KoLiBri*

Arbeitsbericht Nr. 35

Formulierungsalternativen für Mengen- und Strukturtheorie

Walther Kindt

DFG-Forschergruppe Kohärenz
Fakultät für Linguistik und Literaturwissenschaft der Universität Bielefeld

*mit dem kohärenzstiftenden r

Formulierungsalternativen für

Mengen- und Strukturtheorie

Walther Kindt

1991

Kolibri-Arbeitsbericht Nr. 35
DFG Forschergruppe "Kohärenz"
Fakultät für Linguistik und Literaturwissenschaft
Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Aus Anwendungen der Mengentheorie in der Linguistik ergibt sich der Wunsch nach bestimmten Formulierungsalternativen. Im vorliegenden Bericht werden zwei solcher Alternativen diskutiert. Zum einen eine **Verallgemeinerung** des üblichen **Relationskonzepts**, zum anderen eine **Berücksichtigung nichtextensionaler Objekte**.

In der Mengentheorie werden nur positionsabhängig repräsentierte Relationen betrachtet. Dies ist einerseits für symmetrische Relationen nicht zweckmäßig und andererseits zu restriktiv für 'rollenabhängige' Beziehungen, wie sie in natürlichen Sprachen vorkommen. Die Einführung eines verallgemeinerten Relationskonzepts bietet über solche Anwendungsaspekte hinaus verschiedene Vorteile und zeigt z. B. den systematischen Stellenwert unterschiedlicher Definitionen für das geordnete Paar (Hausdorff, Kuratowski) auf.

Die Verwendung der Elementbeziehung als Grundbegriff der Mengentheorie basiert auf einer atomistischen Vorstellung, die problematisch und zumindest in vielen Kontexten unnötig ist. Als Alternative ist die Verwendung der Teil-Ganze-Beziehung als Grundbegriff in Betracht zu ziehen; im Bereich extensionaler Objekte stimmt diese Beziehung allerdings mit der Teilmengen- bzw. Teilklassenbeziehung überein. Diese Alternative trägt einerseits der in der Mengentheorie mit Urelementen intendierten Möglichkeiten Rechnung, daß neben der leeren Menge andere Objekte existieren, die keine Elemente besitzen. Andererseits können solche Objekte trotzdem in Teile zerlegbar sein und zugehörige mengentheoretische Konstruktionen bleiben anschließbar. Zu diskutieren sind Auswirkungen auf die Axiomatisierung und weitere Konsequenzen.

Die beiden vorgeschlagenen Alternativen sind für sehr viele Fälle formaler Modellierungen in der Linguistik von Vorteil. Speziell wird dies am Beispiel von Sprachverarbeitungssystemen gezeigt. Eine besondere Bedeutung kommt auch der Einführung eines nichtextensionalisierten Intensionskonzepts zu.

1. Vorbemerkungen

Der Informationsfluß zwischen Logik und Linguistik verläuft i.a. einseitig in dem Sinne, daß versucht wird, Beschreibungsinstrumentarien und Theorien der Logik in der Linguistik nutzbringend einzusetzen. Die Erfolge dieses Wissenstransfers sind unbestreitbar groß. Viel weniger hat der Kontakt zwischen den beiden Disziplinen in jüngster Zeit dazu geführt, daß aus Anlaß linguistischer Modellierungsinteressen Modifikationen oder Erweiterungen an logischen Theorien vorgenommen wurden. Eine besonders wichtige Erweiterung würde in der systematischen Berücksichtigung dynamischer Phänomene[1] wie z. B. der lokalen Kontextabhängigkeit des Sprachgebrauchs bestehen (im Falle eines mehrdeutigen Zeichengebrauchs findet man in mathematischer Literatur häufig nur den Hinweis "wenn dies nicht zu Mißverständnissen führt,...) Allerdings stellt sich die Frage, wer einen Transfer in der umgekehrten Richtung leisten soll. Logiker sind häufig zu wenig an den spezifischen Eigenschaften natürlicher Sprachen interessiert und Linguisten sind kaum in der Lage, logische Theorien kreativ weiter zu entwickeln. Insofern bedarf es einer Diskussion von Beispielen, an denen positiv gezeigt werden kann, daß die Aufnahme linguistischer Modellierungsinteressen auch zu innerlogisch relevanten Theoriefortschritten führen kann. Im folgenden möchte ich zwei solcher Beispiele zur Diskussion stellen.[2]

---

1 Vgl. hierzu Kindt 1991

2 Eine erste Version meiner Vorschläge habe ich auf dem Colloquium Logicum der DVMLG im Juni 1990 in Bielefeld vorgetragen. Für konstruktive Hinweise danke ich insbesondere A. Oberschelp.

2. Relationstheorie

Für praktische Anwendungen ist nach meinen Erfahrungen eine Formulierung der Mengentheorie etwa im Rahmen der Kieler Klassentheoretischen Logik LC (vgl. Glubrecht/Oberschelp/Todt 1983 oder Oberschelp 1990) besonders zweckmäßig, weil neben der Elementbeziehung auch die Klassenbildung als Grundbegriff aufgefaßt wird. Vorgesehen sind dort außerdem schon die Betrachtung nichtextensionaler Objekte und die Einführung unterschiedlicher Konzepte des geordneten Paars (als Grundlage für das Relationskonzept). Nach dem im Abstract skizzierten Argument erweist sich aber die Einschränkung der Betrachtung auf positionsabhängige Relationen als Nachteil für die Linguistik. Der Ansatz, ein verallgemeinertes Relationskonzept einzuführen, zieht eine innerlogisch interessante grundlagentheoretische Diskussion nach sich.

2.1 Definition:

X ist **extensional** $:\leftrightarrow X = \{u: u \in X\}$[3]

Extensionale Mengen können aufgefaßt werden als Repräsentationen von Beziehungen. Dies führt zu folgendem verallgemeinerten Relationskonzept.

2.2 Definition:

r ist eine **Relation:** $\leftrightarrow$ r ist extensional

$\wedge\ \forall u \in r\ (u \neq 0 \wedge u$ ist extensional).

---

[3] Mit Großbuchstaben notierte Terme referieren auf Individuen oder Teilbereiche des Individuenbereichs, mit Kleinbuchstaben notierte Terme referieren auf Individuen.

Als Spezialfall diskutieren wir zunächst den Fall 2-stelliger Relationen.

2.3 Definition Paarmenge aus v und w:

$v \otimes w := \{u: \exists\, v' \epsilon v, w' \epsilon w\ (u = \{v', w'\})\}$.

2.4 Definition:

r ist eine **2-stellige elementare Relation:**

$\leftrightarrow$ r ist eine Relation $\wedge\ \exists v,w\ (r \subset v \otimes w)$.

2.5 Definition:

u steht bei r **in elementarer Beziehung** zu u'

(abgekürzt $u\, r_0 u'$): $\leftrightarrow \{u,u'\} \epsilon r$.

2.6 Theorem (Symmetrie):

r sei eine 2-stellige elementare Relation. Dann gilt:

$\forall u,u'\ (u r_0 u' \rightarrow u' r_0 u)$

Symmetrische Beziehungen sind also besonders einfach durch elementare Relationen darstellbar. Für natürliche Sprachen ist dies insbesondere von Vorteil für die Repräsentation von Beziehungen wie in

(a) *Maria und Hans sind befreundet.*

Geht man zur Betrachtung nichtsymmetrischer Beziehungen über, dann sind in natürlichen Sprachen ebenso wie in der Mathematik positionsabhängige Beziehungen wichtig.

(b) *Hans ist größer als Karl.*

In den meisten Fällen kommt es in einer Sprache wie dem Deutschen nicht auf die Position, sondern auf die Rolle von Satzgliedern für die Beziehungsinterpretation an.

(c) *Der Mann schreibt den Brief.*
(d) *Den Brief schreibt der Mann.*
(e) *Der Brief schreibt den Mann.*

Bei der Besetzung 2-stelliger Beziehungen können auch unterschiedliche Rollen mit entsprechend unterschiedlicher Beziehungsinterpretation verwendet werden (vgl. (c) und (f)).

(f) *Der Mann schreibt dem Minister*

Weitere Besonderheiten sind die nicht festgelegte Stellenzahl und die Möglichkeit mehrerer Beteiligter pro Rolle.

(g) *Der Mann schreibt dem Minister einen Brief.*
(h) *Der Mann schreibt dem Minister und dem Kanzler einen Brief.*

Aufgrund der angeführten Daten ist die Einführung rollenabhängiger Relationen als Verallgemeinerung n-stelliger Relationen naheliegend. Wenn man hierzu die bekannten Definitionen für geordnete Paare (Hausdorff 1914, Wiener 1914, Kuratowski 1921, Quine 1940) betrachtet, dann scheint die Definition von Hausdorff ein geeigneter Ansatzpunkt für die gewünschte Einführung rollenabhängiger Relationen zu sein. Aus gleich ersichtlichen Gründen modifizieren wir die ursprüngliche Definition von Hausdorff zu

2.7 Definition geordnetes Paar (nach Hausdorff):

$<u,u'>_H: = \{\{u,u'\}, \{u,0\}, \{u',1\}\}.$

Grundidee dieser Definition ist : zu der Information, daß eine Paarbeziehung (repräsentiert durch eine 2-stellige elementare Relation) vorliegt, kommt eine Numerierung der zueinander in Beziehung stehenden Objekte hinzu, die durch eine elementare Nummerierungsfunktion codiert wird. Durch die Einfügung des bei Hausdorff nicht vorgesehenen ungeordneten Paars $\{u,u'\}$ wird eine natürliche Einbettung von 2-stelligen elementaren Relationen in den Bereich der 2-stelligen Hausdorff-Relationen erreicht.

2.8 Definition:

f ist eine **elementare Nummerierung** von v:

$\leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ (f \subset n \otimes v\ \wedge \forall u \in v\ \exists m \in n\ (\{m,u\} \in f)$

$\wedge \forall m \in n,\ u \in v, u' \in v\ (\{m,u\} \in f \wedge\ \{m,u'\} \in f \rightarrow u\ =\ u')).$

Dabei wird mit $\mathbb{N}$ - wie üblich - die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

2.9 Definition:

r ist eine **2-stellige Hausdorff-Relation:**

$\leftrightarrow$ r ist eine Relation $\wedge \forall u \in r \exists u',u'',f\ (u\ =\ \{\{u',u''\}\} \cup f$

$\wedge\ (f\ =\ 0 \vee f$ ist elementare Nummerierung von $\{u',u''\})).$

2.10 Definition:

u' **steht bei** r **in Hausdorff-Beziehung** zu u"

(abgekürzt $u' r_H u''$): $\leftrightarrow \exists u \epsilon r \, (u = \{\{u',u''\}\} \vee u = \langle u',u'' \rangle_H)$.

An das gewünschte verallgemeinerte positions-/rollenabhängige Relationskonzept bzw. an das zugehörige n-Tupelkonzept sind jetzt folgende Forderungen zu stellen.

(1) Statt nur natürlicher Zahlen können beliebige Mengen als Rollenmerkmale verwendet werden.

(2) Relationen mit variabler, aber beschränkter Rollenzahl sind zuzulassen.

(3) Bei jeder Beziehungskonstellation können mehrere bzw. endlich viele Beteiligte pro Rolle vorkommen.

Die Realisierung dieser drei Forderungen ist für die Modellierung natürlicher Sprachen wichtig. Die nachfolgenden Forderungen sind von genereller Bedeutung und schon für die n-Tupeldefinition relevant.

(4) Als Ordnungsmerkmale von Tupeln werden die internen natürlichen Zahlen verwendet (im Gegensatz zu der üblichen Vorgehensweise).

(5) Der Statusunterschied zwischen Rollenmerkmalen und den zueinander in Beziehung stehenden Objekten wird repräsentiert.

(6) n- und m-Tupel sind für $n \neq m$ generell voneinander unterscheidbar.

(7) $\langle u_0,\ldots,u_{n-1} \rangle = \langle u'_0,\ldots,u'_{n-1} \rangle \leftrightarrow \forall m \epsilon n \, (u_m = u'_m)$.

(8) Es gibt eine natürliche Einbettung elementarer Relationen in den Bereich rollenabhängiger Relationen.

Der einfachste Ansatz zur Erfüllung von (4) und (8) wäre gegeben durch:

$v := \{u_o,\ldots,u_{n-1}\}$, $f := \{\{0,u_o\},\ldots., \{n-1,u_{n-1}\}\}$
und $<u_o,\ldots,u_{n-1}>_A := v \cup f$.

Grundsätzliche Schwierigkeiten für die Erfüllung der Forderungen treten bei diesem Ansatz (und anderen ähnlichen Ansätzen) im Fall $v \cap n \neq 0$ auf. Speziell ist (7) schon für $n=2$ nur unter Voraussetzung des Fundierungsaxioms[4] nachweisbar und für $u \geq 3$ überhaupt nicht. Für $u \geq 3$ gilt nicht einmal die Trennbarkeitsforderung (6), wie folgendes Beispiel zeigt.

$$<0,2>_A = \{0,2, \{0,0\}, \{1,2\}\} = <0,2,1>_A.$$

Auch folgender, das Hausdorff Paar von 2.7 verallgemeinernder Ansatz führt nicht generell zum Erfolg.

$$<u_o,\ldots,u_{n-1}>_H: = \{v\} \cup f.$$

Schwierigkeiten bereitet wieder der Fall $v \cap n \neq o$. Speziell ist die Trennbarkeitsforderung nicht erfüllt wegen

$$<2,0>_H = \{\{2,0\}, \{0,2\}, \{1,0\} = <2,0,0>_H.$$

4 Für eine Formulierung dieses Axioms vgl. etwa Ebbinghaus 1977 oder Glubrecht et al. 1983.

Außerdem existiert für $n \geq 3$ evtl. keine elementare Nummerierung für v (vgl. $<0,0,1>_H = \{\{0,1\}, \{0,0\}, \{1,0\}, \{2,1\}\}$).

Die Inadäquatheit der beiden angeführten Definitionsansätze basiert maßgeblich auf der Symmetrie elementarer Nummerierungen. Eine einfache Art, die Symmetrieeigenschaft aufzugeben, wird in den Paardefinitionen von Kuratowski und von Quine realisiert. Wegen der wünschenswerten Einbettung elementarer Relationen ist die Definition von Kuratowski für unseren Zweck zu bevorzugen.

2.11 Definition geordnetes Paar (Kuratowski):

$$<u,u'>_K := \{\{u,u'\}\} \cup \{\{u\}\}.$$

Hier wird im Sinne der obigen Theorie als einfachste Möglichkeit einer Strukturierung von $\{u,u'\}$ die Hinzufügung einer (einstelligen) elementaren Relation zur Unterscheidung der beiden Komponenten des geordneten Paars gewählt.

2.12 Definition:

r ist eine **einstellige elementare Relation** über v $:\leftrightarrow \exists u \epsilon v$ mit $r = \{\{u\}\}$.

2.13 Definition:

r ist eine **2-stellige Kuratowski-Relation**:

$\leftrightarrow$ r ist eine Relation $\wedge\ \forall u \epsilon r\ \exists u',u'',r'\ (u = \{\{u',u''\}\} \cup r'$

$\wedge (r' = 0 \vee r'$ ist eine einstellige elementare Relation über $\{u',u''\}))$.

2.14 Definition:

u' steht bei r **in Kuratowski-Beziehung** zu u'

(abgekürzt: $u' \, r_K \, u''$): $\leftrightarrow \exists \, u \epsilon r \; (u = \{\{u',u''\}\} \vee u = \langle u',u'' \rangle_K)$.

2.15 Definition Menge der Kuratowski-Paare:

$v \times w := \{u: \exists v' \epsilon v, w' \epsilon w \; (u = \langle v', w' \rangle_K)\}$.

2.16 Definition:

f ist eine **Kuratowski-Nummerierung** von v:

$\leftrightarrow \exists n \epsilon \mathbb{N} \; (f \subset n \times v \wedge \forall u \epsilon v \exists m \epsilon n \; (\langle m,u \rangle_K \epsilon f)$

$\wedge \forall m \epsilon n, u \epsilon v, u' \epsilon v \; (\langle m,u \rangle_K \epsilon f \wedge \langle m,u' \rangle_K \epsilon f \rightarrow u = u'))$.

2.17 Definition n-Tupel:

$\langle u_o, \ldots, u_{n-1} \rangle := \langle v, \{f\} \rangle_K$, wobei $v := \{u_o, \ldots, u_{n-1}\}$

und f ist eine Kuratowski-Nummerierung von v.

Es ist klar, daß diese Definition die obigen Forderungen (4) - (8) wie gewünscht erfüllt. Zugleich ist die Definition so angelegt, daß **n-Tupel als Strukturen** im Sinne des üblichen Strukturbegriffs gelten können (mit v als Grundbereich und f als einziger strukturierender Relation). Die weitere Entwicklung der anvisierten Relationstheorie ist nun leicht zu vollziehen.

2.18 Definition:

r ist eine (allgemeine) **Relation mit n singulär besetzten Positionen:** ist eine Relation

$\wedge \; \forall \, u \epsilon r$ u ist n-Tupel.

Bei singulärer Besetzung der Position einer Relation wird in natürlichen Sprachen der **Singular** verwendet. Sollen gemäß Forderung (3) mehrere Beteiligte in einer Position/Rolle zugelassen werden, so ist die Eindeutigkeitseigenschaft der Kuratowski-Nummerierung aufzugeben. Der Übergang zu rollenabhängigen Relationen gemäß Forderung (1) wird durch Verallgemeinerung des Definitionsbereichs der strukturierenden Relation erreicht; dabei braucht gemäß Forderung (2) nicht bei jedem Element einer Relation derselbe Definitionsbereich realisiert zu sein.

3. Nichtatomistische Mengentheorie

Wir betrachten das **Axiomensystem Z von Zermelo** im Rahmen der klassentheoretischen Logik LC (Glubrecht/Oberschelp/Todt 1983). Neben den bekannten Axiomen wie Paarmengenaxiom, Vereinigungsmengenaxiom, Aussonderungsschema etc. kommt hinzu das

Axiomenschema der Klassenbildung:

$\forall u(u\in \{u:A\} \leftrightarrow A)$.

Außerdem wird das Extensionalitätsaxiom für Klassen formuliert.

Extensionalitätsschema:

$\forall u\ (u\in X \leftrightarrow u\in Y) \rightarrow X = Y$.

Ein erster Vorteil dieser Formulierung der Mengentheorie besteht in einer Vereinfachung der Axiome durch Verwendung definierter Begriffe. Wir zeigen dies am Beispiel des Vereinigungsmengenaxioms. Vor Formulierung des Axioms werden folgende Definitionen eingeführt.

3.1 Definition Universum:

$U := \{u: u = u\}$

3.2 Definition große Vereinigung:

$\bigcup v := \{u: \exists w\ (w \in v \land u \in w)\}$.

Unter Voraussetzung dieser Definition wird das Vereinigungsmengenaxiom als folgende Abgeschlossenheitseigenschaft formuliert.
Vereinigungsmengenaxiom: $\forall v \bigcup v \in U$.

Aus dem Extensionalitätsschema ergibt sich insbesondere, daß alle Objekte (des Universums) extensional im Sinne von Definition 2.1 sind. Diese stark einschränkende Voraussetzung soll aufgegeben werden. Auch in der Mengentheorie mit Urelementen (vgl. Barwise 1975) wird die Extensionalitätsforderung abgeschwächt; es gibt Objekte (Urelemente), die kleine Elemente haben und trotzdem von der leeren Menge verschieden sind. Mein Vorschlag ist noch weitgehender. Im Individuenbereich sollen auch nicht-extensionale Objekte zugelassen werden, die nicht den Status von Urelementen haben, aber Zerlegungen im Sinne der Teil-Ganze-Beziehung ermöglichen. Für die Semantik natürlicher Sprachen ist diese Möglichkeit z. B. im Zusammenhang mit der Betrachtung sogenannter Massen-Nomina wie dem Nomen *Wasser* wichtig (vgl. die Sprechweise in *Sie schüttete eine Menge Wasser in den Topf).* Bei einer atomistischen Sichtweise kann man davon ausgehen, daß jede Menge Wasser als Elemente H_2O-Moleküle besitzt. Diese Vorstellung ist aber für die Strukturierung von Realität im Alltag i.a. irrelevant. Außerdem sind Moleküle ja selbst weiter zerlegbar. Anstelle der Zerlegung von Objekten in Elemente sind Zerlegungen im Sinne einer Teilbeziehung von Bedeutung (*Sie schüttet einen Teil des Wassers in den Ausguß*). Hieraus resultiert die Idee der Formulierung einer **Mengentheorie**, in der statt der Elementbeziehung eine **Teilbeziehung Grundbegriff** ist.

Die Idee, eine formale Theorie der Teil-Ganze-Beziehung zur Grundlegung der Mathematik zu entwickeln, geht zurück auf Lesniewski (1929) und hat zu unterschiedlichen Axiomatisierungsversuchen für eine **Mereologie** geführt (vgl. u.a. Leonard/Goodman 1940, Bunt 1985, Simons 1987). Die zugehörigen Kontroversen über die Angemessenheit einzelner Axiome sind im vorliegenden Diskussionszusammenhang ohne Belang. Denn hier geht es vorerst nur darum, die Mengentheorie von Zermelo in minimaler Weise so abzuändern, daß die Teil-Ganze-Beziehung als Grundbegriff verwendet werden kann, daß ansonsten aber eine konservative Theorieerweiterung vorliegt. Teilweise hat auch der Ansatz von Bunt (1985) eine ähnliche mengentheoretische Zielsetzung, seine Axiomatisierungsvorschläge sind aber mereologisch viel aufwendiger und sollen hier nicht problematisiert werden.

Im folgenden wird nun dargestellt, wie eine geeignete Mengentheorie (notiert als **Z***) entwickelt werden kann und in welchem Verhältnis sie zur Zermeloschen Theorie steht. In **Z*** werden Klassenbildung und Teilbeziehung (notiert durch "$\subset$" zunächst die Eigenschaft der Halbordnung gefordert.

Axiomenschema der Halbordnung:

$$X \subset X \wedge (X \subset Y \wedge Y \subset X \rightarrow X = Y)$$
$$\wedge (X \subset Y \wedge Y \subset Z \rightarrow X \subset Z).$$

Weitere verbandstheoretische Eigenschaften von $\subset$ ergeben sich aus anderen Axiomen (Existenz der Null, Vollständigkeit der Halbordnung). Zunächst wollen wir aber diskutieren, was mit dem Extensionalitätschema in **Z*** geschieht. Zusammen mit dem Klassenbildungsschema soll es nämlich in verschiedene Eigenschaften aufgelöst werden.

Schema der Objektextensionalität:

$X = \{u: u \in X\}$.

Schema der Klassenbildungsextensionalität:

$\{u:A\} = \{u:B\} \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$.

Für **Z** sind diese beiden Axiomenschemata aus Klassenbildungs- und Extensionalitätsschema ableitbar. Umgekehrt ist das Extensionalitätsschema mithilfe der Schemata der Objektextensionalität und der Klassenbildungsextensionalität ableitbar (einfache Beweise!). In **Z*** wird nun die Geltung der Objektextensionalität aufgegeben, die Klassenbildungsextensionalität aber beibehalten bzw. wegen der Antisymmetrie von $\subset$ noch abgeschwächt. Insgesamt werden nach Einführung der

3.3 Definition Elementbeziehung:

$u \in X :\leftrightarrow \{u\} \subset X$.

drei Eigenschaften gefordert.

Schema der Klassenextensionalität:

$K = \{u: u \in K\}$.[5]

[5] Mit K, L,... werden Terme notiert, die durch Anwendung der Klassenbildung definiert sind.

Klassenanteilschema:

$\forall v \ \{u: u \epsilon v\} \subset v.$

Schema der Teilklassenbestimmung:

$\{u:A\} \subset \{u:B\} \leftrightarrow (A \rightarrow B).$

Bis auf das Vereinigungsmengenaxiom werden die übrigen Axiome von **Z** (Paarmengen-, Aussonderungs-, Potenzmengen-, Unendlichkeitsaxiom) nach **Z*** übernommen. Das Vereinigungsaxiom wird abgelöst durch das

Supremumsaxiom:

$\forall v \ \exists w \ \forall u \epsilon v \ (u \subset w \ \wedge \forall w' \ (\forall u' \epsilon v \ (u' \subset w') \rightarrow w \subset w')).$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß sich **Z*** von **Z** nur durch die Möglichkeit der Existenz nichtextensionaler Individuen unterscheidet.

Eigenschaft der Individuenextensionalität (IEXT):

IEXT: $\leftrightarrow \forall v \ \{u: u \epsilon v\} = v.$

3.4 Theorem: Aus **Z*** und **IEXT** ist **Z** ableitbar und umgekehrt sind **Z*** und **IEXT** aus **Z** ableitbar; d.h. formal notiert:

$\mathbf{Z^*} + \mathbf{IEXT} \vdash \mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z} \vdash \mathbf{Z^*} + \mathbf{IEXT}.$

Fazit: Man kann also ohne Schwierigkeiten eine nichtatomistische Mengenlehre als Rahmentheorie etwa für die Semantik natürlicher Sprachen verwenden, ohne dabei auf die Resultate der üblichen Mengentheorie für extensionale Objekte zu verzichten. Umgekehrt lassen sich bei der

Modellierung bestimmter semantischer Phänomene Nachteile vermeiden, die bei einer Rekonstruktion von nichtextensionalen Objekten im Rahmen der atomistischen Mengentheorie auftreten.

4. Strukturtheoretische Konsequenzen

Neben den schon zur Motivation der Alternativenentwicklung diskutierten linguistischen Beispielen sollen noch einige strukturtheoretische Konsequenzen der modifizierten Mengentheorie skizziert werden.

Auf eine kurze Formel gebracht, beschäftigt sich die Linguistik mit sprachlichen Strukturen und deren Beziehungen zu Strukturen nonverbaler Realitätsbereiche. Dabei wird unter einer Struktur üblicherweise ein Bereich von Individuen verstanden, zu dem bestimmte, über den Individuen definierte Relationen gegeben sind. Dieses **Strukturkonzept** kann aufgrund der Überlegungen von Abschnitt 3 folgendermaßen **verallgemeinert** werden. Und zwar lassen wir zunächst statt nur extensionalen Individuenbereichen beliebige Objekte als **Träger** von Strukturen zu. Außerdem dürfen als **strukturierende Relationen** beliebige Beziehungen über Teilen des Trägers gewählt werden. Die Vorteile des so verallgemeinerten Strukturkonzepts zeigen sich z. B. bei der Analyse von Sätzen.

(i) *Dieser Satz besteht aus neun Wörtern und achtundfünfzig Buchstaben.*

Dieser Satz beschreibt bei selbstreferenter Interpretation auf zwei

Ebenen, nämlich auf der Buchstaben- und auf der Wortebene, seine eigene Struktur. Bei Verwendung des üblichen Strukturbegriffs muß man diese beiden Ebenen voneinander trennen und zwar wird eine solche Trennung i.a. dadurch erreicht, daß man sagt, daß Wörter die Elemente von Sätzen und Buchstaben die Elemente von Wörtern seien. Auf diese Weise wird eine extensionale Individuenhierarchie konstruiert, die wegen der Verwendung der Elementbeziehung nicht transitiv ist und deshalb nicht zuläßt, daß man gleichzeitig Buchstaben als Elemente von Sätzen auffaßt. Ähnliche Probleme gibt es auch außerhalb der Linguistik für hierarchische Taxonomien, wenn sie mithilfe der Elementarbeziehung beschrieben werden (so zum Beispiel für die Einteilung: Der Löwe ist eine Raubkatze und die Raubkatze ist ein Säugetier). Beschreibt man solche Hierarchien demgegenüber mithilfe der Teil-Ganze- bzw. der Teilmengenbeziehung ist die Transitivitätseigenschaft automatisch erfüllt. Speziell sind dann Wörter und Buchstaben gleichberechtigte Einheiten von Sätzen, wenn auch von unterschiedlichem Umfang.

Die Linguistik unterscheidet sich von anderen Wissenschaften noch dadurch, daß Strukturen nicht nur aus der Perspektive der wissenschaftlichen Beobachtung ermittelt werden, sondern auch aus der Perspektive von Kommunikationsteilnehmern. Letztere Perspektive ist von Bedeutung, wenn man modellieren will, wie Rezipienten Äußerungen verstehen. Bei der Konstruktion entsprechender Sprachverarbeitungsmodelle ist die in Abschnitt 2 entwickelte Relationstheorie von Nutzen.

Die Strukturierung einer Äußerung durch einen Rezipienten umfaßt drei

Arten von Aufgaben: die Segmentierung der Äußerung in Teile, die Kategorisierung der Segmente und ihre Verknüpfung (vgl. Kindt 1991). Die Resultate aller drei Aufgaben sind im wesentlichen durch elementare Relationen oder verallgemeinerte Hausdorff-Relationen bzw. durch die zugehörigen Beziehungenn/Elemente darstellbar, und zwar kann man Verarbeitungsmodelle gerade so konzipieren, daß Verarbeitungsresultate jeweils Elemente des aktuellen Zustands des Modellsystems sind. Eine vollständige Segmentierung des unsegmentierten Satzes

(j) *dermannlobtnorbert*

in Wörter führt beispielsweise zu folgendem Zustand:

(Z1) $\{\{der, 1\}, \{mann, 2\}, \{lobt, 3\}, \{norbert, 4\}\}$

Die Darstellung der Segmentierung durch eine elementare Relation führt deshalb nicht zu Problemen, weil die zur Strukturierung benutzten natürlichen Zahlen verschieden von den Zahlsymbolen der zu modellierenden Objektsprache gewählt werden können. Streng genommen enthalten die Zuordnungsbeziehungen d.h. die ungeordneten Paare von (Z 1) nicht die objektsprachlichen Wörter selbst, sondern korrespondierende systeminterne Repräsentationen (systeminterne Entitäten müssen von systemexternen physikalischen Entitäten wie Schallereignissen und Schriftzügen unterschieden werden; vgl. hierzu Kindt (1987)).

Auch bei der Darstellung von Kategorisierungsresultaten kann man im Bereich elementarer Relationen bleiben. Wir wollen annehmen, daß das Modellsystem über folgende zwei Zuordnungsregeln verfügt.

(R1) {*mann*} → {N, MASK, U, PLM}

(R2) {N, U, PLM} → {SG}

(R1) besagt, daß *mann* ein maskulines Nomen in unmarkierter Form mit markierter Pluralbildung ist. Und (R2) besagt, daß ein Nomen in unmarkierter Form im Numerus "Singular" steht, wenn die Pluralbildung markierte Formen erfordert. Bei Anwendung von (R1) und (R2) auf (Z1) kann das zweite Zustandselement von (Z1) zu {*mann,* N, MASK, U, PLM, SG} expandiert werden. Dabei ist es aus verschiedenen Gründen unweckmäßig, die hier verwendeten Kategorien nicht als Klassennomen oder Merkmale, sondern extensional als Mengen zu interpretieren. Dies soll am Beispiel der Kategorie "SG" erläutert werden.

Zunächst wäre es schon aus Kapazitätsgründen ineffektiv, wenn so umfangreiche Klassen wie die Menge aller Wörter im Singular Bestandteil eines Zustandselements wären. Solche negativen Konsequenzen sollen durch die Verwendung einer operativen Klassendefinition geringen Umfangs ja gerade vermieden werden. Außerdem ist noch die Kontextabhängigkeit von Kategorisierungen zu berücksichtigen: beispielsweise wird *der* im Satzkontext von (j) ebenfalls die Kategorie "SG" zugeordnet; d.h. bei einer extensionalen Kategoriendarstellung müßte jeweils auch der zugehörige Kontext mit repräsentiert werden.

Als Beispiel der Darstellung einer Verknüpfungsbeziehung in (j) wählen wir die Valenzbeziehung zwischen *lobt* und *norbert*. Den Typ dieser Beziehung wollen wir mit der Kategorie "WEN" bezeichnen und damit an eine Operationalisierung mithilfe der Fragetests erinnern. Finites

Verb und Objekt spielen bei der Valenzbeziehung eine unterschiedliche Rolle, deshalb müssen bei der Darstellung der Gesamtbeziehung analog Definition 2.7 Rollenzuordnungen eingeführt werden. Als strukturbeschreibendes Zustandselement kann dann etwa {{*lobt, norbert,* WEN}, {*lobt,* A}, {*norbert,* W}} dienen, wobei das Rollenmerkmal "A" dem finiten Verb einen Argumentstatus und das Rollenmerkmal "W" dem Objekt einn Wertstatus zuweist.

Das eben skizzierte Verfahren der Äußerungsstrukturierung in einem Verarbeitungsmodell läßt sich in ähnlicher Weise für die Strukturierungsaktivitäten durchführen. Diese Einsicht ist insbesondere für die Semantiktheorie von großer Bedeutung, weil sie einen Weg aufzeigt, wie man bestimmte Probleme des klassischen extensionalisierten Intensionkonzepts vermeiden kann (vgl. hierzu auch Kindt 1987). Nach diesem Konzept wird als Intension z. B. des Wortes *Haus* eine Relation R angesetzt, die für jedes zu einem Zeitpunkt t vorgelegte Objekt x entscheidet, ob x zur Klasse der Häuser zum Zeitpunkt t gehört bzw. zu Recht als Haus bezeichnet werden kann oder nicht. Von der Problematik der Kontextabhängigkeit der Interpretation (man denke etwa an die Redensart *Na du altes Haus*) wollen wir jetzt absehen. Die übliche extensionale Auffassung von Relationen als Mengen von (geordneten) Paaren führt nun zu folgender Schwierigkeit. Ein Kommunikationsteilnehmer, der aufgrund seiner Sprachsozialisation über die Intension von *Haus*, also über R verfügt, müßte die Entitäten, die als Argumente von R dienen, also externe Gegenstände und Zeitpunkte selbst umfassen. Dies ist empirisch unmöglich. Deshalb kommt - ganz analog zu unseren obigen Überlegungen - nur eine operative Auffassung von R infrage, nach der R über eine korrespondierende elementare Kategorie oder über eine Struktur des Zustandsraums im Verarbeitungssystem definiert ist.[6] Damit ist genereller eine strukturtheoretische Grundlage für die Konstruktion mentaler Realitätsmodelle umrissen, die nach ähnlichen Prinzipien wie die Äußerungsstrukturierung verfahren kann (mit dem geringfügigen Unterschied, daß die Segmentierung von Teilen des jeweiligen Realitätsausschnitts evtl. mehrdimensional nach Ort und Zeit geordnet wird).

---

[6] Zwar von nur geringer praktischer, aber von großer theoretischer Bedeutung ist auch der Nachweis größerer Allgemeinheit des operativen Relationskonzepts, der sich durch die Möglichkeit der Darstellung selbstanwendbarer, autologer Kategorien wie z.B. "besteht aus vierunddreißig Buchstaben" ergibt; bei vorausgesetztem Fundierungsaxiom besteht für extensionale Kategorien eine solche Möglichkeit nicht.

5. Literatur

Barwiese, J.: Admissible Sets and Structures. Berlin 1975.

Bunt, H. C.: Mass terms and Model-Theoretic Semantics. Cambridge 1985.

Ebbinghaus, H.-D.: Einführung in die Mengenlehre. Darmstadt 1977.

Glubrecht, J.-M./Oberschelp, A./Todt, G.: Klassenlogik. Mannheim 1983.

Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

Kindt, W., 1987: Die empirische Forschung von Bedeutungen. Zur Entwicklung einer geeigneten Rahmentheorie. Erscheint in Petöfi, J.S. (ed): Research in Text Meaning. Buske, Hamburg.

Kindt, W., 1991: Grammatik und Informationsdynamik. Kolibri-Arbeitsbericht Nr. 36, Forschergruppe "Kohärenz", Universität Bielefeld.

Kuratowski, K.: Sur la notion de l'ordre dans la theorie des ensembles. In: Fund. Math. 2 (1921), 161-171.

Oberschelp A.: Axiomatische Mengenlehre. Vorlesung Universität Kiel 1990.

Quine, W.V.: Mathematical Logic. Cambridge, Mass. 1940.

Simons, P.: Parts. A Study in Ontology. Oxford 1987.

Wiener, N.: A Simplification of the Logic of Relations.
In: Proc. Cambridge Phil. Soc. 17 (1914), 387-390.

Verzeichnis der KoLiB^{r}i-Arbeitsberichte

1. Forschergruppe Kohärenz (Ed.):
   Kohärenz
2. Forschergruppe Kohärenz (Ed.):
   "'n Gebilde oder was" - Daten zum Diskurs über Modellwelten
3. Gibbon D. & Rieser H. (Eds.):
   Parserkonzepte
4. Eikmeyer H.-J.:
   CheOPS: An object-oriented programming environment in C-PROLOG. Reference manual
5. Eikmeyer H.-J. (Ed.):
   CheOPS-Anwendungen
6. Schade U.:
   "Fischers Fritz fischt fische Fische" - Konnektionistische Modelle der Satzproduktion
7. Braun G. & Jin F.:
   Akzentwahrnehmung und Akzenterkennung
8. Pignataro V.:
   Topik und Fokus in der Sprachproduktion
9. Meier J., Metzing D., Polzin T., Ruhrberg P., Rutz H. & Vollmer M. (Eds.):
   Generierung von Wegbeschreibungen
10. Günther U.:
    Lesen im Experiment
11. Sichelschmidt L., Günther U. & Rickheit G.:
    Input Wort: Befunde zur inkrementellen Textverarbeitung
12. Strohner H. & Rickheit G.:
    Kommunikative Zusammenhänge: Eine systemische Konzeption sprachlicher Kohärenz
13. Hildebrandt B., Aulich M., Rickheit G. & Strohner H.:
    Wort für Wort. Computersimulation kognitiver Textverstehensprozesse
14. Braun G., Eikmeyer H.-J., Polzin T., Rieser H., Ruhrberg P. & Schade U. (Eds.):
    Situations in PROLOG
15. Müsseler J. & Rickheit G.:
    Die kognitive Auflösung anaphorischer Objektreferenzen
16. Strohner H.:
    Systemische Textverarbeitung
17. Müsseler J. & Rickheit G.:
    Komplexbildung in der Textverarbeitung: Die kognitive Auflösung pluraler Pronomen
18. Müsseler J. & Hielscher M.:
    Die Auflösung pluraler Pronomen bei unterschiedlich koordinativ verknüpften Referenzpersonen
19. Polzin T., Rieser H. & Schade U. (Eds.):
    More Situations in PROLOG
20. Kindt W. & Laubenstein U.:
    Reparaturen und Koordinationskonstruktionen. Zur Strukturanalyse des gesprochenen Deutsch
21. Kindt W.:
    Gründzüge der mehrdimensionalen Schaltgrammatik
22. Pignataro V.:
    LFG, Situationsschemata und Diskurs
23. Langer H.:
    Syntaktische Normalisierung gesprochener Sprache
24. Brindöpke C. & Pampel M.:
    Akzentstellenbestimmung
25. Sichelschmidt L. & Günther U.:
    Interpreting anaphoric relations during reading: Inspection time evidence

26. Peters K., Rutz H. & Siegel M. (Eds.):
KLEIST - Textgenerierung in deutscher und japanischer Sprache
27. Ruhrberg P., Türling H.-J. & Zimmermann B. (Eds.):
Interaktion von Syntax und Semantik in der Textgenerierung
28. Polzin T. & Eikmeyer H.-J.:
BiKonnex: A network representation language
29. Lisken S. & Rieser H.:
Ein inkrementeller Parser zur Analyse von simulierten Reparaturen
30. Hielscher M., Müsseler J., Reuther A. & Rickheit G.:
Zum Einfluß der Verbsemantik auf die mentale Modellbildung
31. Müsseler J., Hielscher M. & Reuther A.:
Kognitive Verfügbarkeit und Gruppierungen in räumlichen mentalen Modellen
32. Günther U., Kindt W., Schade U., Sichelschmidt L. & Strohner H.:
Elliptische Koordination. Einige Strukturen und Prozesse lokaler Textkohärenz
33. Polzin T. & Rieser H.:
Parsing of belief-sentences
34. Polzin T. & Rieser H.:
Parsing with situation semantics

KoLiB^{r}i Arbeitsberichte sind erhältlich über

DFG Forschergruppe "Kohärenz"
Fakultät für Linguistik und Literaturwissenschaft
Universität Bielefeld
Postfach 8640
D-4800 Bielefeld 1

KoLiB^{r}i working papers are available from

DFG Research Group "Coherence"
Department of Linguistics and Literary Science
University of Bielefeld
PO Box 8640
D-4800 Bielefeld 1
FRG