

# Eine hybride Methode zur Berechnung von Liapunow-Exponenten

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld

vorgelegt von  
Alexander Lust

13. Juli 2006



An dieser Stelle möchte ich mich bei allen, die für diese Arbeit ihr freundliches Interesse erwiesen haben, bedanken.

In erster Linie danke ich meinem Mentor Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn, der Verantwortung für mich übernommen hat, für die vielfältige Unterstützung, wichtige Hinweise und Anregungen.

Ich danke auch Vera Thümmler für ihre Tipps zu der Auswertung numerischer Ergebnisse und Erstellung von Bildern.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich dankbar für das Doktorandenstipendium im Rahmen des Graduiertenkollegs “Strukturbildungsprozesse”, über das der Großteil der Arbeit an der vorliegenden Dissertation finanziert wurde. Für die anschließende Förderung danke ich SFB 701 “Spektrale Strukturen und topologische Methoden in der Mathematik”.

Für die Unterstützung in allen Lebenslagen möchte ich mich bei meiner ganzen Familie bedanken insbesondere bei meiner Frau Natalia, die alle Höhen und Tiefen während der Durchführung dieser Arbeit mitgetragen hat.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Methoden zur Berechnung von Liapunow-Exponenten</b>	<b>7</b>
1.1 Theoretische Grundlagen . . . . .	7
1.2 Bildung zeitlicher Durchschnitte, diskrete QR-Methode . . . . .	9
1.2.1 Eindeutige QR-Zerlegung . . . . .	9
1.2.2 Diskrete QR-Methode . . . . .	10
1.3 Räumliche Integrationsmethoden . . . . .	12
1.3.1 Räumliche Integration mit Hilfe der Oseledec-Zerlegung (nach G.Froyland) . . . . .	13
1.3.2 Zeitlich-räumliche Methode von Aston & Dellnitz . . . . .	15
1.4 Hybride Methode . . . . .	18
<b>2 Hilfsmittel - das äußere Produkt</b>	<b>21</b>
2.1 Notationen, Definitionen und primäre Eigenschaften . . . . .	21
2.2 Äußeres Produkt und die eindeutige QR-Zerlegung . . . . .	26
<b>3 Liapunow-Exponenten</b>	<b>29</b>
3.1 Typzahlen und Liapunow-Exponenten für Matrizenprodukte . . . . .	30
3.2 Regularität und der Satz von Oseledec . . . . .	38
3.3 Liapunow-Exponenten höherer Ordnung . . . . .	40
<b>4 Analyse der Fehlerentwicklung</b>	<b>47</b>
4.1 Analyse mit Hilfe der Oseledec-Zerlegung . . . . .	48
4.2 Erweiterung des Hyperbolizitätsbegriffes . . . . .	59
4.3 Zur Analyse der Zeitlich-Räumlichen Integration nach Aston & Dellnitz . . . . .	69
<b>5 Numerische Beispiele</b>	<b>75</b>
5.1 Berechnung von Liapunow-Exponenten, Notationen . . . . .	75

5.1.1	Fehlerentwicklung der Extrapolationsfolgen . . . . .	77
5.1.2	Auswirkungen der numerischen Approximation . . . . .	78
5.2	Hénon-Abbildung . . . . .	82
5.2.1	Approximation des Attraktors und des Maßes . . . . .	82
5.2.2	Berechnung von Liapunow-Exponenten . . . . .	87
5.3	Das Lorenz-System . . . . .	98
	<b>Offene Fragen</b>	<b>107</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>

# Einleitung

Die Dynamik einer diskreten Evolutionsgleichung

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2 \dots, \quad g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad (1)$$

ist maßgeblich durch ihre Liapunow-Exponenten<sup>1</sup> geprägt. Beispielsweise charakterisiert der größte Liapunow-Exponent  $\lambda_1$ , der sich mittels

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Dg^n(x)\|$$

berechnen lässt,<sup>2</sup> die durchschnittliche exponentielle Rate der Divergenz bzw. Konvergenz von durch (1) erzeugten Folgen. Außerdem können mit Hilfe von Liapunow-Exponenten unter anderem solche Größen wie maßtheoretische Entropie bzgl. eines “natürlichen” (invarianten) Maßes (siehe [7]) sowie die Hausdorff-Dimension des Attraktors<sup>3</sup> abgeschätzt bzw. bestimmt werden.

Numerische Verfahren zur Berechnung der Liapunow-Exponenten kann man im wesentlichen in zwei Klassen unterteilen: Methoden, die auf der Bildung eines zeitlichen Durchschnitts entlang einer Trajektorie  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von  $g$  basieren, und Verfahren, die zur Auswertung von Liapunow-Exponenten ein räumliches Mittel benutzen.

Zu der ersten Klasse zählen die diskreten und die kontinuierlichen QR-Methoden (siehe z.B. [16], [24], [29]). Diese Verfahren sind relativ leicht zu implementieren (insbesondere die diskrete Methode) und erlauben die Auswertung beliebig vieler Exponenten, haben jedoch den Nachteil, dass die Rechnung

---

<sup>1</sup>Die charakteristischen Zahlen, später die Liapunow-Exponenten genannt, für die Lösungen von autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen  $\dot{x} = f(x)$  wurden von A.M. Liapunow in seiner Dissertation [28] im Jahre 1892 eingeführt. Die Existenz der Liapunow-Exponenten wurde unter sehr allgemeinen Bedingungen von V.I. Oseledec [30] über siebenzig Jahre später präsentiert.

<sup>2</sup>Mit  $Dg^n(x)$  wird die Ableitung der  $n$ -ten Iteration  $g^n$  der Abbildung  $g$  bei  $x$  bezeichnet und  $\|\cdot\|$  ist eine Matrixnorm.

<sup>3</sup>Für den zweidimensionalen Fall  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  siehe [37]. Bei höheren Dimensionen wird oft die Kaplan-Yorke Vermutung (siehe [20]) verwendet, um aus den Liapunow-Exponenten die genannte Dimension zu berechnen.

auf eine einzelne Trajektorie beschränkt ist, was in einigen Fällen fehlerhaft sein kann (siehe [5]).

In den letzten Jahren wurden einige numerische Verfahren zur Berechnung des *dominanten* Liapunow-Exponenten  $\lambda_1$  entwickelt, die auf der räumlichen Integration basieren (siehe z.B. [5], [21] und ihre Referenzen). Die Vorteile dieser Methoden gegenüber der Bildung des zeitlichen Durchschnitts bestehen u.a. in der Unabhängigkeit von der gewählten Trajektorie  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  bzw. von dem Anfangswert  $x_0$ . Außerdem kann der Rechenaufwand in einigen Fällen (siehe [4]) reduziert werden. Man muss jedoch bei dieser Art der Verfahren ein invariantes Maß, über das später integriert wird, ausrechnen bzw. approximieren, was die Komplexität der Implementierung erhöht. Außerdem ist diese Methode in der in [5], [21] formulierten Form nur zur Approximation des größten bzw. des kleinsten Liapunow-Exponenten geeignet.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Analyse eines numerischen Verfahrens, das uns ermöglicht, eine beliebige Anzahl von Liapunow-Exponenten unter der Anwendung der räumlichen Integration zu berechnen. Da hierbei die diskrete QR-Methode mit der räumlichen Integration kombiniert wird, nennen wir die Methode *hybrid*.

Die Unterteilung dieser Arbeit ist die folgende: Im 1. Kapitel werden zunächst einige wichtigen Grundlagen zu Liapunow-Exponenten eines diskreten endlichdimensionalen dynamischen Systems angegeben. In den Abschnitten 1.2 und 1.3 beschäftigen wir uns mit den folgenden bereits bekannten Verfahren zur Approximation von Liapunow-Exponenten:

- der weit verbreiteten diskreten QR-Methode (siehe [16], [24] oder [29]);
- dem von G. Froyland und anderen [21] entwickelten räumlichen Verfahren, das zur Approximation der extremen (des größten und des kleinsten) Liapunow-Exponenten verwendet werden kann;
- und schließlich mit der zeitlich-räumlichen Methode von J.P. Aston und M. Dellnitz [4], [5] zur Berechnung des größten Liapunow-Exponenten  $\lambda_1$ .

Für das zuletzt genannte Verfahren wird auch eine Konvergenzaussage formuliert, die später im entsprechenden Teil des 4. Kapitels bewiesen wird.<sup>4</sup>

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels wird die neue hybride Methode präsentiert, die den wichtigsten algorithmischen Beitrag der vorliegenden Arbeit liefert. Sie stellt eine Art Synthese des QR-Algorithmus und des Verfahrens von Aston und Dellnitz dar. Die Idee dieser Methode besteht in der

---

<sup>4</sup>Der Beweis der Konvergenzaussage in [5] enthält aus meiner Sicht einige Inkonsistenzen.



Auswertung der bezüglich eines invarianten Maßes  $\mu$  (im Idealfall eines SRB-Maßes [15], [34]) gebildeten Integralfolge

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu \quad i = 1, \dots, d, \quad (2)$$

wobei mit  $R(Dg^n(x))$  die R-Komponente der eindeutigen QR-Zerlegung (siehe [25]) der Matrix  $Dg^n(x)$  bezeichnet wird und mit  $R_{ii}(Dg^n(x))$  ihr  $i$ -ter Diagonaleintrag. Die unter (2) angegebene Folge approximiert den  $i$ -ten Liapunow-Exponenten  $\lambda_i$  des Systems (1) für  $i = 1, \dots, d$ . Dieser Abschnitt enthält auch einen Konvergenzsatz zum hybriden Verfahren, für dessen Voraussetzungen hinreichende Bedingungen im 3. Kapitel diskutiert werden. Außerdem werden Abschätzungen zu der Entwicklung des Fehlers der Folgen (2), die im 4. Kapitel bewiesen werden.

In den nächsten drei Kapiteln beschäftigen wir uns (direkt oder indirekt) mit der Analyse der hybriden Methode: Zunächst wird im 2. Kapitel eine Koordinatendarstellung des äußeren Produktes von Vektoren aus  $\mathbb{R}^d$  sowie der äußeren Potenzen von reellen  $d \times d$ -Matrizen und ihre Eigenschaften betrachtet. Dieses Material erleichtert uns die weitere Analyse.

Im 3. Kapitel werden die Voraussetzungen des im Abschnitt 1.4 enthaltenen Konvergenzsatzes für die hybride Methode verifiziert. Zu diesem Zweck werden im Abschnitt 3.1 einige Teile der Arbeit [30] von Oseledec nachvollzogen.<sup>5</sup> Über die Anwendung einer im Abschnitt 3.2 angegebenen Version des Satzes von Oseledec auf äußere Potenzen der Matrizen  $Dg^n(x)$  kommen wir im Abschnitt 3.3 zu einer hinreichenden Bedingung, unter der die Voraussetzungen des besagten Konvergenzsatzes erfüllt sind.

Weiter befassen wir uns mit der Entwicklung von Fehlertermen der Folgen (2). Dafür ziehen wir im ersten Abschnitt des 4. Kapitels Resultate von [21] sowie einige Ansätze aus [5] hinzu. Als äußerst hilfreich bei der Analyse der hybriden Methode erweist sich die Nutzung des äußeren Produktes für die Darstellung von  $R_{ii}(Dg^n(x))$ . Bei speziellen dynamischen Systemen führt uns dieser Ansatz zu einer Entwicklung des Fehlers der hybriden Approximation des  $i$ -ten Liapunow-Exponenten  $\lambda_i$  in der folgenden Form

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu = \lambda_i + \frac{C_i}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad i = 1, \dots, d, \quad (3)$$

wobei  $C_i$  eine nur von  $i$  abhängige Konstante bezeichnet.

Eine Verschärfung der Konvergenzaussage zu der Fehlerentwicklung erreichen

---

<sup>5</sup>Die genannte Arbeit [30] lässt sich wegen ihrer Struktur an einigen für uns relevanten Stellen nur schwer zitieren, deshalb war diese Ausarbeitung nötig.

wir im Abschnitt 4.2

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu = \lambda_i + \frac{C_i}{n} + o\left(\frac{e^{-\theta_i n}}{n}\right),$$

wobei  $\theta_i > 0$  nur von  $i$  abhängig ist. Dabei wird eine spezielle Art der Trennung von einzelnen Liapunow-Exponenten vorausgesetzt, die wir als  $\lambda_{i+1} - \lambda_i$  Hyperbolizität bezeichnen, wobei  $\lambda_{i+1}$  und  $\lambda_i$  zwei benachbarte Liapunow-Exponenten sind. Die  $\lambda_{i+1} - \lambda_i$  Hyperbolizität stellt eine Verallgemeinerung des Begriffes der gleichmäßigen (uniformly) Hyperbolizität dar.<sup>6</sup>

Beendet wird das 4. Kapitel mit dem Beweis der Konvergenzaussage zu der zeitlich-räumlichen Methode von Aston und Dellnitz, die im Abschnitt 1.3.2 formuliert wurde.

Im 5. Kapitel testen wir das hybride Verfahren an der Hénon-Abbildung und dem Lorenz-System. Dabei werden in ersten Abschnitt des Kapitels die in [4], [5] vorgeschlagenen Extrapolationsmöglichkeiten für die Folgen der Form (3) diskutiert.

Es zeigt sich am Beispiel der Hénon-Abbildung, dass die hybride Methode selbst für den größten Liapunow-Exponenten schneller konvergiert als die Matrixnorm-Methode von Aston & Dellnitz, in der  $\ln \|Dg^n(x)\|$  bezüglich des invarianten Maßes integriert wird. Man sollte jedoch festhalten, dass die hybride Methode, wenn man diese alleine zur Berechnung des dominanten Liapunow-Exponenten benutzt, eine Spezialform des in [6] beschriebenen Verfahrens ist.

---

<sup>6</sup>Eine Definition von gleichmäßig hyperbolischen Mengen findet man z.B. in [27], [7] oder [31]. In [27] wird die Definition der exponentiellen Aufspaltung (exponential splitting,  $(\lambda, \mu)$  splitting) angegeben, die in einer direkten Beziehung zu dem Begriff der  $\lambda_{i+1} - \lambda_i$  Hyperbolizität steht. In der genannten Quelle wird jedoch hauptsächlich eine spezielle Art der Aufspaltung untersucht, die zu dem Begriff der gleichmäßigen Hyperbolizität führt (siehe auch den Abschnitt 4.2 der vorliegenden Arbeit).

# Kapitel 1

## Methoden zur Berechnung von Liapunow-Exponenten

Im ersten Teil dieses Kapitels wird eine spezielle Version des Satzes von Oseledec [32], die die zentralen Eigenschaften von Liapunow-Exponenten beschreibt, angegeben und erläutert. Die darauffolgenden Abschnitte 1.2 und 1.3 beschäftigen sich mit einigen bereits bekannten Methoden zur numerischen Berechnung von Liapunow-Exponenten. Im Abschnitt 1.4 wird die neuentwickelte hybride Methode und eine Konvergenzaussage zu dieser präsentiert.

### 1.1 Theoretische Grundlagen

In dieser Arbeit werden hauptsächlich diskrete dynamische Systeme auf einer endlichdimensionalen glatten Mannigfaltigkeit  $M$  betrachtet. Diese sind durch eine invertierbare Abbildung auf  $M$  induziert:

$$g : M \rightarrow M. \tag{1.1}$$

Die Dynamik (bzw. zeitliche Transformation oder Bewegung eines Zustandes  $x \in M$ ) wird in diesem Fall durch die nacheinander folgenden Iterationen von  $g$  definiert:

$$g^n(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ g \circ g^{n-1}(x), & n = 1, 2, \dots \\ g^{-1} \circ g^{n+1}(x), & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

( $g^n(x)$  - ist als der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $n$  bei dem Startwert  $x$  zu interpretieren). Die *Trajektorie* (oder der *Orbit*) mit dem Anfang im

Punkt  $\bar{x}$ , mit  $\gamma(\bar{x})$  bezeichnet, ist die Menge aller Zustände in  $M$ , die von  $\bar{x}$  aus im Laufe der Bewegung erreichbar sind. Also ist  $\gamma(\bar{x}) = \{g^n(\bar{x}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Die *Liapunow-Exponenten* sind endogene Größen des auf diese Weise beschriebenen dynamischen Systems. Mit deren Hilfe kann man zum Beispiel die exponentielle Divergenz von benachbarten Trajektorien  $\gamma(\bar{x})$  und  $\gamma(\bar{x} + \varepsilon)$  untersuchen. Die Existenz von Liapunow-Exponenten sichert der folgende Satz (siehe z.B. [32]).

**Satz 1.1.1 (Oseledec, 1968)** *Sei  $g$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus auf einer kompakten glatten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  von der Dimension  $d$  und  $\mu$  ein ergodisches Maß darauf. Dann gibt es eine Borelsche Teilmenge  $M_\mu \subset M$ , so dass  $g(M_\mu) = M_\mu$  und  $\mu(M_\mu) = 1$  gilt, mit folgenden Eigenschaften.*

- (i) *Es existieren natürliche Zahlen  $d_1, \dots, d_s$  ( $s \leq d$ ) mit  $\sum_{i=1}^s d_i = d$*
- (ii) *Für jedes  $x \in M_\mu$  gibt es eine messbare Zerlegung des Tangentialraumes  $T_x M = \bigoplus_{i=1}^s W^i(x)$  mit  $\dim W^i(x) = m_i$  und  $Dg(x)(W^i(x)) = W^i(g(x))$*
- (iii) *Es existieren reelle Zahlen  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$  derart, dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Dg^n(x)v\| = \lambda_m \quad (1.2)$$

*für alle  $v \in \bigoplus_{i=m}^s W^i(x)$  mit  $v \notin \bigoplus_{i=m+1}^s W^i(x)$  und  $x \in M_\mu$  gilt.*

Dieser Satz ist eine spezielle Form des multiplikativen Ergodensatzes von Oseledec (siehe [30]). Eine allgemeinere Form des Satzes 1.1.1 wird auch in dieser Arbeit (Kapitel 3.2) angegeben.

### Anmerkungen

- (i) Die Punkte aus  $M_\mu$  werden als (*Liapunow-*)*regulär* bezeichnet.
- (ii) Die Zerlegung  $T_x M = \bigoplus_{i=1}^s W^i(x)$  in *invariante* Vektorräume nennt man die *Oseledec-Zerlegung* von  $T_x M$ .
- (iii) Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  heißen die *Liapunow-Exponenten* (auch *charakteristische Zahlen* genannt) vom System (1.1) bezüglich  $\mu$ .
- (iv)  $d_i$  ist die *Vielfachheit* von  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ).
- (v) Der größte Liapunow-Exponent  $\lambda_1$  kann auch mittels einer Matrixnorm

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)\| \quad \mu - \text{f.ü} \quad (1.3)$$

bestimmt werden (siehe [32]).

## 1.2 Bildung zeitlicher Durchschnitte, diskrete QR-Methode

Eines der gebräuchlichsten Verfahren, das auf der Auswertung eines zeitlichen Durchschnitte entlang einer Halbtrajektorie  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = g^n(x)$  basiert, ist die diskrete QR-Methode (siehe [16], [24] oder [29]). Mit diesem Verfahren kann man beliebig viele Liapunow-Exponenten des gegebenen Systems berechnen. Ein weiterer Pluspunkt dieser Methode ist die Einfachheit der Implementierung.

### 1.2.1 Eindeutige QR-Zerlegung

Sei  $M = Q(M)R(M)$  die *eindeutige* QR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}(\mathbb{C}^{d \times d})$ , das heißt:

- $Q(M) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ist orthogonal (unitär);
- $R(M) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ist eine obere Dreiecksmatrix, mit positiven (reellen) Diagonaleinträgen.

Diese Zerlegung erhält man z.B. mit dem (modifizierten) Gram-Schmidt Verfahren (siehe [25]).

Wegen  $\|Mv\| = \|R(M)v\|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^d$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|R(Dg^n(x))v\|.$$

Damit ist es möglich anstatt der zeitlichen Evolution von  $Dg^n(x)$  zu verfolgen, die Entwicklung von  $R(Dg^n(x))$  zur Berechnung von Liapunow-Exponenten zu benutzen.

Genauere Informationen über den Zusammenhang zwischen den Liapunow-Exponenten vom System (1.1) und der R-Komponente seiner Linearisierung  $R(Dg^n(x))$  liefert uns der folgende Satz.

**Satz 1.2.1** <sup>1</sup> Mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  bezeichne man die Liapunow-Exponenten mit ihrer Vielfachheit. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Oseledec exi-

---

<sup>1</sup>Dieser Satz stellt einen Teil des Satzes von Liapunow dar, adaptiert für die diskreten dynamischen Systeme.

stiert für  $x \in M_\mu$  eine Permutation  $\pi_x$  mit

$$\lambda_{\pi_x(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x))$$

für  $i = 1, \dots, d$ .

Der Satz wird später in einer allgemeineren Form bewiesen (siehe den Satz 3.1.10).

## 1.2.2 Diskrete QR-Methode

Um die Liapunow-Exponenten von (1.1) zu berechnen, geht man folgendermaßen vor:

Als Startwert  $Z_0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$  nehme man<sup>2</sup>  $Z_0 = I_d$  und setze weiter die Folge  $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  wie folgt fort:

$$Z_{n+1} := Dg(g^n(x)) Q(Z_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $Q(Z_n)$  der Q-Faktor der eindeutigen QR-Zerlegung von  $Z_n$  ist:

$$Z_n = Q(Z_n)R(Z_n) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Das folgende Lemma wird für ein beliebiges  $Z_0$  bewiesen.

**Lemma 1.2.2** Sei  $Dg^n(x)Z_0 = Q(Dg^n(x)Z_0)R(Dg^n(x)Z_0)$ , dann ist

$$R(Dg^n(x)Z_0) = \prod_{j=n}^0 R(Z_j) \quad \text{und} \quad Q(Dg^n(x)Z_0) = Q(Z_n)$$

für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

Beweis:

Induktion über  $n$ : Die Fälle  $n = 0, 1$  sind klar.

Weiter gilt mit der Induktionsannahme

$$Dg^{n+1}(x)Z_0 = Dg(g^n(x))Dg^n(x)Z_0 = Dg(g^n(x))Q(Z_n)\prod_{j=n}^0 R(Z_j) =$$

---

<sup>2</sup>Von der Identität abweichende Startwerte können nur dann sinnvoll sein, wenn man nur einige Liapunow-Exponenten berechnen möchte (siehe weiter unten) und dabei über genauere Kenntnisse über die Oseledec-Zerlegung von  $T_x M$  verfügt. Dies ist aber in der Regel nicht der Fall.

$$= Z_{n+1} \prod_{j=n}^0 R(Z_j) = Q(Z_{n+1})R(Z_{n+1}) \prod_{j=n}^0 R(Z_j) = Q(Z_{n+1}) \prod_{j=n+1}^0 R(Z_j).$$

Da  $Q(Z_{n+1})$  orthogonal und  $\prod_{j=n+1}^0 R(Z_j)$  von der oberen Dreiecksgestalt mit positiven Diagonaleinträgen ist, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Zerlegung.  $\square$

Da wir aber  $Z_0 = I_d$  gesetzt haben, ist  $Dg^n(x)Z_0 = Dg^n(x)$  und  $R_0 = I_d$ . Also ist

$$R(Dg^n(x)) = \prod_{j=n}^1 R(Z_j) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Mit dem Satz 1.2.1 haben wir dann

$$\lambda_{\pi_x(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{j=n}^1 R_{ii}(Z_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln R_{ii}(Z_j) \quad (1.4)$$

für eine Permutation  $\pi_x$ .

Sind wir nur an *einigen* (meistens *größten*) Liapunow-Exponenten interessiert, so ist es sinnvoll die *schlanke*<sup>3</sup> QR-Zerlegung zu benutzen, denn der Rechenaufwand (in Flops) zur Durchführung der QR-Zerlegung hängt quadratisch (siehe [25]) von der Anzahl der Spalten der zu zerlegenden Matrix ab. In unserem Fall heißt es von der Zahl der gesuchten Liapunow-Exponenten.

Um  $m$  Liapunow-Exponenten zu berechnen, definiert man die Folge  $\{Z_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$  folgendermaßen:

Wähle einen Startwert  $Z_0^m \in \mathbb{R}^{d \times m}$  mit  $(Z_0^m)^T Z_0^m = I_m$  (in der Regel nimmt man die ersten  $m$  Spalten der Einheitsmatrix  $I_d$ ) und setze weiter

$$Z_{n+1}^m := Dg(g^n(x)) Q(Z_n^m), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei  $Q_n(Z_n^m)$  der Q-Faktor der eindeutigen schlanken QR-Zerlegung  $Z_n = Q(Z_n^m)R(Z_n^m)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist. D.h.,  $Q(Z_n^m) \in \mathbb{R}^{d \times m}$  hat orthonormale Spalten und  $R(Z_n^m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ist von der oberen Dreiecksgestalt mit positiven (reellen) Diagonaleinträgen. Der  $\pi(i)$ -te Liapunow-Exponent  $\lambda_{\pi(i)}$  (mit einer geeigneten Permutation  $\pi$  kann dann als

$$\lambda_{\pi(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{j=n}^1 R_{ii}(Z_j^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln R_{ii}(Z_j^m)$$

---

<sup>3</sup>Diese Zerlegung erhält man ebenso mit Hilfe des bereits erwähnten modifizierten Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens.

berechnet werden.

In meisten Fällen kann angenommen werden, dass  $\pi = id$  ist (dazu etwas später im Kapitel 3.3). Dies bestätigen auch die praktischen Rechnungen.

### 1.3 Räumliche Integrationsmethoden

Neben den im letzten Abschnitt genannten Vorteilen der Berechnung von Liapunow-Exponenten mit der diskreten QR-Methode wie die Einfachheit der Implementierung und die Möglichkeit der Approximation beliebig vieler Liapunow-Exponenten, hat diese Methode (wie auch alle auf der Bildung der zeitlichen Durchschnitte basierende Verfahren) einige Nachteile:

- Die Formel (1.2) (also auch (1.4)) gilt nur  $\mu$ -fast überall für das gegebene ergodische Maß  $\mu$ .
- In den genannten Formeln sind Liapunow-Exponenten als zeitliche Grenzwerte angegeben. Es ist also notwendig Langzeittrajektorien zu berechnen. Dies ist aber aus numerischer Sicht problematisch, weil die Aufhäufung der Rundungs- bzw. Approximationsfehler signifikante Auswirkungen auf das Resultat haben kann.
- Es existieren keine Aussagen (soweit es dem Autor bekannt ist) über die Konvergenzgeschwindigkeit der QR-Verfahren. Also gibt es auch keine Kriterien zum Abbruch der Berechnungen, was dazu führen kann, dass diese zu früh gestoppt werden.

Die Anwendung der räumlichen bzw. der zeitlich-räumlichen Integration zur Berechnung von Liapunow-Exponenten beseitigt (zum Teil) die beschriebenen Nachteile der Bildung von zeitlichen Durchschnitten. Die räumliche Integration setzt aber die Bestimmung des Attraktors des gegebenen Systems und eines invarianten Maßes darauf voraus, was diese Verfahren komplizierter macht.

Eine effektive Methode zur Approximation von Attraktoren und zugehörigen invarianten Maßen für chaotische dynamische Systeme wurde in [5] beschrieben. Die Idee dieser Methode ist die folgende:

- Zuerst wird eine Überdeckung des Attraktors gefunden. Dies wird mit Hilfe des Unterteilungsalgorithmus (Subdivision Algorithm, siehe [14]) bzw. einer seiner Variationen realisiert.  
Am Anfang der Rechnung hat man eine grobe Überdeckung des Attraktors (in der Regel eine Box), die Schritt für Schritt durch die Bxenteilung verfeinert wird. Dabei werden Boxen ausgesondert, die keine



Attraktorteile enthalten.

Am Ende hat man eine Boxenkollektion  $\{A_n\}_{n=1}^K$ , die als eine Approximation des gesuchten Attraktors dienen soll.

- Durch die Boxenüberdeckung des Attraktors erhält man eine Diskretisierung des Perron-Frobenius Operators in Form einer Matrix  $P$  mit

$$P_{i,j} = \frac{m(A_j \cap g^{-1}(A_i))}{m(A_j)} \quad i, j \in \{1, \dots, K\},$$

wobei mit  $m$  das Lebesgue Maß bezeichnet wird. Eine Approximation  $\tilde{\mu}$  des invarianten Maßes  $\mu$  auf dem Attraktor ist durch den zum Eigenwert  $+1$  korrespondierenden normierten Eigenvektor  $\rho$  der Matrix  $P$  gegeben. D.h., das approximative Maß  $\tilde{\mu}$  auf dem von  $\{A_n\}_{n=1}^K$  erzeugten Ring wird durch  $\tilde{\mu}_i = \tilde{\mu}(A_i) = \rho_i$  definiert.

Diese Methode mit einigen Variationen (siehe [13]) wurde in dem Programmpaket GAIO<sup>4</sup> von der Gruppe um M.Dellnitz und O.Junge von der Universität Paderborn realisiert.

Nun gehen wir zu den Methoden zur Berechnung von Liapunow-Exponenten, die auf der räumlichen Integration basieren, über.

### 1.3.1 Räumliche Integration mit Hilfe der Oseledec-Zerlegung (nach G.Froyland)

In den Arbeiten [21], [22] wurde der Vorschlag gemacht, die Liapunow-Exponenten mittels räumlicher Integration mit Hilfe von Oseledec-Vektoren zu berechnen. Da wir die in den genannten Arbeiten enthaltene Resultate sowie die dort eingeführte Notation nutzen werden, wollen wir an dieser Stelle ausführlich darauf eingehen.

Wir betrachten das folgende dynamische System auf einer  $d$ -dimensionalen glatten abgeschlossenen reellen Untermannigfaltigkeit  $M$ :

$$g : M \rightarrow M, \quad g \text{ ein } C^1\text{-Diffeomorphismus, } \mu \text{ ergodisch.} \quad (1.5)$$

Dieses System genügt den Voraussetzungen des Satzes 1.1.1. Also hat es auf einer Borelschen Menge  $M_\mu$  vom vollen Maß die konstanten Liapunow-Exponenten  $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$  ( $s \leq d$ ). Es wird für die Oseledec-Zerlegung des

---

<sup>4</sup>Siehe die Website <http://www-math.upb.de/~agdellnitz/Software/gaio.html> für mehr Informationen zu GAIO.

Tangentialraumes  $T_x M = \bigoplus_{i=1}^s W^i(x)$  angenommen, dass die Unterräume  $W^i(x)$  eindimensional sind:

$$\dim W^i(x) = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, d \quad (\text{also } s = d) \quad \mu - \text{f.ü.} \quad (1.6)$$

Mit  $w_i(x)$  bezeichne einen auf 1 normierten Vektor aus dem Unterraum  $W^i(x)$  für  $i = 1, \dots, d$ , so dass  $\{w_i(x) \mid x \in M_\mu\}$  ein messbares Vektorfeld für  $i = 1, \dots, d$  ist. Dann gilt wegen der Invarianz von  $W^i(x)$  unter  $g$

$$Dg(x)w_i(x) = a^{(i)}(x)w_i(g(x)), \quad (1.7)$$

wobei  $a^{(i)}(x)$  ein Skalar ist. Für die auf diese Weise definierten Abbildungen  $a^{(i)} : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$a^{(i)}(x) = \pm \|Dg(x)w_i(x)\| \quad i = 1, \dots, d.$$

und damit sind  $|a^{(i)}(\cdot)|$  für  $i = 1, \dots, d$  messbar wegen der Stetigkeit von  $Dg(\cdot)$  und der Messbarkeit von  $w_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Weiter erhalten wir aus (1.7) per Induktion

$$Dg^n(x)w_i(x) = \prod_{j=n-1}^0 a^{(i)}(g^j(x))w_i(g^n(x)).$$

Daraus folgt mit dem Satz von Oseledec (Satz1.1.1)

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)w_i(x)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{j=n-1}^0 |a^{(i)}(g^j(x))| \underbrace{\|w_i(g^n(x))\|}_{=1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |a^{(i)}(g^j(x))|. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Birkhoffschen Ergodensatzes (siehe [32]) liefert uns

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |a^{(i)}(g^j(x))| = \int \ln |a^{(i)}(g)| d\mu.$$

Mit der Definition von  $a^{(i)}(x)$  folgt aus der letzten Gleichung

$$\lambda_i = \int \ln \|Dg(x)w_i(x)\| d\mu. \quad (1.8)$$

Bei der Kenntnis von  $w_i(x)$  lässt sich also  $\lambda_i$  als ein räumliches Mittel auswerten.

Das Hauptproblem dieses Verfahrens ist die Approximation der genannten Vektorfelder. In [21] wird die folgende Vorgehensweise zur Berechnung des größten Liapunow-Exponentes  $\lambda_1$  vorgeschlagen:

- Man iteriere  $x \in M_\mu$  rückwärts in der Zeit  $k$  mal ( $k \approx 4$ ) und erhalte eine Folge von Punkten  $g^{-1}(x), \dots, g^{-k}(x)$ .
- Für ein  $v \in T_x M$  werte das Produkt  $Dg(g^{-1}) \cdot \dots \cdot Dg(g^{-k})v$  aus.
- Das auf 1 normierte der Ergebnis der im letzten Punkt durchgeführten Multiplikation  $\bar{v}(x)$  wird als Approximation für  $w_1(x)$  genommen.

Zur Berechnung des zu dem kleinsten Liapunow-Exponent gehörenden Vektorfeldes  $w_d(x)$  wird dieses Verfahren auf die inverse Abbildung  $g^{-1}$  angewendet.

Das Problem der praktischen Berechnung von  $w_i$  für  $i \in \{2, \dots, d-1\}$  ist nach meinen Kenntnissen nicht gelöst. Auch für  $i = 1$  (bzw.  $i = d$ ) ist die beschriebene Berechnung des Vektorfeldes in einigen Fällen kritisch (siehe [22]).

Eine zu der angegebenen alternative Vorgehensweise zur Berechnung der Felder  $w_1(x)$  und  $w_d(x)$  (die aus meiner Sicht ein besseres theoretisches Fundament hat, aber rechnerisch aufwendiger ist) ist in [12] beschrieben.

### 1.3.2 Zeitlich-räumliche Methode von Aston & Dellnitz

In [4] und [5] wurde der Vorschlag gemacht, den größten Liapunow-Exponent als Grenzwert einer *Folge von räumlichen Integralen* zu berechnen. Von der zentralen Bedeutung ist dabei der folgende Satz von Kingman (siehe [32]).

**Satz 1.3.1 (Subadditiver Ergodensatz, 1968)** *Sei  $g$  eine messbare Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(M, \mathcal{B}, \mu)$ , wobei  $\mu$  ergodisch ist. Weiter sei  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mu)$  eine Funktionenfolge mit*

$$F_{k+n}(x) \leq F_k(x) + F_n(g^k(x)) \quad \forall n, k \geq 1 \quad \mu - f. \ddot{u}.$$

Dann gilt

(i) *Es existiert  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , so dass  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} F_n(x)$   $\mu$  - f.  $\ddot{u}$ . ist.*

(ii)  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int F_n(x) d\mu = \inf \left\{ \frac{1}{n} \int F_n(x) d\mu \mid n \geq 1 \right\}.$

Die Folge  $F_n(x) = \ln \|Dg^n(x)\|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , erfüllt die Voraussetzungen des Satzes:

- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\|Dg^n(x)\|$  beschränkt, da  $M$  kompakt und  $x \mapsto Dg^n(x)$  stetig ist. Also ist  $\ln \|Dg^n(x)\|$  integrierbar für  $n \in \mathbb{N}$ .
- Wegen der Submultiplizität der Matrixnorm gilt

$$\begin{aligned} \ln \|Dg^{n+k}(x)\| &= \ln \|Dg^n(g^k(x))Dg^k(x)\| \\ &\leq \ln \|Dg^n(g^k(x))\| + \ln \|Dg^k(x)\|. \end{aligned}$$

Also erhalten wir mit (1.3)

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln \|Dg^n(x)\| d\mu.$$

Zur numerischen Berechnung von  $\lambda_1$  werden also die ersten Glieder der Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Integralen

$$a_n = \frac{1}{n} \int \ln \|Dg^n(x)\| d\mu \quad (1.9)$$

ausgewertet. Für die Fehlerentwicklung dieser Folge kann man die folgende Absätzung erhalten.

Man bezeichne mit  $w_i(x)$  für  $i = 1, \dots, d$  (wie im letzten Abschnitt) die messbaren Vektorfelder, die durch die Oseledec-Zerlegung des Tangentialraumes definiert sind. Weiter definiere man  $\alpha_1(x)$  auf  $M_\mu$  als die erste Zeile der zu  $[w_1(x), \dots, w_d(x)]$  (die Matrix mit den Spalten  $w_1(x), \dots, w_d(x)$ ) inversen Matrix.

**Satz 1.3.2** *Das System (1.5) genüge der Annahme (1.6). Es besitze eine gleichmäßig hyperbolische Menge vom vollen Maß und es gelte  $\lambda_1 > 0$  und  $\lambda_i < 0$  für  $i = 2, \dots, d$ . Weiter existiere ein  $\varepsilon > 0$ , so dass*

$$|\sin \angle (w_i(x), \text{span} \{w_{i_1}(x), \dots, w_{i_{d-1}}(x)\})| \geq \varepsilon \quad \text{für } i = 2, \dots, d$$

mit  $\{i_1, \dots, i_{d-1}\} = \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$  für  $\mu$ -fast alle  $x$  gilt.

Dann existiert ein  $\delta \in (0, 1)$ , so dass

$$a_n = \lambda_1 + \frac{c_1}{n} + o\left(\frac{\delta^n}{n}\right) \quad (1.10)$$

gilt, wobei

$$c_1 = \int \ln \|\alpha_1(x)\| d\mu.$$

ist.

**Bemerkung 1.3.3** In [5] wurde die Abschätzung

$$a_n = \lambda_1 + \frac{c_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

unter der alleinigen Annahme der gleichmäßigen Hyperbolizität behauptet (siehe Theorem 4.2 in [5]). Den Beweis dazu konnte ich nicht nachvollziehen. Aus diesem Grunde sind die Voraussetzungen verschärft worden:

Im Beweis des Satzes wird die Beschränktheit von  $\|\alpha_1(x)\|$  gebraucht. Wie wir später im Kapitel 4.3 sehen werden (Bemerkung 4.3.1) ist

$$\|\alpha_1(x)\| = |\sin \angle (w_1(x), \text{span} \{w_2(x), \dots, w_d(x)\})|^{-1}.$$

Die Voraussetzung der gleichmäßigen Hyperbolizität (hier orientiere ich mich an der in [7] §2.2 gegebenen Definition) liefert aber nur die Beschränktheit nach unten des Winkels zwischen den Tangentialräumen der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeiten. Gibt es aber mehrere positive Liapunow-Exponenten, die die instabile Richtung bestimmen, so liefert die Hyperbolizität (im Sinne von [7] oder auch [31]) keine Anhaltspunkte auf das Verhalten von  $\|\alpha_1(x)\|$ . Deshalb ist die in [5] enthaltene Voraussetzung im allgemeinen Fall aus meiner Sicht (zumindest für den angegebenen Beweis) unzureichend.

Ein Beweis für den etwas allgemeiner formulierten Satz (der Satz 4.3.2) wird im Kapitel 4.3 angegeben.

In dem Zusammenhang mit der Abschätzung (1.10) in [4] und [5] wurden Vorschläge zur Extrapolation der Folge  $\{a_n\}$  gemacht. Eine Möglichkeit zum Eliminieren des Hauptfehlerterms  $\frac{c_1}{n}$  besteht in der Verwendung der Folge:

$$b_n = (n+1)a_{n+1} - na_n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Für diese gilt dann

$$b_n = \lambda_1 + o(\delta^n).$$

Man kann auch eine *monotone* Folge

$$B_n = 2a_{2^n} - a_{2^{n-1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1.11}$$

definieren, in der der Hauptfehlerterm  $\frac{c_1}{n}$  wegsabtrahiert wird. Die Monotonie dieser Folge erhält man aus der Monotonie von  $\{a_{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die in [4] (Lemma 3.2) gezeigt wurde.

In einer weiteren Arbeit [6] haben die Autoren eine andere Folge von Integralen  $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$d_n = \frac{1}{n} \int \ln \|Dg^n(x)v\| d\mu \tag{1.12}$$

für ein  $v \in \mathbb{R}^d$  betrachtet. Dabei wurde ein Kriterium für die Konvergenz der Folge gegen  $\lambda_1$  in Abhängigkeit von der Wahl des Vektors  $v$  aufgestellt.

## 1.4 Hybride Methode

Die Idee der hybriden Methode besteht darin, die QR-Methode (in diesem Fall die diskrete QR-Methode) mit der räumlichen Integration zu verbinden. Bevor wir zur genaueren Beschreibung dieses Verfahrens übergehen, wird der folgende Satz bewiesen.

**Satz 1.4.1** *Seien  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  die Liapunow-Exponenten des Systems (1.5) mit ihren Vielfachheiten. Es gelte*

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x)) \quad \mu\text{-f.ü.}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.13)$$

dann ist

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.14)$$

**Bemerkung 1.4.2** Die Existenz einer Permutation  $\pi_x$  mit

$$\lambda_{\pi_x(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x))$$

für jedes  $x \in M_\mu$  erhalten wir aus dem Satz 1.2.1. Für die Gültigkeit der Formel (1.14) ist es erforderlich, dass  $\pi_x = id$  auf einer Teilmenge  $\bar{M}_\mu$  von  $M_\mu$  mit vollem Maß gilt (die Voraussetzung (1.13)). Interessiert uns die Reihenfolge der Liapunow-Exponenten nicht, so kann (1.13) etwas abgeschwächt werden, indem wir eine ( $\mu$ -f.ü. konstante) Permutation  $\pi$  zulassen:

$$\lambda_{\pi(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x)) \quad \mu\text{-f.ü.}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Dies ändert am Beweis dieses Satzes jedoch nichts.

Am Ende des 3. Kapitels, dessen Hauptziel die Untersuchung der Voraussetzung (1.13) ist, wird eine hinreichende Bedingung für (1.13) formuliert (der Korollar 3.3.4).

Beweis des Satzes:

Durch Integration beider Seiten der Gleichung (1.13) nach  $\mu$  erhält man

$$\lambda_i = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu.$$

Nun ist

$$\frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)\| = \frac{1}{n} \ln \left\| \prod_{j=n-1}^0 Dg(g^j(x)) \right\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \|Dg(g^j(x))\| \\ &\leq \frac{1}{n} nK = K \end{aligned}$$

da  $Dg$  stetig mit kompaktem Definitionsbereich ist. Damit sind die Funktionen

$$a_n^i(x) = \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x))$$

für jedes  $i = 1, \dots, d$  durch eine Konstante beschränkt, denn

$$\|Dg^n(x)\| = \|R(Dg^n(x))\|$$

und

$$R_{ii}(Dg^n(x)) \leq \|R(Dg^n(x))\| .$$

ist. Also können wir den Lebesgueschen Satz über die dominierte Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lambda_i = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu$$

für  $i = 1, \dots, d$ .

□

Ist also die Voraussetzung (1.13) für das System erfüllt, so können wir die Folgen  $\{a_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Integralen für  $i = 1, \dots, d$

$$a_n^i = \frac{1}{n} \int \ln(R_{ii}(Dg^n(x))) d\mu \quad (1.15)$$

zur Berechnung von Liapunow-Exponenten  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  benutzen.

Wie wir später in Kapiteln 4.1 und 4.2 sehen werden (Sätze 4.1.5 und 4.2.6), haben die Folgen  $\{a_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$  unter gewissen zusätzlichen Bedingungen das Konvergenzverhalten

$$a_n^i = \lambda_i + \frac{c_i}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.16)$$

bzw.

$$a_n^i = \lambda_i + \frac{c_i}{n} + o\left(\frac{e^{-\theta n}}{n}\right), \quad (1.17)$$

wobei  $c_i$  für  $i = 1, \dots, d$  konstant und  $\theta$  positiv ist. Also können wir in diesen Fällen die in [4] und [5] vorgeschlagenen Extrapolationsmöglichkeiten für die Folgen dieser Art benutzen, indem wir die Folgen

$$b_n = (n+1)a_{n+1} - na_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.18)$$

bzw.

$$B_n = 2a_{2^n} - a_{2^{n-1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

für  $i = 1, \dots, d$  definieren.

Die Anwendung dieser Folgen bei den praktischen Berechnungen von Liapunow-Exponenten werden im Kapitel 5 diskutiert.

Es wird die folgende Vorgehensweise zur Approximation von  $m$  ersten Liapunow-Exponenten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  nach der Formel (1.15) vorgeschlagen:

- Zuerst berechnet man (z.B. mit Hilfe von GAIO) eine Boxenüberdeckung des Attraktors  $\{A_j\}_{j=1}^K$  und die zugehörige Approximation  $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}^K$  ( $K$  - Anzahl der Boxen) des invarianten Maßes  $\mu$ , wobei  $\tilde{\mu}(A_i) = \tilde{\mu}_i$  für  $i = 1, \dots, K$  ist.
- Man wähle aus jeder Box  $A_j$  einen "Repräsentanten"  $x_j$  für  $j = 1, \dots, K$  aus, z.B. den Mittelpunkt der jeweiligen Box.
- Für die gewählten Punkte  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, K$ , führe die im Abschnitt 1.2.2 (QR-Methode) beschriebene Berechnung von  $R_{ii}(Dg^n(x_j))$  für  $i = 1, \dots, m$  und  $n = 1, \dots, T$  ( $T$  - Anzahl der Zeitschritte) durch.
- Die Approximationen  $\tilde{a}_n^i$  von  $a_n^i$  für  $i = 1, \dots, m$  werden nach der Formel

$$\tilde{a}_n^i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K \ln R_{ii}(Dg^n(x_j)) \tilde{\mu}_j \quad n = 1, \dots, T$$

berechnet.

Benutze gegebenenfalls auch die Extrapolationsfolgen (1.18), (1.19).

Mit dieser Methode können wir also eine beliebige Zahl von Liapunow-Exponenten berechnen im Gegensatz zu den im Kapitel 1.3 beschriebenen Methoden.



# Kapitel 2

## Hilfsmittel - das äußere Produkt

In diesem Kapitel werden einige relevante Eigenschaften des äußeren Produktes von Vektoren aus  $\mathbb{R}^d$  in Koordinatenform zusammengestellt und hergeleitet. Es ist eine selbständige Ausarbeitung des Materials, das der Autor in der hier vorgestellten Form in keiner Quelle finden konnte. Dabei habe ich mich an den Referenzen [2], [23] und [26] orientiert. Dieses Material ist zum Verständnis sowohl der darauffolgenden Verifizierung der hinreichenden Bedingung für die Konvergenz (Kapitel 3) als auch der Fehlerentwicklung (Kapitel 4) der hybriden Methode notwendig.

### 2.1 Notationen, Definitionen und primäre Eigenschaften

Eine Abbildung  $\delta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, d\}$  mit  $m \leq d$  wird *streng monoton* genannt, falls  $\delta(1) < \delta(2) < \dots < \delta(m)$  gilt. Die Menge aller streng monotonen Funktionen von  $\{1, \dots, m\}$  nach  $\{1, \dots, d\}$  werden wir mit  $Ord(m, d)$  bezeichnen:

$$Ord(m, d) = \{\delta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, d\} \mid \delta \text{ streng monoton}\}.$$

Ein Element  $i \in Ord(m, d)$  kann auch als ein Tupel  $i = (i_1, \dots, i_m)$  bzw.  $i = i_1 \dots i_m$  mit  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq d$  dargestellt werden.

Auf  $Ord(m, d)$  wird die lexikographische Ordnung eingeführt, d.h. für  $\sigma, \delta \in Ord(m, d)$  gilt  $\sigma < \delta$ , falls es ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$\sigma(k) = \delta(k) \quad \text{für } k = 1, \dots, j-1 \quad \text{und} \quad \sigma(j) < \delta(j)$$

gibt. Somit wird  $\delta_1 = (1, \dots, m)$  als das kleinste bzw. das erste Element von  $Ord(m, d)$  bezeichnet,  $\delta_2 = (1, \dots, m-1, m+1)$  als das Zweite u.s.w. Das

letzte (größte) Element ist  $\delta_D = (d + m - 1, \dots, d)$  mit  $D = \#Ord(m, d)$ .  
 Sei  $A(d) = \{A_1, \dots, A_d\}$  eine  $d$ -elementige Menge. Sei

$$A(d, m) = \{B \subset A(d) \mid \#B = m\}$$

die Menge allen  $m$ -elementigen Teilmengen von  $A(d)$ .

**Bemerkung 2.1.1**  $Ord(m, d)$  und  $A(d, m)$  sind isomorph. Insbesondere ist  $\#Ord(m, d) = \binom{d}{m}$ .

Seien  $x_1, \dots, x_m$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^d$  mit Koordinaten  $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{dj})^T$ . Als  $X = [x_1, \dots, x_m]$  bezeichne die  $d \times m$  Matrix mit den Spalten  $x_1, \dots, x_m$ , d.h.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & \cdots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{d1} & \cdots & x_{dm} \end{pmatrix}.$$

Als  $X_{i_1, \dots, i_m}$  wird die Unterdeterminante der Matrix  $X$  bezeichnet, die aus  $X$  durch die Wahl der Zeilen  $i_1, \dots, i_m$  hervorgeht:

$$X_{i_1 \dots i_m} = \det \begin{pmatrix} x_{i_1 1} & \cdots & x_{i_1 m} \\ x_{i_2 1} & \cdots & x_{i_2 m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{i_m 1} & \cdots & x_{i_m m} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

**Definition 2.1.2** Das **äußere Produkt** der Vektoren  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$  ist der Vektor  $x_1 \wedge \dots \wedge x_m \in \mathbb{R}^{\binom{d}{m}}$  mit den lexikographisch geordneten Koordinaten

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_m)_{i_1 \dots i_m} = X_{i_1 \dots i_m} \quad \text{mit } (i_1, \dots, i_m) \in Ord(m, d).$$

Der Vektor  $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$  wird auch in der Form  $\wedge_{j=1}^m x_j$  geschrieben.

Bezeichnet man mit  $\{e_1, \dots, e_d\}$  die Standardbasis auf  $\mathbb{R}^d$ , so folgt unmittelbar aus der Definition, dass

$$\{e_1 \wedge \dots \wedge e_m \mid (i_1, \dots, i_m) \in Ord(m, d)\}$$

die Standardbasis auf  $\mathbb{R}^{\binom{d}{m}}$  ist.

Das folgende Lemma stellt die Beziehung zu der "kanonischen" Definition des äußeren Produktes her.

**Lemma 2.1.3** Seien  $x_1, \dots, x_m, v \in \mathbb{R}^d$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

(i) Für eine Permutation  $\pi \in S_m$  ist

$$x_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\pi(m)} = \text{sign}(\pi) x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \quad (\text{Antisymmetrie}).$$

(ii) Für  $j = 1, \dots, m$  ist

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \cdots \wedge x_{j-1} \wedge (\alpha x_j + \beta v) \wedge x_{j+1} \wedge \cdots \wedge x_m = \\ \alpha(x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \wedge \cdots \wedge x_m) + \beta(x_1 \wedge \cdots \wedge v \wedge \cdots \wedge x_m) \end{aligned}$$

(Multilinearität).

(iii)  $x_1, \dots, x_m$  linear abhängig  $\Leftrightarrow x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = 0$ .

Beweis:

(i) + (ii) : Die Antisymmetrie und die Multilinearität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Determinante.

(iii) :  $x_1, \dots, x_m$  linear abhängig  $\Leftrightarrow \text{rang}(X) < m$  mit  $X = [x_1, \dots, x_m] \Leftrightarrow$  es existieren keine  $m$  linear unabhängigen Zeilen von  $X \Leftrightarrow$  alle  $m$ -zeiligen Minoren verschwinden. □

Mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  bezeichne man das gewöhnliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^k$  und mit  $\|\cdot\|$  die durch dieses definierte Norm:  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_k}$  für  $x \in \mathbb{R}^k$ .

**Satz 2.1.4** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^{\binom{d}{m}}$  zerlegbar, d.h.

$$x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \text{ und } y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \text{ mit } x_j, y_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \dots, m,$$

dann gilt

$$\langle x, y \rangle_{\binom{d}{m}} = \langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_m, y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \rangle_{\binom{d}{m}} = \det(M),$$

wobei

$$M \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ mit } M_{ij} = \langle x_i, y_j \rangle_d \text{ für } i, j \in \{1, \dots, m\}$$

ist.

Beweis:

Man setze  $X = [x_1, \dots, x_m]$  und  $Y = [y_1, \dots, y_m]$ . Mit dem Determinanten-Multiplikationstheorem (siehe [19]) haben wir

$$\det(X^T Y) = \sum_{i \in \text{Ord}(m, d)} X_{i_1 \dots i_m} Y_{i_1 \dots i_m}.$$

Der letzte Ausdruck ist gerade  $\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_m, y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \rangle_{\binom{d}{m}}$ .

Da  $M = X^T Y$  ist, folgt die Behauptung. □

Unmittelbar aus dem letzten Satz folgt

**Korollar 2.1.5** Seien  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ . Dann ist

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\| = \sqrt{\det(X^T X)},$$

wobei  $X \in \mathbb{R}^{d \times m}$  die Matrix mit den Spalten  $x_1, \dots, x_m$  ist. Bei  $m = d$  gilt also

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_d\| = |\det(X)|.$$

Die Determinante  $\det(X^T X)$  für  $X \in \mathbb{R}^{d \times m}$  heißt die *Gramsche Determinante*. Der Ausdruck  $\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\| = \sqrt{\det(X^T X)}$  wird das *Gramsche Volumen* genannt. Es ist gleich dem Inhalt des durch die Vektoren  $x_1, \dots, x_m$  gebildeten Spates (siehe [23] §9.5).

Seien  $x_1, \dots, x_m, x \in \mathbb{R}^d$  linear unabhängig. Man zerlege  $x$  in Komponenten  $x = x^p + x^o$  mit  $x^p \in \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$  und  $x^o \perp \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$ . Dann ist das Volumen des durch die Vektoren  $x_1, \dots, x_m, x$  aufgespannten Parallelepipeds gleich

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x\| = \|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\| \|x^o\|.$$

Daraus folgt

**Bemerkung 2.1.6**

$$(i) \quad \frac{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x\|}{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\|} = \|x^o\|$$

D.h. dieser Quotient ist gleich der Länge der zu  $\text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$  orthogonalen Komponente von  $x$ .

(ii) Für einen normierten Vektor  $\|x\| = 1$  ist  $x^o$  gerade der Sinus des Winkels zwischen  $x$  und der von den Vektoren  $x_1, \dots, x_m$  aufgespannten Hyperebene. Also gilt

$$\frac{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x\|}{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\|} = |\sin \angle(x, \text{span}\{x_1, \dots, x_m\})|. \quad (2.2)$$

Da  $\|x^o\| \leq \|x\|$  ist, gilt außerdem die Ungleichung

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x\| \leq \|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\| \|x\|. \quad (2.3)$$

Als sehr nützlich erweist sich die folgende allgemeinere Abschätzung.

**Lemma 2.1.7 (Verallgemeinerte Hadamardsche Ungleichung)**

Es gilt für  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$  mit  $m \leq d$  und  $k \in \{1, \dots, m\}$

$$(i) \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_m\| \leq \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_k\| \|x_{k+1} \wedge \cdots \wedge x_m\|.$$

$$(ii) \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_m\| \leq \prod_{i=1}^m \|x_i\|.$$

Beweis:

(ii) folgt per Induktion aus (2.3). Zum Beweis von (i) siehe [23] §9.5. □

**Definition 2.1.8** Zu  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  definiere man die **m-te assoziierte Matrix** (auch **m-te äußere Potenz** genannt)  $\bigwedge^m A \in \mathbb{R}^{\binom{d}{m} \times \binom{d}{m}}$  durch

$$\bigwedge^m A(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) = Ax_1 \wedge \cdots \wedge Ax_m$$

für  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ .

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass die Spalte von  $\bigwedge^m A$  mit dem Index  $j_1 \cdots j_m$  gleich

$$(\bigwedge^m A)_{\cdot j_1 \cdots j_m} = \bigwedge^m A(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_m}) = A_{\cdot j_1} \wedge \cdots \wedge A_{\cdot j_m} \quad (2.4)$$

ist. Zusammen mit der Definition 2.1.2 erhalten wir das  $i_1 \cdots i_m$ -te Element der  $j_1 \cdots j_m$ -ten Spalte:

$$(\bigwedge^m A)_{i_1 \cdots i_m, j_1 \cdots j_m} = \det \begin{pmatrix} A_{i_1 j_1} & \cdots & A_{i_1 j_m} \\ A_{i_2 j_1} & \cdots & A_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{i_m j_1} & \cdots & A_{i_m j_m} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Die folgenden Eigenschaften der äußeren Potenzen von quadratischen Matrizen sind leicht zu verifizieren.

**Lemma 2.1.9** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , dann gilt:

$$(i) \bigwedge^m (AB) = \bigwedge^m (A) \bigwedge^m (B).$$

$$(ii) \bigwedge^m (A^T) = (\bigwedge^m A)^T.$$

$$(iii) \text{ Ist } A \text{ invertierbar, so ist } \bigwedge^m (A^{-1}) = (\bigwedge^m A)^{-1}.$$

**Lemma 2.1.10** Seien  $x_1, \dots, x_d$  und  $y_1, \dots, y_m$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^d$  derart, dass

$$y_j = \sum_{i=1}^d A_{ij} x_i \quad \text{für } j = 1, \dots, m, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}$$

gilt. Mit  $A$  bezeichne man die Matrix mit den Spalten  $A_{\cdot j} = (A_{1j}, \dots, A_{dj})^T$ .  
Dann ist

$$y_1 \wedge \dots \wedge y_m = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \text{Ord}(m, d)} A_{j_1 \dots j_m} (x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_m})$$

Beweis:

Setze  $X = [x_1, \dots, x_d]$ . Dann gilt

$$y_1 \wedge \dots \wedge y_m = X A_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge X A_{\cdot m} = \bigwedge^m X (A_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge A_{\cdot m}).$$

Aus

$$w = \sum_{j=1}^n v_j B_{\cdot j} \quad \text{für} \quad w = Bv \quad (n = \binom{d}{m}), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{und} \quad v, w \in \mathbb{R}^n$$

mit der Definition 2.1.2 (angewendet auf  $v = A_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge A_{\cdot m}$ ) und der Gleichung (2.4) (angewendet auf  $B = \bigwedge^m X$ ) folgt die Behauptung. □

## 2.2 Äußeres Produkt und die eindeutige QR-Zerlegung

**Lemma 2.2.1** Sei  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  eine invertierbare Matrix und  $A = QR$  ihre eindeutige QR-Zerlegung. Dann ist  $\bigwedge^m A = (\bigwedge^m Q) (\bigwedge^m R)$  die eindeutige QR-Zerlegung der Matrix  $\bigwedge^m A$ .

Insbesondere sind die Diagonalelemente von  $R(\bigwedge^m A)$  gleich

$$R_{i_1 \dots i_m, i_1 \dots i_m}(\bigwedge^m A) = \prod_{k=1}^m R_{i_k i_k}, \quad (i_1 \dots i_m) \in \text{Ord}(m, d) \quad (2.6)$$

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass  $\bigwedge^m Q$  orthogonal und  $\bigwedge^m R$  von der oberen Dreiecksform mit positiven Diagonaleinträgen ist.

Aus dem Lemma 2.1.9 folgt die Orthogonalität von  $\bigwedge^m Q$ :

$$(\bigwedge^m Q)^T \bigwedge^m Q = (\bigwedge^m Q^T) \bigwedge^m Q = \bigwedge^m (Q^T Q) = \bigwedge^m I_d = I_{\binom{d}{m}}.$$

Nun wird die obere Dreiecksgestalt von  $\bigwedge^m R$  gezeigt. Nach (2.5) ist

$$(\bigwedge^m R)_{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_m} = \det \begin{pmatrix} R_{i_1 j_1} & \dots & R_{i_1 j_m} \\ R_{i_2 j_1} & \dots & R_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{i_m j_1} & \dots & R_{i_m j_m} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Sei  $(i_1, \dots, i_m) > (j_1, \dots, j_m)$ . Dann existiert definitionsgemäß  $\hat{k}$  mit  $i_l = j_l$  für  $l = 1, \dots, \hat{k} - 1$  und  $i_{\hat{k}} > j_{\hat{k}}$ . Somit ist  $R_{i_{\hat{k}}j_{\hat{k}}} = 0$

Da  $j_l < j_{\hat{k}}$  für  $l = 1, \dots, \hat{k} - 1$  und  $i_n > i_{\hat{k}}$  für  $n = \hat{k} + 1, \dots, m$  ist, haben wir

$$i_n > j_l \quad \text{für } l = 1, \dots, \hat{k} - 1 \text{ und } n = \hat{k} + 1, \dots, m.$$

Damit gilt

$$R_{i_n j_l} = 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, \hat{k} - 1 \text{ und } n = \hat{k} + 1, \dots, m.$$

Also sind die ersten  $\hat{k}$  Spalten der Matrix aus (2.7) von der Form

$$(R_{i_1 j_1}, \dots, R_{i_{\hat{k}-1} j_{\hat{k}-1}}, 0, \dots, 0)^T \quad \text{für } l = 1, \dots, \hat{k},$$

und somit linear abhängig. Damit verschwindet die Determinante in (2.7) für  $(i_1, \dots, i_m) > (j_1, \dots, j_m)$ .

Für die Diagonalelemente von  $\bigwedge^m R$  gilt

$$(\bigwedge^m R)_{i_1 \dots i_m, i_1 \dots i_m} = \det \begin{pmatrix} R_{i_1 i_1} & \dots & R_{i_1 i_m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & R_{i_m i_m} \end{pmatrix}.$$

Also ist  $R_{i_1 \dots i_m, i_1 \dots i_m} (\bigwedge^m A) = \prod_{k=1}^m R_{i_k i_k} > 0$  für  $(i_1 \dots i_m) \in \text{Ord}(m, d)$ , weil  $R_{ii} > 0$  für  $i = 1, \dots, m$  sind. □

**Lemma 2.2.2** Sei  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  eine invertierbare Matrix und  $A = QR$  ihre eindeutige QR-Zerlegung. Dann gilt für  $m = 1, \dots, d$

$$|\det(\bigwedge^m A)| = \binom{d-1}{m-1} |\det(A)|.$$

Beweis:

Es gilt:

$$|\det(A)| = |\det(Q) \det(R)| = \det(R) = \prod_{i=1}^d R_{ii}.$$

Mit dem Lemma 2.2.1 erhalten wir analog

$$|\det(\bigwedge^m A)| = \prod_{j \in \text{Ord}(m, d)} R_{jj}(\bigwedge^m A) = \prod_{j \in \text{Ord}(m, d)} \prod_{k=1}^m R_{j_k j_k}$$

Da dieses Produkt über alle Elemente von  $Ord(m, d)$  bzw. über alle  $m$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, d\}$  (siehe Bemerkung 2.1.1) läuft und jedes Element von  $\{1, \dots, d\}$  in genau  $\binom{d-1}{m-1}$   $m$ -elementigen Teilmengen enthalten ist, gilt

$$\prod_{j \in Ord(m, d)} \prod_{k=1}^m R_{j_k j_k} = \prod_{i=1}^d \binom{d-1}{m-1} R_{ii} = \binom{d-1}{m-1} |\det(A)|.$$

□



# Kapitel 3

## Liapunow-Exponenten

In diesem Kapitel werden wir eine *maßtreue* Transformation  $g$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ <sup>1</sup>

$$g : X \rightarrow X, \quad \mu \text{ invariant.} \quad (3.1)$$

und eine Abbildung  $A$  betrachten, die einem Punkt  $x \in X$  eine invertierbare  $d \times d$  Matrix  $A(x)$  zuordnet

$$A : X \rightarrow GL(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad \ln^+ \|A^{\pm 1}(\cdot)\| \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu), \quad (3.2)$$

wobei  $\ln^+(x) = \max\{0, \ln(x)\}$  ist.

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Liapunow-Exponenten erster Ordnung definiert (siehe [30]) und die Existenz dieser für das System (3.1), (3.2) gezeigt. Es wird eine diskrete Version des Satzes von Liapunow für die vorwärts regulären Punkte aus  $X$  bewiesen. Die in dem ersten Abschnitt vorgestellten Resultate sind größtenteils in [30] sowie (zum Teil implizit) in [7] enthalten. Diese Ausführung hilft dem besseren Verständnis der im Kapitel 3.2 formulierten Fassung des Satzes von Oseledec.

Weiter werden im Abschnitt 3.3 die Liapunow-Exponenten höherer Ordnung, d.h. die Liapunow-Exponenten der äußeren Potenzen der Abbildung  $A$  aus (3.2), betrachtet. Der im Satz 3.3.3 angegebene Zusammenhang zwischen den Liapunow-Exponenten von (3.1), (3.2) und den Liapunow-Exponenten der zu  $A$  assoziierten Matrizen ist im allgemeinen bekannt (siehe [30], [7]). Diesen werden wir dazu benutzen, um eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der hybriden Methode aufzustellen (der Satz 3.3.3 und sein Korollar 3.3.4), was das eigentliche Ziel dieses Kapitels ist. Genauer gesagt, wird die

---

<sup>1</sup>Eine Transformation heißt *maßtreu*, wenn  $\mu(g^{-1}(B)) = \mu(B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}(X)$  gilt. In diesem Fall heißt das Maß  $\mu$  *invariant* bezüglich  $g$ .

Bedingung formuliert, unter der die Voraussetzung (1.13)

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x)) \quad \mu\text{-f.ü.}, \quad i = 1, \dots, d,$$

des Satzes 1.4.1 gilt. In den dem Autor bekannten Quellen ist diese Frage nicht behandelt worden.

### 3.1 Typzahlen und Liapunow-Exponenten für Matrizenprodukte

**Definition 3.1.1** Für eine Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  definiere ihre **Typzahl**<sup>2</sup> durch

$$\chi(a_n) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln |a_m| \quad (3.3)$$

Dabei wird  $\ln 0 := -\infty$  gesetzt.

Man setze für  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$  und  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{d \times d}$  für ein  $d \in \mathbb{N}$

$$\chi(a_n) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \|a_m\|$$

Dabei ist  $\|\cdot\|$  im ersten Fall eine Vektornorm und im zweiten Fall eine Matrixnorm. Existiert ein Limes in (3.3) so wird die Typzahl *exakt* genannt. Die Typzahl gibt an, mit welcher durchschnittlichen *exponentiellen* Rate eine Folge wächst bzw. gegen Null fällt.

Das folgende Lemma beschreibt die wichtigsten Eigenschaften der Typzahlen (zum Beweis siehe man z.B. [7] oder [29]).

**Lemma 3.1.2** *Für zwei Folgen  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Für jede beliebige Konstante  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $\chi(\{ca_n\}) = \chi(a_n)$ .*
- (ii) *Die Typzahlen sind monoton, d.h., existiert ein  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n| \geq |b_n|$  für alle  $n \geq \bar{n}$ , so gilt auch  $\chi(a_n) \geq \chi(b_n)$ .*
- (iii) *Ist  $-\infty < \chi(a_n), \chi(b_n) < +\infty$ , so gilt  $\chi(a_n b_n) \leq \chi(a_n) + \chi(b_n)$*

---

<sup>2</sup>Diese Art der Typzahlen wird oft auch die *oberen* Typzahlen oder die *oberen* charakteristischen Zahlen genannt (siehe z.B. [11] oder [29]), da wir uns aber in dieser Arbeit für die *unteren* Typzahlen  $\underline{\chi}(a_n) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln |a_m|$  nicht interessieren, bleiben wir bei dieser Bezeichnung. Die oberen Typzahlen unterscheiden sich nur im Vorzeichen von den von Liapunow eingeführten charakteristischen Zahlen.

(iv) Seien  $-\infty < \chi(a_n), \chi(b_n) < +\infty$ . Dann gilt für die Summe  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  immer  $\chi(a_n + b_n) \leq \max\{\chi(a_n), \chi(b_n)\}$ . Sind die oberen Typzahlen von  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  verschieden, so gilt die Gleichheit.

Nun gehen wir zu den Typzahlen für das System (3.1), (3.2) über. Dazu betrachte zu einem gegebenen Punkt  $x \in X$  die Matrizenfolge  $\{A^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die durch

$$A^n(x) = A(g^{n-1}(x)) A(g^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot A(x) = \prod_{j=n-1}^0 A(g^j(x)). \quad (3.4)$$

definiert ist. Erkläre die *vorwärts-Typzahl* von (3.1), (3.2) in  $x$  zum Vektor  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  durch

$$\chi^+(x, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\|.$$

Solange die *rückwärts-Typzahlen* nicht eingeführt sind, sprechen wir einfach nur von Typzahlen von (3.1), (3.2) zu gegebenen Parametern.

**Lemma 3.1.3** Die Typzahlen von (3.1), (3.2) existieren für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ . Ist  $\mu$  ergodisch, so gilt die Abschätzung

$$-\int \ln^+ \|A^{-1}(x)\| d\mu \leq \chi^+(x, v) \leq \int \ln^+ \|A(x)\| d\mu$$

Beweis:

Für  $x \in X$  und  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  folgt aus  $\|A^n(x)v\| \leq \prod_{j=n-1}^0 \|A(g^j(x))\| \|v\|$  und dem Lemma 3.1.2

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)\| \|v\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \|A(g^j(x))\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln^+ \|A(g^j(x))\|. \end{aligned}$$

Wegen der Integrierbarkeit von  $\ln^+ \|A(g(x))\|$  folgt aus dem Birkhoffschen Ergodensatz (siehe [36]), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln^+ \|A(g^j(x))\| = f(x) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

mit  $f \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$  ist. Für ein ergodisches Maß  $\mu$  ist  $f(x) = \lambda$  konstant  $\mu$ -fast überall mit  $\lambda = \int \ln^+ \|A(x)\| d\mu$ .

Weiter gilt für eine invertierbare Matrix  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und  $v \in \mathbb{R}^d$  stets  $\|Av\| \geq \|v\| \|A^{-1}\|^{-1}$ . Daraus erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie zuvor

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\| &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|v\| \|(A^n(x))^{-1}\|^{-1} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{n} \ln \|(A^n(x))^{-1}\| \right) \\
&= -\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|(A^n(x))^{-1}\| \\
&\geq -\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \|A^{-1}(g^j(x))\| \\
&\geq -\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln^+ \|A^{-1}(g^j(x))\|
\end{aligned}$$

Die Anwendung des Birkhoffschen Ergodensatzes auf  $\ln^+ \|A^{-1}(x)\|$ , wie eben gezeigt, liefert die Beschränktheit von  $\chi^+(x, v)$  nach unten  $\mu$ -f.ü. und den Rest der Behauptung. □

Die Borelsche Teilmenge von  $X$ , für die  $\chi^+(x, \cdot)$  existieren, bezeichnen wir mit  $X_\mu^+$ .

Im nächsten Korollar werden wir einige wichtige Folgerungen aus dem Lemma 3.1.2 betrachten.

**Korollar 3.1.4** *Für  $x \in X_\mu^+$  gilt:*

(i) *Sind  $\chi^+(x, v_1), \dots, \chi^+(x, v_k)$  paarweise verschiedene Typzahlen von (3.1), (3.2), so sind  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig. Insbesondere können maximal  $d$  unterschiedliche Typzahlen auftreten.*

(ii) *Für jede Basis  $v_1, \dots, v_d$  von  $\mathbb{R}^d$  gilt*

$$\chi(\det(A^n(x))) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det A^n(x)| \leq \sum_{j=1}^d \chi^+(x, v_j)$$

Beweis:

- (i) Angenommen, dies ist falsch. Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass es eine Darstellung

$$v_k = \sum_{j=1}^s a_j v_j \quad \text{mit } s < k \quad \text{und } a_s \neq 0$$

gibt. Nun folgt mit dem Lemma 3.1.2, dass

$$\chi^+(x, v_k) = \max \{ \chi^+(x, v_j) \mid j \in \{1, \dots, s\}, a_j \neq 0 \}$$

gilt, da die Typzahlen von  $\chi^+(x, v_j)$  für  $j = 1, \dots, s$  paarweise verschieden sind. Dies steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass alle Typzahlen unterschiedlich sind.

- (ii) Sei  $V$  die Matrix mit den Spalten  $v_1, \dots, v_d$ . Aus dem Korollar 2.1.5 und der verallgemeinerten Hadamardschen Ungleichung (Lemma 2.1.7) folgt, dass

$$|\det A^n(x)V| = \|A^n(x)v_1 \wedge \dots \wedge A^n(x)v_d\| \leq \prod_{j=1}^d \|A^n(x)v_j\|$$

ist. Daraus erhalten wir mit Lemma 3.1.2

$$\begin{aligned} \chi(\det A^n(x)) &= \chi(\det A^n(x) \det V) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det(A^n(x)V)| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{j=1}^d \|A^n(x)v_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^d \chi^+(x, v_j). \end{aligned}$$

□

**Definition 3.1.5** Die paarweise verschiedenen Typzahlen  $\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_{s(x)}(x)$  von (3.1), (3.2) in  $x \in X_\mu^+$  heißen **vorwärts Liapunow-Exponenten** des Systems in diesem Punkt.

Im folgenden, wenn nichts weiteres gesagt wird, werden die Liapunow-Exponenten *absteigend* nach der Größe durchnummeriert.

Man definiere

$$U_i(x) = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \chi^+(x, v) \leq \Lambda_i(x)\} \quad \text{für } i = 1, \dots, s(x)$$

und

$$U_{s(x)+1}(x) = \{0\}$$

Aus dieser Konstruktion folgt die Beziehung

$$U_{s(x)+1}(x) \subset U_{s(x)}(x) \subset U_{s(x)-1}(x) \dots \subset U_1(x) = \mathbb{R}^d.$$

Mit den bereits bekannten Eigenschaften der Typzahlen (Lemma 3.1.2) kann leicht gezeigt werden, dass  $U_i(x)$  für  $i = 1, \dots, s(x)$  Untervektorräume von  $\mathbb{R}^d$  sind. Als *Multiplizität* oder *Vielfachheit* von  $\Lambda_i(x)$  wird

$$d_i(x) := \dim U_i(x) - \dim U_{i-1}(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, s(x)$$

bezeichnet.

Mit  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_d(x)$  werden die Liapunow-Exponenten von (3.1), (3.2) in  $x \in X_\mu^+$  mit ihrer Vielfachheit bezeichnet.<sup>3</sup> Diese werden ebenso absteigend nach der Größe durchnummeriert.

**Definition 3.1.6** Eine Basis  $\mathcal{V}_x = \{v_1(x), \dots, v_d(x)\}$  von  $\mathbb{R}^d$  heißt **normal** für  $x \in X_\mu^+$ , wenn die Summe der zugehörigen Typzahlen in Punkt  $x$  minimal im Vergleich zu jeder weiteren Basis ist.

Es ist relativ einfach mit den bisherigen Erkenntnissen zu zeigen, dass  $\mathcal{V}_x$  genau dann normal ist, wenn

$$\sum_{i=1}^d \chi^+(x, v_i) = \sum_{i=1}^{s(x)} d_i(x) \Lambda_i(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i(x)$$

ist.<sup>4</sup> Bzw. im Falle, dass die Basis  $\mathcal{V}_x$  absteigend nach den Typzahlen geordnet ist, ist  $\mathcal{V}_x$  genau dann normal, wenn  $\chi^+(x, v_i) = \lambda_i(x)$  für  $i = 1, \dots, d$  gilt.

Das folgende Lemma (siehe [11]) liefert uns eine weitere Möglichkeit normale Basen zu beschreiben.

---

<sup>3</sup>An anderen Stellen (außer diesem Kapitel 3.1) werden auch die Liapunow-Exponenten *ohne* die Vielfachheit mit  $\lambda_i$  (also einem *kleinen* Lambda), deshalb ist es ratsam auf den Kontext zu achten.

<sup>4</sup>Einen Beweis dafür findet man z.B. in [11] oder [7].

**Lemma 3.1.7** Für ein  $x \in X_\mu^+$  ist eine Basis  $\mathcal{V}_x = \{v_1, \dots, v_d\}$  genau dann normal, wenn für jede Linearkombination  $v = \sum_{j=1}^d c_j v_j$

$$\chi^+(x, v) = \max\{\chi^+(x, v_j) \mid j = 1, \dots, d \text{ mit } c_j \neq 0\} \quad (3.5)$$

gilt

Beweis:

Wir können o.B.d.A annehmen, dass  $\mathcal{V}_x$  absteigend nach den Typzahlen durchnummeriert ist.

Zuerst sei  $\mathcal{V}_x$  normal. Dann folgt für eine beliebige Linearkombination

$$v = \sum_{j=s}^d c_j v_j \quad \text{mit } c_s \neq 0$$

aus dem Lemma 3.1.2(iv)  $\chi^+(x, v) \leq \chi^+(x, v_s) = \lambda_s(x)$ , weil  $\lambda_s(x)$  das Maximum der Menge  $\{\lambda_s(x), \dots, \lambda_d(x)\}$  ist. Nach dem Austauschlemma ist  $\{\mathcal{V}_x \setminus v_s\} \cup \{v\}$  wieder eine Basis, die aber nicht unbedingt normal ist, also gilt

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^d \lambda_j(x) + \chi^+(x, v) \geq \sum_{j=1}^d \lambda_j(x)$$

und damit ist  $\chi^+(x, v) \geq \lambda_s(x)$ . Insgesamt erhalten wir  $\chi^+(x, v) = \lambda_s(x)$ .

Es gelte nun (3.5) und  $\mathcal{V}'_x = \{v'_1, \dots, v'_d\}$  sei eine in  $x$  normale, absteigend nach den Typzahlen geordnete Basis. Dann können wir jedes  $v'_j \in \mathcal{V}'$  als

$$v'_j = \sum_{i=n_j}^d c_i v_i \quad \text{mit } c_{n_j} \neq 0$$

darstellen. Aus der vorausgesetzten Eigenschaft folgt

$$\lambda_j(x) = \chi^+(x, v'_j) = \chi^+(x, v_{n_j}). \quad (3.6)$$

Wegen (3.5) und der Anordnung (absteigend nach den Typzahlen) von  $\mathcal{V}_x$  und  $\mathcal{V}'_x$  ist

$$n_j \geq n_i \quad \text{für } i > j. \quad (3.7)$$

Also entsteht jeder der Vektoren  $v'_j, \dots, v'_d$  durch eine Linearkombination von  $v_{n_j}, \dots, v_d$  (für  $j = 1, \dots, d$ ).

Die Normalität von  $\mathcal{V}_x$  ist bewiesen, wenn wir  $\lambda_j(x) \geq \chi^+(x, v_j)$  gezeigt haben ( $\lambda_j(x) = \chi^+(x, v_j)$  folgt automatisch daraus).

Angenommen, es existiert ein  $j \in \{1, \dots, d\}$  mit  $\lambda_j(x) < \chi^+(x, v_j)$ . Dann folgt aus (3.6) und (3.7) auch  $\chi^+(x, v_{n_j}) < \chi^+(x, v_j)$ , also ist  $j < n_j$ . Daraus erhalten wir aber die lineare Abhängigkeit der Vektoren  $v'_j, \dots, v'_d$ , denn diese können durch Linearkombinationen von  $v_{n_j}, \dots, v_d$  dargestellt werden. Also kann ein solches  $j$  nicht existieren und  $\mathcal{V}_x$  ist normal.  $\square$

Sei  $x \in X_\mu^+$ . Ist  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_d\}$  eine beliebige Basis von  $\mathbb{R}^d$  so nennen wir eine Linearkombination  $v = \sum_{j=1}^m c_j v_j$  *reduzierend*, wenn die Ungleichung

$$\chi^+(x, v) < \max\{\chi^+(x, v_j) \mid j = 1, \dots, m, c_j \neq 0\}$$

gilt. Das obere Lemma besagt, dass  $\mathcal{V}$  genau dann normal in  $x$  ist, wenn eine reduzierende Linearkombination der Basisvektoren unmöglich ist.

**Korollar 3.1.8** <sup>5</sup> Für  $x \in X_\mu^+$  ist es möglich eine normale Basis  $\mathcal{V}_x = \{v_1(x), \dots, v_d(x)\}$  so zu wählen, dass die zugehörige Matrix  $M_{\mathcal{V}_x}$  (diese hat die Vektoren  $v_1(x), \dots, v_d(x)$  als Spalten) von der oberen Dreiecksgestalt mit Einsen auf der Hauptdiagonale ist.

Beweis:

Als Ausgangsbasis für unsere Konstruktion nehmen wir die kanonische Basis  $\mathcal{V}'_x = \{e_1, \dots, e_d\}$ . Ist diese für das vorgegebene System nicht bereits normal (in  $x$ ), so können wir nach dem Lemma 3.1.7 eine reduzierende Linearkombination  $v = \sum_{j=1}^r c_j e_j$  mit  $c_r \neq 0$  finden. Aus dem Lemma 3.1.2(i) folgt die Gleichheit von  $\chi^+(x, v)$  und  $\chi^+(x, v')$  mit  $v' = \frac{1}{c_r} v$ . Nach dem Austauschlemma ist

$$\mathcal{V}''_x := \{e_1, \dots, e_{r-1}, v', e_{r+1}, \dots, e_d\}$$

eine weitere Basis von  $\mathbb{R}^d$ , dabei ist  $M_{\mathcal{V}''_x}$  immer noch von der oberen Dreiecksgestalt mit  $(M_{\mathcal{V}''_x})_{ii} = 1$  für  $i = 1, \dots, d$ . Die Summe der Typzahlen hat sich aber im Vergleich zu der vorigen Basis reduziert.

Ist  $\mathcal{V}''_x$  nicht normal, so suchen wir eine weitere reduzierende Kombination usw.. Dabei werden immer diejenigen Vektoren aus der reduzierenden Linearkombination durch diese Kombination ersetzt, die den höchsten Index besitzen (natürlich müssen die zugehörigen Koeffizienten ungleich Null sein). Nach endlich vielen Schritten<sup>6</sup> (wenn es keine reduzierenden Kombinationen

<sup>5</sup>Das im Beweis dieses Korollars verwendete Konstruktionsprinzip für normale Basen stammt ursprünglich von Liapunow [28]. Im Original wurde die Existenz von normalen Basen von der *unteren* Dreiecksgestalt gezeigt.

<sup>6</sup>Nach jedem Schritt reduziert sich die Summe der Liapunow-Exponenten. Da diese nur endlich viele Werte annehmen können, bricht das Reduktionsprozess nach einigen Schritten ab.



mehr gibt) erhalten wir eine normale Basis von der geforderten oberen Dreiecksform. □

Nun führen wir den Begriff der Regularität nach Liapunow [28] (siehe auch [11], [7]) ein.

**Definition 3.1.9** Ein Punkt  $x \in X$  wird *vorwärts regulär* genannt, falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det A^n(x)| = \sum_{j=1}^d \lambda_j(x)$$

gilt.

**Satz 3.1.10** Ist ein Punkt  $x \in X$  vorwärts regulär, dann existieren die Grenzwerte

$$r_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(A^n(x))$$

für  $i = 1, \dots, d$ , wobei die Matrix  $R(A^n(x))$  die  $R$ -Komponente der eindeutigen QR-Zerlegung von  $A^n(x)$  ist. Außerdem gibt es eine Permutation  $\pi \in S_d$  mit  $\lambda_i = r_{\pi(i)}$ .

Beweis:

Sei  $Q(A^n(x))R(A^n(x))$  die eindeutige QR-Zerlegung von  $A^n(x)$ . Dann gilt wegen  $|\det Q(A^n(x))| = 1$

$$|\det(A^n(x))| = |\det R(A^n(x))| = \prod_{i=1}^d R_{ii}(A^n(x)). \quad (3.8)$$

Sei  $b_1, \dots, b_m$  eine obere Dreiecksbasis mit Einsen auf der Hauptdiagonale wie im Korollar 3.1.8. Für  $i = 1, \dots, d$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\|A^n(x)b_i\| = \|R(A^n(x))b_i\|$ . Daher können wir die Typzahlen zu  $b_i$  als

$$\chi^+(x, b_i) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|R(A^n(x))b_i\|$$

für  $i = 1, \dots, d$  berechnen. Weil die  $i$ -te Koordinate von  $b_i$  gleich 1 ist, gilt die Ungleichung  $R_{ii}(A^n(x)) \leq \|R(A^n(x))b_i\|$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \chi^+(x, b_i) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(A^n(x)) \\ &= \chi^+(R_{ii}(A^n(x))) \quad \text{für } i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sei nun  $x$  regulär. D.h., es gilt

$$\sum_{i=1}^d \chi^+(x, b_i) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det(A^n(x))|.$$

Dann erhalten wir mit dem Lemma 3.1.2, (3.9) und (3.8)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \chi^+(x, b_i) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det(A^n(x))| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \chi^+(R_{ii}(A^n(x))) \\ &\leq \sum_{i=1}^d \chi^+(x, b_i). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\sum_{i=1}^d \chi^+(R_{ii}(A^n(x))) = \sum_{i=1}^d \chi^+(x, b_i)$ . Und damit gilt wegen (3.9)

$$\chi^+(x, b_i) = \chi^+(R_{ii}(A^n(x))) \quad i = 1, \dots, d.$$

Außerdem haben wir auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^d \frac{1}{n} \ln R_{ii}(A^n(x)) = \sum_{i=1}^d \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(A^n(x)).$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(A^n(x)) \quad \text{für } i = 1, \dots, d$$

existieren.

□

Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes: existieren für ein  $x \in X$  die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(A^n(x))$  für  $i = 1, \dots, d$ , so ist  $x$  regulär (einen Beweis dafür findet man z.B. in [7]). Diese Richtung ist aber für uns irrelevant.

## 3.2 Regularität und der Satz von Oseledec

Wir betrachten weiterhin das System (3.1), (3.2). Analog zu der Folge  $\{A^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die wir im letzten Abschnitt untersucht haben, können wir die Folge  $\{A_-^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$A_-^n(x) = A^{-1}(g^{-n}(x)) \cdot \dots \cdot A^{-1}(g^{-1}(x))$$

und ihre Typzahlen

$$\chi^-(x, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_-^n(x)v\|$$

betrachten. Diese werden die *rückwärts-Typzahlen* von (3.1), (3.2) in  $x$  zum Vektor  $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  genannt.

Ähnlich wie auch für die vorwärts-Typzahlen können wir die Existenz von  $\chi^-(x, v)$  auf einer Menge  $X_\mu^-$  mit vollem Maß, lineare Unabhängigkeit der Vektoren mit unterschiedlichen rückwärts-Typzahlen u.s.w. zeigen. Die Beweise gehen analog, wie auch die folgenden Definitionen.

**Definition 3.2.1** (Siehe [7])

- (i) Ein Punkt  $x \in X_\mu^-$  wird **rückwärts regulär** genannt, falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det A_-^n(x)| = \sum_{j=1}^{s^-(x)} d_j^-(x) \Lambda_j^-(x)$$

gilt, wobei  $\Lambda_1^-(x) < \dots < \Lambda_{s^-(x)}^-(x)$  die rückwärts Liapunow-Exponenten von (3.1), (3.2) (*aufsteigend* angeordnet) und  $d_i^-(x)$  ihre Vielfachheiten sind.

- (ii) Ein Punkt  $x$  wird **Liapunow regulär** (oder einfach **regulär**) genannt, falls er vorwärts regulär und rückwärts regulär ist, außerdem  $\Lambda_i^+(x) = -\Lambda_i^-(x)$  gilt und eine Zerlegung  $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} W^i(x)$  existiert mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^n(x)v\| = \Lambda_m^+(x)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A_-^n(x)v\| = -\Lambda_m^-(x)$$

für  $v \in W^m(x)$ .

Der folgende Satz (siehe [36]) gibt uns eine Auskunft darüber, wie die Liapunow-Exponenten in der Abhängigkeit von dem gewählten Punkt  $x$  variieren. Unter anderem besagt er auch, dass die Regularität (im Liapunowschen Sinne) eine "typische" Eigenschaft für das System (3.1), (3.2) ist.

**Satz 3.2.2 (Oseledec)** *Sei  $g$  eine invertierbare maßtreue Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ . Für die Abbildung  $A : X \rightarrow GL(\mathbb{R}^d)$  gelte  $\ln^+ \|A(x)\| \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$  und  $\ln^+ \|A^{-1}(x)\| \in$*

$L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ . Dann existiert ein  $X_\mu \in \mathcal{B}(X)$  mit  $\mu(X_\mu) = 1$  und  $g(X_\mu) = X_\mu$  mit folgenden Eigenschaften.<sup>7</sup>

- (i) Es gibt eine messbare Abbildung  $s : X_\mu \rightarrow \{1, \dots, d\}$ .
- (ii) Für  $x \in X_\mu$  existieren natürliche Zahlen  $d_1(x), \dots, d_{s(x)}(x)$  mit  $\sum_{i=1}^{s(x)} d_i(x) = d$ .
- (iii) Zu jedem  $x \in X_\mu$  gibt es eine messbare Zerlegung  $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} W^i(x)$  mit  $\dim W^i(x) = d_i(x)$  und  $A(x)(W^i(x)) = W^i(g(x))$  für  $i = 1, \dots, s(x)$ .
- (iv) Für jedes  $x \in X_\mu$  existieren reelle Zahlen  $\lambda_1(x) > \dots > \lambda_{s(x)}(x)$  derart, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A(g^{n-1}(x)) A(g^{n-2}(x)) \dots A(x)v\| = \lambda_m(x)$$

für alle  $v \in \bigoplus_{i=m}^{s(x)} W^i(x) \setminus \bigoplus_{i=m+1}^{s(x)} W^i(x)$  gilt.

Für  $v \in \bigoplus_{i=1}^m W^i(x) \setminus \bigoplus_{i=1}^{m-1} W^i(x)$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|A^{-1}(g^{-n}(x)) \dots A^{-1}(g^{-1}(x))v\| = -\lambda_m(x).$$

- (v) Die Funktion  $\lambda_i(x)$  ist messbar auf  $\{x \in X_\mu \mid s(x) \geq i\}$  und  $\lambda_i(g(x)) = \lambda_i(x)$ .

Ist  $\mu$  ergodisch, so sind  $s(x)$  und  $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_s(x)$   $\mu$ -f.ü. konstant.

Man beachte, dass die Menge der regulären Punkte  $X_\mu$  im wesentlichen nur durch die Transformation  $g$  bzw. die Wahl des Maßes  $\mu$  auf  $X$  vorgegeben ist: Sind für zwei invertierbare Abbildungen  $A_1$  und  $A_2$  von  $X$  nach  $\mathbb{R}^{d \times d}$  die Funktionen  $\ln^+ \|A_1^{\pm 1}(x)\|$  und  $\ln^+ \|A_2^{\pm 1}(x)\|$  integrierbar bezüglich  $\mu$  mit regulären Mengen  $X_\mu(A_1)$  bzw.  $X_\mu(A_2)$ , so hat die Menge  $X_\mu = X_\mu(A_1) \cap X_\mu(A_2)$  wieder das volle Maß und ist regulär für die beiden Systeme.

### 3.3 Liapunow-Exponenten höherer Ordnung

Sei  $g$  weiterhin eine invertierbare Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$

$$g : X \rightarrow X, \quad g \text{ invertierbar, } \mu \text{ invariant.} \quad (3.10)$$

---

<sup>7</sup> $X_\mu$  ist die Menge der Liapunow regulären Punkte.

Für ein  $m \in \{1, \dots, d\}$  betrachten wir jetzt die  $m$ -te assoziierte Matrix (siehe die Definition 2.1.8) zur Matrix  $A$  aus (3.2):

$$\bigwedge^m A : X \rightarrow GL\left(\mathbb{R}^{\binom{d}{m}}\right), \quad x \mapsto \bigwedge^m A(x) \quad (3.11)$$

$$\text{mit } \ln^+ \|\bigwedge^m A(x)\| \in L^1(X, \mathcal{B}(X), \mu). \quad (3.12)$$

Für diese Abbildung können wir die Folgen  $\{(\bigwedge^m A(x))^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  für  $x \in X$  mit

$$(\bigwedge^m A(x))^n = \bigwedge^m A(g^{n-1}(x)) \cdot \dots \cdot \bigwedge^m A(x) = \bigwedge^m A^n(x)$$

definieren. Aus dem Lemma 2.1.7 (verallgemeinerte Hadamardsche Ungleichung) und der Definition von  $\bigwedge^m A$  folgt die Integrierbarkeit von  $\ln^+ \|\bigwedge^m A(x)\|$ . Also ist der Satz 3.2.2 auf das System (3.10)-(3.12) anwendbar. Damit existieren für ein  $x$  aus der Menge  $X_\mu$  der regulären Punkte insgesamt  $D = \binom{d}{m}$  Liapunow-Exponenten  $\lambda_1^m(x), \dots, \lambda_D^m(x)$ , gezählt mit ihren Vielfachheiten. Diese werden die Liapunow-Exponenten *m-ter Ordnung* für das System (3.1), (3.2) genannt.

Fortan werden wir mit  $X_\mu$  die Menge der Punkte bezeichnen, die sowohl für das System (3.1), (3.2) als auch für (3.10)-(3.12) regulär sind.

**Satz 3.3.1** *Seien  $\lambda(x)_1, \dots, \lambda(x)_d$  die Liapunow-Exponenten von (3.1), (3.2) in  $x \in X_\mu$  mit ihren Vielfachheiten. Dann sind*

$$\sum_{k=1}^m \lambda_{i_k}(x) \quad \text{für } i = (i_1, \dots, i_m) \in \text{Ord}(m, d)$$

*die Liapunow-Exponenten des Systems (3.10)-(3.12) in  $x$  mit ihren Vielfachheiten.*

Beweis:

Aus dem Satz 3.1.10 angewendet auf  $\bigwedge^m A$  folgt, dass die Liapunow-Exponenten  $\lambda_1^m(x), \dots, \lambda_{\binom{d}{m}}^m(x)$  von  $\bigwedge^m A$  in  $x$  mit Ihrer Vielfachheit gerade

$$\lambda_i^m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(\bigwedge^m A^n(x)) \quad \text{für } i \in \text{Ord}(m, d)$$

sind (eventuell ungeordnet). Mit dem Lemma 2.2.1 und dem Satz 3.1.10 (angewendet auf  $A$ ) erhalten wir für  $i \in \text{Ord}(m, d)$

$$\lambda_i^m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^m R_{i_k i_k}(A^n(x))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{i_k i_k} (A^n(x)) \\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_{\pi(i_k)}(x),
\end{aligned}$$

wobei  $\pi$  eine Permutation auf  $\{1, \dots, d\}$  ist. Da aber  $\{1, \dots, d\} = \{\pi(1), \dots, \pi(d)\}$  gilt, folgt aus der Bemerkung 2.1.1, dass

$$\{\{i_1, \dots, i_m\} \mid i \in \text{Ord}(m, d)\} = \{\{\pi(j_1), \dots, \pi(j_m)\} \mid j \in \text{Ord}(m, d)\}$$

ist. Daraus ergibt sich

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \lambda_{i_k}(x) \mid i \in \text{Ord}(m, d) \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^m \lambda_{\pi(i_k)}(x) \mid i \in \text{Ord}(m, d) \right\}.$$

□

Nun möchten wir für die weitere Analyse annehmen, dass  $\mu$  *ergodisch* ist. Dann folgt die Existenz von insgesamt  $S$  mit  $S \leq \binom{d}{m}$  unterschiedlichen  $\mu$ -fast überall *konstanten* Liapunow-Exponenten  $\lambda_1^m > \dots > \lambda_S^m$  für das System (3.10)-(3.12) aus dem Satz von Oseledec (Satz 3.2.2). Nach dem Satz 3.3.1 ist der größte von ihnen  $\lambda_1^m$  gleich

$$\lambda_1^m = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

wobei  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  die für  $\mu$ -fast alle  $x$  konstanten Liapunow-Exponenten des Systems (3.1),(3.2) mit ihren Vielfachheiten sind. Mit  $W_m^1(x), \dots, W_m^S(x)$  bezeichne man die Oseledec-Zerlegung zu  $\bigwedge^m A$  an der Stelle  $x \in X_\mu$ .

**Bemerkung 3.3.2** In der beschriebenen Situation gilt für  $x \in X_\mu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bigwedge^m A^n(x)v\| = \sum_{i=1}^m \lambda_i \Leftrightarrow v \in \mathbb{R}^{\binom{d}{m}} \setminus \bigoplus_{i=2}^S W_m^i(x).$$

Beweis:

Wir zeigen “ $\Rightarrow$ ” (die Rückrichtung folgt aus dem Satz 3.2.2).

Sei  $v \in \bigoplus_{i=2}^S W_m^i(x)$ . Also existieren  $\alpha_i$  und  $w_i(x) \in W_m^i(x)$  für  $i = i_v, \dots, S$  mit  $v = \sum_{i=i_v}^S \alpha_i w_i(x)$ , wobei  $\alpha_{i_v} \neq 0$  und  $i_v \geq 2$  ist. Dann folgt aus dem

Lemma 3.1.2

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bigwedge^m A^n(x)v\| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \bigwedge^m A^n(x) \sum_{i=i_v}^S \alpha_i w_i(x) \right\| \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left\| \sum_{i=i_v}^S \alpha_i \bigwedge^m A^n(x) w_i(x) \right\| \\
&= \max \{ \chi^+ (\alpha_i \bigwedge^m A^n(x) w_i(x)) \mid i = i_v, \dots, S \} \\
&\leq \chi^+ (\bigwedge^m A^n(x) w_{i_v}(x)) \\
&< \sum_{i=1}^m \lambda_i.
\end{aligned}$$

Womit die Behauptung bewiesen ist. □

Für eine Familie von linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^d$  definiere die Menge<sup>8</sup>

$$X_{v_1, \dots, v_m} = \left\{ x \in X_\mu \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bigwedge^m A^n(x)(v_1 \wedge \dots \wedge v_m)\| = \sum_{i=1}^m \lambda_i \right\}.$$

Mit  $e_1, \dots, e_m$  bezeichne die ersten  $m$  Vektoren der Standardbasis von  $\mathbb{R}^d$  ( $e_1 \wedge \dots \wedge e_m$  ist also der erste Vektor der Standardbasis von  $\mathbb{R}^{\binom{d}{m}}$ ).

**Satz 3.3.3** *Das Maß  $\mu$  im System (3.1), (3.2) sei ergodisch und  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  seien die Liapunow-Exponenten dieses Systems mit ihren Vielfachheiten. Für ein  $m \in \{1, \dots, d\}$  gelte  $\mu(X_{e_1, \dots, e_m}) = 1$  und  $\mu(X_{e_1, \dots, e_{m-1}}) = 1$ , dann ist*

$$\lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{mm}(A^n(x)) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Beweis:

Sei  $M$  eine  $d \times d$  invertierbare Matrix und  $R(M)$  sei die R-Komponente der eindeutigen QR-Zerlegung von  $M$ . Dann erhalten wir aus dem Lemma 2.2.1<sup>9</sup>

$$R_{mm}(M) = \frac{\prod_{i=1}^m R_{ii}(M)}{\prod_{i=1}^{m-1} R(M)_{ii}} = \frac{(\bigwedge^m R(M))_{11}}{(\bigwedge^{m-1} R(M))_{11}}$$

<sup>8</sup>Diese Definition ist eine Verallgemeinerung der in [6] benutzten Definition, die in der Form

$$X_v = \left\{ x \in X_\mu \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)v\| = \lambda_1 \right\}$$

(für ein  $v \in \mathbb{R}^r$ ) angegeben werden kann. In der genannten Quelle wurde diese Menge in einer Konvergenzaussage für die Folge  $\frac{1}{n} \int \ln \|Dg^n(x)v\| d\mu$  gegen  $\lambda_1$  benutzt.

<sup>9</sup>Im Falle  $m = 1$  ist das leere Produkt  $\prod_{i=1}^{m-1} R(M)_{ii}$  gleich 1 zu setzen.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|(\bigwedge^m R(M))_{\cdot 1}\|}{\|(\bigwedge^{m-1} R(M))_{\cdot 1}\|} \\
&= \frac{\|\bigwedge^m R(M)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m)\|}{\|\bigwedge^m R(M)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{m-1})\|} \\
&= \frac{\|\bigwedge^m M(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m)\|}{\|\bigwedge^m M(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{m-1})\|} \\
&= \frac{\|M_{\cdot 1} \wedge \cdots \wedge M_{\cdot m}\|}{\|M_{\cdot 1} \wedge \cdots \wedge M_{\cdot m-1}\|} \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Also gilt für  $\mu$ -fast alle  $x$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{mm}(A^n(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\|\bigwedge^m A^n(x)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m)\|}{\|\bigwedge^m A^n(x)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{m-1})\|} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bigwedge^m A^n(x)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m)\| \\
&\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\bigwedge^m A^n(x)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_{m-1})\| \\
&= \sum_{i=1}^m \lambda_i - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i = \lambda_m
\end{aligned}$$

□

Kehren wir zur Betrachtung des Systems

$$g : M \rightarrow M, \quad g \text{ ein } C^1\text{-Diffeomorphismus, } \mu \text{ ergodisch} \tag{3.14}$$

auf einer  $d$ -dimensionalen glatten abgeschlossenen reellen Untermannigfaltigkeit  $M$  zurück. Wegen der Abgeschlossenheit von  $M$  sind die Abbildungen

$$\ln \|Dg(x)\| \quad \text{und} \quad \ln \|(Dg(x))^{-1}\|$$

$\mu$ -integrierbar. Daher ist das System (3.14) ein Spezialfall des in diesem Kapitel bislang untersuchten Systems (3.1),(3.2). Aus diesem Grunde können wir eine hinreichende Bedingung, unter der die Voraussetzung des Satzes 1.4.1

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{ii}(Dg^n(x)) \quad \mu\text{-f.ü.}, \quad i = 1, \dots, d,$$

für die Liapunow-Exponenten  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  von (3.14) gilt und damit die Konvergenz

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \ln R_{ii}(Dg^n(x)) d\mu \quad i = 1, \dots, d.$$

gesichert ist, folgendermaßen formulieren:



**Korollar 3.3.4** Sei  $M_\mu$  die Menge der regulären Punkte von (3.14) und  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d$  die auf  $M_\mu$  konstanten Liapunow-Exponenten dieses Systems mit ihren Vielfachheiten. Es gelte

$$\mu \left( \left\{ x \in M_\mu \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\wedge^m Dg^n(x)(e_1 \wedge \dots \wedge e_m)\| = \sum_{i=1}^m \lambda_i \right\} \right) = 1$$

für  $m = 1, \dots, d-1$ .<sup>10</sup> Dann ist

$$\lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln R_{mm}(Dg^n(x)) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

für  $m = 1, \dots, d$ .

---

<sup>10</sup>Für  $m = d$  ist diese Bedingung automatisch erfüllt, weil

$$\left\| \wedge^d Dg^n(x)(e_1 \wedge \dots \wedge e_d) \right\| = |\det Dg^n(x)|$$

ist und alle  $x \in M_\mu$  regulär sind.



# Kapitel 4

## Analyse der Fehlerentwicklung

Das Ziel dieses Kapitels ist die analytische Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Folgen

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu \quad \text{für } m \in \{1, \dots, d\}, \quad (4.1)$$

deren räumliche Diskretisierung zur Approximation von Liapunow-Exponenten mit Hilfe der im Abschnitt 1.4 beschriebenen hybriden Methode dienen soll.

Zu diesem Zweck wird im Abschnitt 4.1 eine auf dem äußeren Produkt basierende Darstellung der Terme  $\ln R_{mm}(Dg^n(x))$ , die eine genaue Vorstellung über die Fehlerentwicklung der Folgen (4.1) ermöglicht, hergeleitet. Dabei wird der in [5] verwendete Ansatz aufgegriffen, in dem die Darstellung der Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_d$  in der aus den Oseledec-Vektoren bestehenden Basis des Tangentialraumes  $T_x M$  an der jeweiligen Stelle  $x$  zur Analyse der Folge  $\frac{1}{n} \int \|Dg^n(x)\| d\mu$  verwendet wurde.

Eine Schwierigkeit bei der Untersuchung von (4.1) stellt der Übergang von einer punktweisen zu der  $L^1(\mu)$  Konvergenz für gewisse Funktionenfolgen dar. Im Abschnitt 4.1 ist dieses Problem durch eine Integrabilitätsannahme gelöst. Im darauffolgenden Abschnitt 4.2 wird die gewünschte  $L^1(\mu)$  Konvergenz durch die Voraussetzung (Einführung) einer Art hyperbolischer Trennung von einzelnen Liapunow-Exponenten ( $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  Hyperbolizität<sup>1</sup>) erreicht. Im letzten Abschnitt wird der im Kapitel 1.3.2 angegebene Satz über die Konvergenz der Methode von Aston und Dellnitz bewiesen.

---

<sup>1</sup>Die Definition findet man in dem entsprechenden Abschnitt des Kapitels.

## 4.1 Analyse mit Hilfe der Oseledec-Zerlegung

In diesem Abschnitt betrachten wir ein diskretes dynamisches System auf einer  $d$ -dimensionalen glatten reellen Untermannigfaltigkeit

$$g : M \rightarrow M, \quad g \text{ } C^1\text{-Diffeomorphismus} \quad (4.2)$$

$$M \text{ abgeschlossen, } \mu \text{ ergodisches W-Ma\ss.} \quad (4.3)$$

Dieses System hat auf einer Borelschen Menge  $M_\mu$  mit  $\mu(M_\mu) = 1$  die konstanten Liapunow-Exponenten  $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$  ( $s \leq d$ ). Um die Analyse dieses Systems zu vereinfachen, wollen wir für die Oseledec-Zerlegung des Tangentialraumes  $T_x M = \bigoplus_{i=1}^s W^i(x)$

$$\dim W^i(x) = 1 \quad \text{für } i \in 1, \dots, s \quad (\text{also } s = d) \quad \mu - \text{f.ü.} \quad (4.4)$$

voraussetzen.

Jetzt erinnern wir an die im Kapitel 1.3.1 eingeführte Notation und an die dort erhaltenen Resultate:

- $w_i(x)$  für  $i = 1, \dots, d$  sind normierte ( $\|w_i(x)\| = 1$ ) messbare Vektorfelder mit  $w_i(x) \in W^i(x)$ .
- Die messbaren Abbildungen  $a^{(i)} : M_\mu \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  für  $i = 1, \dots, d$  werden durch

$$Dg(x)w_i(x) = a^{(i)}(x)w_i(g(x))$$

definiert. Für diese gilt  $a^{(i)}(x) = \pm \|Dg(x)w_i(x)\|$ ,  $i = 1, \dots, d$ , und

$$Dg^n(x)w_i(x) = \prod_{j=n-1}^0 a^{(i)}(g^j(x))w_i(g^n(x)).$$

- Weiter gilt für  $i = 1, \dots, d$

$$\lambda_i = \int \ln |a^{(i)}(x)| d\mu. \quad (4.5)$$

Setze weiter wie in [4], [5]

$$A_n^{(i)}(x) = \prod_{j=n-1}^0 a^{(i)}(g^j(x)) \quad i = 1, \dots, d. \quad (4.6)$$

**Lemma 4.1.1** Für eine positive Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln c_n = c < 0,$$

dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

Beweis:

Wähle ein  $\lambda \in (c, 0)$ , dann existiert ein  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{1}{n} \ln c_n < \lambda \Leftrightarrow \ln c_n < n\lambda \Leftrightarrow c_n < e^{n\lambda}$$

für alle  $n \geq \bar{n}$ . Da  $e^{n\lambda}$  gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert, folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 4.1.2** Sei  $i > j$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $\bar{\lambda} = \lambda_i - \lambda_j + \varepsilon < 0$ , dann existieren für  $\mu$ -fast alle  $x$  Konstanten  $C_{x,\varepsilon}$ , so dass

$$\frac{|A_n^{(i)}(x)|}{|A_n^{(j)}(x)|} \leq C_{x,\varepsilon} e^{\bar{\lambda}n}$$

gilt. Insbesondere ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^{(i)}(x)|}{|A_n^{(j)}(x)|} = 0$ .

Beweis:

Aus dem Satz von Oseledec und der Definition von  $A_n^{(i)}(x)$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^{(i)}(x)|}{|A_n^{(j)}(x)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{\|Dg^n(x)w_i(x)\|}{\|Dg^n(x)w_j(x)\|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)w_i(x)\| - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Dg^n(x)w_j(x)\| \\ &= \lambda_i - \lambda_j < 0 \end{aligned}$$

für  $i > j$ . Aus dem Lemma 4.1.1 folgt, dass es für jedes Paar  $i, j \in \{1, \dots, d\}$  mit  $i > j$  und jedes  $x \in M_\mu$  ein  $C_{x,\varepsilon}^{i,j}$  existiert mit

$$\frac{|A_n^{(i)}(x)|}{|A_n^{(j)}(x)|} \leq C_{x,\varepsilon}^{i,j} e^{\bar{\lambda}n}.$$

Man setze  $C_{x,\varepsilon} = \max\{C_{x,\varepsilon}^{i,j} \mid i > j\}$ .

□

Für  $i = (i_1, \dots, i_m) \in \text{Ord}(m, d)$  setze

$$A_n^i(x) = A_n^{(i_1)}(x) \cdots A_n^{(i_m)}(x).$$

Man bezeichne  $(1, \dots, m) \in \text{Ord}(m, d)$  als  $1_m$  und entsprechend ist

$$A_n^{1_m}(x) = A_n^{(1)}(x) \cdots A_n^{(m)}(x).$$

**Lemma 4.1.3** *Seien  $i, l \in \text{Ord}(m, d)$  mit  $i \neq 1_m = (1, \dots, m)$  beliebig. Sei  $\bar{\lambda} = \lambda_{m+1} - \lambda_m$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren Konstanten  $C_{x,\varepsilon}$  für  $x \in M_\mu$  mit*

$$\frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} \leq C_{x,\varepsilon} e^{(\bar{\lambda}+\varepsilon)n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} \leq C_{x,\varepsilon} e^{(\bar{\lambda}+\varepsilon)n}.$$

*Insbesondere gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} = 0$$

Beweis:

Es gilt (siehe den Beweis des Lemmas 4.1.2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} = \sum_{k=1}^m \lambda_{i_k} - \sum_{j=1}^m \lambda_j = \tilde{\lambda}_i$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} = \sum_{k=1}^m \lambda_{i_k} + \sum_{k=1}^m \lambda_{l_k} - 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j = \tilde{\lambda}_{i,l}.$$

Somit existiert für  $\varepsilon > 0$   $\mu$ -fast überall  $C_{x,\varepsilon}$ , so dass

$$\frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} \leq C_{x,\varepsilon} e^{\tilde{\lambda}_i + \varepsilon} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} \leq C_{x,\varepsilon} e^{\tilde{\lambda}_{i,l} + \varepsilon}$$

gilt. Da  $\lambda_{m+1} - \lambda_m \geq \tilde{\lambda}_i$  (die Gleichheit gilt für  $i = (1, \dots, m-1, m+1)$ ) und  $\tilde{\lambda}_i \geq \tilde{\lambda}_{i,l}$  ist ( $\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_{i,l}$  gilt für  $l = 1_m$ ), folgt die Behauptung.

□

Man definiere die Matrizen  $(\alpha_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  für  $x \in M_\mu$  durch<sup>2</sup>

$$e_j = \sum_{i=1}^d \alpha_{ij}(x) w_i(x) \quad \text{für } i = 1, \dots, d.$$

---

<sup>2</sup>Der Ansatz, bei dem die Einheitsvektoren zum Zwecke der Fehleranalyse in Oseledec-Vektoren zerlegt werden, kommt aus [5]

Dann gilt für  $j = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned}
Dg^n(x)e_j &= Dg^n(x) \sum_{i=1}^d \alpha_{ij}(x)w_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_{ij}(x)Dg^n(x)w_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^d \alpha_{ij}(x)A_n^{(i)}(x)w_i(g^n(x)) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Sei  $i = (i_1, \dots, i_m) \in \text{Ord}(m, d)$ , dann setzen wir zur Abkürzung  $\alpha_i(x) = \alpha_{i_1, \dots, i_m}(x)$ , wobei der Term  $\alpha_{i_1, \dots, i_m}(x)$  (siehe den Abschnitt 2.1) durch

$$\alpha_{i_1, \dots, i_m}(x) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1 1}(x) & \cdots & \alpha_{i_1 m}(x) \\ \alpha_{i_2 1}(x) & \cdots & \alpha_{i_2 m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_m 1}(x) & \cdots & \alpha_{i_m m}(x) \end{pmatrix}$$

definiert ist. Speziell für den Fall  $i = 1_m = (1, \dots, m)$  ist  $\alpha_{1_m}(x) = \alpha_{1, \dots, m}(x)$ . Aus dem Lemma 2.1.10 und (4.7) folgt

$$\begin{aligned}
(Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \cdots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m} &= \sum_{j \in \text{Ord}(m, d)} \alpha_j(x) (\wedge_{k=1}^m A_n^{(j_k)}(x)w_{j_k}(g^n(x))) \\
&= \sum_{j \in \text{Ord}(m, d)} \alpha_j(x) \prod_{k=1}^m A_n^{(j_k)}(x) (\wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x))).
\end{aligned}$$

Also gilt wegen  $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$

$$\begin{aligned}
&\|(Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \cdots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m}\|^2 = \\
&= \sum_{j, l \in \text{Ord}(m, d)} \alpha_j(x)\alpha_l(x) \prod_{k=1}^m A_n^{(j_k)}(x)A_n^{(l_k)}(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle \\
&= \sum_{j, l \in \text{Ord}(m, d)} \alpha_j(x)\alpha_l(x) A_n^j(x)A_n^l(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$= Gr_{m,n}(x) + Rest_{m,n}(x),$$

wobei mit  $Rest_{m,n}(x)$  die im Ausdruck (4.8) angegebene Summe ohne den ersten Summanden

$$Gr_{m,n}(x) = (\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2 \|w_1(g^n(x)) \wedge \cdots \wedge w_m(g^n(x))\|^2$$

bezeichnet wird. Das heißt

$$\begin{aligned} Rest_{m,n}(x) &= \\ &= \sum_{\substack{j,l \in Ord(m,d) \\ l \neq (1,\dots,m)}} \alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle \\ &+ \sum_{\substack{j \in Ord(m,d) \\ j \neq (1,\dots,m)}} \alpha_j(x) \alpha_{1_m}(x) A_n^j(x) A_n^{1_m}(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x)) \rangle. \end{aligned}$$

Analog werden  $Rest_{m-1,n}(x)$  und  $Gr_{m-1,n}(x)$  definiert, wobei die Indizes über  $Ord(m-1, d)$  laufen sollten.

**Bemerkung 4.1.4** Alle folgenden Integrale seien zunächst im Sinne von Integralen für die messbaren *numerischen* Funktionen<sup>3</sup> erklärt, so dass, wenn nichts zusätzlich angemerkt wird, auch die Werte  $+\infty$  und  $-\infty$  angenommen werden können.

Für ein  $m \in \{1, \dots, d\}$  sei die Folge  $(a_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$  wie bereits im Kapitel 1.4 durch

$$a_n^m = \frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu.$$

definiert. Angenommen, es existiert der Grenzwert

$$C_m = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n^m - \lambda_m),$$

dann ist

$$a_n^m = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} na_n^m &= \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu \\ &= \int \ln \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{|A_n^{(m)}(x)|} d\mu + \int \ln |A_n^{(m)}(x)| d\mu. \end{aligned} \quad (4.9)$$

---

<sup>3</sup>Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  heißt numerisch. Zu der Integralbildung für die messbaren numerischen Funktionen siehe z.B. [18].



Aus der Definition von  $A_n^{(m)}(x)$ , (4.5) und der Invarianz von  $\ln |a^{(m)}(x)|$  unter  $\mu$  folgt

$$\begin{aligned} \int \ln |A_n^{(m)}(x)| d\mu &= \int \ln \prod_{j=n-1}^0 |a^{(m)}(g^j(x))| d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int \ln |a^{(m)}(g^j(x))| d\mu \\ &= n\lambda_m \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.9) ergibt sich also

$$n(a_n^m - \lambda_m) = na_n^m - n\lambda_m = \int \ln \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{|A_n^{(m)}(x)|} d\mu. \quad (4.10)$$

Dieser Term wird nun genauer untersucht.

Mit  $W(x)$  bezeichne man die Matrix mit den Spalten  $w_1(x), \dots, w_m(x)$  und setze für  $k = 1, \dots, d$

$$W_{k,\dots,d}^{k,\dots,d}(x) = \left( \bigwedge^{d-k+1} W(x) \right)_{k \dots d, k \dots d} = \det \begin{pmatrix} W_{kk}(x) & \cdots & W_{kd}(x) \\ W_{k+1k}(x) & \cdots & W_{k+1d}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{dk}(x) & \cdots & W_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

und für  $k = d + 1$  setze  $W_{k,\dots,d}^{k,\dots,d}(x) = 1$ .

**Satz 4.1.5** *Das System (4.2), (4.3) genüge der Annahme (4.4). Außerdem seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(i)  $|W_{m+1,\dots,d}^{m+1,\dots,d}(x)| > 0$  und  $|W_{m,\dots,d}^{m,\dots,d}(x)| > 0$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in M$ .

(ii)  $\ln \frac{|W_{m+1,\dots,d}^{m+1,\dots,d}(x)|}{|W_{m,\dots,d}^{m,\dots,d}(x)|}$  sei  $\mu$ -integrierbar.

(iii) Es existieren  $\varepsilon_{m-1} > 0$ ,  $\varepsilon_m > 0$  derart, dass

$$\inf_n \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\| \geq \varepsilon_m \quad \text{und} \quad \inf_n \|\wedge_{k=1}^{m-1} w_k(g^n(x))\| \geq \varepsilon_{m-1}$$

für  $\mu$ -fast alle  $x \in M$  ist.

Bei  $m = 1$  wird  $\inf_n \|\wedge_{k=1}^{m-1} w_k(g^n(x))\| = 1$  gesetzt.

(iv) Die Funktionenfolgen

$$\left( \ln \left( 1 + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left( \ln \left( 1 + \frac{Rest_{m-1,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x)} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

besitzen eine  $\mu$ -integrierbare Majorante  $g(x)$ .

Dann gilt

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

wobei

$$C_m = \int \ln \frac{|W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{|W_{m, \dots, d}^{m, \dots, d}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu$$

ist.

Beweis:

Da die Matrix  $\alpha(x)$  die Inverse von  $W^{-1}(x)$  ist, gilt für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$  und  $i, j \in Ord(k, d)$  (siehe, z.B. §1.4 in [23])

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1 j_1}(x) & \cdots & \alpha_{i_1 j_k}(x) \\ \alpha_{i_2 j_1}(x) & \cdots & \alpha_{i_2 j_k}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_k j_1}(x) & \cdots & \alpha_{i_k j_k}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{K_{i,j}} \det W(x)^{-1} \det \begin{pmatrix} W_{\hat{j}_1 \hat{i}_1}(x) & \cdots & W_{\hat{j}_1 \hat{i}_{d-k}}(x) \\ W_{\hat{j}_2 \hat{i}_1}(x) & \cdots & W_{\hat{j}_2 \hat{i}_{d-k}}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{\hat{j}_{d-k} \hat{i}_1}(x) & \cdots & W_{\hat{j}_{d-k} \hat{i}_{d-k}}(x) \end{pmatrix}$$

mit  $K_{i,j} = \sum_{l=1}^k (i_l + j_l)$ . Dabei sind die aufsteigend geordnete Tupel  $(\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{d-k})$  und  $(\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{d-k})$  durch

$$\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{d-k}\} \cup \{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, d\}$$

bzw.

$$\{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{d-k}\} \cup \{j_1, \dots, j_k\} = \{1, \dots, d\}$$

definiert. Anders ausgedrückt ist (siehe die Definition 2.1.8)

$$\left( \bigwedge^k \alpha(x) \right)_{i,j} = (-1)^{K_{i,j}} \frac{\left( \bigwedge^{d-k} W(x) \right)_{\hat{j}, \hat{i}}}{\det W(x)}. \quad (4.11)$$

Daraus folgt wegen  $\det A^T = \det A$  für eine reelle Matrix  $A$ , dass

$$|\alpha_{1,\dots,m}(x)| = \left| \frac{W_{m+1,\dots,d}^{m+1,\dots,d}(x)}{\det(W(x))} \right| \quad \text{bzw.} \quad |\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| = \left| \frac{W_{m,\dots,d}^{m,\dots,d}(x)}{\det(W(x))} \right|$$

ist. Damit gilt

$$|\alpha_{1,\dots,k}(x)| > 0 \Leftrightarrow \left| W_{k+1,\dots,d}^{k+1,\dots,d}(x) \right| > 0 \quad \text{für } k = m-1, m$$

und

$$\frac{\left| W_{m+1,\dots,d}^{m+1,\dots,d}(x) \right|}{\left| W_{m,\dots,d}^{m,\dots,d}(x) \right|} = \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)|}.$$

Es reicht also wegen (4.10) zu zeigen, dass

$$\int \ln \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{|A_n^{(m)}(x)|} d\mu - \int \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$  gilt.

Es ist

$$\begin{aligned} & \int \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu = \\ & = \int \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)|} d\mu + \int \ln \frac{\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu, \end{aligned}$$

da nach den Voraussetzungen (ii) und (iii) beide Integrale endlich sind. Wegen der Invarianz des Maßes gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\int \ln \frac{\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu = \int \ln \frac{\|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_m(g^n(x))\|}{\|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(g^n(x))\|} d\mu.$$

Damit ist für  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu = \\ & = \int \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_m(g^n(x))\|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(g^n(x))\|} d\mu \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\int \ln \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{A_n^{(m)}(x)} d\mu - \int \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \ln \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{A_n^{(m)}(x)} - \ln \frac{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_m(g^n(x))\|}{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(g^n(x))\|} d\mu \\
&= \int \ln \frac{R_{mm}(Dg^n(x)) |\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(g^n(x))\|}{A_n^{(m)}(x) |\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_m(g^n(x))\|} d\mu
\end{aligned}$$

Wegen

$$R_{mm}(Dg^n(x)) = \frac{\|(Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m}\|}{\|(Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m-1}\|}$$

(siehe (3.13)) und (4.8) ist

$$\begin{aligned}
&(R_{mm}(Dg^n(x)))^2 = \\
&= \frac{\langle (Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m}, (Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m} \rangle}{\langle (Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m-1}, (Dg^n(x))_{\cdot 1} \wedge \dots \wedge (Dg^n(x))_{\cdot m-1} \rangle} \\
&\quad \frac{\sum_{j,l \in \text{Ord}(m,d)} \alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle}{\sum_{j,l \in \text{Ord}(m-1,d)} \alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x) \langle \wedge_{k=1}^{m-1} w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^{m-1} w_{l_k}(g^n(x)) \rangle}
\end{aligned}$$

Benutzt man die bereits eingeführten Bezeichnungen  $Rest_{m,n}(x)$ ,  $Gr_{m,n}(x)$ , bzw.  $Rest_{m-1,n}(x)$ ,  $Gr_{m-1,n}(x)$ , so ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\left( \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{A_n^{(m)}(x)} \right)^2 = \frac{Gr_{m,n}(x) + Rest_{m,n}(x)}{(Gr_{m-1,n}(x) + Rest_{m-1,n}(x)) \left( A_n^{(m)}(x) \right)^2}.$$

Teilen wir den Zähler und den Nenner durch  $Gr_{m-1,n}(x) \left( A_n^{(m)}(x) \right)^2$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{A_n^{(m)}(x)} \right)^2 = \\
&\frac{(\alpha_{1_m}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x))\|^2}{(\alpha_{1_{m-1}}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^{m-1} w_{j_k}(g^n(x))\|^2} + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x) \left( A_n^{(m)}(x) \right)^2} \\
&= \frac{1 + \frac{Rest_{m-1,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x)}}{1 + \frac{Rest_{m-1,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x)}}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x) \left(A_n^{(m)}(x)\right)^2} \times \frac{(\alpha_{1,\dots,m-1}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^{m-1} w_k(g^n(x))\|^2}{(\alpha_{1,\dots,m}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} = \\
& = \frac{Rest_{m,n}(x)}{(\alpha_{1,\dots,m}(x))^2 \prod_{k=1}^m \left(A_n^{(k)}(x)\right)^2 \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} \\
& = \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
& \frac{R_{mm}(Dg^n(x))}{\left|A_n^{(m)}(x)\right|} \times \frac{|\alpha_{1,\dots,m-1}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(g^n(x))\|}{|\alpha_{1,\dots,m}(x)| \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_m(g^n(x))\|} = \\
& = \left( \left(1 + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)}\right) \left(1 + \frac{Rest_{m-1,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x)}\right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \ln \left(1 + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)}\right)^{\frac{1}{2}} d\mu = 0$$

ist.

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} = \\
& = \sum_{\substack{j,l \in Ord(m,d) \\ l \neq (1,\dots,m)}} \frac{\alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle}{(\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} + \\
& + \sum_{\substack{j \in Ord(m,d) \\ j \neq (1,\dots,m)}} \frac{\alpha_j(x) \alpha_{1_m}(x) A_n^j(x) A_n^{1_m}(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x)) \rangle}{(\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2}.
\end{aligned}$$

Man betrachte die Folge  $\left(\frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  für ein  $x \in M$ , für das die Voraussetzungen (i) und (iii) erfüllt sind. Aus der verallgemeinerten Hadamardschen Ungleichung (Lemma 2.1.7) folgt für  $j \in Ord(m, d)$

$$\|\wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x))\| \leq \prod_{k=1}^m \|w_{j_k}(g^n(x))\| = 1.$$

Daraus erhalten wir für  $j, l \in \text{Ord}(m, d)$  mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle \leq 1.$$

Mit der Voraussetzung (iii) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{j,l \in \text{Ord}(m,d) \\ l \neq (1,\dots,m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_{l_k}(g^n(x)) \rangle}{(\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} \right| \\ & + \sum_{\substack{j \in \text{Ord}(m,d) \\ j \neq (1,\dots,m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) A_n^j(x) \langle \wedge_{k=1}^m w_{j_k}(g^n(x)), \wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x)) \rangle}{\alpha_{1_m}(x) A_n^{1_m}(x) \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} \right| \\ & \leq \sum_{\substack{j,l \in \text{Ord}(m,d) \\ l \neq (1,\dots,m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x)}{(\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2 \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} \right| \\ & + \sum_{\substack{j \in \text{Ord}(m,d) \\ j \neq (1,\dots,m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) A_n^j(x)}{\alpha_{1_m}(x) A_n^{1_m}(x) \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\|^2} \right| \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_m^2} \left( \sum_{\substack{j,l \in \text{Ord}(m,d) \\ l \neq (1,\dots,m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x)}{(\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2} \right| + \sum_{\substack{j \in \text{Ord}(m,d) \\ j \neq (1,\dots,m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) A_n^j(x)}{\alpha_{1_m}(x) A_n^{1_m}(x)} \right| \right) \end{aligned}$$

Da die Terme  $\alpha_j(x)$  für  $j \in \text{Ord}(m, d)$  unabhängig von  $n$  sind, folgt aus dem Lemma 4.1.3 die punktweise Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

für  $\mu$ -fast alle  $x$ . Mit dem Lebesgueschen Satz von der dominierten Konvergenz (zusammen mit der Voraussetzung (iv)) erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu = 0.$$

Der Beweis für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m-1,n}(x)}{\text{Gr}_{m-1,n}(x)} \right)^{-\frac{1}{2}} d\mu = 0$$

geht analog. □

## 4.2 Erweiterung des Hyperbolizitätsbegriffes

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst Systeme von der Form

$$g : M \rightarrow M, \quad g \text{ ein } C^1\text{-Diffeomorphismus, } M \text{ abgeschlossen} \quad (4.12)$$

auf einer  $d$ -dimensionalen glatten reellen Untermannigfaltigkeit  $M$ . Alle im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen und Notationen werden beibehalten.

Als erstes möchten wir an die Standarddefinition einer hyperbolischen Menge für die Abbildung  $g$  erinnern (siehe z.B. [31]).

Eine kompakte,  $g$ -invariante Teilmenge  $M^h$  von  $M$  heißt *hyperbolisch*,<sup>4</sup> wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) In jedem Punkt  $x \in M^h$  existieren zwei Unterräume  $W_x^s$  und  $W_x^u$  mit  $T_x M = W_x^s \oplus W_x^u$  und es gelten die Beziehungen

$$Dg(x)W_x^u = W_{g(x)}^u \quad \text{und} \quad Dg(x)W_x^s = W_{g(x)}^s.$$

- (ii) Es gibt Konstanten  $C > 0$  und  $\Delta \in (0, 1)$ , so dass in jedem Punkt  $x \in M^h$  die Ungleichungen

$$(a) \quad \|Dg^n(x)v\| \leq C\Delta^n \|v\| \quad \text{für } v \in W_x^s \text{ und } n \geq 0.$$

$$(b) \quad \|Dg^n(x)v\| \leq C\Delta^{-n} \|v\| \quad \text{für } v \in W_x^u \text{ und } n \leq 0.$$

erfüllt sind.

Die Bedingung (ii)(b) ist äquivalent zu

$$(ii) \quad (b') \quad \|Dg^n(x)v\| \geq \frac{1}{C}\Delta^{-n} \|v\| \quad \text{für } v \in W_x^u \text{ und } n \geq 0.$$

(siehe §12 in [31]).

Man setze  $\delta = -\ln \Delta$  (natürlich ist  $\delta > 0$ ) und modifiziere die Definition der Hyperbolizität folgendermaßen:

**Definition 4.2.1** Eine kompakte, invariante Teilmenge  $M^h$  von  $M$  heißt *hyperbolisch*, falls sie der Invarianzbedingung (i) für die Untervektorräume

---

<sup>4</sup>Die Mengen mit den hier angegebenen Eigenschaften werden oft auch als *gleichmäßig (uniformly) hyperbolisch* bezeichnet. Eine allgemeinere Definition der hyperbolischen Mengen findet man in [7]. Diese ist aber für uns jetzt irrelevant.

$W_x^s, W_x^u$  genügt und es Konstanten  $C > 0$  und  $\delta > 0$  existieren, so dass die folgenden Ungleichungen für  $x \in M^h$  gelten:

$$\|Dg^n(x)v\| \leq Ce^{-\delta n}\|v\| \quad \text{für } v \in W_x^s \text{ und } n \geq 0.$$

$$\|Dg^n(x)v\| \geq \frac{1}{C}e^{\delta n}\|v\| \quad \text{für } v \in W_x^u \text{ und } n \geq 0.$$

Nun fixieren wir ein ergodisches W-Maß im System (4.12).<sup>5</sup> Wir betrachten also auf einer  $d$ -dimensionalen glatten reellen Untermannigfaltigkeit das System

$$g : M \rightarrow M, \quad g \text{ } C^1\text{-Diffeomorphismus} \quad (4.13)$$

$$M \text{ abgeschlossen, } \mu \text{ ergodisches W-Maß.} \quad (4.14)$$

Dieses System hat laut dem Satz von Oseledec (Satz 1.1.1) auf einer  $g$ -invarianten Borelschen Menge  $M_\mu$  vom vollen Maß konstante Liapunow-Exponenten  $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$  ( $s \leq d$ ) mit den zugehörigen Oseledec-Zerlegungen des Tangentialraumes  $T_x M = \bigoplus_{i=1}^s W^i(x)$  für  $x \in M_\mu$ .

**Definition 4.2.2** Das System (4.13), (4.14) nennen wir  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  *hyperbolisch* für ein  $m \in \{1, \dots, s-1\}$ , wenn es eine Teilmenge  $M_\mu^h$  von  $M_\mu$  mit  $\mu(M_\mu^h) = 1$  und Konstanten  $C \geq 1$ ,<sup>6</sup>  $\delta_m \geq 0$ ,  $\delta_{m+1} \geq 0$  gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i)  $\lambda_{m+1} + \delta_{m+1} < \lambda_m - \delta_m$ .

(ii) Für  $x \in M_\mu^h$  gilt

(a)  $\|Dg^n(x)v\| \leq Ce^{(\lambda_{m+1} + \delta_{m+1})n}\|v\|$  für  $v \in \bigoplus_{i=m+1}^s W^i(x)$  und  $n \geq 0$ .

(b)  $\|Dg^n(x)v\| \geq \frac{1}{C}e^{(\lambda_m - \delta_m)n}\|v\|$  für  $v \in \bigoplus_{i=1}^m W^i(x)$  und  $n \geq 0$ .

Die Konstanten  $C$ ,  $\delta_m$  und  $\delta_{m+1}$  nennen wir *die Hyperbolizitätsparameter* (oder einfach *Parameter*).

<sup>5</sup>Die Existenz eines solchen ist mit dem Lemma 1.5 [32] gesichert.

<sup>6</sup>Eigentlich wäre es ausreichend  $C > 0$  anzunehmen, die Bedingung  $C \geq 1$  stellt aber keine Einschränkung der Allgemeinheit dar.



**Bemerkung 4.2.3**

- (i) Die Existenz von  $C$ ,  $\delta_m$  und  $\delta_{m+1}$  für ein gegebenes  $x \in M_\mu$ , die den Bedingungen der Definition 4.2.2 genügen, folgt aus der Definition von Liapunow-Exponenten (zum Teil ist es im Lemma 4.1.2 gezeigt worden). Die Definition 4.2.2 verlangt, dass diese Konstanten *universell* für  $\mu$ -fast alle  $x$  sind.
- (ii) Das Konzept der  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  Hyperbolizität hat eine direkte Verbindung zu der bei Katok und Hasselblatt [27] angegebenen  $(\gamma_1, \gamma_2)$  Aufspaltung (im Original [27] heißt diese  $(\lambda, \mu)$  splitting): Man kann leicht zeigen, dass, falls das System (4.13), (4.14) für  $\lambda_{m+1} \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \lambda_m$  bezüglich der Folge  $\{Dg^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  für  $\mu$ -fast alle  $x$  die  $(\gamma_1, \gamma_2)$  Aufspaltung aufweist, dieses System auch  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolisch ist.

Die  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  Hyperbolizität stellt eine Art Verallgemeinerung des Hyperbolizitätsbegriffes dar: Besitzt das System (4.13), (4.14) eine hyperbolische Menge  $M^h$  mit  $\mu(M^h) = 1$ , dann ist dieses System  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolisch für ein  $m \in \{1, \dots, s-1\}$ , wobei  $\lambda_{m+1} < 0$  und  $\lambda_m > 0$  gilt. Ist andererseits das System (4.13), (4.14)  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolisch ( $\lambda_{m+1}$  und  $\lambda_m$  wie oben), so ist es nicht unbedingt hyperbolisch im klassischen Sinne,<sup>7</sup> denn  $\lambda_{m+1} + \delta_{m+1}$  kann auch positiv sein.

**Lemma 4.2.4** *Das System (4.13), (4.14) sei  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolisch mit Parametern  $C$ ,  $\delta_m$  und  $\delta_{m+1}$ . Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit*

$$\angle \left( \bigoplus_{i=1}^m W^i(x), \bigoplus_{i=m+1}^s W^i(x) \right) \geq \varepsilon_0 \quad (4.15)$$

für alle  $x \in M_\mu^h$ .

Beweis:<sup>8</sup>

Seien  $v \in \bigoplus_{i=1}^m W^i(x)$  und  $w \in \bigoplus_{i=m+1}^s W^i(x)$  auf Eins normierte Vektoren. Man setze für  $x \in M_\mu^h$

$$K_n(x) = Dg^n(x)(v - w).$$

Demnach ist  $|K_0(x)| = \|v - w\|$  und (4.15) ist bewiesen, wenn  $\|v - w\| \geq \varepsilon$  für alle  $x \in M_\mu^h$  und ein festes  $\varepsilon > 0$  gezeigt ist.

Aus der Kompaktheit von  $M$  folgt, dass es eine Konstante  $C' > 0$  mit

$$\|Dg(x)\| < C' \quad \text{und} \quad \|Dg^{-1}(x)\| < C'$$

<sup>7</sup>D.h., es muss keine hyperbolische Menge im Sinne der Definition 4.2.1 vorhanden sein.

<sup>8</sup>Die Beweisidee kommt aus [31], wo die entsprechende Behauptung für die hyperbolischen Mengen aufgestellt ist.

für alle  $x \in M$  (also auch für alle  $x \in M_\mu^h$ ) existiert. Daraus erhalten wir

$$|K_n(x)| \leq (C')^n \|v - w\|. \quad (4.16)$$

Aus der  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  Hyperbolizität und der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt für  $x \in M_\mu^h$

$$\begin{aligned} |K_n(x)| &\geq \|Dg^n(x)v\| - \|Dg^n(x)w\| \\ &\geq \frac{1}{C} e^{(\lambda_m - \delta_m)n} - C e^{(\lambda_{m+1} + \delta_{m+1})n}. \end{aligned}$$

Da  $\lambda_{m+1} + \delta_{m+1} < \lambda_m - \delta_m$  ist, existiert ein  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\varepsilon' = \frac{1}{C} e^{(\lambda_m - \delta_m)\bar{n}} - C e^{(\lambda_{m+1} + \delta_{m+1})\bar{n}} > 0$$

gilt. Zusammen mit (4.16) haben wir

$$\|v - w\| \geq \frac{1}{(C')^{\bar{n}}} |K_{\bar{n}}(x)| \geq \frac{\varepsilon'}{(C')^{\bar{n}}}$$

für alle  $x \in M_\mu^h$ .

□

**Lemma 4.2.5** *Das System (4.13), (4.14) sei  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolisch mit Parametern  $C$ ,  $\delta_m$  und  $\delta_{m+1}$ . Dann gilt für  $i, l \in \text{Ord}(m, d)$  mit  $i \neq 1_m$*

$$\frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} \leq C^{2m} e^{\bar{\lambda}n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} \leq C^{4m} e^{\bar{\lambda}n},$$

wobei  $\bar{\lambda} = \lambda_{m+1} + \delta_{m+1} - (\lambda_m - \delta_m)$  ist. Insbesondere gilt für  $\mu$ -fast alle  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} = 0.$$

Beweis:

Aus der Definition von  $A_n^i(x)$  bzw.  $A_n^{(i_k)}(x)$  folgt

$$\frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} = \frac{\|Dg^n(x)w_{i_1}(x)\| \cdots \|Dg^n(x)w_{i_m}(x)\|}{\|Dg^n(x)w_1(x)\| \cdots \|Dg^n(x)w_m(x)\|}.$$

Man setze für  $i \in \text{Ord}(m, d)$

$$\begin{aligned} \check{s} &= \#\{j \in \{i_1, \dots, i_m\} \mid j \in \{1, \dots, m\}\} \\ \hat{s} &= m - \check{s}, \\ \{\check{i}_1, \dots, \check{i}_{\check{s}}\} &= \{i_1, \dots, i_m\} \cap \{1, \dots, m\}, \\ \{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{\hat{s}}\} &= \{i_1, \dots, i_m\} \setminus \{\check{i}_1, \dots, \check{i}_{\check{s}}\}, \\ \{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_{\tilde{s}}\} &= \{1, \dots, m\} \setminus \{\check{i}_1, \dots, \check{i}_{\check{s}}\}. \end{aligned}$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1m}(x)|} &= \frac{\prod_{k=1}^{\hat{s}} \|Dg^n(x)w_{\hat{i}_k}(x)\| \prod_{k=1}^{\hat{s}} \|Dg^n(x)w_{\hat{i}_k}(x)\|}{\prod_{i=1}^m \|Dg^n(x)w_i(x)\|} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{\hat{s}} \|Dg^n(x)w_{\hat{i}_k}(x)\|}{\prod_{k=1}^{\hat{s}} \|Dg^n(x)w_{\hat{i}_k}(x)\|}. \end{aligned}$$

Da  $w_{\hat{i}_k}(x) \in \bigoplus_{i=m+1}^d W^i(x)$  und  $w_{\hat{i}_k}(x) \in \bigoplus_{i=1}^m W^i(x)$  für  $k = 1, \dots, \hat{s}$  ist, folgt aus der Annahme der  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  Hyperbolizität und  $1 \leq \hat{s} \leq m$ , dass

$$\frac{|A_n^i(x)|}{|A_n^{1m}(x)|} \leq \frac{(C e^{(\lambda_{m+1} + \delta_{m+1})n})^{\hat{s}}}{(C^{-1} e^{(\lambda_m - \delta_m)n})^{\hat{s}}} = C^{2\hat{s}} e^{\bar{\lambda}n\hat{s}} \leq C^{2m} e^{\bar{\lambda}n\hat{s}} \leq C^{2m} e^{\bar{\lambda}},$$

gilt.

Der Beweis für

$$\frac{|A_n^i(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1m}(x))^2} \leq C^{4m} e^{\bar{\lambda}n}$$

geht analog.

□

Jetzt werden wir, wie auch im Kapitel 4.1, die Konvergenzgeschwindigkeit der Integralfolge

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu$$

für ein festes  $m \in \{1, \dots, d\}$  gegen den Liapunow-Exponenten  $\lambda_m$  untersuchen.

Zur Vereinfachung der Analyse wollen wir die Annahme der *Einfachheit* der Liapunow-Exponenten des Systems (4.13), (4.14) machen. Es wird also angenommen, dass

$$\dim W^i(x) = 1 \quad (i = 1, \dots, d) \quad \text{bzw.} \quad T_x M = \bigoplus_{i=1}^d W^i(x) \quad \mu\text{-f.ü.} \quad (4.17)$$

gilt.

**Satz 4.2.6** *Das System (4.13), (4.14) genüge der Annahme (4.17). Weiter seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(i) *Es existiere ein  $\bar{\varepsilon}_m > 0$  mit<sup>9</sup>*

$$\left| W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x) \right| > \bar{\varepsilon}_m \quad \text{und} \quad \left| W_{m, \dots, d}^{m, \dots, d}(x) \right| > \bar{\varepsilon}_m \quad \text{für } \mu\text{-f.ü.}$$

<sup>9</sup>Zur Erinnerung: für  $m = d$  wird  $W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x) = 1$  gesetzt.

(ii) Es existiere  $\varepsilon_m > 0$  derart, dass

$$\inf_n \|\wedge_{k=1}^m w_k(g^n(x))\| \geq \varepsilon_m \quad \text{und} \quad \inf_n \|\wedge_{k=1}^{m-1} w_k(g^n(x))\| \geq \varepsilon_m$$

für  $\mu$ -fast alle  $x \in M$  ist.<sup>10</sup>

(iii) Das System sei  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  und  $\lambda_m - \lambda_{m-1}$  hyperbolisch mit Parametern  $C, \delta_{m-1}, \delta_m$  und  $\delta_{m+1}$ .

Man setze  $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_{m+1} + \delta_{m+1} - (\lambda_m - \delta_m), \lambda_m + \delta_m - (\lambda_{m-1} - \delta_{m-1})\}$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon' \in (0, -\bar{\lambda})$

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}}{n}\right)$$

mit

$$C_m = \int \ln \frac{|W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{|W_{m, \dots, d}^{m, \dots, d}(x)| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu.$$

**Bemerkung 4.2.7** Die Voraussetzungen des Satzes 4.2.6 und des Satzes 4.1.5 unterscheiden sich folgendermaßen:

- (i) Die Voraussetzungen (i) und (ii) des Satzes 4.1.5 wurden durch die Voraussetzung (i) im Satz 4.2.6 verstärkt.
- (ii) Die Integrierbarkeitsvoraussetzung (iv) vom Satz 4.1.5 wird durch die Hyperbolizitätsvoraussetzung (iii) im Satz 4.2.6 ersetzt (verschärft).

Die Verstärkung der Annahmen im Satz 4.2.6 hat die Verschärfung der Konvergenzaussage zur Folge. Der Restfehlerterm  $o\left(\frac{1}{n}\right)$  wurde durch den Term  $o\left(\frac{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}}{n}\right)$  ersetzt.

Beweis des Satzes 4.2.6:

Im Beweis des Satzes 4.1.5 haben wir schon gesehen, dass

$$\begin{aligned} & n \left( \frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu - \lambda_m \right) - C_m = \\ & = \int \ln \left( \left( 1 + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right) \left( 1 + \frac{Rest_{m-1,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x)} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Bei  $m = 1$  wird  $\inf_n \|\wedge_{k=1}^{m-1} w_k(g^n(x))\| = 1$  gesetzt.

gilt (die Voraussetzungen (i)-(iii) des Satzes 4.1.5 folgen aus (i) und (ii)).  
Somit bleibt uns

$$\frac{1}{e^{(\bar{\lambda}+\varepsilon')n}} \int \ln \left( \left( 1 + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right) \left( 1 + \frac{Rest_{m-1,n}(x)}{Gr_{m-1,n}(x)} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

für  $n \rightarrow \infty$  zu zeigen.

Zunächst werden wir den Term  $\frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)}$  näher untersuchen. Es ist bereits im Beweis vom Satz 4.1.5 gezeigt worden (siehe die Seite 58f.), dass

$$\begin{aligned} & \left| \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_m^2} \left( \sum_{\substack{j \in Ord(m,d) \\ l \in Ord(m,d) \\ l \neq (1, \dots, m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) \alpha_l(x) A_n^j(x) A_n^l(x)}{(\alpha_{1_m}(x))^2 (A_n^{1_m}(x))^2} \right| + \sum_{\substack{j \in Ord(m,d) \\ j \neq (1, \dots, m)}} \left| \frac{\alpha_j(x) A_n^j(x)}{\alpha_{1_m}(x) A_n^{1_m}(x)} \right| \right) \end{aligned}$$

gilt. Aus (4.11) folgt für  $j \in Ord(m, d)$

$$\left| \frac{\alpha_j(x)}{\alpha_{1_m}(x)} \right| = \left| \frac{(\wedge^m \alpha(x))_{j, 1_m}}{(\wedge^m \alpha(x))_{1_m, 1_m}} \right| = \left| \frac{(\wedge^{d-m} W(x))_{m+1 \dots d, \hat{j}}}{(\wedge^{d-m} W(x))_{m+1 \dots d, m+1 \dots d}} \right|,$$

wobei  $\hat{j} \in Ord(d-m, d)$  mit  $\{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{d-m}\} \cup \{j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, d\}$  ist.  
Da  $(\wedge^{d-m} W(x))_{m+1 \dots d, \hat{j}}$  die  $(m+1 \dots d)$ -te Koordinate des Vektors

$$(\wedge^{d-m} W(x))_{\cdot, \hat{j}} = w_{\hat{j}_1}(x) \wedge \dots \wedge w_{\hat{j}_{d-m}}(x)$$

ist, erhalten wir

$$\left| \frac{\alpha_j(x)}{\alpha_{1_m}(x)} \right| \leq \frac{\|w_{\hat{j}_1}(x) \wedge \dots \wedge w_{\hat{j}_{d-m}}(x)\|}{\left| (\wedge^{d-m} W(x))_{m+1 \dots d, m+1 \dots d} \right|} = \frac{\|w_{\hat{j}_1}(x) \wedge \dots \wedge w_{\hat{j}_{d-m}}(x)\|}{|W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x)|}.$$

Aus der verallgemeinerten Hadamardschen Ungleichung (Lemma 2.1.7) und der Voraussetzung (i) folgt

$$\left| \frac{\alpha_j(x)}{\alpha_{1_m}(x)} \right| \leq \frac{\prod_{k=1}^{d-m} \|w_{\hat{j}_k}(x)\|}{|W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x)|} = \frac{1}{|W_{m+1, \dots, d}^{m+1, \dots, d}(x)|} \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}_m}$$

für  $\mu$ -fast alle  $x$ .

Bei einer ähnlichen Vorgehensweise erhalten wir für  $j, l \in \text{Ord}(m, d)$ , dass

$$\frac{|\alpha_j(x)\alpha_l(x)|}{(\alpha_{1_m}(x))^2} \leq \frac{1}{\bar{\varepsilon}_m^2}$$

$\mu$ -fast überall gilt. Insgesamt folgt also für  $\mu$ -fast alle  $x$

$$\left| \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_m^2 \bar{\varepsilon}_m^2} \left( \sum_{\substack{j \in \text{Ord}(m,d) \\ l \in \text{Ord}(m,d) \\ l \neq (1, \dots, m)}} \frac{|A_n^j(x)A_n^l(x)|}{(A_n^{1_m}(x))^2} + \sum_{\substack{j \in \text{Ord}(m,d) \\ j \neq (1, \dots, m)}} \frac{|A_n^j(x)|}{|A_n^{1_m}(x)|} \right).$$

Weil es  $\binom{d}{m} - 1$  Summanden im letzten Ausdruck gibt, erhalten wir aus dem Lemma 4.2.5

$$\left| \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon_m^2 \bar{\varepsilon}_m^2} \left( \binom{d}{m} - 1 \right) C^{4m} e^{\lambda n} = \tilde{C} e^{\lambda n}. \quad (4.19)$$

Um (4.18) zu beweisen, zeigen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\lambda + \varepsilon')n}} \int \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right) d\mu = 0. \quad (4.20)$$

Das zweite Teil

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\lambda + \varepsilon')n}} \int \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m-1,n}(x)}{\text{Gr}_{m-1,n}(x)} \right) d\mu = 0$$

geht analog.

Für eine messbare Funktion  $f$  gilt  $|\int f(x) d\mu| \leq \int |f(x)| d\mu$ . Also reicht es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\lambda + \varepsilon')n}} \int \left| \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right) \right| d\mu = 0. \quad (4.21)$$

zu zeigen ((4.20) folgt daraus).

Wegen (4.19) existiert ein  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\left| \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right| \quad \mu - \text{f.ü.}$$

für  $n \geq \bar{n}$  gilt (siehe die Abbildung 4.1 auf der Seite 67). Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\lambda + \varepsilon')n}} \int \left| \ln \left( 1 + \frac{\text{Rest}_{m,n}(x)}{\text{Gr}_{m,n}(x)} \right) \right| d\mu \leq$$

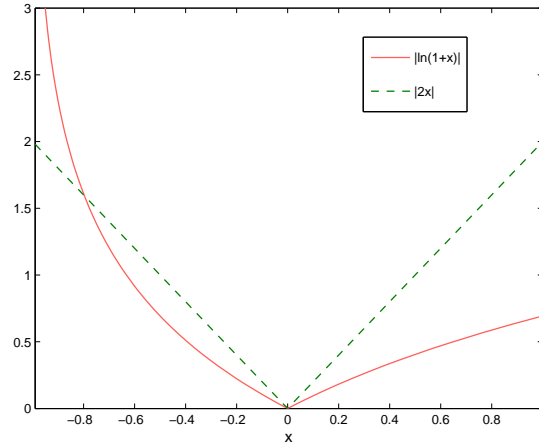


Abbildung 4.1: Verlauf der Funktionen  $|\ln(1+x)|$  und  $|2x|$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \int 2 \left| \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right| d\mu.$$

Aus (4.19) folgt außerdem

$$\frac{2}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \left| \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right| \leq \frac{2}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \tilde{C} e^{\bar{\lambda}n} = 2\tilde{C} e^{-\varepsilon'n}.$$

Also erhalten wir mit dem Lebesgueschen Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \int \left| \ln \left( 1 + \frac{Rest_{m,n}(x)}{Gr_{m,n}(x)} \right) \right| d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int 2\tilde{C} e^{-\varepsilon'n} d\mu \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} 2\tilde{C} e^{-\varepsilon'n} d\mu = 0, \end{aligned}$$

womit (4.21) bewiesen ist. □

**Korollar 4.2.8** *Das System (4.13), (4.14) genüge der Annahme (4.17) und es gelte:*

(i) Es existiere ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\left| W_{m,\dots,d}^{m,\dots,d}(x) \right| > \varepsilon \quad \text{für } m = 2, \dots, d$$

(ii) Das System sei  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolisch für  $m = 1, \dots, d-1$ .

Dann existiert ein  $\lambda < 0$ , so dass für  $m = 1, \dots, d$

$$\frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{e^{\lambda n}}{n}\right)$$

gilt, wobei

$$C_m = \int \ln \frac{\left| W_{m+1,\dots,d}^{m+1,\dots,d}(x) \right| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\|}{\left| W_{m,\dots,d}^{m,\dots,d}(x) \right| \|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_{m-1}(x)\|} d\mu.$$

ist.

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass unter den genannten Bedingungen die Voraussetzung (ii) des Satzes 4.2.6 erfüllt ist und es ein  $\bar{\varepsilon} > 0$  mit

$$\left| W_{1,\dots,d}^{1,\dots,d}(x) \right| = |\det(W(x))| > \bar{\varepsilon} \quad \mu - \text{f.ü.} \quad (4.22)$$

existiert.

Man setze  $An_{i+1,\dots,m}^i(x) = |\sin(\angle(w_i(x), \text{span}\{w_{i+1}(x), \dots, w_m(x)\}))|$ . Dann gilt mit (2.2) für  $m = 2, \dots, d$

$$\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\| = An_{2,\dots,m}^1(x) \cdot An_{3,\dots,m}^2(x) \cdot \dots \cdot An_m^{m-1}(x)$$

$\mu$ -fast überall. Aus dem Lemma 4.2.4 und der Voraussetzung (ii) folgt

$$An_{i+1,\dots,d}^i(x) \geq \varepsilon' \quad \text{für } i = 1, \dots, d-1.$$

Da aber  $An_{i+1,\dots,m}^i(x) \geq An_{i+1,\dots,d}^i(x)$  für  $m \in \{1, \dots, d\}$  und  $i \leq m+1$  gilt, existiert ein  $\tilde{\varepsilon} > 0$  derart, dass für  $\mu$ -fast alle  $x$

$$\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_m(x)\| \geq \tilde{\varepsilon} \quad m \in \{1, \dots, d\}$$

gilt. Gehört ein Punkt  $x$  zu der  $\lambda_{m+1} - \lambda_m$  hyperbolischen Menge  $\bar{M}_\mu^h$  für  $m = 1, \dots, d-1$ , so gilt das auch für das ganze  $x$  enthaltende Orbit  $\{g^n(x)\}$ . Also ist die Bedingung

$$\inf_n \|w_1(g^n(x)) \wedge \dots \wedge w_m(g^n(x))\| \geq \tilde{\varepsilon} \quad \mu - \text{f.ü.}$$



für jedes  $m \in \{1, \dots, d\}$  erfüllt. Aus der letzten Ungleichung folgt (4.22), weil

$$\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_d(x)\| = |\det(W(x))|$$

ist. □

### 4.3 Zur Analyse der Zeitlich-Räumlichen Integration nach Aston & Dellnitz

In diesem Abschnitt wird der Satz 1.3.2 in einer allgemeineren Form bewiesen. Die folgende Analyse des Systems

$$g : M \rightarrow M, \quad g \text{ ein } C^1\text{-Diffeomorphismus, } \mu \text{ ergodisch} \quad (4.23)$$

auf einer  $d$ -dimensionalen glatten abgeschlossenen reellen Untermannigfaltigkeit  $M$  wird unter der Annahme der Einfachheit aller Liapunow-Exponenten

$$\dim W^i(x) = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, d \quad \mu\text{-f.ü.} \quad (4.24)$$

durchgeführt.

Alle Notationen werden aus den Abschnitten 4.1 und 4.2 übernommen.

Für  $x \in M_\mu$  bezeichne man mit  $\alpha_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , die  $i$ -te Zeile der zu  $W(x) = [w_1(x), \dots, w_d(x)]$  inversen Matrix  $\alpha(x)$ .

**Lemma 4.3.1** *Für ein  $i \in \{1, \dots, d\}$  setze  $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{d-1}\} = \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, d$*

$$\begin{aligned} \|\alpha_i(x)\| &= \frac{\|w_{i_1}(x) \wedge \dots \wedge w_{i_{d-1}}(x)\|}{\|w_1(x) \wedge \dots \wedge w_d(x)\|} \\ &= \left| \sin \angle \left( w_i(x), \text{span} \{w_{i_1}(x), \dots, w_{i_{d-1}}(x)\} \right) \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis:

Es gilt

$$\alpha(x) = \frac{1}{\det W(x)} \text{Ad}(W(x)) \quad \text{mit} \quad \text{Ad}_{ij}(W(x)) = (-1)^{i+j} \det W^{j,i}(x),$$

wobei man die Matrix  $W^{j,i}(x)$  durch die Streichung der  $j$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte aus der Matrix  $W(x)$  erhält. Damit ist

$$\alpha_i(x) = \frac{1}{\det W(x)} \left( (-1)^{1+i} \det W^{1,i}(x), \dots, (-1)^{d+i} \det W^{d,i}(x) \right)$$

und

$$\|\alpha_i(x)\| = \frac{1}{|\det W(x)|} \left( (\det W^{1,i}(x))^2 + \cdots + (\det W^{d,i}(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.25)$$

für  $i = 1, \dots, d$ . Aus der Definition des äußeren Produktes für die Vektoren  $w_{\hat{i}_1}(x), \dots, w_{\hat{i}_{d-1}}(x)$  erhalten wir

$$w_{\hat{i}_1}(x) \wedge \cdots \wedge w_{\hat{i}_{d-1}}(x) = (\det W^{d,i}(x), \det W^{d-1,i}(x), \dots, \det W^{1,i}(x)).$$

Daher ist

$$\|\alpha_i(x)\| = \frac{\|w_{\hat{i}_1}(x) \wedge \cdots \wedge w_{\hat{i}_{d-1}}(x)\|}{|\det W(x)|} = \frac{\|w_{\hat{i}_1}(x) \wedge \cdots \wedge w_{\hat{i}_{d-1}}(x)\|}{\|w_1(x) \wedge \cdots \wedge w_d(x)\|}.$$

Wie wir bereits in der Bemerkung 2.1.6 gesehen haben, ist die Inverse des letzten Ausdrucks gleich dem Sinus des Winkels zwischen dem Vektor  $w_i(x)$  und der durch die Vektoren  $w_{\hat{i}_1}(x), \dots, w_{\hat{i}_{d-1}}(x)$  aufgespannten Ebene.  $\square$

Sei wie schon im Abschnitt 1.3.2 die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$a_n = \frac{1}{n} \int \ln \|Dg^n(x)\| d\mu \quad (4.26)$$

definiert. In [5] wurde gezeigt, dass

$$n(a_n - \lambda_1) = \int \ln \|G_n(x)\| d\mu \quad \text{mit} \quad G_n(x) = \frac{1}{A_n^{(1)}(x)} Dg^n(x) \quad (4.27)$$

ist. Weiter wurde in der genannten Arbeit nachgewiesen, dass die Matrizen  $G_n(x)$  für  $n \in \mathbb{N}$  in der Form

$$G_n(x) = \mathcal{W}_{1n}(x) + \sum_{j=2}^d \frac{A_n^{(j)}(x)}{A_n^{(1)}(x)} \mathcal{W}_{jn}(x) \quad (4.28)$$

mit

$$\mathcal{W}_{jn}(x) = w_j(g^n(x)) \alpha(x)^T \quad \text{für } j = 1, \dots, d \quad (4.29)$$

dargestellt werden können. Die Normen der Matrizen  $\mathcal{W}_{jn}(x)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , hängen nicht von  $n$  ab. Sie sind also für ein gegebenes  $x \in M_\mu$  konstant für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\|\mathcal{W}_{jn}(x)\| = \|\alpha_j(x)\| \quad \text{für } j = 1, \dots, d \quad (4.30)$$

(siehe Proposition 4.1 in [5]).

**Satz 4.3.2** Das System (4.23) genüge der Annahme (4.24). Es sei  $\lambda_2 - \lambda_1$  hyperbolisch auf der Menge  $M_\mu^h$  mit den Parametern  $C$ ,  $\delta_1$  und  $\delta_2$ . Weiter existiere ein  $\epsilon > 0$ , so dass

$$\left| \sin \angle \left( w_i(x), \operatorname{span} \left\{ w_{\hat{i}_1}(x), \dots, w_{\hat{i}_{d-1}}(x) \right\} \right) \right| \geq \epsilon \quad \text{für } i = 2, \dots, d$$

mit  $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{d-1}\} = \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$  für  $\mu$ -fast alle  $x$  gilt.

Man setze  $\bar{\lambda} = \lambda_2 + \delta_2 - (\lambda_1 - \delta_1)$ . Dann ist für jedes  $\epsilon' \in (0, -\bar{\lambda})$

$$a_n = \lambda_1 + \frac{C}{n} + o\left(\frac{e^{(\bar{\lambda} + \epsilon')n}}{n}\right) \quad (4.31)$$

mit

$$C = \int \ln \|\alpha_1(x)\| d\mu.$$

**Bemerkung 4.3.3** Die Konstante  $C_1$  der hybriden Methode zur Berechnung des dominanten Liapunow-Exponentes  $\lambda_1$  (siehe Sätze 4.1.5 und 4.2.6) ist gleich

$$C_1 = \int \ln \frac{|W_{2,\dots,d}^{2,\dots,d}(x)|}{|W_{1,\dots,d}^{1,\dots,d}(x)|} d\mu = \int \ln \frac{|W_{2,\dots,d}^{2,\dots,d}(x)|}{|\det(W(x))|} d\mu.$$

Vergleicht man diese mit der Konstante  $C$  aus dem letzten Satz, so folgt aus (4.25) wegen  $W_{2,\dots,d}^{2,\dots,d}(x) = \det(W^{1,1}(x))$ , dass  $C_1 \leq C$  ist. In dem darauffolgendem Beweis des Satzes 4.3.2 wird gezeigt, dass  $\|\alpha_1(x)\| \geq 1$  ist. Für  $C_1 \geq 0$  gilt also  $C_1 = |C_1| \leq |C| = C$ . Im Falle  $C_1 < 0$  ist ein a-priori Vergleich der Beträge von  $C_1$  und  $C$  nicht möglich.

Beweis des Satzes 4.3.2:

Zunächst wird die Integrierbarkeit von  $\|\alpha_1(x)\|$  bezüglich  $\mu$  gezeigt.

Aus dem Lemma 4.3.1 wissen wir, dass

$$\|\alpha_1(x)\| = |\sin \angle (w_1(x), \operatorname{span} \{w_2(x), \dots, w_d(x)\})|^{-1}$$

ist. Also erhalten wir mit der  $\lambda_2 - \lambda_1$  Hyperbolizität und dem Lemma 4.2.4 die Existenz von  $\tilde{\epsilon} > 0$ , so dass

$$\|\alpha_1(x)\| \leq \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \quad \text{für } x \in M_\mu^h \quad (4.32)$$

gilt. Daher ist  $\|\alpha_1(x)\|$  nach oben beschränkt. Weiter folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Tatsache, dass  $\alpha(x)$  die Inverse der Matrix  $W(x)$  ist, für  $x \in M_\mu$

$$1 = \langle \alpha_1(x), w_1(x) \rangle \leq \|\alpha_1(x)\| \|w_1(x)\| = \|\alpha_1(x)\|.$$

Deshalb ist  $\|\alpha_1(x)\|$  auch nach unten beschränkt und damit integrierbar.

Wegen (4.27) ist der Satz bewiesen, wenn

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \left( \int \ln \|G_n(x)\| d\mu - \int \ln \|\alpha_1(x)\| d\mu \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \int \ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} d\mu = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \int \left| \ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \right| d\mu = 0 \quad (4.33)$$

gezeigt worden ist.

Weil sich die Funktion  $|\ln(y)|$  für  $0 < y < 1$  und  $y \geq 1$  prinzipiell unterschiedlich in Bezug auf eine Majorante verhält (siehe die Abbildung 4.1 auf der Seite 67), müssen wir die Fälle  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} < 1$  und  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \geq 1$  bei der Untersuchung des Integranden von (4.33) getrennt behandeln. Wir fangen mit dem Fall  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} < 1$  an:

Aus (4.28), (4.30) und der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} &\geq \frac{\|\mathcal{W}_{1n}(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} - \frac{1}{\|\alpha_1(x)\|} \sum_{j=2}^d \frac{|A_n^{(j)}(x)|}{|A_n^{(1)}(x)|} \|\mathcal{W}_{jn}(x)\| \\ &= 1 - \frac{1}{\|\alpha_1(x)\|} \sum_{j=2}^d \frac{|A_n^{(j)}(x)|}{|A_n^{(1)}(x)|} \|\alpha_j(x)\|. \end{aligned}$$

Da das System  $\lambda_2 - \lambda_1$  hyperbolisch ist und

$$\|\alpha_i(x)\| = \left| \sin \angle \left( w_i(x), \text{span} \left\{ w_{i_1}(x), \dots, w_{i_{d-1}}(x) \right\} \right) \right|^{-1} \leq \frac{1}{\epsilon}$$

für  $i = 2, \dots, d$  nach der Voraussetzung gilt, folgt aus (4.32) und dem Lemma 4.2.5

$$\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \geq 1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon} \epsilon} \sum_{j=2}^d \frac{|A_n^{(j)}(x)|}{|A_n^{(1)}(x)|} \geq 1 - \frac{d}{\tilde{\epsilon} \epsilon} C^2 e^{\bar{\lambda}n} = 1 - \tilde{C} e^{\bar{\lambda}n}.$$

Die Funktion  $|\ln(y)|$  ist für  $y \in (0, 1)$  monoton fallend, daher ist für große<sup>11</sup>  $n$  im Falle  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} < 1$

$$\left| \ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \right| \leq \left| \ln \left( 1 - \tilde{C} e^{\bar{\lambda}n} \right) \right|.$$

<sup>11</sup> $n$  muss groß genug sein, damit die Funktion  $\ln(1 - \tilde{C} e^{\bar{\lambda}n})$  definiert ist.

Deshalb existiert ein  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\left| \ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \right| \leq 2\tilde{C}e^{\bar{\lambda}n}$$

für  $n \geq \bar{n}$  und  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} < 1$  gilt (siehe die Abbildung 4.1 auf der Seite 67).

Der Fall  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \geq 1$  ist etwas einfacher zu behandeln. Aus der Dreiecksungleichung und (4.28) folgt

$$\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \leq \frac{\|\mathcal{W}_{1n}(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} + \frac{1}{\|\alpha_1(x)\|} \sum_{j=2}^d \frac{|A_n^{(j)}(x)|}{|A_n^{(1)}(x)|} \|\mathcal{W}_{jn}(x)\|.$$

Die gleiche Argumentation wie im ersten Fall führt uns zu

$$\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \leq 1 + \tilde{C}e^{\bar{\lambda}n}.$$

Nun aber ist die Funktion  $|\ln(y)|$  für  $y \geq 1$  monoton steigend und folglich gilt

$$\ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \leq \ln \left( 1 + \tilde{C}e^{\bar{\lambda}n} \right)$$

für  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \geq 1$ . Da  $\tilde{C}e^{\bar{\lambda}n}$  positiv ist, erhalten wir

$$\ln \left( 1 + \tilde{C}e^{\bar{\lambda}n} \right) < \tilde{C}e^{\bar{\lambda}n}.$$

Daraus folgt für  $\frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \geq 1$  die Ungleichung

$$\ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \leq \tilde{C}e^{\bar{\lambda}n}$$

Insgesamt erhalten wir also für  $\mu$ -fast alle  $x$  und alle  $n \geq \bar{n}$

$$\left| \ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \right| \leq 2\tilde{C}e^{\bar{\lambda}n}.$$

Mit dem Lebesgueschen Satz von der dominierten Konvergenz folgern wir daraus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \int \left| \ln \frac{\|G_n(x)\|}{\|\alpha_1(x)\|} \right| d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{(\bar{\lambda} + \varepsilon')n}} \int 2\tilde{C}e^{\bar{\lambda}n} d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int 2\tilde{C}e^{-\varepsilon'n} d\mu \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} 2\tilde{C}e^{-\varepsilon'n} d\mu = 0. \end{aligned}$$

Damit ist (4.33) bewiesen.

□

# Kapitel 5

## Numerische Beispiele

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden einige Aspekte der praktischen Berechnung der Liapunow-Exponenten mittels der im Abschnitt 1.4 beschriebenen hybriden Methode untersucht. Es werden auch einige Notationen eingeführt, die bei weiteren Beschreibungen numerischer Experimente beibehalten werden.

In weiteren Abschnitten werden numerische Experimente an der Hénon-Abbildung und dem Lorenz-System beschrieben.

### 5.1 Berechnung von Liapunow-Exponenten, Notationen

In dem ersten Teil dieses Abschnittes diskutieren wir die in §§1.3.2, 1.4 angegebenen Extrapolationsmöglichkeiten für die Folgen

$$a_n^m = \frac{1}{n} \int \ln R_{mm}(Dg^n(x)) d\mu \quad \text{für } m = 1, \dots, d, \quad (5.1)$$

die zur Berechnung von Liapunow-Exponenten eines Systems

$$g : M \rightarrow M, \quad M \subset \mathbb{R}^d \text{ abgeschlossen} \quad (5.2)$$

dienen sollten. Man beachte: im Falle, dass  $g$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist, erfüllt das System (5.2) die Voraussetzungen des Satzes von Oseledec 3.2.2. Weiter sehen wir uns im Abschnitt 5.1.2 die durch die numerische Approximation der Folgen  $\{a_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , entstandenen Fehler an und ihre Auswirkung auf die Nutzung der im Abschnitt 5.1.1 untersuchten Extrapolationsfolgen. Wie wir schon erwähnt haben, wird die Approximation des Attraktors mit dem rga-Algorithmus (siehe [13]) umgesetzt. Das folgende

Lemma besagt, dass für bestimmte Systeme der Attraktor auch der Träger des Maßes  $\mu$  ist.<sup>1</sup>

**Lemma 5.1.1** *Das System (5.2) besitze ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $M$  und  $g$  sei umkehrbar. Die Menge  $M \setminus \partial M$  sei absorbierend.<sup>2</sup> Dann existiert der maximale Attraktor  $A(M)$  von  $g$  bezüglich  $M$  und der Träger von  $\mu$  liegt in  $A(M)$ .*

Beweis:

Der maximale Attraktor von  $g$  bezüglich  $M$  (auch *der bezüglich  $M$  konstruierte maximale Attraktor* genannt) ist durch

$$A(M) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} g^n(M)$$

gegeben (siehe [33]). Es ist zu zeigen, dass  $\mu(M \setminus A(M)) = 0$  gilt.

Wir definieren die monoton steigende Folge von Mengen  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  durch

$$C_n = M \setminus \bigcap_{k=1}^n g^k(M).$$

Für diese gilt  $M \setminus A(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n C_k$ .

Wegen der Invarianz des Maßes und der Umkehrbarkeit von  $g$  erhalten wir  $\mu(g^n(M)) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Daraus folgt  $\mu(M \setminus g^n(M)) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $C_n = \bigcup_{k=1}^n M \setminus g^k(M)$  ist, gilt auch  $\mu(C_n) = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Aus der Monotonie der Folge  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  erhalten wir

$$\mu(M \setminus A(M)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0.$$

□

Nun führen wir die folgenden Notationen ein. Seien:

- $N_k$  - die Anzahl der Boxen in der Attraktorüberdeckung  $\{A_j^k\}_{j=1}^{N_k}$  nach dem  $k$ -ten rga-Schritt;
- $\tilde{\mu}^k \in \mathbb{R}^{N_k}$  - das approximative Maß auf  $\bigcup_{j=1}^{N_k} A_j^k$  mit  $\tilde{\mu}^k(A_j^k) = \tilde{\mu}_j^k$ ;
- $x_j^k$  - der Repräsentant der Box  $A_j^k$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ , der zur Auswertung der numerischen Approximation  $R_{mm}(Dg^n(x_j^k))\tilde{\mu}_j^k$  des Integrals  $\int_{A_j^k} \ln R_{mm}(Dg^n(x))\mu$  benutzt wird (in den weiter unten vorgestellten Rechnungen wird stets die Box  $A_j^k$  durch ihren Mittelpunkt  $x_j^k$  vertreten);

<sup>1</sup>Für die Axiom-A-Diffeomorphismen kann man eine schärfere Aussage machen: Es existiert ein eindeutiges SRB-Maßes mit dem Träger auf dem Attraktor (siehe [34]).

<sup>2</sup>D.h., es gilt  $g^n(M) \subset M \setminus \partial M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . (siehe [33]).



- $T$  - die Gesamtzahl der Iterationen von  $g$ , die nach jedem rga-Schritt durchgeführt werden.

Dann können wir die numerischen Werte, die die Folgen  $\{a_n^m\}_{n=1}^T$  für  $m = 1, \dots, d$  approximieren sollen, nach dem  $k$ -ten rga-Schritt als

$$\tilde{a}_n^m(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N_k} \ln R_{ii}(Dg^n(x_j^k)) \tilde{\mu}_j^k, \quad \text{für } n = 1, \dots, T \quad (5.3)$$

berechnen.

### 5.1.1 Fehlerentwicklung der Extrapolationsfolgen

Wir haben im Kapitel 4 (Sätze 4.1.5, 4.2.6) gesehen, dass die Folgen  $\{a_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , (siehe (5.1)) für gewisse Systeme in der Form

$$a_n^m = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } m = 1, \dots, d, \quad (5.4)$$

bzw.

$$a_n^m = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{e^{-\theta_m n}}{n}\right) \quad \text{für } m = 1, \dots, d \quad (5.5)$$

mit von  $n$  unabhängigen Konstanten  $C_m$  und  $\theta_m > 0$  dargestellt werden können. Ausgehend von diesen Abschätzungen, untersuchen wir die in [4], [5] vorgeschlagenen Extrapolationsfolgen

$$b_n^m = (n+1)a_{n+1}^m - na_n^m, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

und

$$B_n^m = 2a_{2^n}^m - a_{2^{n-1}}^m, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Gilt die Abschätzung (5.4), so bedeutet das für die erste Art der Extrapolation

$$b_n^m = \lambda_m + o(1) \quad \text{für } m = 1, \dots, d.$$

Die Restfehlerterme der Folgen  $\{a_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$  für  $m = 1, \dots, d$  sind aber ebenso Nullfolgen. Deswegen lassen sich in diesem Fall keine Vorteile in der Konvergenzordnung bei der Nutzung der Folgen  $\{b_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$  gegenüber  $\{a_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$  erkennen.

Trifft diese Abschätzung (5.5) zu, so gilt für  $m = 1, \dots, d$

$$b_n^m = \lambda_m + o(e^{-\theta_m n}), \quad (5.8)$$

was eine bessere Konvergenzrate im Vergleich zu (5.5) darstellt.

Untersucht man die Fehlerentwicklung der Folgen  $\{B_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , so sollte diese mit den Restfehlertermen der Folgen  $\{a_{2^n}^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , verglichen werden, denn gerade diese Folgen liegen der betrachteten Extrapolation (5.7) zugrunde. Es gilt für die Abschätzungen (5.4) und (5.5)

$$a_{2^n}^m = \lambda_m + O\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{für } m = 1, \dots, d.$$

Für den Restfehler der Folgen  $\{B_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$  für  $m = 1, \dots, d$  gilt im Falle (5.4)

$$B_n^m = \lambda_m + o\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{für } m = 1, \dots, d$$

und im Falle (5.5)

$$B_n^m = \lambda_m + o\left(\frac{e^{-\theta_m 2^n}}{2^n}\right) \quad \text{für } m = 1, \dots, d.$$

In beiden Fällen ist also der Extrapolationsansatz (5.7) gerechtfertigt.

### 5.1.2 Auswirkungen der numerischen Approximation

Bei der numerischen Approximation der Folgen  $\{a_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , mittels (5.3) unterscheiden sich die Näherungswerte  $\{\tilde{a}_n^m(k)\}_{n \in \mathbb{N}}$  nach dem  $k$ -ten rga-Schritt von den theoretischen um eine gewisse Größe

$$\tilde{a}_n^m(k) = a_n^m + \varepsilon_n^m(k) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

Diese werden vorwiegend durch das approximative Maß und dem damit verbundenem Quadraturfehler verursacht. Sie können aber auch Rundungsfehler sowie Fehler, die durch die Wahl der Boxen-Repräsentanten  $x_j^k (\in A_j^k)$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ , entstehen (falls diese nicht zu dem Attraktor gehören), enthalten.

Zunächst möchten wir die Auswirkungen die Fehlerterme  $\varepsilon_n^m(k)$  auf die Nutzung der Extrapolationsmöglichkeiten (5.6), (5.7) angewendet auf die Approximationswerte  $\tilde{a}_n^m(k)$

$$\tilde{b}_n^m(k) = (n+1)\tilde{a}_{n+1}^m(k) - n\tilde{a}_n^m(k), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

bzw.

$$\tilde{B}_n^m(k) = 2\tilde{a}_{2^n}^m(k) - \tilde{a}_{2^{n-1}}^m(k), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

betrachten.

Das Einsetzen von (5.9) in (5.10) führt zu dem folgenden Ergebnis

$$\begin{aligned}\tilde{b}_n^m(k) &= (n+1)a_{n+1}^m - na_n^m + (n+1)\varepsilon_{n+1}^m(k) - n\varepsilon_n^m(k) \\ &= b_m^n + (n+1)\varepsilon_{n+1}^m(k) - n\varepsilon_n^m(k) \quad m = 1, \dots, d.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Sind  $\varepsilon_n^m(k)$ ,  $m = 1, \dots, d$ , für unterschiedliche  $n$  von derselben Größenordnung, so lässt sich erkennen, dass die durch die numerische Berechnung entstandene Fehlerterme  $(n+1)\varepsilon_{n+1}^m(k) - n\varepsilon_n^m(k)$  sich nicht mit steigendem  $n$  für die Folgen  $\{\tilde{b}_m^n\}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , reduzieren. Im Gegenteil hat der numerische Fehler die Tendenz anzusteigen, was wir auch an den Beispielen in den entsprechenden Abschnitten weiter unten sehen werden. Besonders stark verstärken sich die Fehlerterme von  $\tilde{b}_m^n(k)$ , wenn  $\varepsilon_{n+1}^m(k)$  und  $\varepsilon_n^m(k)$  unterschiedliche Vorzeichen haben.

Nun untersuchen wir den Restfehler der Folgen  $\{\tilde{b}_n^m(k)\}_{n \in \mathbb{N}}$  etwas näher: Gehen wir von der Abschätzung (5.5) aus, so folgt aus der Gleichung (5.12)

$$\begin{aligned}\left| \tilde{b}_n^m(k) - \lambda_m \right| &\leq \left| \tilde{b}_n^m(k) - b_n^m(k) \right| + |b_n^m(k) - \lambda_m| \\ &\leq (n+1) |\varepsilon_{n+1}^m(k)| + n |\varepsilon_n^m(k)| + Ce^{-\theta n}.\end{aligned}$$

Man setze  $\Delta_k = \sup \{ \varepsilon_n^m(k) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \{1, \dots, d\} \}$  und  $\theta = \min\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ . Dann erhalten wir

$$\left| \tilde{b}_n^m(k) - \lambda_m \right| \leq 2n\Delta_k + \Delta_k + Ce^{-\theta n}.$$

Wir definieren die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(n) = 2n\Delta_k + \Delta_k + Ce^{-\theta n}$ . Für diese gilt dann

$$\frac{d}{dn}f(n) = 2\Delta_k - C\theta e^{-\theta n}.$$

Das Minimum von  $f$  liegt also bei

$$n_{min} = -\frac{1}{\theta} \ln \left( \frac{2\Delta_k}{C\theta} \right) \quad (5.13)$$

und ist gleich

$$f_{min} = f(n_{min}) = -\frac{2\Delta_k}{\theta} \ln \left( \frac{2\Delta_k}{C\theta} \right) + \Delta_k + C \frac{2\Delta_k}{C\theta}.$$

Da die Werte von  $C$  und  $\theta$  endogene Größen des Systems sind, können wir nur  $\Delta_k$  durch genauere Attraktor- und Maßapproximationen beeinflussen (siehe Sätze 4.1.5, 4.2.6 und ihre Beweise), um damit eine möglichst bessere obere

Schranke für den Restfehler der Folgen  $\{\tilde{b}_n^m(k)\}$  zu erreichen. Man beachte dabei, dass  $n_{min}$  aus (5.13) erst dann positiv wird, wenn  $\Delta_k$  eine bestimmte Größe unterschreitet. Außerdem kann man aus (5.12) folgern, dass nur wenige Folgenglieder der Folgen  $\{\tilde{b}_n^m(k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, \dots, d$ , zur Approximation von Liapunow-Exponenten benutzt werden sollten, insbesondere, wenn die Attraktor und Maßdarstellungen nicht besonders präzise sind.

Für die zweite Art der Extrapolation erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{B}_n^m(k) &= 2a_{2^n}^m - a_{2^{n-1}}^m + 2\varepsilon_{2^n}^m(k) - \varepsilon_{2^{n-1}}^m(k) \\ &= B_m^n + 2\varepsilon_{2^n}^m(k) - \varepsilon_{2^{n-1}}^m(k) \quad m = 1, \dots, d.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Also sind die durch die Approximation entstandene Fehler für  $\tilde{B}_n^m(k)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , bei einem festen  $k$  von der gleichen Größenordnung wie die der Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Um die durch die numerische Rechnung unterschiedlicher Größen erzeugte Abweichungen abschätzen zu können, gehen wir davon aus, dass für diese die Beziehung

$$\varepsilon_n^m(k) \sim C_n(\gamma_n)^k \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } k = k_0, k_0 + 1, \dots \quad (5.15)$$

mit einem geeigneten  $k_0$  gilt. Diese Form des Fehlerterms hat sich aus den anschließenden Überlegungen ergeben:

- Für bestimmte Systeme kann der Hausdorffabstand zwischen dem relativen globalen Attraktor  $A_Q$  und seiner Boxenapproximation  $\bigcup_{j=1}^{N_k} A_j^k$  nach dem  $k$ -ten rga-Schritt durch

$$H\left(A_Q, \bigcup_{j=1}^{N_k} A_j^k\right) \leq C\gamma^k \quad \text{mit } \gamma \sim \frac{1}{2}$$

abgeschätzt werden (siehe [14]).

- Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf dem endlichen Intervall  $I = [a, b]$  und  $a \leq x_0^1 < x_1^1 < \dots < x_{n_1}^1$  ein äquidistantes Gitter mit der Schrittweite  $h_1$ . Für die Approximation des Integrals von  $f$  auf  $[x_0^1, x_{n_1}^1]$  mittels  $\sum_{j=1}^{n_1} x_j^1 h_1$  gilt

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_j^1 h_1 = \int_{x_0^1}^{x_{n_1}^1} f(x) dx + O(h_1)$$

Bildet man die Folge  $\left\{\sum_{j=1}^{n_k} x_j^k h_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  dadurch, dass die Schrittweite mit jedem weiteren  $k$  halbiert wird, d.h.  $h_k = \frac{h_1}{2^{k-1}}$  und  $x_{2^j}^{k+1} = x_j^k$  für

$j = 0, \dots, n_k$  und  $k = 1, 2, \dots$ , so ergibt sich daraus

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_j^k h_k = \int_{x_0^1}^{x_{n_1}^1} f(x) dx + O\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Gilt eine ähnliche Abschätzung für die Integration bezüglich eines invarianten Maßes  $\mu$  auf den Mengen<sup>3</sup>  $\bigcup_{j=1}^{N_k} A_j^k$ ,  $k = n_0, n_0 + 1, \dots$ , so bestätigt dies die Hypothese (5.15).

- Von dem letzten Punkt ausgehend, sollte auf die folgende Tatsache hinweisen werden: In (5.3) werden mit steigendem  $n$  und unveränderten restlichen Parametern ( $k$  und  $m$ ) unterschiedliche Funktionen numerisch integriert. Deshalb sind die Konstanten in (5.15), aus denen sich die Approximationsfehler  $\varepsilon_n^m(k)$  zusammensetzen, von dem Index  $n$  abhängig.

Aus (5.15) erhalten wir dann für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k = k_0, k_0 + 1, \dots$

$$\tilde{a}_n^m(k) \sim C_n(\gamma_n)^k + a_n^m$$

und weiter

$$\tilde{a}_n^m(k+1) - \tilde{a}_n^m(k) \sim C_n(\gamma_n)^k(\gamma_n - 1).$$

Daraus folgern wir

$$\gamma_n \sim \frac{\tilde{a}_n^m(k+1) - \tilde{a}_n^m(k)}{\tilde{a}_n^m(k) - \tilde{a}_n^m(k-1)}.$$

Also definieren wir approximative Werte der gesuchten Konstanten durch

$$\tilde{\gamma}_{n,k} = \frac{\tilde{a}_n^m(k+1) - \tilde{a}_n^m(k)}{\tilde{a}_n^m(k) - \tilde{a}_n^m(k-1)}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{C}_{n,k} = \frac{\tilde{a}_n^m(k+1) - \tilde{a}_n^m(k)}{(\tilde{\gamma}_{n,k})^k (\tilde{\gamma}_{n,k} - 1)}, \quad (5.17)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n^m(k) = \tilde{C}_{n,k} (\tilde{\gamma}_{n,k})^k. \quad (5.18)$$

Die  $k$ -Koeffizienten wurden bei  $\tilde{\gamma}_{n,k}$  und  $\tilde{C}_{n,k}$  eingeführt, damit es ersichtlich wird, welche Daten zu ihrer Berechnung eingesetzt wurden.

---

<sup>3</sup>Zur Erinnerung:  $A_j^k$  haben das gleiche Volumen für ein festes  $k$  und die Volumina der Boxen halbieren sich mit jedem rga-Schritt.

## 5.2 Hénon-Abbildung

Zuerst wenden wir die hybride Methode auf die Hénon-Abbildung

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx) \quad (5.19)$$

mit  $a \in (0, 2)$  und  $b > 0$ . Diese Abbildung hat zwei Fixpunkte

$$\begin{aligned} x^1 &= \left( t + \sqrt{t^2 + a^{-1}}, b \left( t + \sqrt{t^2 + a^{-1}} \right) \right) \\ x^2 &= \left( t - \sqrt{t^2 + a^{-1}}, b \left( t - \sqrt{t^2 + a^{-1}} \right) \right) \\ \text{mit } t &= \frac{b-1}{2a} \end{aligned}$$

In [8] wurde gezeigt, dass es eine Menge  $\Delta \in \mathbb{R}^2$  mit positivem Lebesgue-Maß gibt, so dass das durch (5.19) gegebene dynamische System für  $(a, b) \in \Delta$  hyperbolisch (also auch  $\lambda_1 - \lambda_2$  hyperbolisch) ist. Also gilt für solche Parameter die Abschätzung des Satzes 4.2.6

$$a_n^m = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{e^{-\theta n}}{n}\right), \quad m = 1, 2 \quad (5.20)$$

für ein  $\theta > 0$ .

Weitere Berechnungen werden mit dem "klassischen" Parametersatz  $a = 1.4$  und  $b = 0.3$  durchgeführt.<sup>4</sup> Der zeitliche Durchschnitt, berechnet mit der diskreten QR-Methode ( $10^7$  Iterationen) ergibt die Werte  $\lambda_1 = 0.4191$  und  $\lambda_2 = -1.6231$ . Wir nehmen an, dass diese Werte exakt sind.

### 5.2.1 Approximation des Attraktors und des Maßes

Wie im Kapitel 1.3 erwähnt, brauchen wir für die numerische Approximation des (eines) invarianten Maßes  $\mu$  zunächst eine möglichst genaue Boxen-Überdeckung des Attraktors  $\{A_j \mid j = 1, \dots, N\}$ . Diese Boxenkollektion wird mit Hilfe des im GAIO implementierten rga-Algorithmus<sup>5</sup> berechnet. Bei dieser Implementierung nimmt man als eine Ausgangsmenge eine Box<sup>6</sup>  $Q$ , die den gesuchten Attraktor enthalten muss. In jedem Schritt des rga-Algorithmus

<sup>4</sup>In [8] wurde keine genaue Beschreibung der Menge  $\Delta$  angegeben. Deshalb können wir nicht sicher sein, ob die genannte Parameter zu dieser gehören. Die Entwicklung der extrapolierten Folgen lässt jedoch darauf schließen, dass  $(1.4, 0.3)$  in  $\Delta$  enthalten ist.

<sup>5</sup>rga steht für "relativ global attractor". Dieser Algorithmus ist ein Spezialfall des Subdivision-Algorithmus (siehe [13], [14]).

<sup>6</sup>unter einer Box in  $\mathbb{R}^d$  versteht man eine Menge der Form  $[x_1^a, x_1^e] \times \dots \times [x_d^a, x_d^e]$  mit  $x_i^a < x_i^e$  für  $i = 1, \dots, d$ .

(kurz rga-Schritt) wird jede Box  $A_{i,k}$  der vorhandenen Boxenmenge  $Q_k = \{A_j^k \mid j = 1, \dots, N_k\}$  ( $k$  ist die Nummer des rga-Schrittes) zweigeteilt. Man erhält also eine neue Boxenkollektion  $\bar{Q}_k = \{\bar{A}_j^k \mid j = 1, \dots, 2N_k\}$  mit

$$\bigcup_{i=1}^{N_k} A_{i,k} = \bigcup_{i=1}^{2N_k} \bar{A}_{i,k}$$

. Für den nächsten Schritt benutzt man nur diejenigen Boxen der Menge  $\bar{Q}_k$ , die ein Teil des Bildes irgendeiner Box aus  $\bar{Q}_k$  enthalten

$$Q_{k+1} = \{\bar{A}_j^k \mid \exists l \ g(\bar{A}_l^k) \cap \bar{A}_j^k \neq \emptyset\},$$

die restlichen Boxen werden aussortiert. Mit der am Anfang des Abschnittes 5.1 eingeführten Notation heißt das  $Q_{k+1} = \{A_j^{k+1} \mid j = 1, \dots, N_{k+1}\}$ .

Der rga-Algorithmus liefert durch  $\bigcup_{j=1}^{N_k} A_j^k$  eine Approximation der Menge

$$A_Q = \bigcap_{n \geq 0} g^n(Q),$$

die *der relative globale Attraktor* für die Abbildung  $g$  bezüglich  $Q$  genannt wird. Ist das Innere der Menge  $Q$  absorbierend, so ist  $A_Q$  der bezüglich  $Q$  konstruierte *maximale Attraktor* für  $g$  bezüglich  $Q$ , der den Träger des invarianten Maßes  $\mu$  enthält (siehe Lemma 5.1.1). Ist  $Q$  nicht invariant (also auch nicht absorbierend), so unterscheidet sich  $A_Q$  in einigen Fällen von dem gesuchten Attraktor (in der Regel ist es der maximale Attraktor). In diesem Fall könnte es zu Schwierigkeiten bei der Auswertung der Folgenglieder  $\tilde{a}_n^m$  in (5.20) mittels im Kapitel 1.4 beschriebenen Verfahrens kommen, wie wir weiter sehen werden.

Als Startbox für den rga-Algorithmus nehmen wir die Box

$$Q = [-2.0, 2.0] \times [-0.6, 0.6].$$

Die Approximation von  $A_Q$  (nach 26 rga-Schritten) sieht man auf dem Bild 5.1. Vergleicht man dieses mit dem auf dem Bild 5.2 gezeichneten Hénon-Attraktor, den man auf die "klassische" Weise als eine Trajektorie erhält, so unterscheiden sich diese Darstellungen hauptsächlich durch den auf dem Bild 5.1 rot gezeichneten Teil. Dieser Bereich des relativen globalen Attraktors stellt einen Teil der instabilen Mannigfaltigkeit zum Fixpunkt  $x^2$  dar und enthält eine Menge  $M^u$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^n(x)\| = \infty$  für  $x \in M^u$ . Also ist  $A_Q$  nicht invariant, und insbesondere ist  $A_Q$  kein Attraktor. Da der Wert von  $\|g^n(x)\|$  für  $x \in M^u$  sehr schnell ansteigt (für einige  $x$  kommt es bereits bei  $n = 15$  zu einem "overflow"), hat dies signifikante Auswirkungen auf die

Tabelle 5.1: Anzahl der Boxen in der Attraktorapproximation  $N_k$  nach  $k$  rga-Schritten.

$k$	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$N_k$	537	1299	3074	7273	17015	41180	97245	231871	556599

Berechnung der Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(k)\}_{n=1}^T$ ,  $m = 1, 2$ . Die Einbeziehung der Menge  $M^u$  in die Berechnung von Liapunow-Exponenten sollte also vermieden werden. Bei den weiter präsentierten Berechnungen wurde dies folgendermaßen erreicht:

Nach dem 3. rga-Schritt (die entsprechende Boxenkollektion mit dem darin enthaltenen “klassischen” Attraktor sieht man auf dem Bild 5.3) wurde die den Fixpunkt  $x^2$  enthaltende Box eliminiert und nur mit den übriggebliebenen Boxen (siehe den Bild 5.4) weitergearbeitet. Die daraus resultierende Bilder unterscheiden sich praktisch nicht von dem auf dem Bild 5.2 gezeichneten Attraktor. Es sollte darauf hingewiesen werden, dass die berechneten Boxenkollektionen  $\{A_j^k\}_{j=1}^{N_k}$  einige Teile der oben erwähnten instabilen Menge  $M^u$  bis zu dem 18. rga-Schritt enthalten. Die Mengen  $\bigcup_{j=1}^{N_k} A_j^k$  für  $k \geq 18$  bleiben invariant. Damit wir die Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(k)\}_{n=1}^T$  auch für  $k < 18$  auswerten können, benutzen wir eine “Abschneidefunktion”. D.h., wenn der Wert  $\|g^n(x_j^k)\|$  für einen “Boxenrepäsentanten”  $x_j^k$  eine vorgegebene Konstante übersteigt, werden die weitere Iterationen an dieser Stelle nicht mehr ausgewertet.

Der Tabelle 5.1 kann man die Anzahl der Boxen der numerischen Approximation des Attraktors für einige rga-Schritte entnehmen. Dies soll als ein Maß für die Komplexität der Berechnungen dienen.



Abbildung 5.1: Hénon-Abbildung: der relative globale Attraktor nach 26 rga-Schritten

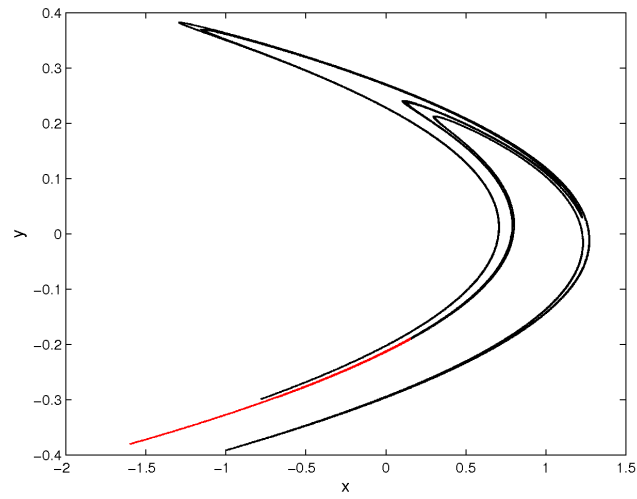


Abbildung 5.2: Hénon-Abbildung: der Attraktor, berechnet mit  $10^6$  Iterationen

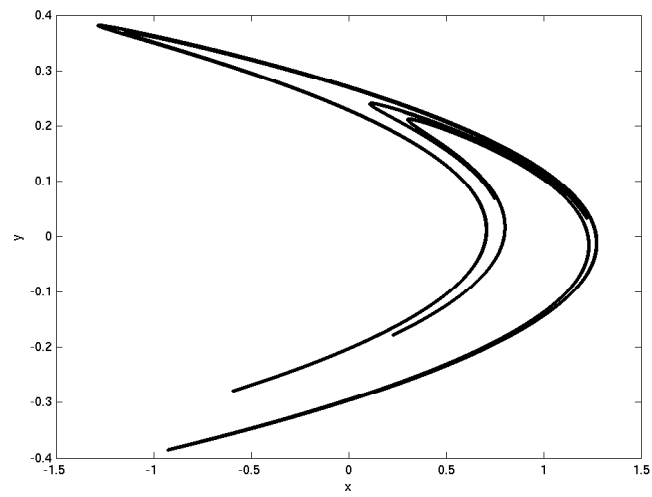


Abbildung 5.3: Hénon-Abbildung: die Boxenkollektion nach dem 3. rga-Schritt mit dem darin enthaltenem Attraktor

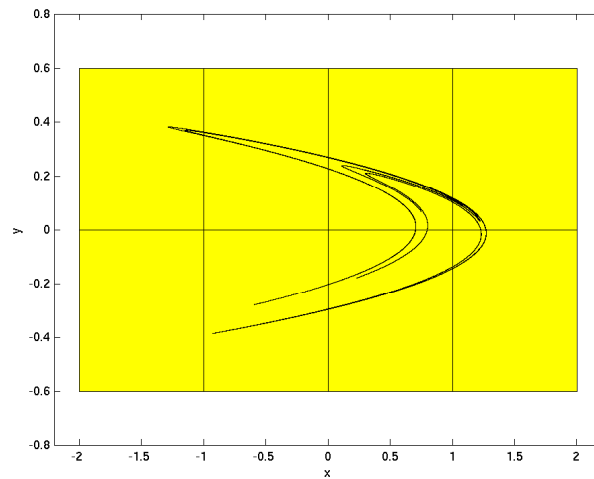
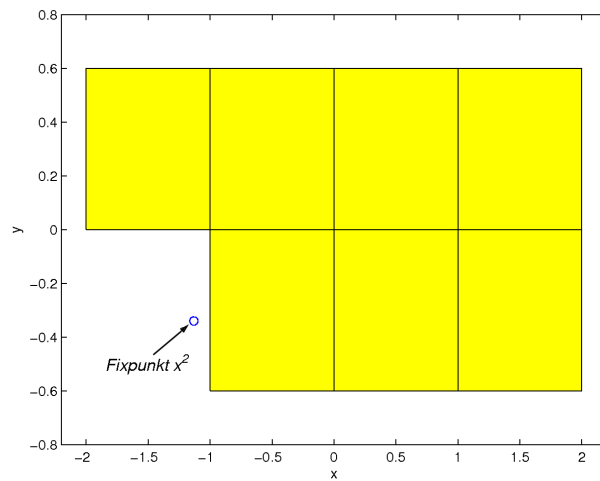


Abbildung 5.4: Hénon-Abbildung: die Boxenkollektion nach dem 3. rga-Schritt und der Löschung der den Fixpunkt  $x^2$  enthaltenden Box



## 5.2.2 Berechnung von Liapunow-Exponenten

Als erstes möchten wir darauf hinweisen, dass der Ansatz (5.15) zur Abschätzung der Approximationsfehler sich als nicht sehr zutreffend erwiesen hat: Die Folgen (vergleiche (5.18) und (5.12))

$$\begin{aligned} & \tilde{a}_n^m(k) - \tilde{\varepsilon}_n^m(k) \\ \text{bzw.} & & m = 1, 2 \quad (5.21) \\ & \tilde{b}_n^m(k) = \tilde{b}_n^m(k) - (n+1)\tilde{\varepsilon}_{n+1}^m(k) + n\tilde{\varepsilon}_n^m(k) \end{aligned}$$

approximieren in der Regel die Exponenten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  wesentlich schlechter als die Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(k)\}$  bzw.  $\{\tilde{b}_n^m(k)\}$ ,  $m = 1, 2$ , selbst, was man auf den Bildern 5.5 und 5.6 sehen kann. Deshalb werden wir in den folgenden Berechnungen auf die Auswertung der Folgen (5.21) verzichten.

Als nächstes werden wir das Konvergenzverhalten der nach (5.3) ausgewerteten Folgen  $\{\tilde{a}_n^1(k)\}$  und der numerischen Approximationen der mit der Methode von Aston und Dellnitz (siehe Abschnitt 1.3.2) berechneten Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{1}{n} \int \ln \|Dg^n(x)\| d\mu$$

vergleichen. Dabei wird der approximative Wert nach dem  $k$ -ten rga-Schritt  $\tilde{a}_n(k)$  mittels

$$\tilde{a}_n^m(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N_k} \ln \|Dg^n(x_j^k)\| \tilde{\mu}_j^k, \quad \text{für } n = 1, \dots, T$$

bestimmt. Auf dem Bild 5.7 werden die beiden Folgen  $\{\tilde{a}_n(k)\}$  und  $\{\tilde{a}_n^1(k)\}$  nach dem 24. rga-Schritt miteinander verglichen. Die hybride Methode approximiert den ersten Liapunow-Exponenten eindeutig besser. Auch die ersten Glieder der Extrapolationsfolge  $\{\tilde{b}_n^1(24)\}$  konvergieren schneller als die der Folge  $\{\tilde{b}_n(24)\}$  (siehe das Bild 5.8). Nach einigen Iterationen stimmen die beiden Folgen praktisch überein. Das liegt wahrscheinlich daran, dass nach einigen Iterationen nicht mehr die Restfehlerterme  $o(e^{-\theta n})$  das Konvergenzverhalten der Folgen  $\{\tilde{b}_n(k)\}$  bzw.  $\{\tilde{b}_n^1(k)\}$  dominieren<sup>7</sup> sondern die durch die numerische Auswertung entstandenen und durch diese Extrapolationsart verstärkten Abweichungen. Diese sind aber für die beiden Rechenwege (die

<sup>7</sup>Zur Erinnerung: es gilt (siehe (5.12) und (5.8))

$$\tilde{b}_n^1(k) = \lambda_1 + o(e^{-\theta n}) + (n+1)\tilde{\varepsilon}_{n+1}^m(k) - n\tilde{\varepsilon}_n^m(k).$$

$\tilde{b}_n(k)$  hat im Prinzip dieselbe Gestalt.

zeitlich-räumliche Integration von Aston und Dellnitz und die hybride Methode) von der gleichen Natur und, wie es das Bild suggeriert, möglicherweise sogar gleich.

Das bessere Konvergenzverhalten der Folge  $\{\tilde{a}_n^1(k)\}$  gegenüber der Folge  $\{\tilde{a}_n(k)\}$  lässt sich unter anderem dadurch erklären, dass die Konstante  $C_1$  aus dem Hauptfehlerterm der Folge  $\{a_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$  (siehe (5.20)) kleiner als die entsprechende Konstante  $C$  der Folge  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist (siehe auch die Bemerkung 4.3.3). Dies bestätigt auch der Vergleich der Folgen  $\{|\tilde{a}_n^1(27) - \lambda_1|n\}$  und  $\{|\tilde{a}_n(27) - \lambda_1|n\}$  (siehe das Bild 5.9), die als Approximationen der Konstanten  $C_1$  bzw.  $C$  dienen können. Die Konstanten  $C_1$  (für den ersten Liapunow-Exponenten) und  $C_2$  (für den zweiten Liapunow-Exponenten) der hybriden Methode sind bei diesem System betragsmäßig (fast) gleich, wie man es auf dem Bild 5.10 erkennen kann.

Auf den Bildern 5.11, 5.12 wurden Folgen  $\{\tilde{a}_n^1(k)\}$  bzw.  $\{\tilde{a}_n^2(k)\}$  und auf den Bildern 5.13 bzw. 5.14 ihre logarithmierte bzw. absolute Fehler für unterschiedliche Attraktor- und Maßapproximationen (nach verschiedener Anzahl der rga-Schritte) abgebildet. Wie man auf diesen Bildern unschwer erkennen kann, unterscheiden sich die Folgen und ihr Konvergenzverhalten gegen die entsprechenden Exponenten nur unwesentlich, nachdem die Attraktor- und die Maßapproximationen eine bestimmte Qualität erreicht haben (siehe auch die Bilder 5.15, 5.16).

Anders sieht es für die Folgen  $\{\tilde{b}_n^1(k)\}$  und  $\{\tilde{b}_n^2(k)\}$  aus. Betrachtet man die extrapolierten Folgen, die mit der nach dem 24. rga-Schritt erhaltenen Attraktor- und Maßapproximation (kurz: nach 24 rga-Schritten) berechnet wurden (siehe Bilder 5.17, 5.18), und vergleicht mit den Bildern 5.19, 5.20 nach 30 rga-Schritten, so sieht man nach einigen Iterationen ein wesentlich besseres Konvergenzverhalten bei den Folgen mit der genaueren Approximation des Maßes. Zwar bewegen sich die Folgen  $\tilde{b}_n^1(24)$  und  $\tilde{b}_n^2(24)$  ziemlich schnell in Richtung von  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  und in einigen Schritten treffen diese ziemlich genau, doch danach kommt es zu recht großen Ausschlägen. Allerdings sieht man auch bei den nach 30 rga-Schritten berechneten Extrapolationsfolgen verhältnismäßig große Oszillationen für die letzten gezeichneten Folgenglieder. Diese Beobachtungen bestätigen den durch die Gleichung (5.12) beschriebenen Effekt der Akkumulation der numerischen Fehlerterme bei den Extrapolationen  $\tilde{b}_n^m(k)$  für das steigende  $n$  (siehe auch das Bild 5.21). Die Folgen  $\tilde{B}_n^m(k)$  zeichnet eine geringere als die bei der anderen Extrapolationsart Schwankungsbreite aus (siehe Bild 5.22).

Abbildung 5.5: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^1(20)$  und  $\tilde{a}_n^1(20) - \tilde{\varepsilon}_n^1(20)$  (nach dem 20. rga-Schritt).

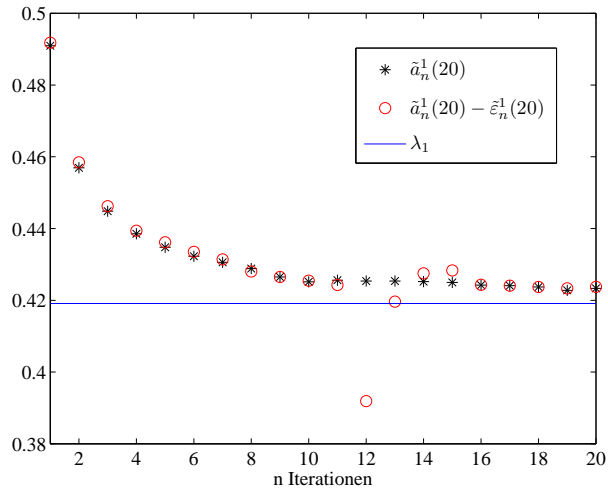


Abbildung 5.6: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{b}_n^1(25)$  und  $b_n^1(25)$  (nach dem 25. rga-Schritt).

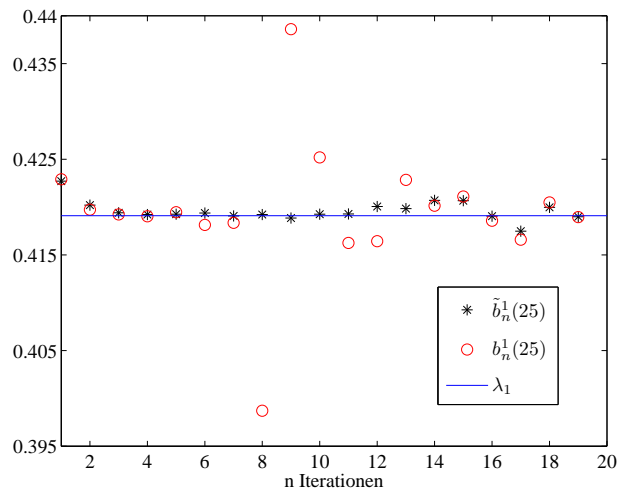


Abbildung 5.7: Hénon-Abbildung: Vergleich der Folgen  $\tilde{a}_n(24)$  und  $\tilde{a}_n(k)$  (hybride Methode vs. Ast. & Dell.)

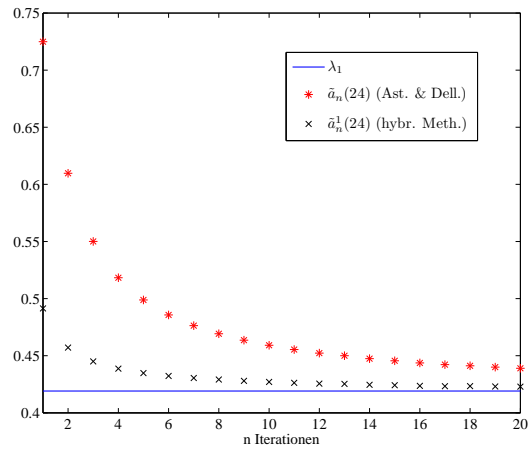


Abbildung 5.8: Hénon-Abbildung: Vergleich der Folgen  $\tilde{b}_n(24)$  und  $\tilde{b}_n(k)$  (hybride Methode vs. Ast. & Dell.)

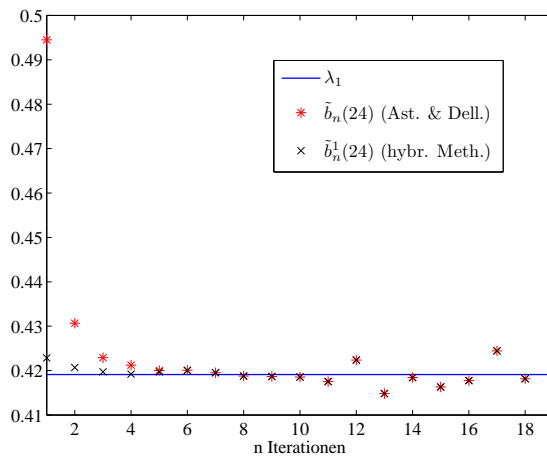


Abbildung 5.9: Hénon-Abbildung: Vergleich der Folgen  $\{|\tilde{a}_n^1(27) - \lambda_1|n\}$  und  $\{|\tilde{a}_n(27) - \lambda_1|n\}$  (hybride Methode vs. Ast/Del)

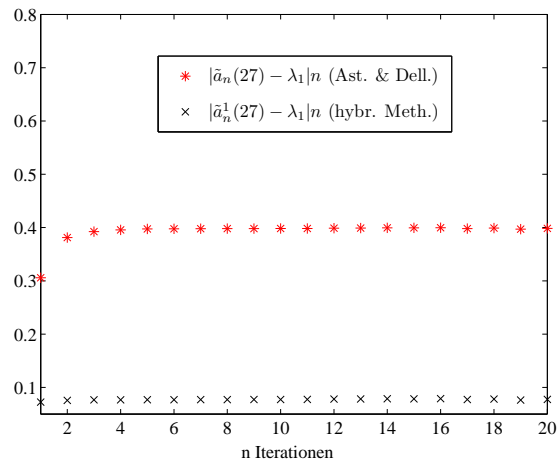


Abbildung 5.10: Hénon-Abbildung: Vergleich der Folgen  $\{|\tilde{a}_n^1(27) - \lambda_1|n\}$  und  $\{|\tilde{a}_n^2(27) - \lambda_2|n\}$  (Vergleich der Hauptfehlerterm-Konstanten für die hybride Methode)

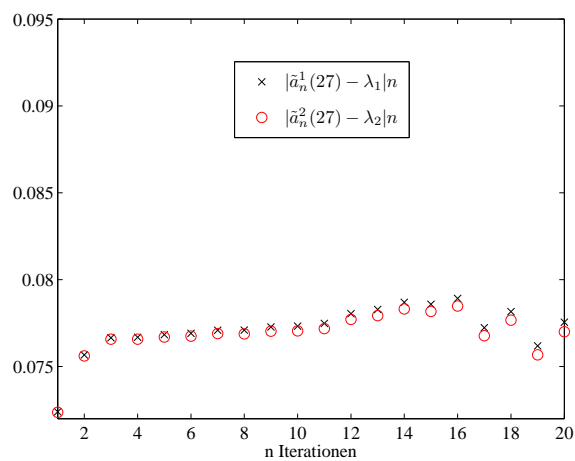


Abbildung 5.11: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^1(k)$  für die unterschiedlichen Attraktorapproximationen (von dem 18. bis zum 30. rga-Schritt)

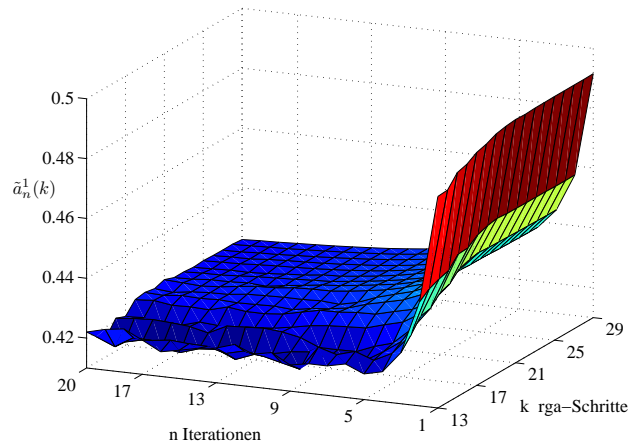


Abbildung 5.12: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^2(k)$  für die unterschiedlichen Attraktorapproximationen (von dem 18. bis zum 30. rga-Schritt)

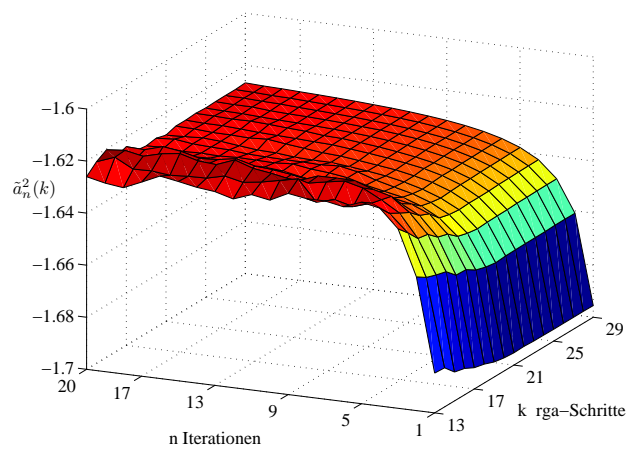




Abbildung 5.13: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\ln |\lambda_1 - \tilde{a}_n^1(k)|$  für die unterschiedlichen Attraktorapproximationen (von dem 13. bis zum 30. rga-Schritt)

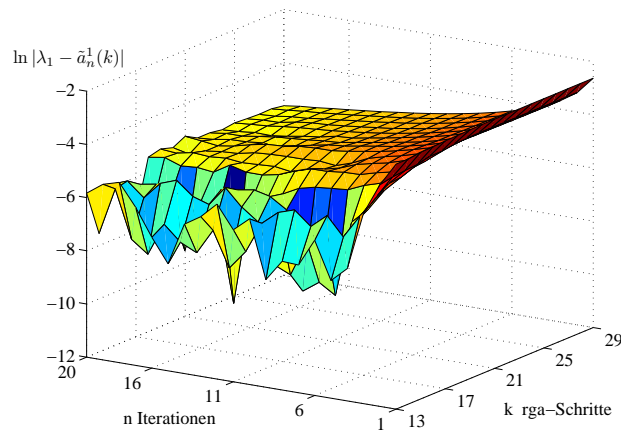


Abbildung 5.14: Hénon-Abbildung: die Folgen  $|\lambda_2 - \tilde{a}_n^2(k)|$  für die unterschiedlichen Attraktorapproximationen (von dem 13. bis zum 30. rga-Schritt)

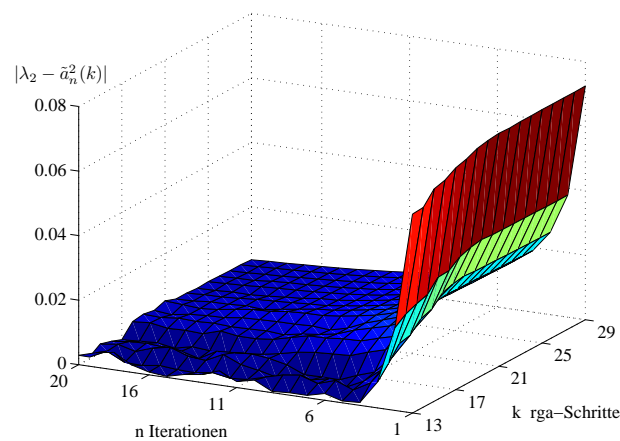


Abbildung 5.15: Hénon-Abbildung: die Folgen  $a_n^1$  für  $n = 1$  bis  $n = 20$ , berechnet nach dem 18., nach dem 24. und nach dem 30. rga-Schritt.

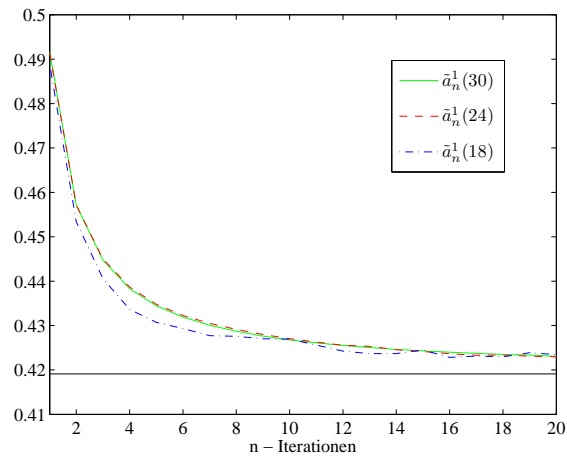


Abbildung 5.16: Hénon-Abbildung: die Folgen  $a_n^1$  für  $n = 5$  bis  $n = 20$ , berechnet nach dem 18., nach dem 24. und nach dem 30. rga-Schritt.

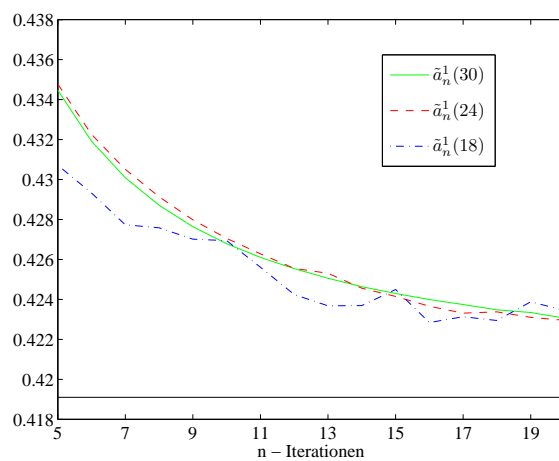


Abbildung 5.17: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^1(24)$  und  $\tilde{b}_n^1(24)$  (die Approximationen von  $a_n^1$  bzw.  $b_n^1$  nach dem 24. rga-Schritt).

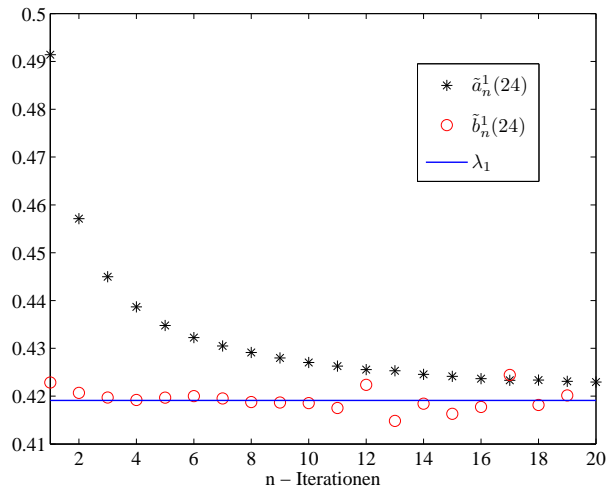


Abbildung 5.18: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^2(24)$  und  $\tilde{b}_n^2(24)$  (die Approximationen von  $a_n^2$  bzw.  $b_n^2$  nach dem 24. rga-Schritt).

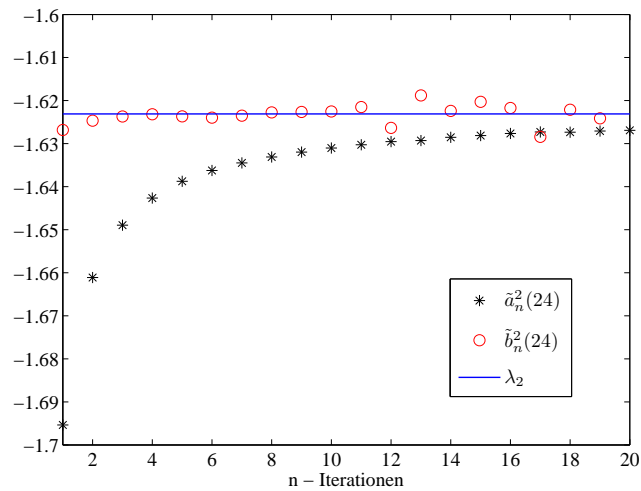


Abbildung 5.19: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^1(30)$  und  $\tilde{b}_n^1(30)$  (die Approximationen von  $a_n^1$  bzw.  $b_n^1$  nach dem 30. rga-Schritt).

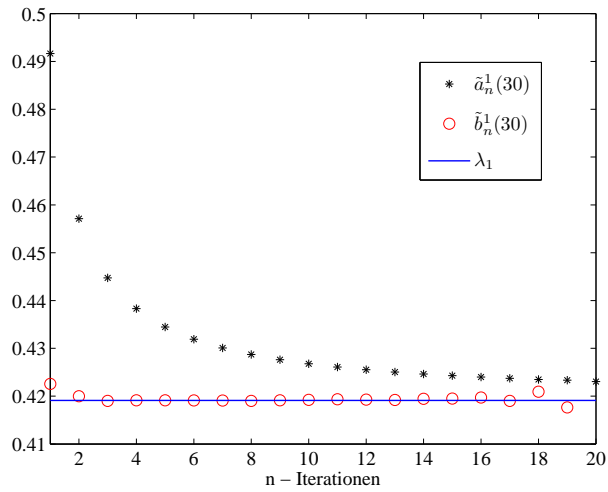


Abbildung 5.20: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{a}_n^2(30)$  und  $\tilde{b}_n^2(30)$  (die Approximationen von  $a_n^2$  bzw.  $b_n^2$  nach dem 30. rga-Schritt).

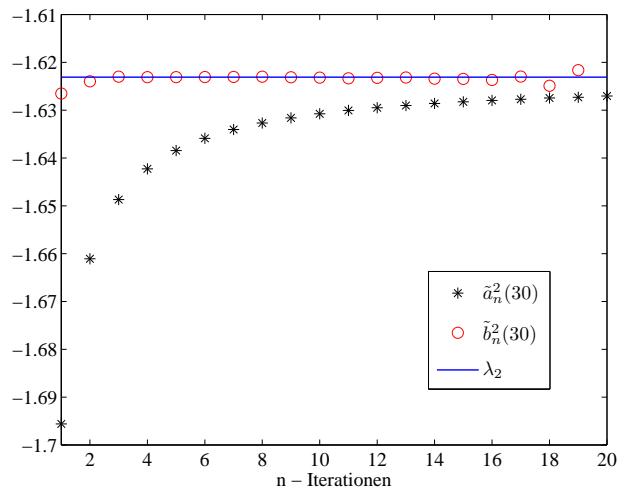


Abbildung 5.21: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{b}_n^1(k)$  für die unterschiedlichen Attraktorapproximationen (für  $k$  von 18 bis 30).

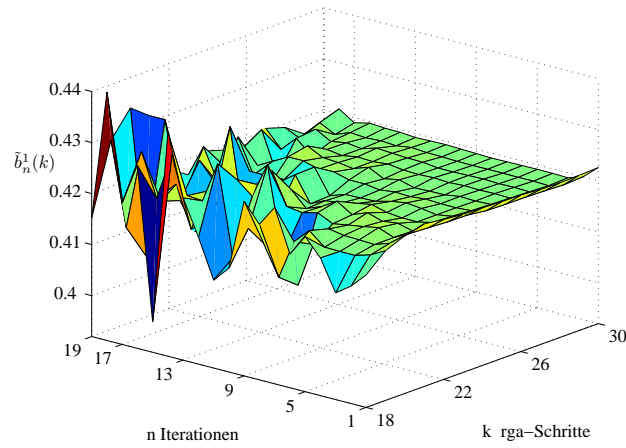
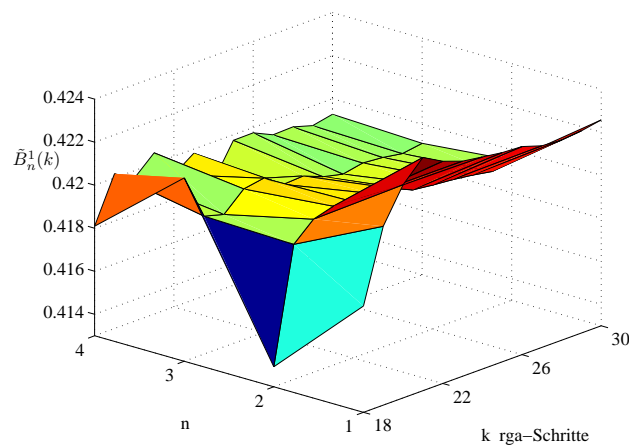


Abbildung 5.22: Hénon-Abbildung: die Folgen  $\tilde{B}_n^1(k)$  für die unterschiedlichen Attraktorapproximationen (für  $k$  von 18 bis 30).



## 5.3 Das Lorenz-System

Jetzt betrachten wir die folgende autonome gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_1 x_3 - x_2 \quad \text{mit } \sigma, \beta, \rho \in \mathbb{R}_+ . \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3\end{aligned}\tag{5.22}$$

Sie wurde von dem Meteorologen E.N. Lorenz 1963 angegeben und stellt eine vereinfachte Version eines Modells von Konvektionen in der Erdatmosphäre dar.

Sei  $\phi$  der Lösungsoperator des Systems (5.22). D.h.,  $\phi(t, x_0)$  ist die Lösung von (5.22) zum Anfangswert  $x(0) = x_0$  und zu dem Zeitpunkt  $t$ . Die Diskretisierung  $g$  von  $\phi$  bei Eins<sup>8</sup> liefert uns ein diskretes dynamisches System  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dessen Liapunow-Exponenten mit den Liapunow-Exponenten von (5.22) übereinstimmen.<sup>9</sup> Die Ableitung  $Dg^n(x_0)$  von  $g^n(x_0)$  für  $n \in \mathbb{N}$  erhält man als die Lösung der Variationsgleichung

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - \phi(t, x_0)_3 & -1 & -\phi(t, x_0)_1 \\ \phi(t, x_0)_2 & \phi(t, x_0)_1 & -\beta \end{pmatrix} Y, \quad Y_0 = I \tag{5.23}$$

zu den Zeitpunkten  $n \in \mathbb{N}$ .

Für die numerischen Berechnungen wählen wir den Parametersatz  $\sigma = 16$ ,  $\beta = 4$  und  $\rho = 40$ . In meiner Diplomarbeit [29] habe ich für diese Parameter mit Hilfe der QR-Methoden die folgenden Werte für die Liapunow-Exponenten ermittelt:<sup>10</sup>  $\lambda_1 = 1.368$ ,  $\lambda_2 = 0.0$  und  $\lambda_3 = -22.368$ . Die numerische Lösung der Systeme (5.22) und (5.23) erfolgt mit dem expliziten Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung mit der Schrittweite 0.02.

<sup>8</sup>Für  $g$  gilt also  $g(x) = \phi(1, x)$  bzw.  $g^n(x) = \phi(n, x)$ .

<sup>9</sup>Der Liapunow-Exponent  $\lambda(x, v)$  von (5.22) zu dem Startwert  $x_0$  und  $v \in \mathbb{R}^3$  ist durch

$$\lambda(x_0, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|D_x \phi(n, x_0)v\|.$$

<sup>10</sup>Die angegebenen Werte der Liapunow-Exponenten kommen folgendermaßen zustande: Der Wert des größten Liapunow-Exponenten  $\lambda_1 = 1.368$  wurde aus der numerischen Rechnung, die mit der kontinuierlichen QR-Methode durchgeführt wurde, übernommen. Für die restlichen Liapunow-Exponenten gilt im Falle eines positiven ersten Liapunow-Exponenten (siehe [17])  $\lambda_2 = 0.0$  und  $\lambda_3 = -(\sigma + 1 + \beta) - \lambda_1$ . Die in [29] numerisch berechneten Werte für  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  stimmen mit den theoretisch vorhergesagten bis auf die dritte Nachkommastelle überein.

Tabelle 5.2: Anzahl der Boxen in der Attraktorapproximation  $N_k$  nach  $k$  rga-Schritten.

$k$	13	15	17	19	21	23	25	27
$N_k$	432	1117	2698	6902	18237	44450	114156	303113

Das Lorenz System besitzt einen globalen Attraktor (siehe [33], [35]). Deshalb ergeben sich keine der im Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Schwierigkeiten bei der Wahl der Startbox für das rga-Algorithmus. Die Anfangsbox  $A_0$  wurde auf  $A_0 = [-35, 35] \times [-45, 45] \times [-10, 80]$  gesetzt. Eine Boxenüberdeckung des Lorenz-Attraktors und die zugehörige Maßapproximation sieht man auf den Bildern 5.23 und 5.24. Die Gewichtung der einzelnen Boxen kann man dabei an ihrer Farbe erkennen: die blauen Boxen haben das kleine Maß, die roten das höchste. Man beachte, dass diese Bilder sich von der in [15] angegebenen Abbildung des invarianten Maßes für das Lorenz-System unterscheiden. Das lässt sich folgendermaßen erklären:

- In [15] wurde ein anderer Parametersatz benutzt.
- Die Autoren von [15] haben die Diskretisierung des Lösungsoperators bei  $t = 0.2$  gewählt. Die Liapunow-Exponenten des durch 0.2-Diskretisierung definierten diskreten Systems sind vom Betrag fünf mal kleiner als des durch die Diskretisierung bei Eins gegebenen Systems (und damit auch des kontinuierlichen Systems (5.22)).

Der Tabelle 5.2 zeigt die Anzahl der Boxen in der Attraktor-Überdeckung für verschiedene Maßapproximationen.

Auf dem Bild 5.25 sieht man die Folgen  $\tilde{a}_n^m(k)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , für verschiedene Maß- und Attraktorapproximationen. Man kann eine etwas glattere Konvergenz der Folgen  $\{\tilde{a}_n^2(k)\}$  und  $\{\tilde{a}_n^3(k)\}$  im Vergleich zu der Folge  $\{\tilde{a}_n^1(k)\}$  für die gröbere Approximationen des Maßes beobachten. Da die Extrapolationsfolgen  $\{\tilde{b}_n^m(25)\}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , auf dem Bild 5.26 gute Approximationen der entsprechenden Exponenten liefern, könnte das als ein Hinweis betrachtet werden, dass das System den Voraussetzungen des Satzes 4.2.6 erfüllt und die Folgen  $\{a_n^m(k)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , der Abschätzung

$$a_n^m = \lambda_m + \frac{C_m}{n} + o\left(\frac{e^{-\theta n}}{n}\right)$$

genügen.

Vergleicht man die Approximationen der Hauptfehlerterm-Konstanten  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  der Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(k)\}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , die man mit Hilfe von

$$|\tilde{a}_n^m(27) - \lambda_m| n, \quad m = 1, 2, 3,$$

erhält, so sieht man, dass die Konstanten  $C_m$  für  $m = 1, 2, 3$  vom Betrag alle unterschiedlich sind (siehe das Bild 5.27). Dabei gilt  $C_1 < C_2 < C_3$ . Dies führt auch dazu dass die Folge  $\{\tilde{a}_n^1(k)\}$  schneller als  $\{\tilde{a}_n^2(k)\}$  und diese wiederum schneller als  $\{\tilde{a}_n^3(k)\}$  gegen die entsprechenden Liapunow-Exponenten des Systems konvergieren (das Bild 5.28). Werden die Hauptfehlerterme durch die Bildung der Extrapolationsfolgen  $\{\tilde{b}_n^m(k)\}$ ,  $m = 1, 2, 3$ , wegsabtrahiert, so ergibt sich ein anderes Bild: Die Folgen  $\{\tilde{b}_n^3(k)\}$  treffen gleich mit dem ersten Glied fast genau  $\lambda_3$ . Die Folgen  $\{\tilde{b}_n^1(k)\}$  und  $\{\tilde{b}_n^2(k)\}$  brauchen dagegen etwas Zeit, bis sie sich ihren Liapunow-Exponenten nähern, was man auf den Bildern 5.29 und 5.30 sehen kann. Eine Erklärung für dieses Verhalten liegt noch nicht vor.



Abbildung 5.23: Das Lorenz-System : die Boxenüberdeckung des Lorenz-Attraktors nach dem 24. rga-Schritt.

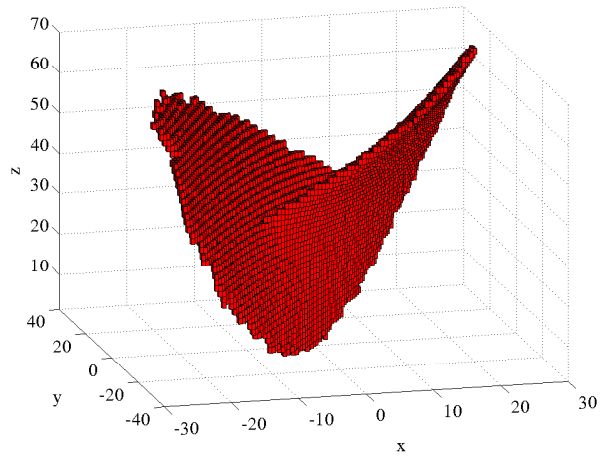


Abbildung 5.24: Das Lorenz-System : die Maßapproximation nach dem 24. rga-Schritt.

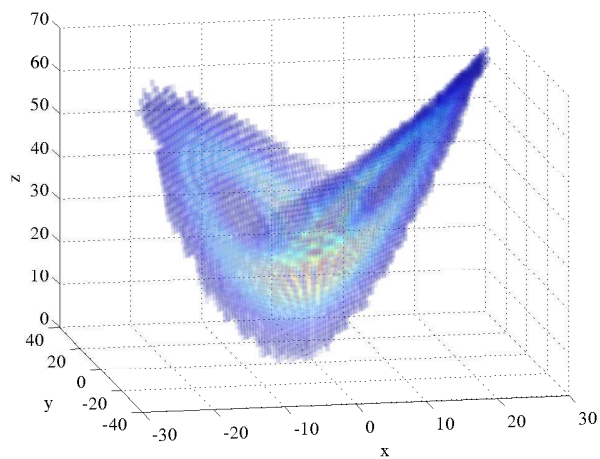


Abbildung 5.25: Das Lorenz-System : die Entwicklung der Folgen  $\tilde{a}_n^m(k)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , für unterschiedliche Maßapproximationen (für  $k$  von 13 bis 27).

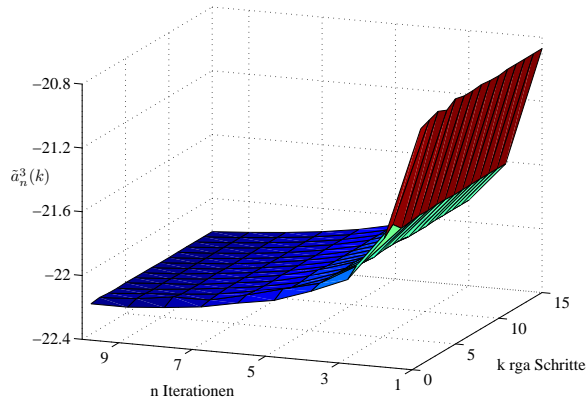
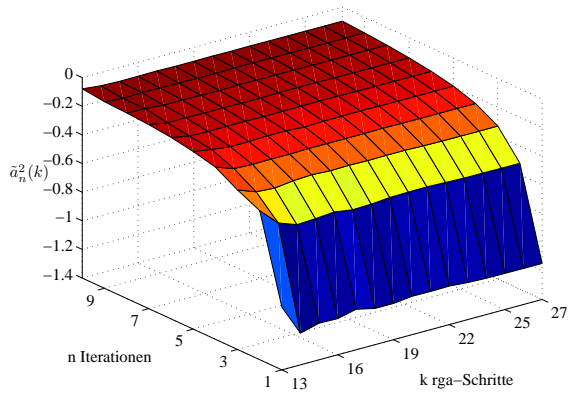
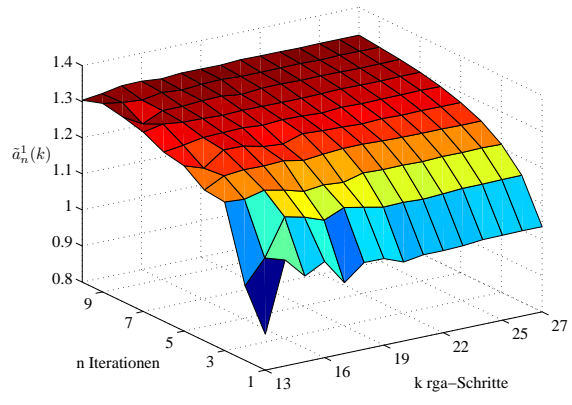


Abbildung 5.26: Das Lorenz-System : die Folgen  $\tilde{a}_n^m(25)$  und  $\tilde{b}_n^m(25)$  für  $m = 1, 2, 3$  (die Approximationen von  $a_n^m$  bzw.  $b_n^m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , nach dem 25. rga-Schritt).

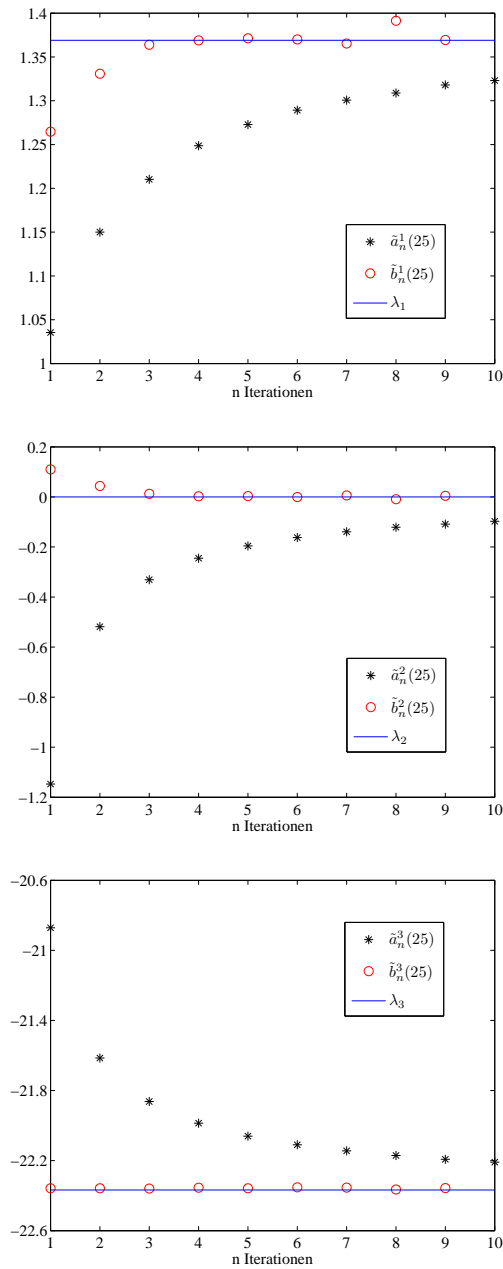


Abbildung 5.27: Das Lorenz-System : die Abschätzung der Hauptfehlerterm-Konstanten der Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(27)\}$  für  $m = 1, 2, 3$

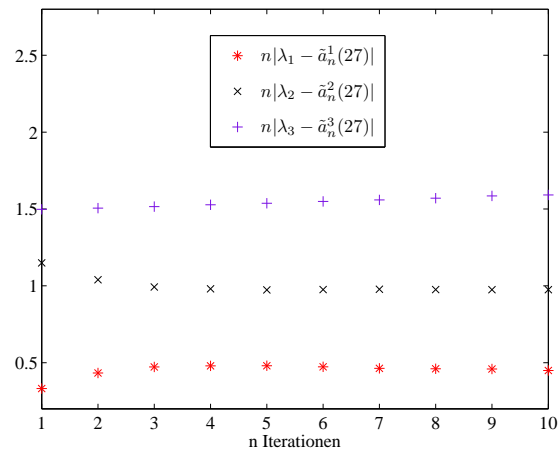


Abbildung 5.28: Das Lorenz-System : der Restfehler der Folgen  $\{\tilde{a}_n^m(27)\}$  für  $m = 1, 2, 3$ .

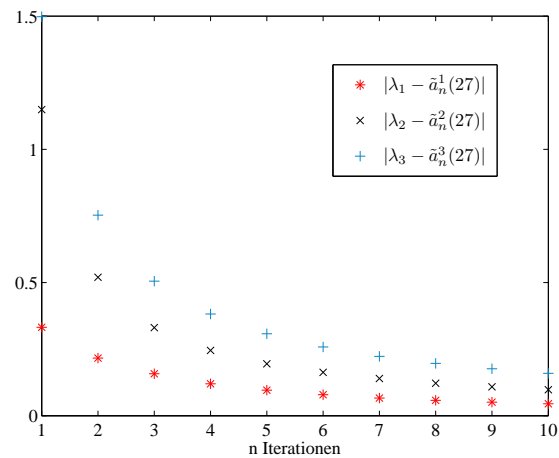


Abbildung 5.29: Das Lorenz-System : die Abschätzung der Restfehler der Folgen  $\{\tilde{b}_n^m(20)\}$  für  $m = 1, 2, 3$ .

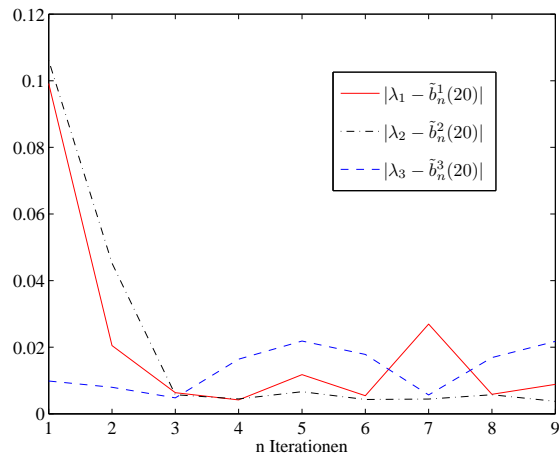
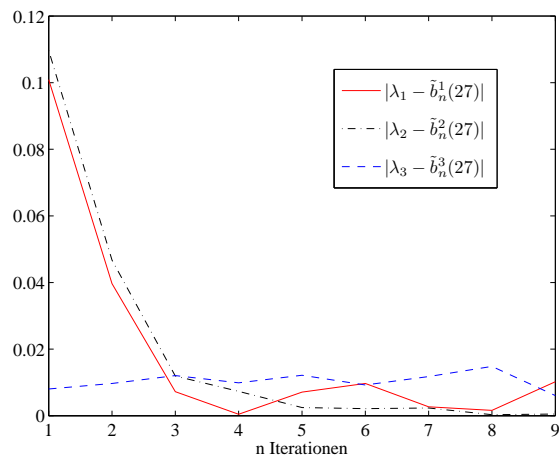


Abbildung 5.30: Das Lorenz-System : die Abschätzung der Restfehler der Folgen  $\{\tilde{b}_n^m(27)\}$  für  $m = 1, 2, 3$ .





# Offene Fragen

An dieser Stelle möchten wir auf einige Fragen eingehen, deren Analyse eine natürliche Fortsetzung der vorliegenden Arbeit darstellt:

- Für ein kontinuierliches dynamisches System, das durch den Lösungsoperator  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  einer gewöhnlichen autonomen Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

generiert wird,<sup>11</sup> können die Liapunow-Exponenten  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  im Punkt  $x$  mittels

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (Q^T(\theta, x) Df(\phi(\theta, x)) Q(\theta, x))_{ii} d\theta, \quad i = 1, \dots, d,$$

bestimmt werden. Die Matrix  $Q(\theta, x)$  ist orthogonal und wird dabei als Lösung einer speziellen Differentialgleichung berechnet (siehe [9], [16] oder [29]). Darin besteht die sogenannte kontinuierliche QR-Methode. Eine ähnliche Überlegung wie im Satz 1.4.1 führt uns zu der Möglichkeit für spezielle Systeme die Exponenten  $\lambda_i, i = 1, \dots, d$ , als Grenzwert der Folge der zeitlich-räumlichen Integrale

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int (Q^T(\theta, x) Df(\phi(\theta, x)) Q(\theta, x))_{ii} d\mu d\theta$$

für  $i = 1, \dots, d$  zu bestimmen. Dieser Zugang wurde vorerst nicht untersucht.

- Die Darstellungen im Abschnitt 5.1.2 legen nahe, dass eine Steuerung der hybriden Methode in der Anzahl der rga-Schritte  $k$  und in der darauf optimal abgestimmten Anzahl der Iterationen  $n$  mit dem Ziel

---

<sup>11</sup>Die Voraussetzungen für die Existenz eines globalen Flusses  $\phi(\cdot, \cdot)$  wie angegeben (d.h.,  $\phi$  ist in der ersten Variable auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert) werden z.B. in dem Satz von Winter und Conti (siehe [10]) angegeben. Für die Existenz lokaler Flüsse siehe z.B. [33].

der Minimierung des Fehlers im Prinzip möglich ist. Man braucht dazu jedoch ein genaues Verständnis der durch die numerische Auswertung zustande kommender Fehlerterme. Wie wir schon im Abschnitt 5.2.2 erwähnt haben, ist der in dem Ausdruck (5.14) angegebene Ansatz nicht ausreichend für die Beschreibung der Fehler. Eine präzisere Analyse ist notwendig.



# Symbolverzeichnis

$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Positive reelle Zahlen $(0, +\infty)$
$\mathbb{R}^d$	Reelle Zahlen
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Vektorraum der $n \times m$ reellen Matrizen
$GL(\mathbb{R}^{d \times d})$	Gruppe der invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{d \times d}$
$e_i$	$i$ -ter Einheitsvektor (bzw. $i$ -ter kanonische Vektor) aus $\mathbb{R}^d$
$A^T$	Transponierte der Matrix $A \in n \times m$
$A_{.j}$	$j$ -te Spalte der Matrix $A \in n \times m$
$A_{i.}$	$i$ -te Zeile der Matrix $A \in n \times m$
$ \cdot $	Absolutbetrag in $\mathbb{R}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Das übliche Skalarprodukt in $\mathbb{R}^d$ ( $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^m v_i w_i$ )
$\ \cdot\ $	Die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm in $\mathbb{R}^d$ , bzw. die dieser zugeordnete Matrixnorm in $\mathbb{R}^{d \times d}$
$S_m$	Menge aller Permutationen auf $\{1, \dots, m\}$
$\text{span}M$	Lineare Hülle der Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^d$
$\angle(v, w)$	Winkel zw. Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ; kann als $\arcsin(\ v_n^o\ )$ berechnet werden, wobei $v_n^o$ die zu $w$ orthogonale Komponente des normierten Vektors $v_n = \frac{1}{\ v\ }v$ ist
$\angle(v, W)$	Winkel zw. dem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und dem Unterraum $W \subset \mathbb{R}^n$ ; kann als $\arcsin(\ v_n^o\ )$ berechnet werden, wobei $v_n^o$ die zu $W$ orthogonale Komponente des normierten Vektors $v_n = \frac{1}{\ v\ }v$ ist
$\angle(V, W)$	Winkel zw. zwei Unterräumen $V$ und $W$ von $\mathbb{R}^n$ mit $V \oplus W \subseteq \mathbb{R}^n$ ; kann als $\inf_{v \in V \setminus 0} (\angle(v, W))$ berechnet werden
$v_1 \wedge \dots \wedge v_k$	äußere Produkt der Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ (siehe S. 22)
$\bigwedge_{i=1}^k v_i$	andere Bezeichnung für $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$
$\bigwedge^k A$	$k$ -te assoziierte Matrix bzw. $k$ -te äußere Potenz der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (siehe S. 25)



# Literaturverzeichnis

- [1] L.Ya. Adrianova: *Introduction to linear systems of differential equations*. Translations of Mathematical Monographs, Volume 146, American Mathematical Society
- [2] L. Allen, T.J. Bridges: *Numerical exterior algebra and the compound matrix method*. Numerische Mathematik 92 (2002), S.197-232
- [3] L. Arnold: *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1998
- [4] P.J. Aston, M. Dellnitz: *Computation of the Lyapunov exponent via spatial integration with application to blowout bifurcations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 170, 223-237, 1999
- [5] P.J. Aston, M. Dellnitz: *Computation of the dominant Lyapunov exponent via Spatial Integration using matrix norms*. Proc. Roy. Soc. Lond. A 459, 2933-2955, 2003
- [6] P.J. Aston, M. Dellnitz: *Computation of the dominant Lyapunov exponent via spatial integration using vector norms*. B. Fiedler, K. Gröger and J. Sprekels (eds.): Proceedings of the Equadiff 99, 1015-1020, World Scientific, 2000
- [7] L. Barreira, Y.B. Pesin: *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*. University Lecture Series, Volume 23, The American Mathematical Society, 2002
- [8] M. Benedicks, L.-S. Young: *Sinai-Bowen-Ruelle measures for certain Hénon maps*, Invent. math. 112, 541-576, 1993
- [9] T.J. Bridges, S. Reich: *Computing Lyapunov exponents on a Stiefel manifold*. Physica D 156, 219-238, 2001
- [10] T.A. Burton: *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*. Academic Press INC., New York, 1985

- [11] B.F. Bylov, P.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemytskij: *Theorie der Liapunow-Exponenten und ihre Anwendungen auf Stabilitätsprobleme*. (Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий: Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости), Nauka, Moskwa 1966 (rus.)
- [12] Geon Ho Choe: *Computational Ergodic Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2005
- [13] M. Dellnitz, G. Froyland, O. Junge: *The algorithms behind GAIIO - Set oriented numerical methods for dynamical systems*. B. Fiedler (ed.): *Ergodic Theory, Analysis and Efficient Simulation of Dynamical Systems*, 145-174, Springer, 2001
- [14] M. Dellnitz, A. Hohmann: *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*. *Numerische Mathematik* 75, 293-317, 1997
- [15] M. Dellnitz, O. Junge: *Set Oriented Numerical Methods for Dynamical Systems*. B. Fiedler, G. Iooss and N. Kopell (eds.): *Handbook of Dynamical Systems II: Towards Applications*, World Scientific, 221-264, 2002.
- [16] L. Dieci, E.S. van Vleck: *Computation of a few Lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems*. *Appl. Num. Math.* 17, 1995
- [17] J.-P. Eckman, D. Ruelle: *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. *Rev. Mod. Phys.* 57(3), 1985
- [18] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*. 2.Auflage, Springer-Verlag, 1999
- [19] G. Fischer: *Lineare Algebra.*, 10.Auflage, Vieweg, 1995
- [20] P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, J.A. Yorke: *The Liapunov dimension of strange attractors*. *J. Diff. Equations* 49, 185-207, 1983
- [21] G. Froyland, K. Judd, A.I. Mess, K. Murano: *Lyapunov exponents and triangulation*. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, Hawaii, 281-286, 1993
- [22] G. Froyland, K. Judd, A.I. Mess: *Estimation of Lyapunov exponents of dynamical systems using a spatial average*. *Phys. Review E*, 51(4), 1995

- [23] F.R. Gantmacher: *Matrizentheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1986
- [24] K. Geist, U. Parlitz, W. Lauterborn: *Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents*. Prog. of Theor. Phys. 83(5),1990
- [25] G.H. Golub, C.F. van Loan: *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, second edition 1990
- [26] W. Gröbner: *Matrizenrechnung*. Hochschultaschenbücher-Verlag, 1966
- [27] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995
- [28] A.M. Liapunow: *The General Problem of the Stability of Motion*. Comm. Soc. Math. Kharkow 1892 (rus.); reprinted in English, Taylor & Francis, London 1992
- [29] A. Lust: *Numerische Methoden zur Berechnung von Liapunow-Exponenten in dynamischen Systemen*. Diplomarbeit, Universität Bielefeld, 2002
- [30] V. Oseledec: *A multiplicativ ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems*. Trans. Moscow. Math. Soc. 19, 1968
- [31] S.Yu. Pilyugin: *Introduction to Structurally Stable Systems of Differential Equations*. Brinkhäuser Verlag, 1992
- [32] M. Pollicott: *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds*. Cambridge University Press, 1993
- [33] V. Reitmann: *Reguläre und chaotische Dynamik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1996
- [34] D. Ruelle: *A measure associated with Axiom-A attractors*. Amer. J. Math. 98(3), 619-654, 1976
- [35] W. Tucker: *The Lorenz attractor exists*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328(12), 1197-1202, 1999
- [36] P. Walters: *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 2000
- [37] L.-S. Young: *Dimension, entropy and Lyapunov exponents*. Ergodic Theory and Dynamical systems 2, 109-124, 1982

