Dann gilt:
Wenn $x \in {}_aG$, so $x \in {}_aG'$.

6.12 Satz: Δ sei 1-optimal und $x \subset y$. Dann gilt:
Wenn $x \in {}_aG$, so $y \in {}_aG$.

Aus 6.12 ergibt sich insbesondere, daß es in 1-optimalen Dialogspielen unwichtig ist, wie oft ein Argument in der Argumentesequenz eines Spielers auftritt. In 1-optimalen Spielen kann man also die Argumenterelationen so einschränken, daß für $\varphi\ A_i\ \Sigma$ die Sequenz Σ keine Wiederholungen aufweist. In begrenzten Dialogspielen ist die Vielfachheit der Argumente dagegen von großer Bedeutung. Auf dieses Problem gehen wir in §7 ein.

Im folgenden werden 6.4, 6.6, 6.7, 6.9, 6.11 und 6.12 nachgewiesen.

Beweis von 6.4 durch Anwendung von 3.5. Es sei $m > 0$ vorgegeben und $a := \min(\omega, \text{br } \Delta + m)$. Damit setzt man in 3.4:

$\Gamma' := \Gamma^{st}$, $\Gamma'' := \Gamma$, $i := 1$,

$Y := \{ x;\ (sx{=}0 \text{ und } |x_1| \leq a) \text{ oder } (sx{=}1 \text{ und } |x_1| \leq m) \}$.

Schließlich definiert man folgendermaßen eine Funktion π:

Für x entstehe x_1^T aus x_1 durch Streichung aller Argumente φ mit $\varphi \not\in T$ oder ($\varphi \in T$ und $\varphi \not\in x_0$); $\overline{x}_1$ entstehe dagegen aus x_1 durch Streichung der Argumente φ mit $\varphi \in T$ und $\varphi \in x_0$.

Damit setzt man:

$\pi x := x$, falls $sx{=}1$ oder ($sx{=}0$ und $\overline{x}_1{=}0$).

Sei anderenfalls $sx{=}0$, $k > 0$ und $\overline{x}_1 = \overset{k}{\varphi}$. Dann setzt man:

$$\pi x := \begin{cases} ((0,\varphi_0,0),\ldots,(0,\varphi_{k-1},0)) & \text{falls } x_1^T = 0, \\ ((x_0,x_1^T,0),(0,\varphi_0,0),\ldots,(0,\varphi_{k-1},0)) & \text{falls } x_1^T \neq 0. \end{cases}$$

Für die so definierten Größen beweist man 3.4(1),(2). Sei dazu $x \in Y$ und $\overset{k}{z} = \pi x$.

Für 3.4(1) zeigt man $z_0 \cdot \ldots \cdot z_{k-1} \leq x$ und wendet 5.1(1),(4) an.

Bei 3.4(2) muß man für (b) berücksichtigen, daß $(x_0,x_1^T,0)$ Endsituation ist; bei (c) ist zu beachten, daß man für $x\ R\ x'$ $|x_1'| \leq m + \text{br } \Delta \leq a$ erhält.

In Anwendung von 3.5 ergibt sich nun:

Wenn $x \in Y$ und $x \in {}_bG^{st}$, so $x \in {}_{g(a,b)}G$.

Speziell für $|x_1| = m$ erhält man 6.4.

Zum Beweis von 6.6 zeigt man, daß $\leq$ eine 1-Erhaltungsrelation von Δ zu Δ^- bzw. Δ^+ ist; hierzu wendet man 5.3 an. Wegen $x \leq x$ ergibt sich dann 6.6 mit Hilfe von 3.2.

Für den Beweis von 6.7 benötigt man

6.13 <u>Lemma:</u> Δ sei 1-unbegrenzt und

$E^* := \{(x,y);\ x_0 \subset y_0,\ \ x_1 = y_1\ \text{ und }\ sx = sy\}$.

E^* ist 1-Erhaltungsrelation.

Zum Beweis von 6.13 wendet man 5.3 an.

<u>Beweis von 6.7</u> durch Anwendung von 3.5. Es sei $m > 0$ vorgegeben und $a := \min(\omega,\ \mathrm{br}\ \Delta + m)$. Damit setzt man in 3.4:

$\Gamma' := \Gamma^-,\quad \Gamma'' := \Gamma,\quad i := 1,$

$Y := \{x;\ (sx=0 \text{ und } |x_1| \leq a) \text{ oder } (sx=1 \text{ und } |x_1| \leq m)\}$.

Schließlich definiert man eine Funktion π durch:

$$\pi x := \begin{cases} x & \text{falls } (sx=0 \text{ und } x_1=0) \text{ oder } sx=1, \\ ((x_0,\omega_0,0),\ldots,(x_0,\omega_{k-1},0)) & \text{falls } sx=0,\ k>0 \text{ und } x_1 = \overset{k}{\omega}. \end{cases}$$

Für die so definierten Größen beweist man 3.4(1),(2) in ähnlicher Weise wie bei 6.4. Für 3.4(1) zeigt man, daß im Falle $\overset{k}{z} = \pi x$: $\ z_0 \bullet \ldots \bullet z_{k-1}\ E^*\ x\ $ gilt und wendet dann 5.1(4) und 6.13 an.

In Anwendung von 3.5 ergibt sich:

Wenn $x \in Y$ und $x \in {}_bG^-$, so $x \in {}_{g(a,b)}G$.

Speziell für $|x_1| = m$ erhält man 6.7.

<u>Beweis von 6.9</u> Δ sei 0-streng und $T = 0$. Durch Induktion über a wird zunächst gezeigt:

6.14 Wenn $sx=1$, $x_1=0$ und $x \in {}_aG$, so gibt es ω, Σ, $c < a$ mit:

$\omega \in x_0,\quad \omega\ A_1\ \Sigma\quad$ und $\quad (0,\Sigma,0) \in {}_cG$.

Zum Nachweis von 6.14 wird angenommen:

(V) 6.14 gelte schon für alle $a < b$.

Induktionsschritt: Sei $sx=1$, $x_1=0$ und $x \in {}_bG$. d sei die kleinste Ordinalzahl mit $x \in {}_dG$ (d ist i.a. nicht effektiv angebbar). Nach 1.9 und 4.2 existieren a,c,x',φ,Σ mit: $a < c < d$,

$x' = e(x,\varphi,\Sigma),\quad x\ R\ x',\quad x' \in {}_cG\quad$ und $\quad Rx' \subset {}_aG$.

Man setzt nun $y := (0,\Sigma,0)$. Behauptung: $y \in {}_c G$. Zum Nachweis reicht: $Ry \subset {}_a G$. Sei also $y \, R \, z$ und $z = e(y,\psi,\Psi)$. Dann ist $z = (\Psi,0,1)$. Man setzt jetzt $x'' := e(x',\psi,\Psi)$. Wegen $T = 0$ erhält man $x' \, R \, x''$. Außerdem ist $x'' \in {}_a G$ und $s \, x'' = 1$. Nach (V) gibt es ρ, Φ, $c' < a$ mit: $\rho \in x''_0$, $\rho \, A_1 \, \Phi$ und $(0,\Phi,0) \in {}_{c'} G$.

Falls $\rho \in \Psi$, so setzt man $z' := e(z,\rho,\Phi)$ und erhält $z \, R \, z'$, $(0,\Phi,0) \le z'$, also $z' \in {}_{c'} G$ nach 5.1(1) und schließlich $z \in {}_a G$ nach 1.9.

Falls $\rho \notin \Psi$, so $\rho \in x_0$; dann setzt man $x^* := e(x,\rho,\Phi)$ und erhält $x \, R \, x^*$, $(0,\Phi,0) \le x^*$, also $x^* \in {}_{c'} G$ nach 5.1(1). Damit ergibt sich aber $d \le c'+1 \le a$ im Widerspruch zu $a < c < d$.

Falls A_0 finit ist, kann der Beweis von 6.14 folgendermaßen konstruktiv durchgeführt werden:
Zu x gibt es $c < b$, x',ω,Σ mit: $x' = e(x,\omega,\Sigma)$, $x \, R \, x'$ und $x' \in {}_c G$. Für die endlich vielen Nachfolger von x' ist (V) anwendbar und man überprüft, ob (V) für einen dieser Nachfolger einen Angriff gegen ein Argument $\psi \;\; x_0$ vorschreibt (dann ist dieser Nachfolger schon bei x imitierbar), anderenfalls leistet $y := (0,\Sigma,0)$ das Verlangte.

Mit Hilfe von 6.14 und 5.1(1) ergibt sich 6.9 durch einen einfachen Induktionsbeweis über a.

Zum Beweis von 6.11 zeigt man, daß $\le$ eine 1-Erhaltungsrelation von Δ zu Δ' ist, und wendet hierzu 5.3 an; die 0-Strenge geht beim Beweis entscheidend ein. Wegen $x \le x$ ergibt sich dann 6.11 mit Hilfe von 3.2.

Zum Beweis von 6.12 zeigt man, daß $\sqsubset$ eine 1-Erhaltungsrelation von Δ ist, und wendet hierzu 5.3 an; 6.12 ergibt sich dann mit Hilfe von 3.2.

§7 m,n- und n- Spiele

In §6 hat sich für Dialogspiele Δ mit $T = 0$ die Frage nach der angemessensten Wahl von P und e in gewissem Sinne als nebensächlich herausgestellt. Dieselbe Frage ist für formale Dialogspiele (wo $T \neq 0$ gilt) von erheblicher Relevanz, kann aber nicht eindeutig beantwortet werden. Mangels eines echten Pendants im Alltagsdialog ist einerseits keine der möglichen Varianten als "natürlich" bezeichenbar; andererseits stellt man fest, daß eine unterschiedliche Wahl von P und e zu verschiedenen Logiken führt. Aus diesem Grund wird man sich bei der Entscheidung für eine bestimmte Variante bereits daran orientieren, welche Logik mit ihr verbunden ist, und die Entscheidung spiegelt nur die ursprüngliche Ausgangsposition wider. Dies gilt insbesondere für das Problem, welche Argumente man als permanent und welche als nichtpermanent auszeichnet (vgl. §10). Weniger kritisch ist dagegen die Wahl von e. Denn wenn man die Auffassung von §4 zugrundelegt, nach der in formalen Dialogspielen die Argumente des Opponenten den Charakter von Hypothesen haben können, dann wird man dem Proponenten zugestehen, die permanenten Argumente des Opponenten unbegrenzt oft angreifen zu dürfen. Insofern wäre die Entscheidung für ein 1-unbegrenztes Spiel zu rechtfertigen; 6.8 gestattet es dann sogar, zu einem 1-optimalen Spiel überzugehen. Tatsächlich stellt sich auch heraus, daß schon zur Beschreibung der klassischen oder intuitionistischen Aussagenlogik ein strenges oder begrenztes Dialogspiel nicht ausreicht, und so werden bei formalen Dialogspielen in der Literatur i.a. nur 1-unbegrenzte Spiele diskutiert. In [8] entschied sich Lorenz allerdings aus zwei Gründen für eine andere Version. Erstens wollte er in ihr den Nachteil der 1-unbegrenzten Spiele, nicht partienendlich zu sein, vermeiden und zweitens eine größere Symmetrie zugunsten des Opponenten erreichen. Nach dieser Version wählt in dem mit einer Behauptung ω beginnenden Dialog zunächst der Opponent eine Schranke m und danach der Proponent eine Schranke n; im anschließenden Dialog um ω darf der Opponent bzw. Proponent gegnerische Argumente bis zu m bzw. n mal angreifen. In dem Spiel, das die Wahl der Schranken einbezieht, heißt ein Argument ω <u>wahr</u>, wenn es zu jedem $m > 0$ ein $n > 0$ derart gibt, daß ω in dem Spiel mit den Angriffsschranken m,n wahr ist. Tatsächlich lassen sich auch auf diese Weise die klassisch bzw. intuitionistisch formal wahren Aussagen charakterisieren.

Ziel dieses Paragraphen ist es, jedem Dialogspiel Δ m,n- Spiele $\Delta^{m,n}$ zuzuordnen und die in Lorenz [8] postulierten Reduktionssätze allgemein zu beweisen (s. Einleitung). Außerdem wird gezeigt, daß die m,n- Spiele jeweils auf ein 1-unbegrenztes Spiel zurückgeführt werden können.

Im Rahmen der Dialogspieldefinition von §4 ist die Möglichkeit, daß Argumente mehrfach,aber beschränkt oft angegriffen werden können, aus technischen Gründen nicht vorgesehen; sie läßt sich aber indirekt dadurch realisieren, daß neue Argumente in entsprechender Häufigkeit vorgebracht werden. In dieser Interpretation besagen die Schranken eines m,n- Spiels, daß die Argumente des Opponenten bzw. des Proponenten n- bzw. m- fach aufgeführt werden.

7.1 <u>Definition:</u> Jedem Δ werden für $m,n > 0$ Dialogspiele $\Delta^{m,n}$ zugeordnet und zwar wird gesetzt:

$$\Delta^{m,n} := (L,P,T,A_0^{m,n},A_1^{m,n},e), \text{ wobei}$$

$$A_0^{m,n} := \{(\varphi,\Sigma^n);\ \varphi\ A_0\ \Sigma\ \},$$

$$A_1^{m,n} := \{(\varphi,\Sigma^m);\ \varphi\ A_1\ \Sigma\ \}.$$

$\Delta^{m,n}$ heißt das <u>zu Δ gehörige m,n- Spiel</u> und $(\Delta^-)^{1,n}$ heißt das <u>zu Δ gehörige n- Spiel</u>. Für die so über Δ definierten m,n- und n- Spiele ist im Gegensatz zur Intention von Lorenz noch nicht gewährleistet, daß für eine mit der Situation x beginnende Partie die Argumente von x mehrfach angegriffen werden können. In genauer Übertragung des Ansatzes von Lorenz muß daher in $\Delta^{m,n}$ bzw. $(\Delta^-)^{1,n}$ die Partie statt mit x mit $x^{n,m}$ bzw. x^n beginnen. Für die zu Δ gehörigen m,n-Spiele gilt zunächst

7.2 <u>Satz:</u> Es sind äquivalent:

(1) Für alle $m > 0$ gibt es $n > 0$ mit $x^{n,m} \in {}_\omega G^{m,n}$.

(2) Es gibt $n > 0$ mit $x^n \in {}_\omega G^{1,n}$.

Falls zusätzlich $\mathrm{br}\,\Delta < \omega$, so ist zu (1) und (2) äquivalent:

(3) Es gibt $n > 0$ mit $x^n \in {}_\omega (G^-)^{1,n}$.

7.2 ist als Reduktionssatz in solchen Fällen von Bedeutung, wo alle $\Delta^{m,n}$ und $(\Delta^-)^{1,n}$ lokal einschränkbar für 1 sind (vgl. §2), und erlaubt dort, von den m,n- zu den 1,n- bzw. n- Spielen über-

(1) Wenn $sx=0$, so $e(x,\omega,\Sigma^n)\ E^*\ e^+(y,\omega,\Sigma)$.

(2) Wenn $sx=1$, so $e(x,\omega,\Sigma)\ E^*\ e^+(y,\omega,\Sigma)$.

Damit kann nach dem üblichen Schema bewiesen werden, daß E^* eine 1-Erhaltungsrelation von $\Delta^{1,n}$ zu Δ^+ ist. Wegen $x\ E^*\ x$ ergibt sich dann 7.5(3) aus 3.2.

<u>Beweis von 7.5(4)</u> durch Induktion über $l > 0$.

(V): Die Behauptung von 7.5(4) gelte schon für alle k mit $0 < k < l$.

Induktionsschritt: Sei nun $x \in {}_lG^+$.

<u>Falls $sx=0$</u>, so reicht für $x^l \in {}_lG^{1,l}$ der Nachweis von

$R^{1,l}\ x^l \subset {}_{l-1}G^{1,l}$. Sei also $x^l\ R^{1,l}\ z$ und $z = e(x^l,\omega,\Sigma^l)$.

Man setzt $y := e^+(x,\omega,\Sigma)$ und zeigt $x\ R^+\ y$. Nach 1.9 ist dann $l > 1$ und $y \in {}_{l-1}G^+$. (V) liefert $y^{l-1} \in {}_{l-1}G^{1,l-1}$.

U.a. wegen 7.7 gilt $y^{l-1} \leq y^l = e^+(x^l,\omega,\Sigma^l) = e(x^l,\omega,\Sigma^l) = z$.

Also erhält man $z \in {}_{l-1}G^{1,l-1}$ nach 5.1(1) und

$z \in {}_{l-1}G^{1,l}$ nach 7.5(1).

<u>Falls $sx=1$</u>, so ist $l > 1$ und nach 1.9, 4.2 gibt es y,ω,Σ mit: $x\ R^+\ y$, $\omega \in x_0$, $y = (x_0,x_1\Sigma,0)$ und $y \in {}_{l-1}G^+$. (V) liefert $y^{l-1} \in {}_{l-1}G^{1,l-1}$. Man setzt $z := e(x^l,\omega,\Sigma)$ und zeigt

$x^l\ R^{1,l}\ z$. Wegen $\omega \in x_0$ und 4.3 gilt dann:

$y^{l-1} = ((x_0)^{l-1},x_1\Sigma,0) \leq ((x_0)^l-\omega,x_1\Sigma,0) \leq z$. Damit erhält man

$z \in {}_{l-1}G^{1,l-1}$ nach 5.1(1) und $z \in {}_{l-1}G^{1,l}$ nach 7.5(1).

Also ergibt sich $x^l \in {}_lG^{1,l}$ nach 1.9.

<u>Der Beweis von 7.5(5)</u> wird durch Induktion über a geführt und verläuft nach demselben Schema wie bei 7.5(2). Im Unterschied zu dort geht hier die Tatsache ein, daß für ein 1-unbegrenztes Δ wegen 5.1(5) und 6.12 gilt:

Wenn $x \in {}_aG$ und $m > 0$, so $x^{1,m} \in {}_{ma}G$.

7.6 ergibt sich direkt aus 4.3 und 5.4(4).

Zum Beweis von 7.5(1) zeigt man, daß $\leq$ eine 1-Erhaltungsrelation von $\Delta^{m,n}$ zu $\Delta^{m',n'}$ ist und wendet hierbei 7.6 an. 7.5(1) ergibt sich dann mit Hilfe von 3.2.

7.7 Lemma: Es seien $m,n > 0$. Dann gilt für Δ:

(1) Wenn $sx=0$, so $e(x,\omega,\Sigma)^n = e(x^n,\omega,\Sigma^n)$.

(2) Wenn $sx=1$, so $e(x,\omega,\Sigma)^{n,m} \leq e(x^n,\omega,\Sigma^m)$.

7.7 ergibt sich unmittelbar aus 4.3.

Beweis von 7.5(2) durch Induktion über $l > 0$.

(V): Die Behauptung von 7.5(2) gelte schon für alle k mit $0 < k < l$.

Induktionsschritt: Sei nun $x \in {}_lG$ und $n' = m^l$. Für $x^{n',m} \in {}_{g(m,l)}G^{m,n'}$ reicht wegen 5.1(5) der Nachweis von $x^n \in {}_{l'}G^{m,n'}$, wobei $n := m^{l-1}$ und $l' := 1+g(m,l-1)$.

Falls $sx=0$, so genügt nach 1.9 und 3.3:

$R^{m,n'}x^n \subset {}_{g(m,l-1)}G^{m,n'}$. Sei also $x^n R^{m,n'} z$ und $z = e(x^n,\omega,\Sigma^{n'})$. Man setzt $y := e(x,\omega,\Sigma)$ und zeigt $x R y$. Nach 1.9 ist dann $l > 1$ und $y \in {}_{l-1}G$. (V) liefert nun $y^{n,m} \in {}_{g(m,l-1)}G^{m,n}$. U.a. wegen 7.6 und 7.7 gilt nun:

$y^{n,m} \leq y^n \leq e(x^n,\omega,\Sigma^n) \leq z$. Also erhält man

$z \in {}_{g(m,l-1)}G^{m,n}$ nach 5.1(1) und $z \in {}_{g(m,l-1)}G^{m,n'}$ nach 7.5(1).

Falls $sx=1$, so ist $l > 1$ und nach 1.9, 4.2 gibt es y,ω,Σ mit: $x R y$, $y = e(x,\omega,\Sigma)$ und $y \in {}_{l-1}G$. (V) liefert $y^{n,m} \in {}_{g(m,l-1)}G^{m,n}$. Man setzt $z := e(x^n,\omega,\Sigma^m)$ und zeigt $x^n R^{m,n'} z$. Wegen 7.7 gilt $y^{n,m} \leq z$. Also erhält man

$z \in {}_{g(m,l-1)}G^{m,n}$ nach 5.1(1) und $z \in {}_{g(m,l-1)}G^{m,n'}$ nach 7.5(1).

Damit ergibt sich $x^n \in {}_{l'}G^{m,n'}$ nach 1.9 und 3.3.

Zum Beweis von 7.5(3) zeigt man zunächst, daß für die in 6.13 definierte Relation E^* im Fall $n > 0$ und $x E^* y$ gilt:

zugehen. Ein 7.2 entsprechendes Ergebnis formulierte Lorenz in [8] für seine (lokal partienbeschränkten) intuitionistischen m,n- und n- Spiele.
In Ergänzung von 7.2 gilt

7.3 <u>Satz:</u> Zu (1) und (2) in 7.2 ist äquivalent:

(1) $x \in {}_{\omega}G^{+}$. (Zu Δ^{+} s. §6)

Damit kann man die m,n- Spiele von Δ im Falle ihrer lokalen Einschränkbarkeit für 1 auch durch Δ^{+} ersetzen, sofern man sich auf die Betrachtung der 1-Gewinnsituationen aus ${}_{\omega}G^{+}$ beschränkt. Oder anders gesagt, statt einer anfänglichen Festlegung von Angriffsschranken für Opponent und Proponent genügt in Δ^{+} die Einführung folgender Zusatzregel (vgl. 1.11): Der Proponent nennt zu Beginn des Dialoges eine Zahl n und gibt den anschließenden Dialog verloren, wenn dieser nicht innerhalb von n Schritten zu seinen Gunsten entschieden ist. Das so aus Δ^{+} entstehende Spiel ist partienendlich. Falls neben den $\Delta^{m,n}$ auch Δ^{+} lokal einschränkbar für 1 ist, geht durch die Zusatzregel keine der 1-Gewinnsituationen von Δ^{+} verloren. Dieser Fall liegt bei den intuitionistischen und klassischen Dialogspielen vor, wie in §10 nachgewiesen wird.

Bei für 1 nicht lokal einschränkbaren Dialogspielen lassen sich die Behauptungen von 7.2 und 7.3 i.a. nicht auf die Menge aller 1-Gewinnsituationen ausdehnen (vgl.11.4). Das liegt aber letztlich daran, daß in solchen Spielen eine Beschränkung der Angriffe des Proponenten durch natürliche Zahlen ohnehin nicht adäquat ist; hier muß man entweder ordinale Angriffsschranken einführen oder die 1-Unbegrenztheit zulassen. Im zweiten Fall kann durch eine Ausweitung obiger Zusatzregel wieder die Partienendlichkeit erzwungen werden (der Proponent nennt bei jedem Zug eine schrittweise kleiner werdende Ordinalzahl etc.; s.a. [11] S.68).
In 1-unbegrenzten Dialogspielen ist 7.2 folgendermaßen ergänzbar

7.4 <u>Satz:</u> Δ sei 1-unbeschränkt. Dann gilt für alle $m > 0$:

(1) $x \in G$ genau dann, wenn $x^{1,m} \in G^{m,1}$.

(2) $x \in {}_{\omega}G$ genau dann, wenn $x^{1,m} \in {}_{\omega}G^{m,1}$.

Dieses Resultat ist durch 6.8 im wesentlichen schon vorweggenommen. Eine 7.4(1) entsprechende Behauptung stellte Lorenzen in

[4] unter Hinweis auf Lorenz [8] auf.

7.2 - 7.4 werden bewiesen mit Hilfe von

7.5 Satz: Es seien $l,m,m',n,n' > 0$. Dann gilt für Δ:

(1) Wenn $x \in {}_aG^{m,n}$, $m' \leq m$ und $n \leq n'$, so $x \in {}_aG^{m',n'}$.

(2) Wenn $x \in {}_lG$ und $n' = m^l$, so $x^{n',m} \in {}_{g(m,l)}G^{m,n'}$.

(3) Wenn $x \in {}_aG^{1,n}$, so $x \in {}_aG^{+}$.

(4) Wenn $x \in {}_lG^{+}$, so $x^l \in {}_lG^{1,l}$.

(5) Wenn Δ 1-unbegrenzt ist und $x \in {}_aG$, so $x^{1,m} \in {}_{g(m,a)}G^{m,1}$.

Die Äquivalenz von (1) und (2) in 7.2 ergibt sich einerseits aus 7.5(1),5.1(1) und andererseits aus 7.5(2) angewendet auf x^n und $\Delta^{1,n}$; hierbei ist zu berücksichtigen, daß $(x^n)^{n',m} = x^{n \cdot n',m}$ und $(\Delta^{1,n})^{m,n'} = \Delta^{m,n \cdot n'}$.
Die Äquivalenz von 7.2(2) und 7.3(1) erhält man einerseits durch Anwendung von 7.5(3) auf x^n und Berücksichtigung von 6.12, andererseits mit Hilfe von 7.5(4). 7.3 angewendet auf Δ^- liefert zusammen mit 6.8(2) für Δ die Äquivalenz von 7.2(3) und 7.3(1) unter der Zusatzvoraussetzung $\mathrm{br}\,\Delta < \omega$. Schließlich ergibt sich 7.4 aus 7.5(1), 7.5(5) und 5.1(1).

Im folgenden wird der Beweis von 7.5 geführt; er basiert wie schon für 6.4 und 6.7 im wesentlichen auf Satz 5.1. Deshalb sind die Reduktionsergebnisse von §6 und §7 mindestens im ("intuitionistischen") Fall $O \neq P \neq L$ nicht evident zu nennen und die von Lorenz zur Begründung seiner Reduktionssätze in [8] angestellten Plausibilitätsbetrachtungen waren unzureichend, um so mehr, als seine Dialogspiele im Vergleich zu den hier untersuchten komplizierter sind (s.a. [5] S.11).

7.6 Lemma: Es seien $m,m',n,n' > 0$, $m' \leq m$, $n \leq n'$ und $x \leq y$. Dann gilt für Δ:

(1) Falls $sx=0$, so $e(x,\sigma,\Sigma^n) \leq e(y,\sigma,\Sigma^{n'})$.

(2) Falls $sx=1$, so $e(x,\sigma,\Sigma^m) \leq e(y,\sigma,\Sigma^{m'})$.

§8 Inhaltliche, formale und fundierte Dialogspiele

Bei der bisherigen Diskussion waren die Argumenterelationen von Dialogspielen keinerlei Einschränkung unterworfen. §8 und §9 beschäftigen sich demgegenüber mit Dialogspielen, deren Argumenterelationen spezielle Voraussetzungen erfüllen. In §8 werden zunächst einige Begriffe, die bisher informell verwendet wurden, in die allgemeine Theorie übernommen und in einem dort möglichen Sinne präzisiert.

8.1 Definition: Δ heißt inhaltlich, wenn

(1) $T = 0$,

(2) für alle i, ω, Σ mit $\omega\, A_i\, \Sigma$ gibt es Φ mit $\Sigma \subset \Phi$, $\Phi \subset \Sigma$ und $\omega\, A_{1-i}\, \Phi$.

Die in (2) für A_0, A_1 geforderte Beziehung wird im folgenden mit $A_0 \equiv A_1$ abgekürzt; sie besagt, daß die Argumentation der beiden Spieler im wesentlichen übereinstimmt (bis auf Vielfachheit). $A_0 \equiv A_1$ gilt insbesondere dann, wenn $A_0 = A_1$. Die Bedingungen $T = 0$ und $A_0 = A_1$ wurden schon in §4 im Zusammenhang mit inhaltlichen Dialogspielen erwähnt.

8.2 Definition: ω heißt Primargument in Δ, wenn es ein i gibt mit $A_i\omega = 0$ oder $A_i\omega = \{0\}$.

Ist Δ inhaltlich, so gilt für alle Primargumente ω in Δ:

(a) Entweder $A_0\omega = A_1\omega = 0$ oder $A_0\omega = A_1\omega = \{0\}$.

(b) Entweder $(0,\omega,0) \in {}_1G$ oder $(\omega,0,1) \in {}_2G$.

Nennt man Argumente ω mit $(\omega,0,1) \in G$ falsch, so besagt (b) gerade, daß in inhaltlichen Dialogspielen jedes Primargument entweder wahr oder falsch ist. Diese Eigenschaft wurde in der Einleitung als charakteristisch für inhaltliche Dialogspiele bezeichnet.

8.3 Definition: Δ heißt formal, wenn

(1) T ist identisch mit der Menge der Primargumente in Δ,

(2) für alle $\omega \in T$: $A_0\omega = \{0\}$ und $A_1\omega = 0$,

(3) $A_0 \upharpoonright (L-T) \equiv A_1 \upharpoonright (L-T)$,

(4) $T \subset P$.

8.3 entspricht in etwa der in §4 angegebenen Beschreibung formaler Dialogspiele. Ist Δ formal, so sind die Primargumente in Δ weder wahr noch falsch; die Argumentation der beiden Spieler ist also unabhängig von möglichen externen Wahrheitswerten der Primargumente.

8.4 Definition: Zu jedem Dialogspiel Δ wird ein Dialogspiel Δ^f erklärt durch:

$\Delta^f := (L, P, T^f, A_0^f, A_1^f, e)$, wobei

$T^f := \{\varphi;$ es gibt i mit $A_i\varphi = 0$ oder $A_i\varphi = \{0\}\}$,

$A_0^f := A_0 \upharpoonright (L-T^f) \cup \{(\varphi,0);\ \varphi \in T^f\}$,

$A_1^f := A_1 \upharpoonright (L-T^f)$.

Ist Δ inhaltlich und $T^f \subset P$, so ist Δ^f formal; in diesem Fall wird man erwarten, daß jedes in Δ^f wahre Argument auch wahr in Δ ist.

8.5 Satz: Es sei Δ inhaltlich, $T^f \subset P$ und $x = (0,\varphi,0)$.
Dann gilt:
Wenn $x \in G^f$, so $x \in G$.

Die Bedeutung von Δ^f für Δ liegt zunächst darin, daß die Wahrheit in Δ^f unabhängig von den (evtl. inkorrekt festgesetzten) Wahrheitswerten der Primargumente in Δ ist. Daß Δ^f noch von weiterem Nutzen für Δ sein kann, wird in §9 im Zusammenhang mit dem Schnittsatz gezeigt.

8.5 wird bewiesen mit Hilfe von

8.6 Satz: Es sei Δ inhaltlich und 0-streng. Weiter sei $T^f \subset P$.
Dann gilt:
Wenn $x \in {}_aG^f$, so $x \in {}_{a+2}G$.

Beweis von 8.5: Wenn $x = (0,\varphi,0)$ und $x \in G^f$, so $x \in (G^f)^-$ nach 6.6. Wegen $(\Delta^f)^- = (\Delta^-)^f$ liefert 8.6 $x \in G^-$ und mit 6.10 erhält man $x \in G$.

Beweis von 8.6 durch Induktion über a. Beim Induktionsschritt ist nur der Fall $sx=0$, $x\ R\ y$, $y = e(x,\varphi,0)$ und $\varphi \in x_0$ nichttrivial. Insbesondere ist in diesem Fall $\varphi \in T^f \subset P$, also $\varphi \in y_0$. Man setzt nun $z := e(y,\varphi,0)$ und zeigt $y\ R\ z$ und $z \in {}_1G$.

Bemerkung. Beim Beweis von 8.5 wurde neben 8.6 auch das i.a. nur klassisch geltende Resultat 6.10 verwendet. Hierzu soll Verschiedenes gesagt werden.

a.) Auf die Benutzung von 6.10 könnte verzichtet werden, wenn die von 8.6 implizierte Aussage, daß Δ Erweiterung von Δ^f ist, auch ohne die Voraussetzung der O-Strenge nachweisbar wäre. Für begrenzte und nicht O-strenge Dialogspiele ist diese Aussage jedoch falsch und hieran erweist sich, daß die in 4.2(2) geforderte "formale Primregel" solchen Spielen nicht adäquat ist. 4.2(2) müßte dort durch folgende Regel ersetzt werden:

(i) Falls $sx=0$ und $\omega \in T$, so $h(\omega,x_0) < h(\omega,x_1)$.

Nach (i) darf der Opponent Argumente aus T nicht angreifen, wenn er sie mindestens genauso oft wie der Proponent vorgebracht hat (vgl. dazu Lorenz [8]). Mit (i) anstelle von 4.2(2) gilt die gewünschte Aussage auch ohne Voraussetzung der O-Strenge. In der vorliegenden Schrift sollte (i) nicht als Regel eingeführt werden, weil im Endeffekt nur O-strenge Dialogspiele von Interesse sind und außerdem (i) schon bei der Betrachtung der m,n- Spiele wieder von 4.2(2) abgelöst werden kann (die Angriffsschranke des Proponenten ist beim Übergang von 4.2(2) zu (i) nur entsprechend zu erhöhen).

b.) Die Verwendung von 6.10 ist konstruktiv zulässig, falls A_0 ($=A_1$) finit ist (d.h. $A_0\omega$ ist endlich für jedes ω). Es soll jetzt die schon in §6 angedeutete Auffassung begründet werden, daß bei strenger Auslegung des Dialogkonzeptes Spiele mit nichtfiniten Argumenterelationen i.a. auch nicht als rein inhaltlich gelten können. Nichtfinite Argumenterelationen treten dann auf, wenn in der zugrundeliegenden Sprache Generalisierungen oder Partikularisierungen über unendlichen Bereichen zugelassen sind und damit auch der Bereich der Primaussagen unendlich ist. Der Forderung eines inhaltlichen Spiels, daß jede Primaussage entweder wahr oder falsch ist, scheint konstruktiv zunächst Genüge getan zu sein, wenn man (wie z.B. in der elementaren Arithmetik) ein Entscheidungsverfahren hat, mit dem jeder Primaussage genau einer der Werte "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann. Andererseits sind für gewisse Arten von Primaussagen (man denke z.B. an "n ist Primzahl") zu jedem Zeitpunkt eines Dialoges nur von endlich vielen Vertretern die Wahrheitswerte bekannt oder berechenbar. Dementsprechend wird man im konkreten Dialog davon

ausgehen müssen, daß die meisten Primaussagen der Diskussion entzogen sind und die Rolle von Primargumenten einnehmen, deren Wahrheitswert unbestimmt ist. Insbesondere haben dann Argumente des Opponenten, die nach dem augenblicklichen Wissensstand nicht widerlegbar sind, für den Proponenten die Funktion von Hypothesen, auf die er sich berufen muß, wenn er bestimmte, höchstens aufgrund ihrer Form verifizierbare Allaussagen verteidigen will. Somit bekommt der Dialog einen teilweise formalen Charakter und kann nicht als rein inhaltlich gelten. Diesem Sachverhalt läßt sich bei der Definition des zugehörigen Dialogspiels dadurch Rechnung tragen, daß die in ihrem Wert nicht "erfaßbaren" Primaussagen tabuisiert und wie in formalen Spielen behandelt werden (mit einer Aussage wie " alle ungeraden Zahlen sind unvollkommen " ist doch entweder nur " alle uns bekannten ungeraden Zahlen sind unvollkommen ", also eine beschränkte Allaussage gemeint oder in ihr wird behauptet, daß der entsprechende Sachverhalt aus formalen Gründen besteht).
Im Gegensatz zur Interpretation von Kamlah, Lorenzen [4] und Lorenz [8] kann die hier dargestellte Auffassung erklären, warum aus konstruktiver Sicht in Dialogspielen mit nichtfiniten Argumenterelationen generell unsymmetrische Verhältnisse vorliegen (Hypothesencharakter der Argumente des Opponenten) und nicht alle Argumente (nämlich nicht die Fragen; vgl. §10) permanent sind.

c.) Vom klassischen Standpunkt aus gesehen kann man natürlich auch Dialogspiele mit nichtfiniten Argumenterelationen zu den inhaltlichen Spielen zählen: die Wahrheitswerte auch von unendlich vielen Primaussagen sind "fiktiv" erfaßbar. In diesem Fall kommt den Sätzen 6.10 und 8.5 folgende Bedeutung zu. Nach 6.10 sind für ein inhaltliches Spiel Δ die Voraussetzungen " 1-Optimalität" und " P=L" rechtfertigbar. Nach 8.5 liefert Δ^f die bestmögliche formale Logik für Δ; wegen 6.10 ist aber auch jedes in Δ^f wahre Argument schon in Δ^{st} wahr. Bei Fundiertheit von Δ (s. 8.10) ist Δ^{st} partienendlich. Mit Hilfe des in §1 zitierten Hauptsatzes der Spieltheorie kann dann erschlossen werden, daß jedes Argument entweder wahr oder falsch in Δ^{st} bzw. Δ ist (Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit von Δ).

Aufgrund der Überlegungen in (b) ist es notwendig, neben inhaltlichen und formalen Spielen auch Zwischentypen zu betrachten.

8.7 Definition: Δ heißt normal, wenn

(1) für jedes $\varphi \in T$: φ ist Primargument in Δ,

(2) es gelten die Bedingungen (2),(3),(4) in 8.3.

Jedes inhaltliche oder formale Dialogspiel ist normal.
Ist Δ normal und $T^f \subset P$, so ist Δ^f formal; außerdem gilt für Δ der zu 8.6 analoge

8.8 Satz: Δ sei normal und 0-streng. Weiter sei $T^f \subset P$.
Dann gilt:
Wenn $x \in {}_aG^f$, so $x \in {}_{a+2}G$.

Von der weiteren Behandlung werden schließlich solche Dialogspiele ausgeschlossen, in denen es unendliche Argumentationsketten gibt.

8.9 Definition: Zu Δ wird folgendermaßen eine Relation $\dot{A}$ erklärt:

$\dot{A} := \{(\varphi,\psi);$ es gibt i,Σ mit $\varphi A_i \Sigma$ und $\psi \in \Sigma\}$.

Damit wird rekursiv für alle Ordinalzahlen b definiert:

${}_bL := \bigcup_{a<b} \{\varphi;\ \dot{A}\varphi \subset {}_aL\}$.

Unmittelbar aus 8.9 ergeben sich folgende Beziehungen:

${}_0L = 0$; ${}_1L$ ist die Menge der Primargumente von Δ;

${}_\omega L = \bigcup_{n<\omega} {}_nL$; falls $a \leq b$, so ${}_aL \subset {}_bL$;

falls $\varphi \in {}_bL$, so gibt es $a < b$ mit $\varphi \in {}_{a+1}L$.

8.10 Definition: Δ heißt (argumentativ) fundiert, wenn für jedes φ ein a mit $\varphi \in {}_aL$ existiert.

Δ ist fundiert genau dann (klassisch), wenn es keine unendlichen $\dot{A}$-Ketten gibt. Falls Δ fundiert und außerdem begrenzt oder streng ist, läßt sich zeigen, daß Δ partienendlich und unter den Voraussetzungen $br\,\Delta < \omega$ und $L = {}_\omega L$ sogar lokal partienbeschränkt ist.
Abschließend formulieren wir

8.11 Satz: Δ sei normal und 0-streng und es sei $P \neq 0$. Weiter gelte für x: $sx=0$, $x_1 \subset x_0$ und $\varphi \in {}_aL$ für jedes $\varphi \in x_1$.

Dann ist $x \in {}_{2a+1}G$.

Unter den Voraussetzungen von 8.11 und bei Fundiertheit gilt insbesondere $(\varphi,\varphi,0) \in G$ für jedes φ. Zum Beweis von 8.11 wird ausgenutzt, daß der Proponent jeden Zug des Opponenten imitieren kann.

§9 Standarddialogspiele

Zum Abschluß der allgemeinen Theorie werden Dialogspiele untersucht, die wir "Standarddialogspiele" nennen, weil ihre Sprache bzw. ihre Argumenterelationen gewisse Eigenschaften besitzen, die typisch sind für alle bisher behandelten, konkreten Dialogspiele. Aufgrund der Ergebnisse von §6 und §7 beschränken wir uns zugleich auf die Diskussion von 1-optimalen Spielen. Neben einigen für §10 auswertbaren Resultaten wird im folgenden der Schnittsatz für Standarddialogspiele bewiesen.

9.1 Definition: Δ heißt Standarddialogspiel, wenn gilt:

(1) Δ ist 1-optimal und fundiert,

(2) $P \neq 0$, $T \subset P$,

(3) für alle $\varphi \in T$: $A_0\varphi = \{0\}$,

(4) $A_1 = A_0 \upharpoonright (L-T)$,

(5) für alle φ, Σ mit $\varphi \notin P$ und $\varphi \, A_1 \, \Sigma$: $P(\Sigma) = \Sigma$,

(6) es gibt eine Abbildung $^*: L \rightarrow L$ derart, daß für alle φ:

(a) $\varphi^{**} = \varphi$, (* ist eine Involution)

(b) $A_1\varphi = \{\varphi^*\}$ oder $A_1\varphi^* = \{\varphi\}$,

(c) falls $P \neq L$, so $\varphi \notin P$ oder $\varphi^* \notin P$.

Im folgenden sei Δ ein Standarddialogspiel und für * gelte 9.1(6). Aufgrund von 9.1 (2),(3),(4) ist Δ normal. Wir setzen

$A := A_1$ und nennen A die für beide Spieler maßgebliche Argumenterelation von Δ.

φ^* wird das zu φ konjugierte Argument genannt.

Argumente mit $A\varphi = \{\varphi^*\}$ heißen ganz (sie sind nach Anwendung von A durch * reproduzierbar).

Wegen der Fundiertheit von Δ gilt für jedes φ, daß entweder φ oder φ^* ganz ist. Primargumente sind nicht ganz. Wegen 9.1(5) gilt im Fall $P \neq L$ für jedes φ, daß entweder φ oder φ^* nichtpermanent ist.

Nachfolgend wird eine Liste von Sätzen für Δ zusammengestellt.

9.2 Satz:

(1) Wenn $x \in {}_aG$ und $x \sqsubseteq y$, so $y \in {}_aG$.

(2) Wenn $x,y \in {}_aG$ und $sx=sy$, so $xy \in {}_aG$.

(3) Es sei $sx=0$. $x \in {}_aG$ genau dann, wenn für alle

für alle $\varphi \equiv x_1$: $(x_0, \varphi, 0) \in {}_aG$.

(4) Es sei $sx=1$. $x \in {}_aG$ genau dann, wenn $(x_0,0,1) \in {}_aG$ und es gibt $b < a$ mit $(x_0,x_1,0) \in {}_bG$.

(5) Wenn $(\Sigma,\delta,0) \in {}_aG$, so $(\Sigma_\psi,\delta_\psi,0) \in {}_aG$.

(6) $(\Sigma,\varphi,0) \in {}_aG$ genau dann, wenn $(\Sigma_\varphi,\varphi,0) \in {}_aG$.

(7) Wenn $\varphi \in {}_aL$, so $(\varphi,\varphi,0) \in {}_{2a+1}G$.

(1),(5),(7) sind Wiederholungen der schon bekannten Resultate 6.12, 5.1(3) und 8.11. (2) ist eine Verschärfung von 5.1(4). Aufgrund von (3) und (4) kann man sich i.a. auf die Diskussion von Situationen der Gestalt $(\Sigma,\varphi,0)$ und $(\Sigma,0,1)$ beschränken.

Für den Schnittsatz wird eine Funktion f zur Abschätzung benötigt.

9.3 <u>Definition:</u> Durch Rekursion über c und a wird erklärt:

$$f(a,0) := 0;$$
$$f(a,c) := a + \bigcup_{d<c} f\Big(\bigcup_{b<a}(f(b,c)+b),d\Big) \quad \text{für } c > 0.$$

9.4 <u>Satz</u> (Schnittsatz): Es seien $x = (\Gamma,\delta,0)$, $x \in {}_aG$, $y \in {}_bG$, $y_0 \equiv \Sigma'\delta$ und $z = (\Sigma\Sigma',y_1,y_2)$. Weiter sei $c > 0$ und $\varphi \in {}_cL$ für jedes $\varphi \sqsubset \Phi$. Dann gilt $z \in {}_{f(a+b,c)}G$.

9.4 hat u.a. folgende Anwendung:

9.5 <u>Satz:</u> Es gelte $T^f \subset P$. Weiter seien $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ wahr in Δ und $((\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\psi,0) \in G^f$.
Dann ist ψ wahr in Δ.

M.a.W. der Nutzen des formalen Spiels Δ^f für Δ kann darin bestehen, daß es wie hier den "logischen Schluß" von $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ auf ψ erlaubt.

<u>Beweis von 9.5:</u> Wegen $T^f \subset P$ ist Δ formal. Nach 8.8 gilt $((\varphi_1,\ldots,\varphi_n),\psi,0) \in G$. Andererseits hat man $(0,(\varphi_1,\ldots,\varphi_n),0) \in G$ nach 9.2(2). Wegen der Fundiertheit von Δ liefert 9.4 dann $(0,\psi,0) \in G$.

<u>Bemerkung.</u> Bei den Beweisen von 9.2, 9.4 und 9.5 werden von den Voraussetzungen in 9.1 nur die Punkte (1) - (4) ausgenutzt. (5) und (6) gehen erst in die folgenden Sätze ein.

9.6 <u>Satz:</u> Es seien φ ganz, $\varphi^* \wedge \Phi$, $\Phi \equiv x_0 \equiv \Sigma\varphi$ und $y = (\Sigma,x_1,x_2)$. Dann gilt: wenn $x \in {}_aG$, so $y \in {}_aG$.

9.6 besagt insbesondere, daß die für den Proponenten aus φ gewinnbare Information durch Φ ausgeschöpft ist und daß weitere Angriffe auf φ nichts mehr einbringen.

9.7 <u>Satz:</u> Es sei $x = (\Sigma, \varphi, 0)$ und $y = (\Sigma_{\phi} \varphi^{*}, 0, 1)$.

(1) Wenn $x \in {}_{a}G$, so $y \in {}_{a+1}G$.

(2) Wenn $y \in {}_{a}G$ und ($\varphi \notin T$ oder $\varphi \in \Sigma$), so $x \in {}_{a+1}G$.

Zusammen mit 9.2(3),(4) ergibt sich aus 9.7, daß man alle Situationen aus G bestimmen kann, sofern für Situationen der Gestalt $(\Sigma, 0, 1)$ die Frage nach der Zugehörigkeit zu G geklärt ist.

9.8 <u>Satz:</u>

(1) Wenn $\phi, \varphi^{*} \in {}_{a}L$, so $(\varphi\, \varphi^{*}, 0, 1) \in {}_{2a+2}G$.

(2) Wenn $\Sigma \subset \Phi$ und $(\Sigma, 0, 1) \in {}_{a}G$, so $(\Phi, 0, 1) \in {}_{a}G$.

(3) Es sei $x = (\Sigma\phi, 0, 1)$. Wenn φ ganz ist und $\phi^{*} \notin T$ und $(\Sigma_{\phi^{*}} \Psi, 0, 1) \in {}_{a}G$ für jedes Ψ mit $\phi^{*}\ A\ \Psi$, so $x \in {}_{a+2}G$.

(4) Es sei $x = (\Sigma\phi, 0, 1)$. Wenn φ nicht ganz ist, $\varphi\ A\ \Psi$, $\Psi = \overset{n}{\psi}$, $a = \sum_{j<n} a_j$ und $(\Sigma_{\psi_j} \psi_j^{*}, 0, 1) \in {}_{a_j}G$ für $j < n$, so $x \in {}_{a+2}G$.

(5) Wenn $(\Sigma\varphi, 0, 1) \in {}_{a}G$ und $(\Sigma\phi^{*}, 0, 1) \in {}_{b}G$ und $\varphi, \varphi^{*} \in {}_{c}L$, so $(\Sigma, 0, 1) \in {}_{f(a+b+1,c)}G$.

Aus 9.8 und 1.10 resultiert, daß die Menge der Situationen aus G mit der Gestalt $(\Sigma, 0, 1)$ gegenüber den in 9.8 beschriebenen Prozessen abgeschlossen ist; 9.8(5) entspricht dabei dem Schnittsatz. Unsere Behauptung lautet nun: alle Situationen aus G mit der Gestalt $(\Sigma, 0, 1)$ lassen sich durch 9.8 (1) - (4) systematisch erzeugen. Um dies nachzuweisen, könnte man in gewohnter Weise eine Hierarchie von Sequenzenmengen definieren, wobei jede Stufe durch Anwendung der entsprechenden Prozesse aus den vorhergehenden entsteht; statt dessen soll diesmal die Notation des Halbformalismus gewählt werden, um die Analogie zu den in §10 angegebenen Sequenzenkalkülen deutlich zu machen.

9.9 <u>Definition:</u> Der Halbformalismus H sei gegeben durch:

(1) $\Rightarrow \phi\ \varphi^{*}$.

(2) Falls $\Sigma \subset \Phi$, $\Sigma \Rightarrow \Phi$.

(3) Falls φ ganz ist und $\varphi^* \not\in T$,
$\Sigma_{\varphi^*}\Psi$ für alle Ψ mit $\varphi^* \, A \, \Psi$ $\Rightarrow$ $\Sigma\varphi$.

(4) Falls φ nicht ganz ist und $\varphi \, A \, \Psi$,
$\Sigma_\psi \psi^*$ für alle $\psi \in \Psi$ $\Rightarrow$ $\Sigma\varphi$.

In (3) bzw. (4) sind die prämissenlosen Regeln $\Rightarrow \varphi$ enthalten für solche φ, wo φ ganz und $A\varphi^* = 0$ (d.h. φ^* ist wahres Primargument) bzw. wo φ wahres Primargument ist.

9.10 Satz:

(1) Wenn $(\Sigma,\varphi,0) \in G$, so ist $\Sigma_\varphi \varphi^*$ in H herleitbar.

(2) Wenn $(\Sigma,0,1) \in G$, so ist Σ in H herleitbar.

Als Endresultat notieren wir

9.11 Korollar:

(1) Es sei $\varphi \not\in T$ oder $\varphi \in \Sigma$.
$(\Sigma,\varphi,0) \in G$ genau dann, wenn $\Sigma_\varphi \varphi^*$ in H herleitbar ist.

(2) $(\Sigma,0,1) \in G$ genau dann, wenn Σ in H herleitbar ist.

(3) φ ist wahr in Δ genau dann, wenn φ^* in H herleitbar ist.

Bemerkung. H könnte durch einen näher am Dialogverlauf orientierten Halbformalismus ersetzt werden; dies hätte den Vorteil, daß dann den Schrittzahlen der Ableitungen in berechenbarer Weise solche in G zugeordnet werden könnten und umgekehrt. Die vorliegende Form für H wurde ausgewählt, um in §10 eine simultane Behandlung des intuitionistischen und klassischen Prädikatenkalküls zu ermöglichen.

Im folgenden werden die Beweise für 9.2, 9.4, 9.6, 9.7, 9.8 und 9.10 geführt.

Beweis von 9.2. Es sind die Punkte (2),(3),(4),(6) zu zeigen.
Zu (2). (i) Falls $sx=sy=0$ und $x,y \in {}_aG$, gibt es $b<a$ mit $Rx \subset {}_bG$ und $Ry \subset {}_bG$. Für $xy \in {}_aG$ genügt der Nachweis von $Rxy \subset {}_bG$. Sei also $xy \, R \, z$, $\varphi \in x_1y_1$ und $z = ((x_0y_0)_\varphi\Sigma,0,1)$. O.B.d.A. sei $\varphi \in x_1$. Man setzt $x' := ((x_0)_\varphi\Sigma,0,1)$ und zeigt $x \, R \, x'$. Wegen $x' \in {}_bG$ und $x' \subset z$ ergibt sich $z \in {}_bG$ (9.2(1)).

(ii) Falls $sx=sy=1$ und $x,y \in {}_aG$, gibt es $b<a$, x',y', $\varphi \in x_0$, $\psi \in y_0$, Φ,Ψ mit: $x \, R \, x'$, $x' = (x_0,x_1\Phi,0)$, $x' \in {}_bG$, $y \, R \, y'$, $y' = (y_0, y_1\Psi,0)$ und $y' \in {}_bG$. Nach (i) gilt $x'y' \in {}_bG$. Man

setzt nun $z := (x_0y_0, x_1y_1{}^{\Phi}, 0)$ und zeigt $xy \; R \; z$. Wegen $x'y' \sqsubset z$ ergibt sich $z \in {}_bG$ nach 9.2(1) und $xy \in {}_aG$ nach 1.9.

(3) ergibt sich unmittelbar aus 9.2(1) und 9.2(2).

Von (4) erhält man eine Richtung mit Hilfe von 9.2(1) und 5.1; beim Nachweis der anderen verwendet man 9.2(2) und nutzt aus, daß x und $(x_0, 0, 1)$ analoge Nachfolger haben.

(6) ergibt sich aus 9.2(5) bei Berücksichtigung von $\varphi_\varphi = \varphi$ $(P \neq 0!)$.

9.12 Lemma: Für die in 9.3 definierte Funktion f gilt:

(1) Wenn $c > 0$, so $a \leq f(a,c)$.
(2) Wenn $c > 0$ und $a < b$, so $f(a,c) < f(b,c)$.

(1) ist trivial; (2) wird durch Induktion über c gezeigt.

Beweis von 9.4 durch Doppelinduktion über $c > 0$ und $a+b$.
(V1): 9.4 gelte schon für alle c mit $0 < c < \bar{c}$.
Behauptung (B1): 9.4 gilt für alle $a,b,x,y,z,\Sigma,\Sigma',\Phi$, sofern die Voraussetzungen in 9.4 mit $\bar{c}$ anstelle von c erfüllt sind.
(V2): (B1) gelte schon für alle a,b mit $a+b < \bar{a}$.
Es sei nun $x = (\Sigma, \Phi, 0)$, $x \in {}_aG$, $y \in {}_bG$, $y_0 \sqsubset \Sigma'\Phi$, $z = (\Sigma\Sigma', y_1, y_2)$ und $a+b=\bar{a}$. Weiter sei $\varphi \in {}_{\bar{c}}L$ für jedes $\varphi \in \Phi$.
Behauptung (B2): $z \in {}_{f(\bar{a},\bar{c})}G$.

Wenn $sy=0$, so genügt es wegen 9.2(3) den Fall $|y_1| = 1$ zu untersuchen. Sei also $y_1 = z_1 = \psi$.
Wenn $\psi \in \Phi$, so $x \sqsubset z$, also $z \in {}_aG$; (B2) ergibt sich dann mit Hilfe von 9.12(1) und 9.2(1).
Wenn $\psi \notin \Phi$, so gibt es jedenfalls $d < b$ mit $Ry \subset {}_dG$. Für (B2) reicht wegen 9.12(2) der Nachweis von $Rz \subset {}_{f(a+d,\bar{c})}G$. Sei also $z \; R \; z'$ und $z' = (\Sigma_\psi \Sigma'_\psi \Psi, 0, 1)$. Man setzt $y' := ((y_0)_\psi \Psi, 0, 1)$; dann gilt $y \; R \; y'$ (wegen $\psi \notin \Phi$), $y' \in {}_dG$ und $y'_0 \sqsubset \Sigma'_\psi \Psi \Phi_\psi$.
Andererseits erhält man $(\Sigma_\psi, \Phi_\psi, 0) \in {}_aG$ nach 9.2(5). Damit liefert (V2) $z \in {}_{f(a+d,\bar{c})}G$.

Wenn $sy=1$, so genügt es wegen 9.2(4), (V2) und 9.12(2), den Fall $y_1 = z_1 = 0$ zu untersuchen. Zunächst gibt es dann $d < b$, $\psi \in y_0$, Ψ mit: $y \; R \; y'$, $y' = (y_0, \Psi, 0)$ und $y' \in {}_dG$. Man setzt

nun $z' := (\Sigma\Sigma', \Psi, 0)$; (V2) liefert dann $z' \epsilon \; {}_{f(a+d,\bar{c})}G$.
Falls $\psi \in \Sigma\Sigma'$, gilt $z \; R \; z'$; (B2) ergibt sich aus 1.9 und 9.12(2).
Falls $\psi \notin \Sigma\Sigma'$, gilt $\psi \in \Phi$ und ($\bar{c} > 1$ oder $\Psi = 0$) wegen $\psi \; A' \; \Psi$.
Man setzt nun $x' := (\Sigma_\psi \Psi, 0, 1)$ und zeigt $x \; R \; x'$. Insbesondere gilt daher $x' \epsilon \; {}_aG$. Im Fall $\Psi = 0$ erhält man $z \epsilon \; {}_aG$ wegen $x' \sqsubset z$ und damit ergibt sich (B2) nach 9.2(1) und 9.12(1).
Anderenfalls ist $\bar{c} > 1$ und es gilt:

$f(a+d,\bar{c})+a \leq \bigcup_{\bar{b}<\bar{a}} (f(\bar{b},\bar{c})+\bar{b})$;

es gibt c mit $0 < c < \bar{c}$ und $\rho \epsilon \; {}_cL$ für alle $\rho \in \Psi$.

Damit ist (V1) anwendbar auf z' und x' und bei Berücksichtigung der Definition von f erhält man (B2).

9.13 <u>Lemma:</u> Es sei φ ganz und $\varphi^* \; A \; \Phi$. Dann gilt
$\varphi_\psi = 0$ oder $\Phi_\psi = \Phi$.

9.13 ist eine einfache Konsequenz von 9.1.

<u>Beweis von 9.6</u> durch Induktion über a.
(V): 9.6 gelte schon für alle $a < b$.
Es sei nun $x \epsilon \; {}_bG$, φ ganz, $\varphi^* \; A \; \Phi$, $\Phi \sqsubset x_0 \sqsubset \Sigma\varphi$ und $y = (\Sigma, x_1, x_2)$. Behauptung (B): $y \epsilon \; {}_bG$.
<u>Wenn sx=0</u>, so genügt es wegen 9.2(3), den Fall $|x_1| = 1$ zu untersuchen. Sei also $x_1 = y_1 = \psi$.
Falls $\varphi_\psi = 0$, erhält man (B) mit Hilfe von 9.2(1),(6).
Anderenfalls ist $\Phi_\psi = \Phi$ nach 9.13 und es gibt $a < b$ mit $Rx \subset {}_aG$. Für (B) reicht der Nachweis von $Ry \subset {}_aG$. Sei also $y \; R \; y'$ und $y' = (\Sigma_\psi \Psi, 0, 1)$. Man setzt $x' := ((x_0)_\psi \Psi, 0, 1)$ und zeigt $x \; R \; x'$ (da φ ganz ist, gilt $\varphi \notin T$). Wegen
$\Phi = \Phi_\psi \sqsubset (x_0)_\psi \Psi \sqsubset (\Sigma\varphi)_\psi \Psi \sqsubset \Sigma_\psi \Psi\varphi$ liefert (V) $y' \epsilon \; {}_aG$.

<u>Wenn sx=1</u>, so genügt es wegen 9.2(4) und (V), den Fall $x_1 = y_1 = 0$ zu untersuchen. Zunächst gibt es dann $a < b$, $\psi \in x_0$, Ψ, x' mit: $x \; R \; x'$, $x' = (x_0, \Psi, 0)$ und $x' \epsilon \; {}_aG$.
Falls $\psi \in \Sigma$, setzt man $y' := (\Sigma, \Psi, 0)$ und zeigt $y \; R \; y'$.
(V) liefert dann $y' \epsilon \; {}_aG$, woraus man mit 1.9 (B) erhält.

Anderenfalls ist $\psi = \varphi$, also $\Psi = \varphi^*$. Man setzt nun $x'' := ((x_0)_{\varphi^*}\Phi, 0, 1)$ und zeigt $x' \; R \; x''$ (wegen $\varphi^* \; A \; \Phi$ ist $\varphi^* \not\in T$). Insbesondere gilt $x'' \in {}_aG$ und $\Phi \sqsubset (x_0)_{\varphi^*}\Phi \sqsubset \Sigma\varphi\Phi \sqsubset \Sigma\varphi$. (V) liefert dann $y \in {}_aG \subset {}_bG$.

<u>Beweis von 9.7.</u> Es sei $x = (\Sigma, \varphi, 0)$ und $y = (\Sigma_\varphi \varphi^*, 0, 1)$.
<u>Zu (1)</u>: Es sei $x \in {}_aG$. Falls φ ganz ist, gilt $\varphi \not\in T$ und $x \; R \; y$, also $y \in {}_aG$. Anderenfalls ist φ^* ganz. Dann gilt $(\Sigma_\varphi \varphi^*, \varphi, 0) \in {}_aG$ nach 9.2(6),(1) und $y \; R \; (\Sigma_\varphi \varphi^*, \varphi, 0)$. Damit erhält man $y \in {}_{a+1}G$ nach 1.9.
<u>Zu (2)</u>: Es sei $y \in {}_aG$. Falls φ ganz ist, gilt $\varphi \not\in T$ und $Rx = \{y\}$, also $x \in {}_{a+1}G$. Anderenfalls ist φ^* ganz. Wenn $\varphi \in T$, so $\varphi \sqsubset \Sigma$ nach Voraussetzung, also $x \in {}_1G$. Wenn $\varphi \not\in T$, so genügt der Nachweis von $Rx \subset {}_aG$. Sei also $x \; R \; x'$ und $x' = (\Sigma_\varphi \Phi, 0, 1)$. Wegen $\varphi \not\in T$ gilt $\varphi \; A \; \Phi$. Außerdem ergibt sich aus $y \in {}_aG$, daß $(\Sigma_\varphi \Phi \varphi^*, 0, 1) \in {}_aG$ (9.2(1)). 9.6 liefert dann $x' \in {}_aG$.

<u>Beweis von 9.8.</u>
<u>(1)</u> ergibt sich unmittelbar aus 9.1(6)(b) und 9.2(7),(1).
<u>(2)</u> ist ein Spezialfall von 9.2(1).

<u>Zu (3)</u>: Es seien die Voraussetzungen von (3) erfüllt. Für $x \in {}_{a+2}G$ reicht der Nachweis von $R(\Sigma\varphi, \varphi^*, 0) \subset {}_aG$. Sei also $(\Sigma\varphi, \varphi^*, 0) \; R \; z$ und $z = ((\Sigma\varphi)_{\varphi^*}\Psi, 0, 1)$. Wegen $\varphi^* \not\in T$ gilt $\varphi^* \; A \; \Psi$. Wegen $\Sigma_{\varphi^*} \sqsubset (\Sigma\varphi)_{\varphi^*}$ erhält man $z \in {}_aG$ nach 9.2(1) und Voraussetzung von (3).

<u>(4)</u> wird durch Induktion über a bewiesen.
(V): (4) gelte schon für alle $a < b$.
Es sei nun $x = (\Sigma\varphi, 0, 1)$, φ nicht ganz, $\varphi \; A \; \Psi$, $\Psi = \vec{\psi}$, $b = \sum_{j<n} a_j$ und $(\Sigma_{\psi_j} \psi_j^*, 0, 1) \in {}_{a_j}G$ für $j < n$.
Behauptung (B): $x \in {}_{b+2}G$.
<u>Falls für alle $j < n$:</u> $\psi_j \not\in T$ oder $\psi_j \sqsubset \Sigma$, gilt $(\Sigma, \psi_j, 0) \in {}_{a_{j+1}}G$ nach 9.7(2) und $a_j \leq b$ für $j < n$, also

$(\Sigma,\Psi,0) \in {}_{b+1}G$ nach 9.2(3) (hier ist auch der Fall $\Psi=0$ erfaßt). Mit Hilfe von 1.9 und 9.2(1) erhält man (B).

Anderenfalls gibt es $j<n$ mit $\psi_j \in T$ und $\psi_j \notin \Sigma$. O.B.d.A. gelte dies für $j=0$. Dann gibt es d,c,z,ρ,Φ mit: $d<c<a_0$, $\rho \in \Sigma_{\psi_0}\psi_0^*$, $\rho\ A\ \Phi$, $z = (\Sigma_{\psi_0}\psi_0^*,\Phi,0)$, $z \in {}_cG$ und $Rz \subset {}_dG$.

Im Fall $\rho = \psi_0^*$ gilt $\Phi = \psi_0$ und $z\ R\ ((\Sigma_{\psi_0}\psi_0^*)_{\psi_0},0,1)$. Wegen 9.2(1) erhält man dann $(\Sigma_{\psi_0}\psi_0^*,0,1) \in {}_dG$ und wegen

$d + \sum_{0<j<n} a_j + 2 \leq b$ liefern (V) und 9.2(1) sogar $x \in {}_bG$.

Im Fall $\rho \neq \psi_0$ gilt insbesondere $\rho \in \Sigma$. Man setzt nun $x' := (\Sigma\varphi,\Phi,0)$ und zeigt $x\ R\ x'$. Für (B) reicht der Nachweis von $Rx' \subset {}_bG$. Sei also $x'\ R\ x''$, $\tau \in \Phi$ und $x'' = ((\Sigma\varphi)_\tau\Phi',0,1)$.
Behauptung (B'): $x'' \in {}_bG$.
Man setzt nun $z' := ((\Sigma_{\psi_0}\psi_0^*)_\tau\Phi',0,1)$ und zeigt $z\ R\ z'$

($\psi_0^* \notin T$). Außerdem hat man $z' \in {}_dG$.

Falls $\tau \in P$ und $L \neq P$, gilt $\psi_0^* \notin P$ wegen $\psi_0 \in T \subset P$; also ist $(\psi_0^*)_\tau = 0$ und wegen $z' \sqsubset x''$ ergibt sich sogar $x'' \in {}_dG$.

Falls $\tau \notin P$ oder $L=P$, gilt $(\Sigma\Phi'\varphi,0,1) \sqsubset x''$; da im Fall $\tau \notin P$ wegen $\tau\ A\ \Phi'$: $P(\Phi') = \Phi$, gilt $z' \sqsubset ((\Sigma\Phi')_{\psi_0}\psi_0^*,0,1)$ und schließlich $(\Sigma_{\psi_j}\psi_j^*,0,1) \sqsubset ((\Sigma\Phi')_{\psi_j}\psi_j^*,0,1)$ für $j<n$ und $j\neq 0$.
Bei Berücksichtigung von 9.2(1) ist dann (V) anwendbar und wegen $d + \sum_{0<j<n} a_j + 2 \leq b$ ergibt sich (B').

Zu (5): Es seien die Voraussetzungen von (5) erfüllt. O.B.d.A. sei $\varphi \notin T$ und im Fall $P \neq L$ sei außerdem $\varphi \notin P$. Dann gilt $\Sigma = \Sigma_\varphi$, weiterhin $(\Sigma,\varphi,0) \in {}_{b+1}G$ nach 9.7(2) und schließlich erhält man die Behauptung von (5) mit Hilfe von 9.4.

Beweis von 9.10. Durch Induktion über a wird gezeigt:

9.14 Es sei $x \in {}_aG$ und $x = (\Sigma,\varphi,0)$ bzw. $x = (\Sigma,0,1)$.

Behauptung (B): $\Sigma_\varphi\varphi^*$ bzw. Σ ist herleitbar in H.

(V): 9.14 gelte schon für alle $a < b$.
Sei nun $x \in {}_bG$.
Wenn $x = (\Sigma, \varphi, 0)$, so gibt es $a < b$ mit $Rx \subset {}_aG$. Falls φ ganz ist, gilt $x \, R \, (\Sigma_\varphi \varphi^*, 0, 1)$ und (B) ergibt sich aus (V). Anderenfalls ist φ^* ganz. Wenn $\varphi \in T$ und $\varphi \in \Sigma$, so gilt (B) wegen $\varphi\varphi^* \subset \Sigma_\varphi \varphi^*$ und 9.9(1),(2). Wenn $\varphi \in T$ und $\varphi \notin \Sigma$, so gilt $Rx = \{(\Sigma_\varphi, 0, 1)\}$; also erhält man (B) wegen (V) und 9.9(2). Schließlich zeigt man (B) im Fall $\varphi \notin T$ mit Hilfe von (V) und 9.9(3).
Wenn $x = (\Sigma, 0, 1)$, so gibt es $a < b$, $\varphi \in \Sigma$, Ψ mit $\varphi \Lambda \Psi$ und $(\Sigma, \psi, 0) \in {}_aG$ für alle $\psi \in \Psi$. Wegen (V) gilt: für alle $\psi \in \Psi$ ist $\Sigma_\psi \psi^*$ herleitbar in H. Wegen $\Sigma\varphi \subset \Sigma$ und 9.9(2),(4) erhält man dann (B).

§10 Klassische und intuitionistische Logik im Dialogspiel

Im folgenden werden für prädikatenlogische Sprachen der ersten Stufe (ohne Identität und Funktoren) formale Standardialogspiele in klassischer und intuitionistischer Version definiert. Anschließend wird bewiesen, daß diese Spiele quasifinit für Opponent und Proponent sind und daß die zugehörigen (formal) wahren Aussagen von einem der bekannten Gentzenkalküle aufgezählt werden.

Eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe ist gegeben durch:

1.) eine abzählbare Menge von Subjektsvariablen (angedeutet durch v,...),

2.) eine Konstantenmenge, die aus Prädikatenkonstanten (angedeutet durch Q,...) und mindestens abzählbar vielen Subjektskonstanten (angedeutet durch t,...) besteht,

3.) die logischen Konstanten $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bigwedge$, $\bigvee$.

Aus diesem Material werden in bekannter Weise die Ausdrücke der Sprache gebildet (angedeutet durch δ,...); sie sollen im folgenden in der üblichen Klammerschreibweise angegeben werden. Zunächst führen wir noch einige Bezeichnungen ein.

$\delta_v^{t'}$ bzw. $\delta_t^{t'}$ gehe aus δ durch Substitution von t' für v bzw. für t hervor. Die Schreibweise $\delta(v)$ bedeute, daß in δ von den Subjektsvariablen höchstens v frei vorkommt. Statt $\delta(v)_v^t$ schreiben wir auch $\delta(t)$.

Ausdrücke ohne logische Konstanten heißen atomar; Ausdrücke, in denen keine Subjektsvariable frei vorkommt, heißen Aussagen und werden durch $\alpha, \beta, \ldots$ angedeutet. Die Menge der Aussagen bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$.

Neben Aussagen sind in den zu definierenden Dialogspielen auch Fragen als Argumente zugelassen (vgl. hierzu die Einführung von "signierten" Ausdrücken in Smullyan [14]). ? sei eine neue Konstante. Damit wird gesetzt:

$$\mathfrak{F} := \{ ?\alpha \; ; \; \alpha \in \mathfrak{A} \},$$

$$L := \mathfrak{A} \cup \mathfrak{F}.$$

In L wird eine Involution * definiert durch:

$$\varphi^* := \begin{cases} ?\varphi & \text{falls } \varphi \in \mathfrak{A}, \\ \alpha & \text{falls } \varphi = ?\alpha. \end{cases}$$

Außerdem wird als (für beide Spieler maßgebliche) Argumenterelation A erklärt:

$$A\varphi := \{\varphi^*\}, \quad \text{falls} \quad \varphi = \quad ?\alpha \text{ und } \alpha \text{ atomar}, ?\neg\alpha, ?(\alpha\wedge\beta), ?(\alpha\rightarrow\beta), ?\bigwedge v\ \delta(v), \alpha\vee\beta \text{ oder } \bigvee v\ \delta(v).$$

$$A\varphi := \begin{cases} \{\alpha\} & \text{falls} \quad \varphi = \neg\alpha, \\ \{?\alpha, ?\beta\} & \text{falls} \quad \varphi = \alpha\wedge\beta, \\ \{(\alpha, ?\beta)\} & \text{falls} \quad \varphi = \alpha\rightarrow\beta, \\ \{?\delta(t);\} & \text{falls} \quad \varphi = \bigwedge v\ \delta(v), \\ \{\alpha, \beta\} & \text{falls} \quad \varphi = ?(\alpha\vee\beta), \\ \{\delta(t);\ \} & \text{falls} \quad \varphi = ?\bigvee v\ \delta(v). \end{cases}$$

Damit sind die Grunddaten aller zu L gehörigen Dialogspiele angegeben, von denen jetzt zwei untersucht werden.

10.1 Definition:

$\Delta^{int} := (L, \mathfrak{M}, T, A_0, A_1, e^{int})$,

$\Delta^{kl} := (L, L, T, A_0, A_1, e^{kl})$, wobei

T die Menge der atomaren Aussagen sei,

$A_0 := A \cup \{(\varphi, 0);\ \varphi \in T\}$, $A_1 := A$ und wobei e^{int} und e^{kl} als 1-optimale Ergebnisfunktionen gewählt seien (d.h. es gilt jeweils 4.3 D0(2) und D1(2)).

Wir nennen Δ^{int} bzw. Δ^{kl} das intuitionistische bzw. das klassische formale Dialogspiel. Die beiden Spiele unterscheiden sich nur dadurch, daß im Gegensatz zu Δ^{kl} in Δ^{int} die Fragen nichtpermanent sind: kann der Proponent eine Frage des Opponenten in einer bestimmten Situation nicht beantworten und stellt statt dessen neue Behauptungen auf, so beginnt damit ein neuer Abschnitt des Dialoges und der Opponent hat das Recht, seine Frage zurückzunehmen (eine Situation ändert sich dagegen nicht wesentlich, wenn der Proponent seinerseits neue Fragen an den Opponenten richtet, um nähere Auskünfte über die vom Opponenten vertretenen Hypothesen zu erhalten und evtl. danach die Frage des Opponenten zu beantworten; vgl. hierzu 11.1).

10.2 Satz: Δ^{int} und Δ^{kl} sind mit * formale Standarddialogspiele. Außerdem gilt $L = {}_{\omega}L$, $\text{br}\ \Delta^{int} = \text{br}\ \Delta^{kl} = 2$ und für alle a: ${}_aG^{int} \subset {}_aG^{kl}$.

10.2 ist unmittelbar bzw. mit 6.11 zu verifizieren. Als nächstes wird die Quasifinitheit der beiden Spiele gezeigt.

Mehrfachsubstitutionen bei Ausdrücken werden im folgenden ungeklammert geschrieben und wir vereinbaren, daß in der Reihenfolge von links nach rechts substituiert wird. Reine Subjektskonstantensubstitutionen der Form $\delta^{t'_0 \ldots t'_n}_{t_0 \ldots t_n}$ sollen durch δS angedeutet werden. Außerdem wird vereinbart:

$(?\sigma)S := ?(\sigma S)$, ΣS entstehe aus Σ durch Anwendung von S auf die Glieder von Σ und für Situationen x sei $xS := (x_0 S, x_1 S, x_2)$.

Damit wird formuliert

10.3 <u>Satz:</u> Es sei $E := \{(x,y)$; es gibt S mit $y = xS\}$. Dann ist E 0- und 1-Erhaltungsrelation in Δ^{int} und Δ^{kl}.

Zum Beweis von 10.3 zeigt man

10.4 <u>Lemma:</u> Für Δ^{int} und Δ^{kl} gilt:

(1) $\Sigma_{\sigma S} = \Sigma_{\sigma}$.

(2) σ sei nicht von der Form $\wedge v\ \delta(v)$ oder $?\vee v\ \delta(v)$. Dann gilt $\sigma\ A_i\ \Sigma$ genau dann, wenn $\sigma S\ A_i\ \Sigma S$.

(3) Es sei $\sigma = \wedge v\ \delta(v)$ (bzw. $?\vee v\ \delta(v)$). Dann gibt es für alle t,S ein t' mit $\sigma\ A\ ?(\delta(v)S^{t'}_v)$ (bzw. $\sigma\ A\ \delta(v)S^{t'}_v$) und $\delta(t)S = \delta(v)S^{t'}_v$.

(4) Es sei $\sigma = \wedge v\ \delta(v)$ (bzw. $?\vee v\ \delta(v)$). Dann gibt es für alle t,S ein t' mit $\sigma\ A\ ?\delta(t')$ (bzw. $\sigma\ A\ \delta(t')$) und $\delta(v)S^t_v = \delta(t')S^t_{t'}$.

10.4(4) kann für jedes zu δ,t,S neue t' gezeigt werden. Mit Hilfe von 10.4 ist 10.3 einfach zu beweisen. 10.3 gilt übrigens für jedes zu L gehörige Dialogspiel, sofern P so gewählt ist, daß 10.4(1) erfüllt ist.

10.5 <u>Satz:</u> Δ^{int} und Δ^{kl} sind quasifinit für 0 und 1.

Zum Nachweis von 10.5 genügt es im wesentlichen, sich zu überlegen, daß in einer Situation x Argumente σ von der Form $\wedge v\ \delta(v)$ bzw. $?\vee v\ \delta(v)$ mit $?\delta(t)$ bzw. $\delta(t)$ und der für x neuen Subjektskonstanten t angegriffen werden können (x' sei der zugehörige Nachfolger von x); jeder andere Angriff auf σ ergibt einen Nachfolger von x, der durch eine Substitution aus x' hervorgeht. Damit ist 10.3 anwendbar.

Nachfolgend werden für Δ^{int} und Δ^{kl} simultan Kalküle K^{int} und K^{kl} angegeben. Dabei seien mit $\Lambda, \Theta, \ldots$ im klassischen Fall beliebige Sequenzen (von L) angedeutet; im intuitionistischen Fall werden dagegen $\Lambda, \ldots$ bzw. $\Theta, \ldots$ als Variablen für Sequenzen verwendet, in denen höchstens eine bzw. keine Frage vorkommt.

10.6 <u>Definition:</u> K^{int} bzw. K^{kl} seien gegeben durch:

(AE) $\Rightarrow \alpha?\alpha.$ (Annahmeneinführung)

(SR) Falls $\Lambda \sqsubseteq \Lambda'$, $\Lambda \Rightarrow \Lambda'$. (Strukturregel)

$(\wedge)$	$\begin{matrix}\Theta?\alpha \\ \Theta?\beta\end{matrix} \Rightarrow \Theta?(\alpha\wedge\beta).$	$\Lambda\alpha \Rightarrow \Lambda\alpha\wedge\beta.$ $\Lambda\beta \Rightarrow \Lambda\alpha\wedge\beta.$
$(\vee)$	$\Theta?\alpha \Rightarrow \Theta?(\alpha\vee\beta).$ $\Theta?\beta \Rightarrow \Theta?(\alpha\vee\beta).$	$\begin{matrix}\Lambda\alpha \\ \Lambda\beta\end{matrix} \Rightarrow \Lambda\alpha\vee\beta.$
$(\rightarrow)$	$\Theta\alpha?\beta \Rightarrow \Theta?(\alpha\rightarrow\beta).$	$\begin{matrix}\Lambda_\alpha?\alpha \\ \Lambda\beta\end{matrix} \Rightarrow \Lambda\alpha\rightarrow\beta.$
$(\neg)$	$\Theta\alpha \Rightarrow \Theta?\neg\alpha$	$\Lambda_\alpha?\alpha \Rightarrow \Lambda\neg\alpha.$
$(\bigwedge)$	$\Theta?\delta(t) \Rightarrow \Theta?\bigwedge v\ \delta(v)$, falls t nicht in $\Theta?\bigwedge v\ \delta(v)$ vorkommt.	$\Lambda\delta(t) \Rightarrow \Lambda \bigwedge v\ \delta(v).$
$(\bigvee)$	$\Theta?\delta(t) \Rightarrow \Theta?\bigvee v\ \delta(v).$	$\Lambda\delta(t) \Rightarrow \Lambda \bigvee v\ \delta(v)$, falls t nicht in $\Lambda \bigvee v\ \delta(v)$ vorkommt.

K^{int} bzw. K^{kl} unterscheidet sich von der intuitionistischen bzw. der klassischen Version von G3 in Kleene [6] im wesentlichen nur durch die Wiedereinführung der Strukturregel. Der Aufteilung der Argumente in Aussagen und Fragen entspricht in G3 die Verwendung von Sequenzen mit Antezedens und Sukzedens.

10.7 <u>Satz:</u> Es sei $\alpha \not\in T$ oder $\alpha \in \Theta$. Dann gilt:

(1) $(\Theta,\alpha,0) \in G^{int}$ genau dann, wenn $\Theta?\alpha$ in K^{int} herleitbar ist.

(2) $(\Theta,\alpha,0) \in G^{kl}$ genau dann, wenn $\Theta?\alpha$ in K^{kl} herleitbar ist.

Aus 10.7 erhält man insbesondere, daß α in Δ^{int} bzw. Δ^{kl} wahr ist genau dann, wenn $?\alpha$ in K^{int} bzw. K^{kl} herleitbar ist (Korrektheit und Vollständigkeit von K^{int} bzw. K^{kl}).

Der Beweis von 10.7 ist aufgrund der Ergebnisse von §9 ohne Schwierigkeit durchzuführen. Für die Richtung von links nach rechts nutzt man 9.10(1) aus und zeigt dann induktiv, daß jede in H^{int} bzw. H^{kl} herleitbare Sequenz Λ in dem ähnlich aufgebautem Kalkül K^{int} bzw. K^{kl} herleitbar ist; hierbei ist im Fall $\Lambda = \textcircled{H}?\bigwedge v\ \delta(v)$ (bzw. $\textcircled{H}\bigvee v\ \delta(v)$) zu beachten, daß die Variablenbedingung in ($\bigwedge$) (bzw. ($\bigvee$)) erfüllbar ist, weil immer eine zu Λ neue Subjektskonstante gefunden werden kann.

Die Richtung von rechts nach links zeigt man induktiv über den Aufbau von K^{int} bzw. K^{kl} und kann 9.8 und 9.7 anwenden; hierbei ist zu beachten, daß im Fall $\textcircled{H}?\bigwedge v\ \delta(v)$ (bzw. $\textcircled{H}\bigvee v\ \delta(v)$) aufgrund der Variablenbedingung in ($\bigwedge$) (bzw. ($\bigvee$)) mit Hilfe von 10.3 bewiesen werden kann, daß alle Prämissen in 9.8(3) erfüllt sind.

Anmerkungen

a.) Die obige Darstellung des klassischen und intuitionistischen Dialogspiels ist gegenüber Lorenz [7],[8] u.a. noch in folgenden drei Punkten vereinfacht: Erstens werden von vornherein Situationen betrachtet, welche nur die für den Dialogfortgang notwendige Information enthalten ("reduzierte Situationen"). Zweitens werden dort statt "potentieller" Argumente wieder die ihnen zugrundeliegenden Fragen aufgeführt. Drittens wird nur eine Art von Fragen (Zweifel) betrachtet; dies hat zur Folge, daß z.B. beim Angriff gegen $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)$ mit $?(\beta\vee\gamma)$ sofort eine Entscheidung für β oder γ gefordert wird, während bei Lorenz noch Zwischenschritte vorgesehen sind.

b.) K^{kl} bzw. K^{int} entsprechende Kalküle mit signierten Ausdrücken findet man in Smullyan [14] bzw. in M.C. Fitting: Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, Amsterdam 1969. Im Vergleich mit der dortigen Interpretation ist die dialogische Deutung von Sequenzen eleganter.

c.) Ebenso leicht wie an K^{kl} läßt sich Δ^{kl} mit Hilfe von 9.8 auch an andere klassische Sequenzenkalküle anschließen (z.B. an den Kalkül in H. Hermes: Einführung in die mathematische Logik, Stuttgart ^{3}1972). Hierbei ist nur zu beachten, daß in Δ^{kl} eine Frage $?\alpha$ nahezu dieselbe Funktion wie die Negation $\neg\alpha$ hat und durch sie ersetzbar ist.

§11 Beispiele

Zum Abschluß soll anhand von Beispielen die unterschiedliche Leistungsfähigkeit einiger formaler Dialogspiele demonstriert werden.

L, T, A_0 und A_1 seien wie in §10 definiert. Mit $p, q, \ldots$ werden im folgenden jeweils nullstellige Prädikatenkonstanten (d.s. atomare Aussagen) angedeutet.

11.1 Jeder Dialog um $\underline{\neg\neg p \to p}$ in Δ^{int} und Δ^{kl} beginnt folgendermaßen: $(0, \neg\neg p \to p, 0)$, $(\neg\neg p\ ?p, 0, 1)$, $(\neg\neg p\ ?p, \neg p, 0)$. In Δ^{int} geht der Dialog mit $(\neg\neg p\ p, 0, 1)$ weiter (der Opponent nimmt seine Frage ?p zurück) und danach kann der Proponent den Dialog nicht mehr gewinnen.

In Δ^{kl} ist der Dialog fortsetzbar mit $(\neg\neg p\ ?p\ p, 0, 1)$ und $(\neg\neg p\ ?p\ p, p, 0)$ und wird somit vom Proponenten gewonnen. Da gleichzeitig für den Opponenten keine andere Dialogführung möglich war, ist $\neg\neg p \to p$ in Δ^{kl} sogar wahr. Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß $\underline{p \vee \neg p}$ in Δ^{kl} wahr ist, in Δ^{int} dagegen nicht. In diesen beiden Beispielen ist schon der wesentliche Unterschied von Δ^{int} und Δ^{kl} begründet.

Als Beispiele für Dialoge in Δ^{int}, wo über eine längere Zeit eine Frage des Opponenten unbeantwortet bleibt, ohne daß sie zurückgenommen werden darf, seien genannt die Dialoge um $\underline{(p \wedge p') \vee (q \wedge q') \to p \vee q'}$ oder um $\underline{\alpha := p \wedge q \to \beta}$, wobei $\beta := ((p \to (q \to q')) \to q')$.

11.2 Verwendet man statt 1-optimaler Ergebnisfunktionen wie in Δ^{int} und Δ^{kl} begrenzte Ergebnisfunktionen, so verringern sich die Gewinnchancen für den Proponenten erheblich. Δ sei jetzt ein Dialogspiel, für dessen Ergebnisfunktion 4.3 D0(1) und D1(1) gilt (ob $P = L$ oder $P = \mathfrak{A}$ ist, spielt in den folgenden Beispielen keine Rolle mehr). In Δ ist z.B. die Aussage α aus 11.1 nicht wahr, weil $p \wedge q$ nur einmal angegriffen werden kann. Dagegen ist α in den zu Δ gehörigen 1,n- und n-Spielen wahr (vgl. §7), sofern $n > 1$.

11.3 Für Δ sei die Voraussetzung von 11.2 erfüllt und es sei

$x := (\neg\beta, \neg\neg p \to \neg q, 0)$ mit dem β aus 11.1,

$y := (\neg\neg p \to \neg q\ p \wedge q, 0, 1)$,

$z := (\neg\ \beta\ p\wedge q, 0, 1)$.

Man zeigt, daß x und y in jedem zu Δ gehörigen n- Spiel Gewinnsituationen für den Proponenten sind, z aber nicht. Damit sind dann der Schnittsatz für die n- Spiele von Δ und eine entsprechende Behauptung in Lorenz [8] widerlegt. Man beachte, daß es in dem Beispiel nicht darauf ankommt, welche "formale Primregel" verwendet wird (vgl. dazu die Bemerkung a.) in §8). Ein Gegenbeispiel für den Schnittsatz, das im Fall $n > 1$ gleichermaßen für die 1,n- und n- Spiele gilt, ist gegeben durch:

$$x := (\ p\wedge q,\ \neg\neg(p\wedge q), 0),$$
$$y := (\ \neg\neg(p\wedge q)\ p \to (q \to q')\ \neg q',\ 0\ ,\ 1),$$
$$z := (\ p\wedge q\ p \to (q \to q')\ \neg q',\ 0\ ,\ 1).$$

Für Δ selbst kann der Schnittsatz jedenfalls bei Verwendung der "formalen Primregel" in der Version (i) von §8 bewiesen werden.

11.4 Ersetzt man L durch eine ausdrucksreichere Sprache und läßt beispielsweise unendliche Konjunktionen von Aussagen zu, dann geht die Eigenschaft der Quasifinitheit verloren und eine Konstruktion von m,n- Spielen ist nicht mehr ausreichend. Beides kann man sich an dem folgenden Beispiel überlegen.

$p_0, p_1, \ldots$ sei eine unendliche Folge von nullstelligen Prädikatenkonstanten und es werde gesetzt:

$$q_0 := p_0 \to q', \quad q_{n+1} := p_{n+1} \to q_n.$$

Man untersucht nun den Dialog um $\alpha := q' \to (\ \bigwedge_{n\in\omega} p_n \to \bigwedge_{n\in\omega} q_n)$. Dabei werde die Argumenterelation in natürlicher Weise erweitert.

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann,H.: Transfinite Zahlen.
Berlin - Heidelberg - New York ²1967.

[2] Berge, C.: Théorie Générale des Jeux à n Personnes.
Paris 1957.

[3] Drieschner, R.: Untersuchungen zur dialogischen Deutung der Logik. Dissertation Hamburg 1963.

[4] Kamlah,W.;Lorenzen,P.: Logische Propädeutik.
Mannheim 1967.

[5] Kindt, W.: Dialogspiele. Diplomarbeit Freiburg 1970.

[6] Kleene, S.C.: Introduction to Metamathematics.
Amsterdam ⁴1964.

[7] Lorenz, K.: Arithmetik und Logik als Spiele.
Dissertation Kiel 1961.

[8] Lorenz,K.: Dialogspiele als semantische Grundlage von Logikkalkülen. Archiv f. Math. Logik u. Grundlagenf. 11(1968).

[9] Lorenzen,P.: Logik und Agon. Atti del XII Congr. Int. di Filosofia (Venedig 1958) Bd 4. Firenze 1960.

[10] Lorenzen,P.: Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium. Infinistic Methods, Proc. of the Symp. on Found. of Math. (Warschau 1959). Oxford 1961.

[11] Lorenzen,P.: Metamathematik. Mannheim 1962.

[12] Lorenzen,P.: Formale Logik. Erw.Auflage. Berlin ³1967.

[13] Lorenzen,P.: Dialogkalküle. Manuskript 1971.

[14] Smullyan,R.M.: First - Order Logic.
Berlin - Heidelberg - New York 1968.

[15] Stegmüller,W.:Remarks on the Completeness of logical systems relative to the validity - concepts of P. Lorenzen and K. Lorenz. Notre Dame Journ. of Formal Logic 5(1964).