

Endogenes Wachstum und Bevölkerungsentwicklung

Dissertation
zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
der Universität Bielefeld

Bielefeld, im Juli 2005

Diplom-Volkswirt
Norbert Schuett

Erster Gutachter: Prof. Dr. Alfred Greiner

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Willi Semmler

©Norbert Schuett, 2005. Alle Rechte vorbehalten.

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier °° ISO 9706.

Für

meine Frau Lisa und

meinen Sohn Tobias

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Beschäftigung als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Wirtschaftspolitik (Prof. Greiner) der Universität Bielefeld in der Zeit von 2000 bis 2005 entstanden. Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Greiner und Herrn Prof. Dr. Semmler für die fachliche Betreuung des Vorhabens und für viele nützliche Hinweise. Eventuell verbliebene Unstimmigkeiten gehen selbstverständlich zu meinen Lasten.

Bielefeld, im Juli 2005

Norbert Schuett

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	iv
Abbildungsverzeichnis	vii
Symbolverzeichnis	viii
1 Einführung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Aufbau der Arbeit	3
2 Optimale Einwanderungspolitiken	6
2.1 Grundlagen und stilisierte Fakten	6
2.2 Das Modell	11
2.3 Die Anwendung	13
2.4 Fazit	15
3 Fertilitätswahl und Endogenes Wachstum	16
3.1 Vorbemerkungen	16
3.2 Fertilität in der Nutzenfunktion	17
3.3 Die Rolle der Ausbildungskosten	19
3.4 Die Rolle des Bevölkerungsbestandes	22

4	Endogene Fertilität im AK-Modell	24
4.1	Vorbemerkungen	24
4.2	Das Modell mit konstanter Population	26
4.3	Das Modell mit variabler Population	29
4.4	Fazit	35
5	Endogene Fertilität in Infrastrukturkapitalmodellen	37
5.1	Einführung: Modelle mit Infrastrukturkapital	37
5.2	Das Modell mit konstanter Population	42
5.2.1	Das Modell mit Einkommensteuer	42
5.2.2	Das Modell mit Ausgabensteuer	49
5.2.3	Das Modell mit Pauschalsteuer	56
5.2.4	Vergleich	65
5.3	Das Modell mit variabler Population	69
5.3.1	Das Modell mit Einkommensteuer	69
5.3.2	Das Modell mit Ausgabensteuer	80
5.3.3	Vergleich	91
5.4	Fazit	94
5.5	Anhang	95
6	Endogene Fertilität in Humankapitalmodellen	100
6.1	Einführung: Modelle mit Humankapital	100
6.2	Endogene Fertilität und der Uzawa-Lucas Ansatz	102
6.2.1	Das Modell mit konstanter Population	104
6.2.2	Das Modell mit variabler Population	112
6.3	Fazit	119

7	Endogene Fertilität in Wissenskapitalmodellen	121
7.1	Einführung: Modelle mit Wissenskapital	121
7.2	Endogene Fertilität und der Learning-by-Doing Ansatz	123
7.2.1	Das Modell mit konstanter Population	125
7.2.2	Das Modell mit variabler Population	133
7.3	Populationsgröße und Ideenproduktion	141
7.4	Fazit	150
8	Schlußbetrachtung	153
8.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	153
8.2	Ausblick	155
A	Lokale Stabilitätsanalyse höherer Systeme	158
A.1	Verallgemeinerter Satz von Vieta	158
A.2	Lokale Stabilitätsanalyse für (3×3) - Systeme	160
A.3	Lokale Stabilitätsanalyse für (4×4) - Systeme	163
	Literatur	170

Tabellenverzeichnis

2.1	Relative Bevölkerungsentwicklung bei hypothetischen negativen Nettofertilitäten	8
2.2	Fertilitäts- und Mortalitätsraten in Deutschland, 2005 bis 2014	9
5.1	Variation der Einkommensteuer bei konstanter Population . .	48
5.2	Variation der Ausbildungskosten im Einkommensteuermodell bei konstanter Population	49
5.3	Variation der Ausgabensteuer bei konstanter Population . . .	55
5.4	Variation der Ausbildungskosten im Ausgabensteuermodell bei konstanter Population	56
5.5	Variation der Pauschalsteuer-I bei konstanter Population . . .	61
5.6	Variation der Pauschalsteuer-II bei konstanter Population . . .	64
5.7	Vergleich Einkommensteuer versus Pauschalsteuer-I bei konstanter Population	66
5.8	Vergleich Pauschalsteuer-II versus Ausgabensteuer bei konstanter Population	67
5.9	Gesamtvergleich der Steuersysteme bei konstanter Population	68

5.10 Steuerpolitische Spielräume im Einkommensteuermodell bei variabler Population	78
5.11 Variation der Einkommensteuer bei variabler Population . . .	79
5.12 Steuerpolitische Spielräume im Ausgabensteuermodell bei variabler Population	89
5.13 Variation der Ausgabensteuer bei variabler Population	90
5.14 Vergleich der Steuerspielräume bei variabler Population	92
5.15 Vergleich der Steuersysteme bei variabler Population	93
6.1 Variation der Ausbildungskosten im Uzawa-Lucas Modell bei konstanter Population	111
6.2 Variation des Nutzenparameters im Uzawa-Lucas Modell bei konstanter Population	112
7.1 Variation der Ausbildungskosten im Learning-by-Doing Modell bei konstanter Population	132
7.2 Variation des Nutzenparameters im Learning-by-Doing Modell bei konstanter Population	133
7.3 Variation der Ausbildungskosten im Learning-by-Doing Modell bei variabler Population	140
7.4 Bestimmung der Eigenwerte im Learning-by-Doing Modell bei variabler Population	141
7.5 Variation der Ausbildungskosten im Modell: Populationsgröße und Ideenproduktion	148
7.6 Variation des Nutzenparameters im Modell: Populationsgröße und Ideenproduktion	150

A.1	Konstellation bei drei reellen Eigenwerten im (3×3) -Fall . . .	161
A.2	Konstellation bei einem reellen Eigenwert und einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte im (3×3) -Fall	162
A.3	Konstellation bei vier reellen Eigenwerten im (4×4) -Fall . . .	165
A.4	Konstellation bei zwei reellen Eigenwerten und einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar im (4×4) -Fall	166
A.5	Konstellation bei zwei konjugiert komplexen Eigenwertpaaren im (4×4) -Fall	167

Abbildungsverzeichnis

2.1	Entwicklung des Bevölkerungsbestandes im Modell optimaler Einwanderungspolitiken	14
-----	---	----

Symbolverzeichnis

a	Hilfsvariable
b	Parameter für die Ausbildungskosten
c	Pro-Kopf-Konsum
d	Mortalitätsrate
e	Exponentialfunktion, Eigenwerte
f	Nettofertilität (Kap. 2)
g	Infrastrukturkapital pro Kopf, Migrationsrate (Humankapitalmodell), Nettofertilität (Kap. 2),
i	Laufindex
j	Laufindex, Matrixeinträge
k	Physisches Kapital pro Kopf, Laufindex
m	Migrationsrate, Humankapital pro Kopf
n	Fertilitätsrate
q	Hilfsvariable
t	Zeitindex
u	Nutzenfunktion, Parameter im Humankapitalmodell
v	Parameter im Humankapitalmodell
x	Hilfsvariable

y	Pro-Kopf-Output
z	Hilfsvariable
A	Bestand an Wissenskapital, Niveaufunktion
B	Niveaufunktion
C	Aggregierter Konsum
E	Bestand an Einwanderern
G	Bestand an Infrastrukturkapital
H	Hamiltonfunktion
J	Jacobi-Matrix
K	Aggregiertes physisches Kapital
L	Bevölkerungsbestand
M	Migrationsstrom, Bestand an Humankapital
N	Geburten (Nachkommen)
Q	Hilfsvariable
R	Hilfsvariable
S	Sozialtransfers
T	Steuerlast, Endzeitpunkt
U	Bestand an Ureinwohnern, Nutzenfunktion
V	Verlustfunktion
Y	Aggregierter Output
Z	Zielfunktion
α	Produktionsparameter
β	Parameter

γ	Parameter
ϵ	Hilfsvariable
η	Abschreibungsrate
θ	Nutzenparameter (Fertilitätsnutzen)
λ	Schattenpreis
μ	Schattenpreis
π	Konsumrivalitätsparameter (Kap. 5)
ρ	Diskontrate
ϱ	Nutzenparameter
σ	Abschreibungsrate (privates physisches Kapital)
ς	Produktionsparameter (Humankapitalmodell)
τ	Steuersatz (Einkommen- und Ausgabensteuer)
ψ	Nutzenparameter
ω	Wachstumsrate
Γ	Zeitbudget
Δ	Differenzoperator
Λ	Erziehungszeit
Υ	Investitionszulage
Ψ	Arbeitszeit
Ω	Hilfsvariable

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation

In relativ vielen entwickelten Ländern werden sich in den nächsten Jahrzehnten erhebliche demographische Veränderungen ergeben. So ist damit zu rechnen, daß in diesen Ländern die Fertilitätsrate n beständig unterhalb der Mortalitätsrate d liegen wird. Es ergibt sich beispielsweise für Deutschland¹ im Jahr 2005 eine Differenz von $n - d = -0,00222$. Diese Differenz bleibt in den nächsten zwanzig Jahren durchgängig negativ und erreicht im Jahr 2025 den Wert $n - d = -0,00455$. Die damit verbundenen demographischen Kon-

¹Siehe: U.S. Census Bureau (2005), International Data Base, Table 008, Vital Rates, Germany; (Data updated: 04-26-2005)
Internetquelle: <http://www.census.gov>

sequenzen sind beträchtlich. Bei einem Bevölkerungsbestand² von 82.431.390 Personen im Jahr 2005 würde bereits eine Differenz ($n - d$) von nur einem Promille einen absoluten jährlichen Bevölkerungsrückgang von 82.431 Personen bedeuten. Aufgrund der dargestellten Entwicklungen sind zwei Probleme relevant.

Dabei kann einerseits vermutet werden, daß sich die altersbedingte Zusammensetzung der Bevölkerung verändern wird. Dieser Aspekt wird für die Systeme der sozialen Sicherung von Bedeutung sein. So setzen beispielsweise umlagefinanzierte Rentenversicherungssysteme voraus, daß das Verhältnis von Rentnern zu Erwerbspersonen in etwa stabil bleibt. Man kann ferner davon ausgehen, daß eine veränderte Altersstruktur die Innovativkraft einer Bevölkerung betreffen wird, und damit sicherlich auch die langfristige wirtschaftliche Entwicklung beeinflusst.

Andererseits ist klar, daß die jeweiligen Bevölkerungsbestände schrumpfen werden, sofern keine entsprechenden Politiken ergriffen werden. Da sich die Fertilitätsrate kurz- und mittelfristig kaum beeinflussen läßt, kommt zur Stabilisierung der Bevölkerung im wesentlichen nur die Einwanderungspolitik in Betracht.

Obwohl die erwähnten Probleme offensichtlich und auch aktuell sind, gibt es nur wenige Studien, die sich mit optimalen Einwanderungspolitiken befassen und das demographische Problem im Rahmen eines endogenen Wachstumsmodells behandeln³.

²Siehe: U.S. Census Bureau (2005), International Data Base, Table 001, Total Midyear Population, Germany; (Data updated: 04-26-2005)
Internetquelle: <http://www.census.gov>

³Siehe hierzu den Überblicksartikel von: Ehrlich / Lui (1997).

Häufig wird in endogenen Wachstumsmodellen⁴ das Bevölkerungswachstum als konstant positiv oder konstant Null angenommen⁵. Eine Ausnahme stellen beispielsweise die Arbeiten von Yip und Zhang (1997) sowie von Blackburn und Cipriani (1998) dar, da dort die Fertilitätsrate Bestandteil der Nutzenfunktion des repräsentativen Akteurs ist und im Modell endogen und unabhängig von der Mortalitätsrate bestimmt wird. Das bedeutet, daß die Nettofertilität (Differenz zwischen Fertilität und Mortalität) prinzipiell negativ sein kann. Dadurch ist es möglich, den Fall der schrumpfenden Bevölkerung in einem endogenen Wachstumsmodell abzubilden. Dieser Ansatz soll im wachstumstheoretischen Hauptteil dieser Arbeit in verschiedene endogene Wachstumsmodelle eingearbeitet werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 befassen wir uns mit optimalen Einwanderungspolitiken. Dabei wird die Frage untersucht, wie ein vorgegebener Populationsstock zu einem zukünftigen Zeitpunkt kostenminimal über Einwanderung erreicht werden kann. Als Ergebnis werden optimale Einwanderungspfade ermittelt. Im Anwendungsteil werden die gewonnenen Resultate auf die Situation Deutschlands bezogen.

Das Kapitel 3 ist zusammen mit dem Kapitel 4 grundlegend für den wachstumstheoretischen Hauptteil (Kapitel 5 bis 7) der vorliegenden Arbeit. In Kapitel 3 werden der Nutzen aus der Fertilität und die damit verbundenen Ausbildungskosten sowie die Rolle des Bevölkerungswachstums thematisiert.

⁴Siehe hierzu Aghion / Howitt (1999).

⁵Siehe hierzu beispielsweise Barro / Sala-i-Martin (1995).

In Kapitel 4 werden die gewählten Ansätze in ein einfaches AK-Modell eingearbeitet.

Die Kapitel 5 bis 7 behandeln verschiedene endogene Wachstumsmodelle, die jeweils über eine zweite akkumulierbare Kapitalgröße verfügen. Hierbei handelt es sich um Infrastrukturkapital (Kapitel 5), Humankapital (Kapitel 6) und Wissenskapital (Kapitel 7).

Wir ermitteln in diesen Modellen die endogene Fertilitätsrate. Dabei unterscheiden wir jeweils zwischen dem Fall der konstant gehaltenen Population und den der variablen Population. Wir überprüfen stets, ob es einen sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) gibt und ob dieser eindeutig ist. In den Fällen, in denen die Population schwanken darf, bestimmen wir den gleichgewichtigen Bevölkerungsbestand endogen. Ferner arbeiten wir die Bedingungen für eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate heraus.

Desweiteren führen wir in den Kapiteln 5 bis 7 jeweils Modellsimulationen durch. Dabei wollen wir überprüfen, ob die Modelle für plausible Parameterkonstellationen realitätsnahe Resultate liefern können. Ferner werden die Auswirkungen von Parametervariationen untersucht. In den Modellen mit Infrastrukturkapital (Kapitel 5) variieren wir die Steuersätze und die Ausbildungskosten. In den Modellen mit Humankapital (Kapitel 6) und Wissenskapital (Kapitel 7) lassen wir die Ausbildungskosten und den Fertilitätsnutzen variieren. Dabei interessieren uns immer die Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, den Bevölkerungsbestand und die Wachstumsrate. Die drei Kapitel 5 bis 7 sind jeweils so verfaßt, daß sie unabhängig voneinander gelesen werden können.

In Kapitel 8 werden die gewonnenen Ergebnisse kurz zusammengefaßt, und es wird ein Ausblick auf noch offene Untersuchungen gegeben, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine Berücksichtigung mehr finden konnten.

Kapitel 2

Optimale

Einwanderungspolitiken

2.1 Grundlagen und stilisierte Fakten

In einer Reihe von entwickelten Industrieländern werden sich in den nächsten Jahrzehnten erhebliche demographische Veränderungen ergeben. So ist in diesen Ländern das Bevölkerungswachstum seit einiger Zeit negativ, und es ist damit zu rechnen, daß in den betroffenen Ländern auch in der Zukunft die Fertilitätsrate n beständig unterhalb der Mortalitätsrate d liegen wird. Folglich werden dort die Bevölkerungen schrumpfen, sofern keine entsprechenden Gegenmaßnahmen getroffen werden. Da sich die Fertilitätsraten kurzfristig kaum beeinflussen lassen, läßt sich der Bevölkerungsbestand letztlich nur durch gezielte Einwanderung konstant halten.

Wir wollen nun am Beispiel Deutschlands illustrieren, mit welchen Größenordnungen hierbei zu rechnen ist. Dabei betrachten wir zuerst die Entwicklung des Bevölkerungsbestandes, wenn keine Einwanderung vorliegt. Wir wollen aus Gründen der Datenverfügbarkeit den zugrundeliegenden Prozeß als zeitdiskret auffassen. Im Folgenden ist L der gesamte Populationsbestand, U der Bestand an Ureinwohnern sowie E der Bestand an Einwanderern. Ferner sei n die Fertilitätsrate sowie d die Mortalitätsrate. Dann resultiert für den gesamten Bevölkerungsbestand:

$$L(t) = U(t) + E(t). \quad (2.1)$$

Wir betrachten zuerst die Kohorte der Ureinwohner. Für die Entwicklung des Bestandes an Ureinwohnern gilt:

$$\Delta U_t \equiv (n - d)_{t-1} U_{t-1}. \quad (2.2)$$

Damit ergibt sich für einen Endzeitpunkt $t = T$ bezogen auf den Anfangszeitpunkt $t = 0$ durch wiederholtes Substituieren:

$$U_T \equiv U_0 \prod_{j=0}^{T-1} (1 + (n - d)_j). \quad (2.3)$$

Die durchschnittlich Nettofertilität im zeitdiskreten Prozeß lautet dann wie folgt:

$$g = \left[\frac{U_T}{U_0} \right]^{\frac{1}{T}} - 1. \quad (2.4)$$

Für die relative Bevölkerungszunahme in T Jahren auf der Basis konstanter Nettofertilitäten g gilt dann:

$$\frac{U_T - U_0}{U_0} = [1 + g]^T - 1. \quad (2.5)$$

Wir wollen nun kurz darstellen, welche Entwicklungen sich für verschiedene negative Nettofertilitäten ergeben:

Tabelle 2.1: Relative Bevölkerungsentwicklung bei hypothetischen negativen Nettofertilitäten

g	Bevölkerungsveränderung in Prozent in t Jahren			
	$t = 10$	$t = 20$	$t = 30$	$t = 40$
-0,001	-1,00	-1,98	-2,96	-3,92
-0,002	-1,98	-3,92	-5,83	-7,70
-0,003	-2,96	-5,83	-8,62	-11,32

Die Tabelle 2.1 verdeutlicht den relativen Bevölkerungsrückgang bei verschiedenen negativen Nettofertilitäten. Wir hatten in der Einführung bereits erwähnt, daß die Nettofertilität in Deutschland im Jahr 2005 den Wert $g = -0,00222$ annimmt, in den folgenden zwanzig Jahren stets negativ ist, und im Jahr 2025 den Wert $g = -0,00455$ erreicht. Daraus ergibt sich zusammen mit der Tabelle 2.1 ein erster Eindruck, welche Ausmaße der Bevölkerungsrückgang in den nächsten Jahrzehnten in Deutschland annehmen kann, wenn keine Einwanderung stattfindet. Wir wollen nun für den Zeitraum von 2005 bis 2014 etwas genauer betrachten. Dabei ergibt sich das folgende Bild¹:

¹Siehe: U.S. Census Bureau (2005), International Data Base, Table 008, Vital Rates, Germany; (Data updated: 04-26-2005)
Internetquelle: <http://www.census.gov>

Tabelle 2.2: Fertilitäts- und Mortalitätsraten in Deutschland, 2005 bis 2014

	\tilde{n}	\tilde{d}	$\tilde{n} - \tilde{d}$		\tilde{n}	\tilde{d}	$\tilde{n} - \tilde{d}$
2005	0,833	1,055	-0,222	2010	0,821	1,100	-0,279
2006	0,825	1,062	-0,237	2011	0,824	1,113	-0,289
2007	0,820	1,071	-0,251	2012	0,828	1,125	-0,297
2008	0,818	1,080	-0,262	2013	0,831	1,137	-0,306
2009	0,818	1,090	-0,272	2014	0,835	1,149	-0,314

Quelle: U.S. Census Bureau (2005)

In der Tabelle 2.2 sind $\tilde{n} \equiv 100n$ und $\tilde{d} \equiv 100d$ jeweils die Fertilitäts- und Mortalitätsrate in Prozent. Es zeigt sich, daß die Nettofertilität $\tilde{n} - \tilde{d}$ stets negativ ist. Ferner können wir erkennen, daß die Differenz zwischen Mortalitäts- und Fertilitätsrate im Zeitablauf größer wird. Dabei nimmt die Mortalitätsrate stetig zu, während die Fertilitätsrate nahezu stabil bleibt. Wir wollen nun anhand dieser Werte den Bevölkerungsbestand für das Jahr 2015 bestimmen, wenn keine Einwanderung stattfindet. Wir gehen vom Anfangsbestand² $U_0 = 82.431.390$ in Jahr 2005 ($t = 0$) aus und erhalten unter Verwendung von (2.3) für das Jahr 2015 ($t = T = 10$) den Bevölkerungsbestand $U_T = 80.209.230$. Es ergibt sich eine Fehlgröße von $U_0 - U_T = 2.222.160$. Wir wollen nun annehmen, daß dieser Fehlbetrag nur durch Einwanderung gedeckt werden kann. Wenn nun die Kohorte der Einwanderer eine Nettofer-

²Siehe: U.S. Census Bureau (2005), International Data Base,

Table 001, Total Midyear Population, Germany; (Data updated: 04-26-2005)

Internetquelle: <http://www.census.gov>

tilität von $n - d = 0$ aufweist, dann resultiert ein durchschnittliches jährliches Einwanderungsvolumen von 222.216 Personen, wenn der Bevölkerungsbestand stabil bleiben soll.

Wir wollen nun zur zeitkontinuierlichen Betrachtung übergehen. Für die zeitliche Entwicklung des Bevölkerungsbestandes ergibt sich dann:

$$\dot{U}(t) = [n_U(t) - d_U(t)] U. \quad (2.6)$$

Für den Bestand an Ureinwohnern zum Zeitpunkt t resultiert für $U(0) = U_0$ aus Gleichung (2.6):

$$U(t) = U_0 e^{\int_0^t [n_U(s) - d_U(s)] ds}. \quad (2.7)$$

Für die durchschnittliche Nettofertilität $g = (n_U - d_U)$ im zeitstetigen Prozeß folgt für $t = T$ aus Gleichung (2.7):

$$g = \frac{1}{T} [\ln U(T) - \ln U(0)]. \quad (2.8)$$

Unter Verwendung der bereits ermittelten Größen $U_0 = 82.431.390$ und $U_T = 80.209.230$ ergibt sich $g = -0,00273$ (gerundet)³.

Der Bestand an Einwanderern hängt von der entsprechenden Nettofertilität $f(t) = n_E(t) - d_E(t)$ und vom jeweiligen Einwanderungsvolumen $M(t)$ ab. Für die zeitliche Entwicklung resultiert:

$$\dot{E}(t) \equiv f(t)E(t) + M(t). \quad (2.9)$$

In folgenden Abschnitt soll untersucht werden, wie ein vorgegebener Bevölkerungsbestand zu einem definierten Zeitpunkt in der Zukunft kostenminimal

³Bei späteren Berechnungen werden wir den Wert $g = -0,00273277$ verwenden.

mit Hilfe von Einwanderung erreicht werden kann⁴. Dabei wird unterstellt, daß die Assimilation von Einwanderern Kosten verursacht. Ferner wird unterstellt, daß diese Kosten zum Zeitpunkt der Einwanderung in Höhe des Barwertes des Assimilationskostenstromes entstehen.

2.2 Das Modell

Wir wollen nun davon ausgehen, daß zum Zeitpunkt T ein vorgegebener Populationsbestand $L(T) = L^*$ mit Hilfe von Einwanderung erreicht werden soll, wobei das Einwanderungsvolumen zu jedem beliebigen Zeitpunkt keinerlei Beschränkung unterliegen soll. Wenn Einwanderung stattfindet, dann setzt sich die Bevölkerung zu jedem Zeitpunkt aus den Kohorten der Ureinwohner U und der Einwanderer E zusammen, so daß gilt: $L(t) = U(t) + E(t)$. Dabei soll der Einfachheit halber angenommen werden, daß der Bestand an Einwanderern zum Zeitpunkt $t = 0$ Null beträgt. Das heißt, es gilt: $E(0) = E_0 = 0$. Wenn der Bestand an Ureinwohnern für den zukünftigen Zeitpunkt T bestimmbar ist, dann resultiert für den Bestand an Einwanderern zum Zeitpunkt T :

$$E(T) = L(T) - U(T) = L^* - U(T). \quad (2.10)$$

Es sei ferner angenommen, daß die Nettofertilität $f(t) = n(t) - d(t)$ der Einwanderer im Zeitverlauf konstant ist und von der der Ureinwohner abweichen kann. Dann folgt für die zeitliche Entwicklung des Bestandes an Einwande-

⁴Ein methodisch ähnliches aber inhaltlich verschiedenes Vorgehen findet sich in Prskawetz / Feichtinger / Luptacik (1998).

ern:

$$\dot{E}(t) \equiv fE(t) + M(t). \quad (2.11)$$

Wir wollen ferner annehmen, daß Einwanderung mit Assimilationskosten verbunden ist. Aus Vereinfachungsgründen sei angenommen, daß zum Zeitpunkt der Einwanderung der Barwert des Kostenstromes anfällt. Es sei hierbei eine quadratische Verlustfunktion der Form $V(M) = M^2$ unterstellt, so daß die folgende Zielfunktion zu minimieren ist:

$$Z(M) \equiv \int_0^T e^{-\rho t} M^2 dt. \quad (2.12)$$

Dabei ist $\rho > 0$ die konstante Zeitpräferenzrate. Damit lautet die Hamiltonfunktion in laufenden Werten dieses dynamischen Optimierungsprogramms⁵ wie folgt:

$$H(M, E, \lambda) \equiv \lambda(fE + M) - M^2. \quad (2.13)$$

Für die notwendigen Bedingungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial M} &\equiv \lambda - 2M = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial E} &\equiv \lambda f = \rho\lambda - \dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit der Transversalitätsbedingung $e^{-\rho T} \lambda(T) E(T) \geq 0$. Aus den notwendigen Bedingungen ergibt sich:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - f = \frac{\dot{M}}{M}. \quad (2.15)$$

Damit folgt für die Einwanderung $M(t)$ aus der Differentialgleichung (2.15) unter Verwendung von Gleichung (2.11):

$$M(t) \equiv M(0)e^{(\rho-f)t} = \dot{E}(t) - fE(t). \quad (2.16)$$

⁵Siehe: Kamien / Schwartz (2000).

Mit Hilfe der angenommenen Anfangsbedingung $E_0 = 0$ ergibt sich für die Entwicklung des Bestandes an Einwanderern:

$$E(t) \equiv \frac{M_0}{\rho - 2f} [e^{(\rho-f)t} - e^{ft}]. \quad (2.17)$$

Aufgrund der gewählten Endbedingung $E(T) = L^* - U(T)$ folgt für das anfängliche Einwanderungsvolumen M_0 die Beziehung:

$$M_0 = \frac{[L^* - U(T)] (\rho - 2f)}{e^{(\rho-f)T} - e^{fT}}. \quad (2.18)$$

Mit dem Startwert M_0 ist die durchzuführende Einwanderungspolitik bestimmt. Wir wollen nun den dargestellten Ansatz auf die Situation Deutschlands beziehen.

2.3 Die Anwendung

Hierzu nehmen wir die Zeitpräferenzrate mit $\rho = 0,03$ an. Die Nettofertilitätsrate der Ureinwohner sei mit $g = -0,00273277$ angenommen. Der Anfangsbestand an Ureinwohnern sei mit $U_0 = 82.431.390$ gegeben und erreicht am Ende des Planungszeitraums den Wert $U_T = 80.209.230$. Ferner wollen wir aus Gründen der Vereinfachung unterstellen, daß die Ureinwohner und die Einwanderer die gleiche Nettofertilität aufweisen. Es gelte also: $g = f$. Bezüglich des Bevölkerungsbestandes wollen wir fordern, daß $L(T) = L^* = U_0$ gelten soll. Dann erhalten wir für die Anfangseinwanderung $M_0 = 190.264$ und für die Einwanderung am Ende des Planungszeitraums $M_T = 263.945$. Wir können also feststellen, daß das Einwanderungsvolumen bereits bei einem relativ kurzen Planungszeitraum von nur zehn Jahren zu

verschiedenen Zeitpunkten sehr unterschiedlich ausfallen kann. Das aggregierte Einwanderungsvolumen über den gesamten Planungszeitraum ergibt sich aus:

$$\int_0^T M(t) dt = \frac{M_0}{\rho - g} \left[e^{(\rho - g)T} - 1 \right]. \quad (2.19)$$

In unserem Beispiel erhalten wir eine aggregierte Einwanderung von 2.250.990 Personen. Damit übersteigt die aggregierte Einwanderung den erforderlichen Bestand an Einwanderern von $E(T) = 2.222.160$. Dieses Ergebnis folgt aus der Annahme einer negativen Nettofertilität für die Kohorte der Einwanderer.

Wir kommen nun zur zeitlichen Entwicklung des Bevölkerungsbestandes $L(t) = U(t) + E(t)$ und betrachten hierzu die Abbildung 2.1:

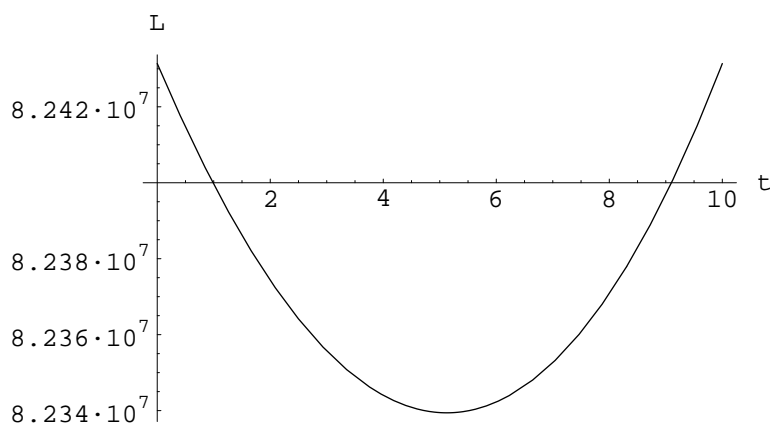


Abbildung 2.1: Entwicklung des Bevölkerungsbestandes im Modell optimaler Einwanderungspolitiken

Wir können anhand der Abbildung 2.1 erkennen, daß der Bevölkerungsbestand zunächst absinkt und dann wieder ansteigt, um am Ende des Planungs-

zeitraums wieder das Ausgangsniveau zu erreichen. Dabei ermittelt sich der Zeitpunkt t^* des minimalen Bevölkerungsbestandes wie folgt:

$$t^* = \frac{\ln |Q_2| - \ln |Q_1|}{\rho - 2g}, \quad (2.20)$$

mit $Q_1 \equiv gM_0(\rho - 2g)^{-1} + M_0$ und $Q_2 \equiv gM_0(\rho - 2g)^{-1} - gU_0$. Wir erhalten im betrachteten Beispiel $t^* = 5,12$. Zu diesem Zeitpunkt stellt sich das Bevölkerungsminimum mit $L^{min.} = 82.339.400$ ein. Die Bevölkerung sinkt also zwischenzeitlich um 91.969 Personen ab.

2.4 Fazit

Wir haben uns in diesem Kapitel mit optimalen Einwanderungspolitiken beschäftigt. Im Rahmen einer Modellanwendung hat sich gezeigt, daß es sowohl bei der Einwanderung als auch beim Bevölkerungsbestand zu gewissen Schwankungen kommt. Diese Schwankungen werden umso stärker ausfallen, je länger der Planungshorizont ist. Als Modellerweiterungen würden sich daher anbieten:

- Beschränktes Einwanderungsvolumen
- Beschränkter Bevölkerungsbestand

Denkbar wäre auch, die Verlustfunktion um einen Term zu erweitern, der die Abweichung der Bevölkerung von einem gewünschten Bevölkerungsbestand erfaßt. Diese Aspekte sollen jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

Kapitel 3

Fertilitätswahl und Endogenes Wachstum

3.1 Vorbemerkungen

Die Berücksichtigung der Bevölkerung hat in der wachstumstheoretischen Diskussion eine längere Tradition¹. Die Betrachtung populationsökonomischer Aspekte wie Bevölkerungsentwicklung und Bevölkerungsbestand ebenso wie Fertilität und Mortalität im Rahmen endogener Wachstumsmodelle ist dagegen noch verhältnismäßig neu².

Wir wollen in diesem Kapitel Vorbereitungen treffen für die folgenden wachstumstheoretischen Kapitel. Dabei legen wir die Nutzenfunktion des re-

¹Siehe hierzu: Pitchford (1974).

²Siehe hierzu die Überblicksarbeit von: Ehrlich und Lui (1997).

präsentativen Akteurs fest, die wir in den folgenden Kapiteln stets verwenden wollen. Ferner legen wir dar, in welcher Form wir die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft berücksichtigen wollen. Zusätzlich definieren wir, nach welcher Regel die Bevölkerung wächst.

3.2 Fertilität in der Nutzenfunktion

Bezüglich der Nachfrage nach Kindern werden in der populationsökonomischen Literatur verschiedene Motive angeführt³. Hierzu gehören beispielsweise Kinderarbeit oder Alterssicherung⁴ als eher materielle Motive. Im Gegensatz hierzu ist die Betrachtung von Nachkommen als reine Konsumgüter eher immaterieller Natur. Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich davon ausgehen, daß der Konsum der Anwesenheit von Kindern Nutzen stiftet. Wir unterstellen daher, daß die Nutzenfunktion des repräsentativen Akteurs von der Fertilitätsrate abhängt.

Wir starten mit einer zeitkontinuierlichen Version einer Nutzenfunktion, die auf Becker / Barro (1988) bzw. Barro / Becker (1989) zurückgeht. In diesem Ansatz sind die Akteure über das Altruismusmotiv mit ihren Nachkommen verbunden. Die Nutzenfunktion lautet:

$$u \equiv \frac{1}{1-\varrho} \left[\left(L^\psi c (n-d)^\theta \right)^{1-\varrho} - 1 \right], \quad (3.1)$$

mit $\psi \geq 0$ und $\theta \geq 0$, sowie $\varrho > 0$. Der Parameter L beschreibt in diesem Zusammenhang die Größe der betrachteten Dynastie (Familie). Ferner ist C der aggregierte Konsum und $c \equiv CL^{-1}$ der Pro-Kopf-Konsum. Für $\psi \equiv 1$

³Siehe hierzu auch: Ehrlich / Lui (1997).

⁴Siehe hierzu: Nerlove / Razin / Sadka (1986).

ist $Lc \equiv C$ der aggregierte Familienkonsum. Falls $\psi \equiv 0 \equiv \theta$ gilt, hängt die Nutzenfunktion ausschließlich vom Konsum ab. Wenn wir den Spezialfall $\varrho = 1$ annehmen, dann ergibt sich⁵:

$$\begin{aligned} u &\equiv \ln \left[L^\psi c (n - d)^\theta \right], \\ &\equiv \psi \ln L + \ln c + \theta \ln (n - d). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für $n \leq d$ ist die Nutzenfunktion nicht definiert. Wir können $n - d$ als die Überlebensrate der neugeborenen Kinder interpretieren. Dann ist n die Geburtenrate und d die Rate der Kindersterblichkeit. Wir wollen nun annehmen, daß es keine Kindersterblichkeit gibt. Alle Akteure sterben folglich erst im Erwachsenenalter. Es gilt also: $d = 0$. Diese Annahme wird uns später erlauben, die Fertilitätsrate unabhängig von der gesellschaftlichen Mortalitätsrate zu bestimmen. Ferner wollen wir $\psi \equiv 0$ annehmen. Der repräsentative Akteur ist also indifferent gegenüber der Populationsgröße. Es resultiert schließlich die Nutzenfunktion⁶, die wir im Folgenden in dieser Arbeit immer unterstellen wollen als:

$$u(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n. \quad (3.3)$$

Dabei ist $\theta \geq 0$ ein Nutzenparameter. Ferner gilt: $c \in (0, +\infty)$ und $n \in (0, \bar{n})$. Hierbei ist \bar{n} der Wert, den die Fertilitätsrate maximal annehmen kann. Wenn wir annehmen, daß ein Haushalt aus zwei erwachsenen Personen besteht und pro Zeiteinheit nur einen Nachkommen haben kann, dann ist $\bar{n} = 1/2$ für

⁵Es gilt: $\lim_{\varrho \rightarrow 1} \frac{1}{1-\varrho} [v^{1-\varrho} - 1] = \lim_{\varrho \rightarrow 1} \frac{1}{(-1)} [v^{1-\varrho} \ln v (-1)] = \ln v$, (1 Hôpital's Regel).

⁶Ein ähnlicher Ansatz mit Konsum-, Fertilitäts- und Umweltnutzen findet sich in: Jöst / Quaas / Schiller (2001).

den repräsentativen Akteur⁷. Wir wollen in dieser Arbeit annehmen, daß die Fertilitätsrate keinen biologischen Beschränkungen⁸ unterliegt, so daß gilt: $n \in (0, +\infty)$.

Die angenommene Nutzenfunktion ist additiv separabel und genügt den folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} u_c(c, n) &> 0 > u_{cc}(c, n), \\ u_n(c, n) &> 0 > u_{nn}(c, n), \\ \lim_{c \rightarrow 0} u_c(c, n) &= \lim_{n \rightarrow 0} u_n(c, n) = +\infty, \\ \lim_{c \rightarrow +\infty} u_c(c, n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(c, n) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3 Die Rolle der Ausbildungskosten

Die Nachkommenschaft verursacht Erziehungs- bzw. Ausbildungskosten. Diese Kosten können beispielsweise als zeitlicher Aufwand⁹ wie in der Arbeit von Becker / Murphy / Tamura (1990) oder Galor und Weil (1996) erfaßt werden. Alternativ können diese Kosten wie in Barro und Sala-i-Martin (1995) als monetärer Aufwand erfaßt werden. In dieser Arbeit betrachten wir die Ausbildungskosten stets als exogen gegebene Funktion von n . Die Akteure entscheiden somit nur über die Anzahl ihrer Nachkommen, nicht jedoch über

⁷Siehe hierzu: Cai (2002); Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß Fertilitätsraten von $n = 1/2$ (50 Prozent) in der Realität nicht annähernd erreicht werden. Realistische Fertilitätsraten liegen zwischen $n = 0,01$ (1 Prozent) in Industrieländern und $n = 0,02$ (2 Prozent) in Entwicklungsländern.

⁸Wir werden noch sehen, daß die Fertilität aufgrund der Budgetbeschränkung der privaten Akteure ökonomischen Beschränkungen unterliegt.

⁹Siehe hierzu: Becker (1991).

deren Qualität¹⁰.

Wenn die Ausbildungskosten als Zeitaufwand erfaßt werden, so wird üblicherweise davon ausgegangen, daß die gesamte verfügbare Zeit Γ entweder als Erziehungszeit $\Lambda(n)$ oder als Arbeitszeit Ψ genutzt werden kann. Es folgt: $\Psi \equiv \Gamma - \Lambda(n)$. Mit $\Gamma \equiv 1$ (normiert) resultiert für den möglichen Arbeitseinsatz: $\Psi \equiv 1 - \Lambda(n)$. Dabei hängt $\Lambda(n)$ positiv von n ab. Es gilt: $\lambda_n(n) > 0$ und $\lambda_{nn}(n) \geq 0$. In diesem Zusammenhang sind folgende Annahmen sinnvoll. Wenn es keine Nachkommen gibt, dann existieren auch keine Erziehungskosten: $\Lambda(0) = 0$. Ferner dürfen die Erziehungszeiten das vorhandene Zeitbudget nicht übersteigen: $\Lambda(\bar{n}) \leq 1$.

Werden die Erziehungs- bzw. Ausbildungskosten als monetärer Aufwand erfaßt, so bietet es sich an, die Kostenfunktion $\Lambda(\cdot)$ von der Fertilitätsrate n , einem Kostenparameter b und einer im Zeitablauf veränderlichen Größe abhängig zu machen. Dies hat den Vorteil, daß die Ausbildungskosten pro Nachkommen je nach wirtschaftlichem Entwicklungsstand schwanken können. Wir nehmen hierbei an, daß ein höherer Entwicklungsstand mit höheren Ausbildungskosten einhergeht.

In dieser Arbeit gehen wir ausschließlich davon aus, daß die Ausbildung der Nachkommen monetäre Kosten verursacht. Die beiden Formulierungen, die wir in dieser Arbeit verwenden wollen, lauten:

$$\Lambda_1(n) \equiv bny, \quad \Lambda_2(n) \equiv bnk, \quad (3.5)$$

mit dem Kostenparameter $b \geq 0$. Ferner ist Y der aggregierte Output und

¹⁰Die Qualität der Nachkommenschaft kann sich z.B. in ihrer Humankapitalaustattung ausdrücken. Siehe hierzu auch:

Becker / Lewis (1973), sowie: Nerlove / Raut (1997), S. 1142 ff.

$y \equiv YL^{-1}$ der Output pro Kopf. Zusätzlich ist K der aggregierte Bestand an privatem physischen Kapital und $k \equiv KL^{-1}$ die Kapitalausstattung pro Kopf. Die Formulierung $\Lambda_2(n) \equiv bnk$ verwenden wir in dem Kapitel: Endogene Fertilität in Humankapitalmodellen. Die Formulierung $\Lambda_1(n) \equiv bny$ verwenden wir in allen anderen wachstumstheoretischen Kapiteln.

Die dargestellten Ausbildungskosten verteilen sich eigentlich über den gesamten Erziehungszeitraum. Als eine Vereinfachung unterstellen wir in den Modellen, daß die gesamten Kosten zum Zeitpunkt der Geburt eines Nachkommen fällig werden. Wir interpretieren dabei die Ausbildungsausgaben als den Barwert des Ausbildungskostenstromes.

Wir nehmen dabei in den betrachteten Modellen an, daß alle Akteure homogen sind. Das bedeutet, daß sich die Nachkommen vom Typus her nicht von den anderen Akteuren unterscheiden. Folglich sind die Nachkommen von Anfang an erwerbstätig. Sie erzielen dabei das Einkommen des repräsentativen Akteurs und verfügen über das gleiche Konsumniveau.

Aufgrund der Tatsache, daß die Nachkommenschaft Kosten verursacht, ergibt sich für die Fertilitätsrate eine ökonomische Beschränkung nach oben. Die Möglichkeit der privaten Kreditaufnahme sei ausgeschlossen. Die obere Schranke für die Fertilitätsrate resultiert dann aus der Budgetbeschränkung der privaten Akteure und hängt von der Wahl der Kostenfunktion $\Lambda(\cdot)$ ab. Es sei T die Steuerlast und TL^{-1} die Pro-Kopf-Abgabe an den Staat. Dann folgt für $\Lambda(\cdot) = \Lambda_1(n) = bny$ als obere Schranke:

$$n \leq \frac{y - TL^{-1} - c}{by}. \quad (3.6)$$

Für den Fall $\Lambda(\cdot) = \Lambda_2(n) = bnk$ folgt als obere Schranke entsprechend:

$$n \leq \frac{y - TL^{-1} - c}{bk}. \quad (3.7)$$

3.4 Die Rolle des Bevölkerungsbestandes

Wir wollen in dieser Arbeit stets annehmen, daß die zeitliche Entwicklung des Bevölkerungsbestandes L durch die Fertilitätsrate n , die Mortalitätsrate d und die vorzeichenunbeschränkte Einwanderungsrate m wie folgt gegeben ist:

$$\dot{L} \equiv (n - d + m) L. \quad (3.8)$$

Die Bevölkerung ist stabil ($\dot{L} = 0$), wenn für $n \neq d$ gilt: $m = d - n$. Die Voraussetzung dafür ist, daß die staatlichen Autoritäten stets in der Lage sind, die Einwanderungsrate in entsprechender Weise festzulegen. In dem Zusammenhang werden wir stets annehmen, daß Einwanderung nicht die Pro-Kopf-Ausstattung mit Kapitalgütern verändert. Das bedeutet, daß die Einwanderer in allen behandelten Modellen ohne privates physisches Kapital (personenungebundenes Kapital) einwandern. Im Humankapitalmodell verfügen die Einwanderer per Annahme über eine durchschnittliche Humankapitalausstattung (personengebundenes Kapital).

Falls aus institutionellen oder prinzipiellen Gründen keine Einwanderung ($m = 0$) möglich ist, reduziert sich die Bewegungsgleichung für den Bevölkerungsbestand wie folgt:

$$\dot{L} \equiv (n - d) L. \quad (3.9)$$

Die Bevölkerung kann dann nur stabil sein, wenn $n = d$ erfüllt ist. Falls

keine Politik der Geburtenkontrolle¹¹ implementierbar ist, so ist $n = d$ nur möglich, wenn für eine exogen gegebene Mortalitätsrate d die Fertilitätsrate n in entsprechender Weise endogen bestimmt wird.

Wir werden in der vorliegenden Arbeit Abschnitte mit konstanter Population betrachten. Dann gilt definitionsgemäß immer ($\dot{L} = 0$). In den Abschnitten, in denen die Population variabel sein darf, werden wir stets fordern, daß das gleichgewichtige Bevölkerungswachstum durch ($\dot{L} = 0$) gegeben ist¹². Wir werden in diesem Zusammenhang die Bevölkerungsgröße endogen bestimmen. Es handelt sich dabei immer um einen gleichgewichtigen und nicht um einen optimalen Bevölkerungsbestand¹³.

¹¹Siehe zur Problematik der Geburtenkontrolle auch: Leibenstein (1969).

¹²Zur optimalen Wachstumsrate der Bevölkerung, siehe: Samuelson (1975), wie auch: Razin / Ben-Zion (1975).

¹³Zur optimalen Bevölkerungsgröße, siehe: Eckstein / Wolpin (1985).

Kapitel 4

Endogene Fertilität im AK-Modell

4.1 Vorbemerkungen

Das AK-Modell ist ein erster einfacher Versuch, endogenes Wachstum zu modellieren¹. Die zugrundeliegende Kapitalakkumulationsgleichung lautet dabei wie folgt:

$$\dot{K} \equiv AK - C - \sigma K. \quad (4.1)$$

Hierbei ist K der aggregierte Bestand an privatem physischen Kapital. Mit dem Niveauparameter $A > 0$ ergibt sich $Y \equiv AK$ als aggregierter Output. Der Kapitalverschleiß ist durch die Abschreibungsrate $\sigma \geq 0$ gegeben und C ist der aggregierte Konsum.

¹Siehe hierzu: Barro und Sala-i-Martin (1995) sowie Rebelo (1991).

Wir wollen nun die Fertilitätswahl, die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft und die Bevölkerung in dieses Modell einführen. Die Fertilitätswahl erfassen wir in der Nutzenfunktion des repräsentativen Akteurs. Dabei wollen wir annehmen, daß der Nutzen des repräsentativen Akteurs vom Pro-Kopf-Konsum $c \equiv CL^{-1}$ und von der Pro-Kopf-Fertilität $n \equiv NL^{-1}$ abhängt. Dann sei für die individuelle Nutzenfunktion folgende Gestalt angenommen:

$$U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n, \quad (4.2)$$

mit dem Nutzenparameter $\theta \geq 0$. Der repräsentative Akteur hat im folgenden einen unendlich langen Planungshorizont und maximiert den abdiskontierten Nutzenstrom durch geeignete Wahl von c und n :

$$\max_{c,n} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} U(c, n) dt. \quad (4.3)$$

Dabei bezeichnet ρ die Diskontrate und t ist der Zeitindex. Die Ausbildung der Nachkommen reduziert die Möglichkeit in physisches Kapital zu investieren. Wir nehmen an, daß sich die Ausbildungskosten proportional zum Pro-Kopf-Output $y \equiv YL^{-1}$ verhalten und durch $bNy = bnLy = bnY$ gegeben sind. Die Bevölkerung L sei dabei gleich dem Arbeitseinsatz. Wir nehmen also an, daß jedes Bevölkerungsmitglied auch arbeitet. Die zeitliche Entwicklung des Populationsbestandes sei wieder durch $\dot{L} \equiv (n - d + m)L$ gegeben. Dabei ist d die Mortalitätsrate und m die vorzeichenunbeschränkte Einwanderungsrate. Zusätzlich nehmen wir an, daß der Niveauparameter A vom Arbeitseinsatz (Populationsgröße) abhängig ist. Als neue Niveaufunktion unterstellen wir $A(L) \equiv \gamma L^\beta$ mit $\gamma > 0$ und $\beta > 0$. Die neue Akkumulationsgleichung ergibt sich unter Berücksichtigung des Arbeitseinsatzes, der

Ausbildungskosten und der neuen Niveaufunktion wie folgt:

$$\begin{aligned}\dot{K} &\equiv A(L)K - C - bnY - \sigma K, \\ &\equiv \gamma L^\beta K [1 - bn] - C - \sigma K.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Für $b = 0 = \theta$ und $A(L) = \gamma = A$ ergibt sich als Spezialfall² das normale AK-Modell mit einer logarithmischen Nutzenfunktion. Die jeweilige zeitliche Entwicklung der Pro-Kopf-Größen ergibt sich mit $\dot{k} \equiv \dot{K}L^{-1} - k\dot{L}L^{-1}$ sowie $k \equiv KL^{-1}$ und $c \equiv CL^{-1}$ zu:

$$\dot{k} \equiv \gamma L^\beta k [1 - bn] - c - \sigma k - (n - d + m) k.\tag{4.5}$$

Wir wollen nun den Fall des konstanten von dem des variablen Bevölkerungsbestandes unterscheiden und beginnen mit der konstanten Population.

4.2 Das Modell mit konstanter Population

Da in diesem Modell die Fertilitätsrate n endogen bestimmt wird, ist im allgemeinen damit zu rechnen, daß die Fertilität von der Mortalität d abweichen wird ($n \neq d$). Folglich kann dann Einwanderung m benutzt werden, um die Population konstant zu halten. Es muß dann stets $m = d - n$ gelten. Wir wollen annehmen, daß m nicht vorzeichenbeschränkt ist und daß die staatlichen Autoritäten immer in der Lage sind, die Einwanderung in geeigneter Weise festzulegen. Dann können wir den Bevölkerungsbestand auf $L = 1$ normieren und müssen nicht zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Die Niveaufunktion $A(L)$ nimmt dann den konstanten Wert $A(L) = \gamma = A$ an.

²Es gilt: $A(L) = A$ folgt aus $\gamma = A$ und $L = 1$ (normiert).

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und der Kapitalakkumulationsgleichung:

$$\dot{k} \equiv Ak - c - bnAk - \sigma k. \quad (4.6)$$

Wir bilden die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und erhalten daraus die folgenden Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0 && \Rightarrow \lambda = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b A k = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda A - \lambda b n A - \lambda \sigma = \rho \lambda - \dot{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte $x \equiv ck^{-1}$. Aus den Bedingungen $\partial H / \partial c = 0$ sowie $\partial H / \partial n = 0$ folgt für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{Ab}. \quad (4.8)$$

Die Fertilitätsrate hängt positiv von x und θ , sowie negativ von A und b ab. Über das Vorzeichen von $\partial n / \partial \theta$, $\partial n / \partial A$ und $\partial n / \partial b$ auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) kann vorerst keine Aussage getroffen werden, da noch nicht klar ist, inwiefern die Variable x auf dem GGW von θ , A und b abhängt. Für endliche Werte x gilt jedoch: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$ sowie $b \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$.

Die Modelldynamik

Die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ folgt aus $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda}/\lambda = \rho - A + bnA + \sigma$ gegeben. Wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv A - \rho - bnA - \sigma, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv A - x - bnA - \sigma.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$. Dann resultiert:

$$\frac{\dot{x}}{x} \equiv x - \rho \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} \equiv x^2 - \rho x. \quad (4.10)$$

Wir kommen nun zur Betrachtung des gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW). Der GGW sei dadurch definiert, daß der Pro-Kopf-Konsum c und das Pro-Kopf-Kapital k mit jeweils gleicher Rate wachsen.

$$x \equiv \rho \quad \Rightarrow \quad n \equiv \frac{\theta\rho}{Ab}. \quad (4.11)$$

Damit folgt, daß die Fertilitätsrate auf dem GGW positiv von θ und ρ sowie negativ von A und b abhängt. Wir können ferner feststellen, daß das System wegen $\partial(\dot{x}/x)/\partial x \equiv 1 > 0$ instabil ist. Es handelt sich bei der Gleichung (4.10) um eine Differentialgleichung vom Bernoulli-Typ mit der allgemeinen Lösung³:

$$x = \frac{x_0\rho}{x_0 + (\rho - x_0)e^{\rho t}}; \quad x_0 \equiv x(0) \equiv \frac{c(0)}{k(0)} \equiv \frac{c_0}{k_0}. \quad (4.12)$$

³Zur Behandlung von Differentialgleichungen vom Bernoulli-Typ: Siehe Gandolfo (1997).

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei soll uns interessieren, wie die Parameter b und θ die Wachstumsrate beeinflussen und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit positives Gleichgewichtswachstum gewährleistet ist.

Satz 4.1 *Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist unabhängig von b . Sie hängt negativ von θ ab und ist positiv, wenn $A > \sigma + \rho(1 + \theta)$ gilt.*

Beweis: Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist durch $\omega^* = \omega_k = A - x - bnA - \sigma$ gegeben. Die Substitution von x und n ergibt: $\omega^* = A - \rho - \theta\rho - \sigma$. Es resultiert: $\partial\omega^*/\partial b \equiv 0$ und $\partial\omega^*/\partial\theta \equiv -\rho < 0$, sowie: $\omega^* > 0 \Leftrightarrow A > \sigma + \rho(1 + \theta)$. \square

Dieses Resultat erklärt sich daraus, daß die Fertilitätsrate n positiv vom Nutzenparameter θ abhängt. Je höher ferner die Fertilitätsrate ist, umso höher sind auch die Ausbildungskosten. Je höher allerdings die Ausbildungsausgaben sind, umso geringer sind die Investitionen in privates physisches Kapital.

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert wegen $A > \sigma + \rho(1 + \theta) > \rho(1 + \theta)$ die Einhaltung der Budgetbeschränkung der privaten Akteure. Das bedeutet, daß der Output die gesamten Ausgaben (Konsumausgaben zuzüglich Ausbildungsausgaben) decken muß.

4.3 Das Modell mit variabler Population

Wir gehen nun davon aus, daß aus institutionellen Gründen keine Einwanderung $m = 0$ stattfinden kann, wie es auch für die Welt als Ganzes gilt. Wir betrachten also eine Welt mit nur einem Land. Dann gilt für die zeitliche

Entwicklung des Bevölkerungsbestandes $\dot{L} \equiv (n - d)L$ und wir müssen nun zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Im allgemeinen kann nun die Fertilität von der Mortalität abweichen ($n \neq d$) und wir erhalten mit $\dot{L}L^{-1} \equiv (n - d)$ eine weitere Gleichung, welche das dynamische Verhalten unseres Systems beschreibt. Wir werden noch sehen, daß dadurch der Populationsbestand L zu einer modellendogenen Variable wird.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und der Kapitalakkumulationsgleichung:

$$\dot{k} \equiv \gamma L^\beta k - c - bn\gamma L^\beta k - \sigma k - (n - d)k. \quad (4.13)$$

Wir bilden die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und erhalten daraus die folgenden Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0 && \Rightarrow \lambda = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b\gamma L^\beta k - \lambda k = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda\gamma L^\beta - \lambda bn\gamma L^\beta - \lambda\sigma - \lambda n = \rho\lambda - \dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte $x \equiv ck^{-1}$. Aus den Bedingungen $\partial H / \partial c = 0$ sowie $\partial H / \partial n = 0$ folgt für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{1 + b\gamma L^\beta}. \quad (4.15)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) muß stets $n = d$ gelten. In der Ungleichgewichtssituation ist n variabel und hängt positiv von x und

θ , sowie negativ von L und b ab. Wir erhalten wie im Fall der konstanten Population: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Falls die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft verschwindend gering sind ($b \rightarrow 0$), so folgt diesmal allerdings, daß die Fertilitätsrate den endlichen Wert $n = \theta x$ annimmt.

Die Modelldynamik

Die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ folgt aus $\partial H / \partial k = \rho \lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda} / \lambda = \rho - \gamma L^\beta + bn\gamma L^\beta + \sigma + n$ gegeben. Wegen $\dot{\lambda} / \lambda = -\dot{c} / c$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &\equiv \gamma L^\beta - \rho - bn\gamma L^\beta - \sigma - n, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv \gamma L^\beta - x - bn\gamma L^\beta - \sigma - n + d. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$. Dann resultiert unter Einbeziehung der Bevölkerungsentwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &\equiv x - \rho - d, \\ \frac{\dot{L}}{L} &\equiv \frac{\theta x}{1 + b\gamma L^\beta} - d. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Der gleichgewichtige Wachstumspfad sei nun dadurch definiert, daß der Pro-Kopf-Konsum c und das Pro-Kopf-Kapital k mit jeweils gleicher Rate wachsen ($\omega_c = \omega_k$), während die Bevölkerung auf einem konstanten Niveau verharrt. Es gelte also $\dot{L} = 0 = \dot{x}$, so daß sich für die Gleichgewichtswerte folgende Ausdrücke ergeben:

$$x \equiv \rho + d, \quad L \equiv \left[\frac{\theta x - d}{bd\gamma} \right]^{\frac{1}{\beta}} \equiv \left[\frac{\theta\rho + \theta d - d}{bd\gamma} \right]^{\frac{1}{\beta}}. \quad (4.18)$$

Dabei ist der Gleichgewichtswert für den Bevölkerungsbestand L positiv, wenn $\theta > d[\rho + d]^{-1}$ erfüllt ist. Der Wert L hängt ferner positiv von θ und negativ von b ab.

Wir kommen nun zur Budgetbeschränkung der privaten Akteure. Dabei wollen wir Kreditaufnahme ausschließen und müssen daher fordern, daß der Output zu jedem Zeitpunkt die gesamten Ausgaben (Konsumausgaben zuzüglich Ausbildungsausgaben) deckt. In Pro-Kopf-Größen ergibt sich $\gamma L^\beta k \geq c + bn\gamma L^\beta k$ als Budgetbeschränkung für die privaten Akteure. Die Verwendung von $x \equiv ck^{-1}$ ergibt $\gamma L^\beta \geq x + bn\gamma L^\beta$ als Budgetrestriktion. Die Substitution von n , x und L führt nach einigen elementaren Schritten zu der Bedingung:

$$\theta > \frac{d + bd\rho}{(\rho + d)[1 - bd]}, \quad (4.19)$$

sofern $1 - bd > 0$ erfüllt ist. Die Einhaltung der Budgetbeschränkung impliziert die Nichtnegativität des Outputs und damit des Bevölkerungsbestandes⁴.

Wir kommen nun zur Stabilitätsanalyse und können die folgende Behauptung aufstellen:

Satz 4.2 *Das System ist sattelpfadstabil.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts⁵ (\bar{x}, \bar{z}) und bestimmen die Determi-

⁴Es gilt: $(d + bd\rho)[(\rho + d)(1 - bd)]^{-1} > d(\rho + d)^{-1} \Leftrightarrow$
 $(d + bd\rho)(\rho + d) > d(\rho + d)[1 - bd] \Leftrightarrow$
 $d + bd\rho > d(1 - bd).$

⁵Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

nante der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{L} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ L - \bar{L} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & 0 \\ + & - \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (2×2) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2$ und $k = 1, 2$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} j_{11} &= x, \\ j_{12} &= 0, \\ j_{21} &= \frac{\theta L}{1 + b\gamma L^\beta}, \\ j_{22} &= -\frac{\theta x \beta b \gamma L^\beta}{[1 + b\gamma L^\beta]^2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Eine negative Determinante der Jacobi-Matrix ist im (2×2) -Fall notwendig und hinreichend für Sattelpfadstabilität. Wegen $j_{12} = 0$ und $j_{22} < 0$, erhalten wir für die Determinante: $\det(J) = (j_{11})(j_{22}) < 0$. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei soll uns interessieren, wie die Parameter θ und b die Wachstumsrate beeinflussen, und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit positives Gleichgewichtswachstum gewährleistet ist. Die Wachstumsrate ist durch $\omega_k \equiv \gamma L^\beta - x - bn\gamma L^\beta - \sigma - (n - d)$ gegeben. Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) gilt die Bedingung $n = d$, so daß für die Wachstumsrate auf dem GGW folgt:

$$\omega^* \equiv \gamma L^\beta - x - bd\gamma L^\beta - \sigma. \quad (4.22)$$

Wir wissen bereits, daß der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand L positiv von θ abhängt. Wenn θ steigt, dann nimmt der Wert der Niveaufunktion $A(L)$ und damit der Output pro eingesetzter Kapitaleinheit zu; gleichzeitig nehmen die Ausbildungskosten pro eingesetzter Kapitaleinheit zu. Wir werden noch zeigen, daß der Nettoeffekt positiv ist, wenn die Bedingung $1 - bd > 0$ erfüllt ist.

Wir wissen ferner, daß der Wert L im Gleichgewicht negativ von b abhängt. Wenn b steigt, nimmt der Output pro eingesetzter Kapitaleinheit ab. Die Wirkung auf die Ausbildungskosten pro eingesetzter Kapitaleinheit (bnA) sind unklar (b steigt, A sinkt) und damit vorerst auch der Gesamteffekt. Wir können jedoch zeigen, daß der Effekt insgesamt negativ ist, wenn die Nichtnegativitätsbedingung für L gilt.

Satz 4.3 *Die gleichgewichtige Wachstumsrate hängt für $1 - bd > 0$ positiv von θ ab. Sie hängt ferner für $\theta(\rho + d) - d > 0$ negativ von den Ausbildungskosten b ab.*

Beweis: Wir ersetzen hierzu in Gleichung (4.22) die Gleichgewichtswerte x und L und erhalten:

$$\omega^* \equiv \frac{\theta(\rho + d)}{bd} - \frac{d}{bd} - \theta(\rho + d) - \rho - \sigma. \quad (4.23)$$

Es ergibt sich⁶: $\partial\omega^*/\partial\theta > 0$ und $\partial\omega^*/\partial b < 0$. □

Eine Politik, welche die Ausbildungskosten senken kann, wirkt in diesem Modell wachstumsfördernd und erhöht den gleichgewichtigen Bevölkerungsbestand.

⁶Es gilt: $\partial\omega^*/\partial\theta \equiv [\rho + d](bd)^{-1} - [\rho + d] > 0 \Leftrightarrow$
 $[\rho + d] > [\rho + d]bd \Leftrightarrow 1 - bd > 0.$

Sowie: $\partial\omega^*/\partial b \equiv -d[\theta(\rho + d) - d](bd)^{-2} < 0.$

Aus Gleichung (4.23) folgt, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate für $1 - bd > 0$ positiv ist, wenn gilt:

$$\theta > \frac{bd(\rho + \sigma) + d}{(\rho + d)(1 - bd)}. \quad (4.24)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert wieder die Einhaltung der Budgetbeschränkung der privaten Akteure und damit auch die Nichtnegativität des Bevölkerungsbestandes.

4.4 Fazit

Wir haben in diesem Kapitel ein einfaches AK-Modell betrachtet und in diesem Modell die Fertilitätsrate endogen bestimmt. Dabei haben wir den Fall der konstanten Population von dem der variablen Population unterschieden.

Im Modell mit konstanter Bevölkerung haben wir angenommen, daß der Bevölkerungsbestand durch eine geeignete Festlegung der Einwanderungsrate konstant gehalten werden kann. Wir konnten dabei zeigen, daß es einen sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad gibt. Ferner ergab sich, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate unabhängig von den Ausbildungskosten b war. Der Einfluß des Nutzenparameters θ auf die gleichgewichtige Wachstumsrate ergab sich als negativ.

Im Modell mit variabler Population haben wir angenommen, daß keine Einwanderung möglich ist. Somit konnte die Bevölkerung nur bei Übereinstimmung von Fertilitäts- und Mortalitätsrate stabil gehalten werden. In diesem Zusammenhang haben wir die gleichgewichtige Bevölkerungsgröße endogen bestimmt. Es konnte wieder gezeigt werden, daß ein sattelpfadstabiler gleichgewichtiger Wachstumspfad existiert. Der Einfluß des Ausbil-

dungskostenparameters b auf die gleichgewichtige Wachstumsrate war negativ, während sich der Einfluß des Nutzenparameters θ als positiv ergab.

Kapitel 5

Endogene Fertilität in Infrastrukturkapitalmodellen

5.1 Einführung: Modelle mit Infrastrukturkapital

Wir behandeln in diesem Kapitel Modelle, in denen sowohl privates physisches Kapital K als auch öffentliches Infrastrukturkapital G akkumuliert werden kann. Das private Kapital wird durch private Investitionen vermehrt, während das Infrastrukturkapital durch die öffentlichen Ausgaben des Staates gebildet wird. Wir erhalten also zwei Kapitalakkumulationsgleichungen und der Output $Y \equiv Y(K, G)$ sei als Funktion der beiden Bestandsgrößen

K und G angenommen¹. Ansätze mit öffentlichem Kapital² finden sich in Greiner (1996) sowie Greiner und Hanusch (1998). In letzterem hat der Staat die Möglichkeit seine Einnahmen auf öffentliche Investitionen, Sozialtransfers und Investitionszulagen aufzuteilen, so daß für die Akkumulationsgleichungen gilt:

$$\begin{aligned}\dot{K} &\equiv Y - T + S + \Upsilon\dot{K} - C - \sigma K, \\ \dot{G} &\equiv T - S - \Upsilon\dot{K} - \eta G.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Hierbei ist T die Steuerzahlung der Privaten an den Staat, S der Sozialtransfer und Υ die Investitionszulage; der Betrag $\Upsilon\dot{K}$ repräsentiert dann die aggregierte Subventionszahlung für die privaten Investitionen. Der aggregierte Konsum ist durch die Variable C gegeben. Ferner ist $\sigma \geq 0$ die Abschreibungsrate auf physisches Kapital und $\eta \geq 0$ die Abschreibungsrate für das Infrastrukturkapital.

Wir wollen uns nun an diesem Modelle orientieren und vorerst annehmen, daß die Staatsaktivität lediglich darin besteht, mittels Steuereinnahmen in die Infrastruktur zu investieren. Wir setzen also $S = 0 = \Upsilon$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{K} &\equiv Y - T - C - \sigma K, \\ \dot{G} &\equiv T - \eta G.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Es gibt bei dieser Formulierung keine Sozialtransfers des Staates an die privaten Akteure. Folglich ist die Steuerzahlung T in diesem Modell die Net-

¹Ein Modell mit nur einer akkumulierbaren Kapitalgröße K und produktiven öffentlichen Ausgaben findet sich in Barro (1990). Dabei gehen die öffentlichen Ausgaben $G \equiv T \equiv \tau Y$ als Stromgröße mit in die Produktionsfunktion Y ein.

²Zur empirischen Bedeutung von Infrastrukturkapital siehe Pfähler / Hofmann / Bönnte (1996).

toabgabe an den Staat. Ferner nehmen wir an, daß es keinen öffentlichen Konsum gibt. Damit wird die Steuerzahlung in voller Höhe in die Infrastruktur investiert. Das bedeutet, daß wir in diesem Modell von verhältnismäßig geringen Steuersätzen ausgehen müssen. Wir kommen darauf im Rahmen der Modellsimulation noch zurück.

Wir wollen nun die Fertilitätswahl, die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft N und die Bevölkerung L in dieses Modell einführen. Die Fertilitätswahl erfassen wir in der Nutzenfunktion des repräsentativen Akteurs. Dabei wollen wir annehmen, daß der Nutzen des repräsentativen Akteurs vom Pro-Kopf-Konsum $c \equiv CL^{-1}$ und von der Pro-Kopf-Fertilität $n \equiv NL^{-1}$ abhängt. Dann sei für die individuelle Nutzenfunktion folgende Gestalt angenommen:

$$U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n, \quad (5.3)$$

mit dem Nutzenparameter $\theta \geq 0$. Der repräsentative Akteur hat im Folgenden einen unendlich langen Planungshorizont und maximiert den abdiskontierten Nutzenstrom durch geeignete Wahl von c und n :

$$\max_{c, n} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} U(c, n) dt. \quad (5.4)$$

Dabei bezeichnet ρ die Diskontrate, und t ist der Zeitindex. Die Ausbildung der Nachkommen reduziert die Möglichkeit, in physisches Kapital zu investieren. Wir nehmen an, daß sich die Ausbildungskosten proportional zum Pro-Kopf-Output $y \equiv YL^{-1}$ verhalten und durch $bNy = bnLy = bnY$ gegeben sind. Die Bevölkerung L sei dabei gleich dem Arbeitseinsatz. Wir nehmen also an, daß jedes Bevölkerungsmitglied auch arbeitet. Die zeitliche Entwicklung des Populationsbestandes sei wieder durch $\dot{L} \equiv (n - d + m)L$

gegeben. Dabei ist d die Mortalitätsrate und m die vorzeichenunbeschränkte Einwanderungsrate. Wir erhalten für das modifizierte Modell:

$$\begin{aligned}\dot{K} &\equiv (gL)^\alpha K^{1-\alpha} - T - C - bnY - \sigma K, \\ &\equiv (gL)^\alpha K^{1-\alpha} [1 - bn] - T - C - \sigma K.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Hierbei ist $Y \equiv (gL)^\alpha K^{1-\alpha}$ der aggregierte Output. Im Produktionsprozeß bewirkt die Infrastrukturausstattung pro Kopf eine Effizienzsteigerung des Arbeitseinsatzes L in dem Sinne, daß gL den Effektivarbeitseinsatz darstellt. Ferner ist α ein Produktionsparameter. Für $b = 0 = \theta$ und $L = 1$ erhalten wir das Greiner-Hanusch-Modell (mit logarithmischer Nutzenfunktion) ohne Sozialtransfers und Investitionszulagen.

Wir wollen nun annehmen, daß Infrastruktur ein Mischgut ist. Dabei soll bezüglich der Nutzung von Infrastruktur das Prinzip der vollkommenen Nichtausschließbarkeit gelten. Hinsichtlich der Nutzungsrivalität soll von unterschiedlichen Rivalisierungsgraden³ ausgegangen werden. Daraus ergibt sich für die Infrastrukturausstattung pro Kopf:

$$g \equiv GL^{-\pi} \quad \pi \in [0, 1]. \quad (5.6)$$

Es ergeben sich die folgenden Grenzfälle: Für $\pi = 1$ ist $g \equiv GL^{-1}$ und die Nutzung ist vollkommen rivalisierend. Es handelt sich dann bei Infrastruktur um ein Allmendegut. Für $\pi = 0$ ist $g \equiv G$ und die Nutzung ist vollkommen

³Wir betrachten im Kapitel mit Humankapitalmodellen den Fall, daß die zweite akkumulierbare Kapitalgröße ein reines privates Gut darstellt und die Nutzung damit vollkommen rivalisierend ist. Im Kapitel mit Wissenskapitalmodellen haben wir hingegen den Fall des reinen öffentlichen Gutes hinsichtlich der zweiten akkumulierbaren Kapitalgröße, so daß die Nutzung dann vollkommen nichtrivalisierend ist.

nichttrivialisierend. In diesem Fall ist Infrastruktur ein reines öffentliches Gut. Für die zeitliche Entwicklung von g resultiert nun:

$$\dot{g} \equiv \dot{G}L^{-\pi} - \pi g(n - d + m). \quad (5.7)$$

Wir erhalten also für die zeitliche Entwicklung der Kapitalbestände in Pro-Kopf-Größen:

$$\begin{aligned} \dot{k} &\equiv g^\alpha k^{1-\alpha} [1 - bn] - TL^{-1} - c - \sigma k - (n - d + m)k, \\ \dot{g} &\equiv TL^{-\pi} - \eta g - \pi(n - d + m)g. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die in diesem Kapitel vorgestellten Modelle sollen dahingehend überprüft werden, ob ein gleichgewichtiger Wachstumspfad (GGW) existiert, und ob dieser eindeutig ist. Ein GGW sei dadurch gekennzeichnet, daß der Konsum und die Kapitalbestände mit der gleichen Rate wachsen. Die Bevölkerung ist aus definatorischen Gründen konstant. Ferner sollen die Stabilitätseigenschaften der jeweiligen Systeme untersucht werden.

Darüber hinaus ist an eine Simulation der Modelle gedacht, so daß reale Situationen abgebildet werden können. In Simulationsläufen sollen unterschiedliche Politiken, wie zum Beispiel eine Variation der Steuersätze, hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf die Fertilitäts- und Wachstumsrate untersucht werden.

Wir wollen nun den Fall des konstanten von dem des variablen Bevölkerungsbestandes unterscheiden und beginnen mit der konstanten Population.

5.2 Das Modell mit konstanter Population

Da in diesem Modell die Fertilitätsrate n endogen bestimmt wird, ist im allgemeinen damit zu rechnen, daß die Fertilität von der Mortalität d abweichen wird ($n \neq d$). Folglich kann dann Einwanderung m benutzt werden, um die Population konstant zu halten. Es muß dann stets $m = d - n$ gelten. Wir wollen annehmen, daß m nicht vorzeichenbeschränkt ist, und daß die staatlichen Autoritäten immer in der Lage sind, die Einwanderung in geeigneter Weise festzulegen. Dann können wir den Bevölkerungsbestand auf $L = 1$ normieren und müssen nicht zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Für die zeitliche Entwicklung des physischen Kapitals k und des Infrastrukturkapitals g resultiert schließlich:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv g^\alpha k^{1-\alpha} [1 - bn] - T - c - \sigma k, \\ \dot{g} &\equiv T - \eta g.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Wir wollen nun verschiedene Steuerregime unterscheiden. Wir behandeln dabei den Fall der Einkommensteuer, der Ausgabensteuer und der Pauschsteuer. Wir starten mit dem Einkommensteuersystem.

5.2.1 Das Modell mit Einkommensteuer

Die Bemessungsgrundlage für die Steuer ist der Output und wir erhalten für das aggregierte Steueraufkommen $T \equiv \tau (gL)^\alpha K^{1-\alpha} \equiv \tau g^\alpha k^{1-\alpha} L$. Mit $L = 1$ (normiert) folgt $T \equiv \tau g^\alpha k^{1-\alpha}$. Dabei ist $\tau \in (0, 1)$ der Einkommensteuersatz.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und den folgenden beiden Kapitalakkumulationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv g^\alpha k^{1-\alpha} (1 - \tau - bn) - c - \sigma k, \\ \dot{g} &\equiv \tau g^\alpha k^{1-\alpha} - \eta g.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Wir betrachten nun den kompetitiven Fall und bilden hierzu die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$. Wir erhalten daraus die folgenden Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b g^\alpha k^{1-\alpha} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda (1 - \alpha) g^\alpha k^{-\alpha} [1 - \tau - bn] - \lambda \sigma = \rho \lambda - \dot{\lambda},\end{aligned}\quad (5.11)$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Aus den Bedingungen $\partial H / \partial c = 0$ sowie $\partial H / \partial n = 0$ folgt für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{bz^\alpha}.\quad (5.12)$$

Die Fertilitätsrate hängt positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Über das Vorzeichen von $\partial n / \partial \theta$ und $\partial n / \partial b$ auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) kann vorerst keine Aussage getroffen werden, da noch nicht klar ist, inwiefern die Variablen x und z auf dem GGW von θ und b abhängen. Wir kommen darauf im Rahmen der Modellsimulation noch zurück. Für endliche Werte x und z gilt jedoch: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$ sowie $b \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$.

Die Modelldynamik

Die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ folgt aus $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda}/\lambda = \rho + \sigma - (1 - \alpha) z^\alpha (1 - \tau - bn)$ gegeben. Wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha) z^\alpha [1 - \tau - bn] - \rho - \sigma, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv z^\alpha [1 - \tau - bn] - x - \sigma, \\ \frac{\dot{g}}{g} &\equiv \tau z^{\alpha-1} - \eta.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Dann hat das resultierende dynamische System für $n = \theta x/bz^\alpha$ die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv x(1 + \alpha\theta) - \rho - \alpha z^\alpha (1 - \tau), \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \tau z^{\alpha-1} + \sigma - \eta + x(1 + \theta) - z^\alpha (1 - \tau).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Wir kommen nun zur Betrachtung des gleichgewichtigen Wachstumspfades und können die folgende Behauptung aufstellen:

Satz 5.1 *Das System besitzt für $\alpha \in (0, 1)$ einen eindeutigen gleichgewichtigen Wachstumspfad.*

Beweis: Die Gleichung $(\dot{x}/x) = 0$ ist für

$$x = \frac{\rho + \alpha z^\alpha (1 - \tau)}{1 + \alpha\theta}\tag{5.15}$$

erfüllt und x ist für $z > 0$ positiv. Es bleibt noch zu zeigen, daß $(\dot{z}/z) = 0$ für $z \in (0, +\infty)$ eine Lösung besitzt. Dazu setzen wir den Gleichgewichtswert für x in $(\dot{z}/z) = 0$ ein und erhalten:

$$\frac{\dot{z}}{z} \equiv \tau z^{\alpha-1} - z^\alpha (1 - \tau) \psi + \sigma - \eta + (1 + \theta) q\rho,\tag{5.16}$$

mit $\psi \equiv 1 - (1 + \theta) \alpha q$ und $q \equiv (1 + \alpha \theta)^{-1}$. Es zeigt sich, daß wegen $\psi > 0$ die Funktionswerte für sehr kleine z gegen $+\infty$ und für sehr große z gegen $-\infty$ streben. Folglich gilt:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = -\infty. \quad (5.17)$$

Die Funktion ist stetig und streng monoton fallend, denn es gilt:

$$\frac{\partial (\dot{z}/z)}{\partial z} \equiv (\alpha - 1) \tau z^{\alpha-2} - \alpha z^{\alpha-1} (1 - \tau) \psi < 0. \quad (5.18)$$

Es ergibt sich, daß die Funktion $f(z) \equiv (\dot{z}/z)$ für $z \in (0, +\infty)$ die z -Achse schneiden muß, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Wir kommen nun zur Stabilitätsanalyse und können die folgende Behauptung aufstellen:

Satz 5.2 *Das System ist für $\alpha \in (0, 1)$ sattelpfadstabil.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts⁴ (\bar{x}, \bar{z}) und bestimmen die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (2×2) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2$ und $k = 1, 2$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$j_{11} = 2x(1 + \alpha\theta) - \rho - \alpha z^\alpha (1 - \tau) = x(1 + \alpha\theta),$$

⁴Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

$$\begin{aligned}
j_{12} &= -\alpha^2 z^{\alpha-1} (1 - \tau) x, \\
j_{21} &= z (1 + \theta), \\
j_{22} &= \alpha \tau z^{\alpha-1} - (\alpha + 1) z^\alpha (1 - \tau) + x (1 + \theta) + \sigma - \eta, \\
&= \tau z^{\alpha-1} (\alpha - 1) - \alpha z^\alpha (1 - \tau). \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Eine negative Determinante der Jacobi-Matrix ist im (2×2) -Fall notwendig und hinreichend für Sattelpfadstabilität. Es folgt: $\det(J) < 0$, wenn gilt:

$$\alpha^2 z^\alpha (1 - \tau) (1 + \theta) < (1 + \alpha \theta) [\tau z^{\alpha-1} (1 - \alpha) + \alpha z^\alpha (1 - \tau)]. \tag{5.21}$$

Wenn $\alpha z^\alpha (1 - \tau) (1 + \theta) \alpha < (1 + \alpha \theta) \alpha z^\alpha (1 - \tau)$ erfüllt ist, dann gilt die obige Ungleichung. Es läßt sich leicht überprüfen, daß dies für $\alpha < 1$ der Fall ist⁵. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten und kommen zu folgender Aussage:

Satz 5.3 *Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist positiv, wenn $x > \frac{\rho + \alpha \sigma}{1 - \alpha}$ gilt.*

Beweis: Die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* ist wie folgt gegeben:

$$\omega^* \equiv z^\alpha (1 - \tau) - z^\alpha b n - x - \sigma. \tag{5.22}$$

Wegen $z^\alpha b n = \theta x$ ist die gleichgewichtige Wachstumsrate positiv, wenn $\alpha z^\alpha (1 - \tau) > x (\alpha + \alpha \theta) + \alpha \sigma$ gilt. Aus der Gleichgewichtsbedingung für

⁵Es gilt: $\alpha z^\alpha (1 - \tau) (1 + \theta) \alpha < (1 + \alpha \theta) \alpha z^\alpha (1 - \tau) \Leftrightarrow$
 $\alpha + \alpha \theta < 1 + \alpha \theta \Leftrightarrow \alpha < 1.$

x folgt $x(1 + \alpha\theta) - \rho = \alpha z^\alpha (1 - \tau)$. Einsetzen und Auflösen nach x ergibt die Behauptung⁶. \square

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert die Einhaltung der Budgetbeschränkung der privaten Akteure. Das bedeutet, daß der Netto-Output (Output abzüglich Steuerlast) die gesamten Ausgaben decken muß.

Die Modellsimulation

Wir gehen bei der Simulation des Modells wie folgt vor. Zuerst legen wir die Basisparameter fest. Anschließend untersuchen wir die Auswirkungen verschiedener Steuersätze auf das System. Dabei interessieren uns besonders die gleichgewichtige Wachstumsrate und die Fertilitätsrate auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad.

Wir starten mit der Basiskonfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,5$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsrate gelte $\sigma = \eta = 0,10$. Die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,025$, und die Ausbildungskosten seien mit $b = 20$ angenommen. Bezüglich der Variation des Steuersatzes τ ergeben sich dann die in Tabelle 5.1 dargestellten Resultate⁷.

⁶Es resultiert: $x(1 + \alpha\theta) - \rho > x(\alpha + \alpha\theta) + \alpha\sigma \Leftrightarrow$
 $x + x\alpha\theta - \rho > x\alpha + x\alpha\theta + \alpha\sigma \Leftrightarrow$
 $x - x\alpha > \rho + \alpha\sigma \Leftrightarrow x > (\rho + \alpha\sigma)[1 - \alpha]^{-1}$.

⁷Diese und alle folgenden Berechnungen wurden mit der Software: Mathematica, Version (3.0) durchgeführt. Siehe auch: Wolfram (1991).

Tabelle 5.1: Variation der Einkommensteuer bei konstanter Population

τ	x	z	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,06	0,21	0,25	1,20	-0,33
0,08	0,23	0,32	1,16	1,39
0,10	0,26	0,39	1,12	2,84
0,12	0,27	0,46	1,09	4,08
0,14	0,29	0,53	1,06	5,15

In der Tabelle 5.1 ist $\tilde{n} \equiv n100$ die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ die Wachstumsrate in Prozent. Es zeigt sich, daß eine Erhöhung des Steuersatzes von 6 auf 14 Prozent sowohl x als auch z erhöht. Dabei nimmt x um etwa 40 Prozent zu, während sich z mehr als verdoppelt. Ferner ergibt sich, daß mit der Wahl des Steuersatzes sowohl die Wachstumsrate als auch die Fertilitätsrate beeinflußt werden kann. Dabei zeigt sich ein gegensätzlicher Verlauf. Ein steigender Steuersatz erhöht die Wachstumsrate und reduziert die Fertilitätsrate.

Eine sinkende Fertilitätsrate impliziert in diesem Modell eine steigende Einwanderungsrate. Bei einer angenommenen Mortalitätsrate von $d = 0,012$ (1,2 Prozent) führt ein Steuersatz von 6 Prozent zu einer Einwanderungsrate von $m = 0$, während ein Steuersatz von 14 Prozent eine Einwanderungsrate von 0,14 Prozent (1,4 Promille) ergibt⁸. Wenn aus bevölkerungspolitischen

⁸Für die Bundesrepublik Deutschland gilt: Eine Einwanderungsrate von einem Promille führt zu einem Einwanderungsvolumen von etwa 80000 Personen.

Gründen mit Hilfe der Steuerpolitik die Fertilitätsrate erhöht werden soll, so ist dies in diesem Modell nur zu Lasten der Wachstumsrate möglich.

Wir wollen nun für einen gegebenen Steuersatz von $\tau = 0,10$ die Ausbildungskosten b variieren. Dabei zeigt sich, daß sowohl x und z als auch die Wachstumsrate ω unverändert bleiben, während sich für die Fertilitätsrate die Veränderungen wie in Tabelle 5.2 ergeben.

Tabelle 5.2: Variation der Ausbildungskosten im Einkommensteuermodell bei konstanter Population

$\tau = 0,10$					
b	18	19	20	21	22
\tilde{n}	1,25	1,18	1,12	1,07	1,02

Es zeigt sich, daß eine Erhöhung der Ausbildungskosten um eine Einheit die Fertilitätsrate zwischen 0,07 und 0,05 Prozentpunkte absinken läßt.

5.2.2 Das Modell mit Ausgabensteuer

Die Bemessungsgrundlage für die Ausgabensteuer ist durch die Gesamtausgaben (also Konsumausgaben zuzüglich den Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft) gegeben. Dann gilt für das aggregierte Steueraufkommen $T \equiv \tau C + \tau b n (gL)^\alpha K^{1-\alpha} \equiv \tau c L + \tau b n g^\alpha k^{1-\alpha} L$. Für $L = 1$ (normiert) folgt dann: $T \equiv \tau c + \tau b n g^\alpha k^{1-\alpha}$. Dabei ist $\tau \in (0,1)$ der Ausgabensteuersatz.

Das Modell

Das Modell besteht wieder aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und den folgenden beiden Kapitalakkumulationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv g^\alpha k^{1-\alpha} - (1 + \tau)c - (1 + \tau)bn g^\alpha k^{1-\alpha} - \sigma k, \\ \dot{g} &\equiv \tau c + \tau bn g^\alpha k^{1-\alpha} - \eta g.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Wir betrachten nun den kompetitiven Fall und bilden hierzu die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$. Wir erhalten daraus die folgenden Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda(1 + \tau) = 0 \quad \Rightarrow \lambda(1 + \tau) = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda(1 + \tau)bn g^\alpha k^{1-\alpha} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda(1 - \alpha)g^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda(1 + \tau)(1 - \alpha)bn g^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda\sigma = \\ &= \rho\lambda - \dot{\lambda},\end{aligned}\tag{5.24}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Aus den Bedingungen $\partial H / \partial c = 0$ sowie $\partial H / \partial n = 0$ folgt für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{(1 + \tau)bz^\alpha}.\tag{5.25}$$

Die Fertilitätsrate hängt wie im Modell mit Einkommensteuer positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Aufgrund der Tatsache, daß wir in diesem Modell die Ausbildungsausgaben für die Nachkommen besteuern, erhöhen sich die tatsächlichen Ausbildungskosten für die privaten Akteure. Es folgt daher, daß n negativ von τ abhängt. Ob auf dem GGW n im Ausgabensteuersystem kleiner oder größer als n im Einkommensteuersystem ist,

kann nicht ohne weiteres beantwortet werden, da auch die jeweiligen Werte für x und z von den jeweiligen Steuersätzen abhängen, wie noch zu sehen sein wird.

Die Modelldynamik

Die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ folgt aus $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda}/\lambda = \rho + \sigma - (1 - \alpha)z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn]$ gegeben. Wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$ folgt dann für die Modelldynamik:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha)z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] - \rho - \sigma, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] - (1 + \tau)x - \sigma, \\ \frac{\dot{g}}{g} &\equiv \tau x z^{-1} + \tau b n z^{\alpha-1} - \eta.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Dann hat das resultierende dynamische System die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv (1 + \tau)x - \rho - \alpha z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn], \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \tau x z^{-1} + \tau b n z^{\alpha-1} - z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] + \\ &\quad (1 + \tau)x + \sigma - \eta.\end{aligned}\tag{5.27}$$

Wir kommen nun zur Betrachtung des gleichgewichtigen Wachstumspfades und können die folgende Behauptung aufstellen:

Satz 5.4 *Das System besitzt einen eindeutigen gleichgewichtigen Wachstumspfad.*

Beweis: Die Gleichung $(\dot{x}/x) = 0$ ist für

$$x = \frac{\rho + \alpha z^\alpha}{1 + \tau + \alpha\theta}\tag{5.28}$$

erfüllt und x ist für $z > 0$ positiv. Es bleibt noch zu zeigen, daß $(\dot{z}/z) = 0$ für $z \in (0, +\infty)$ eine Lösung besitzt. Dazu setzen wir den Gleichgewichtswert für x in $(\dot{z}/z) = 0$ ein und erhalten:

$$\frac{\dot{z}}{z} \equiv R\rho qz^{-1} + R\alpha qz^{\alpha-1} - z^\alpha(1 - R\alpha) - Q, \quad (5.29)$$

mit $R \equiv (1 + \tau + \theta)[1 + \tau + \alpha\theta]^{-1}$ und $Q \equiv \eta - \sigma - R\rho$ sowie $q \equiv \tau(1 + \tau)^{-1}$. Wegen der Gültigkeit von $1 - R\alpha > 0$ resultiert für das Verhalten an den Rändern des zulässigen Definitionsbereiches⁹:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = -\infty. \quad (5.30)$$

Die Funktion ist stetig und streng monoton fallend, denn es gilt:

$$\frac{\partial(\dot{z}/z)}{\partial z} \equiv (\alpha - 1)R\alpha qz^{\alpha-2} - R\rho qz^{-2} - \alpha z^{\alpha-1}(1 - R\alpha) < 0. \quad (5.31)$$

Es ergibt sich, daß die Funktion $f(z) \equiv (\dot{z}/z)$ für $z \in (0, +\infty)$ die z -Achse schneiden muß, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Wir kommen nun zur Stabilitätsanalyse und können die folgende Behauptung aufstellen:

Satz 5.5 *Das System ist sattelpfadstabil.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts¹⁰ (\bar{x}, \bar{z}) und bestimmen die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

⁹Es gilt: $1 - R\alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha(1 + \tau + \theta)[1 + \tau + \alpha\theta]^{-1} \Leftrightarrow 1 + \tau + \alpha\theta > \alpha + \alpha\tau + \alpha\theta \Leftrightarrow 1 + \tau > \alpha(1 + \tau) \Leftrightarrow 1 > \alpha$.

¹⁰Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (2×2) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2$ und $k = 1, 2$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= 2x(1 + \tau + \alpha\theta) - \rho - \alpha z^\alpha = x(1 + \tau + \alpha\theta), \\
 j_{12} &= -\alpha^2 x z^{\alpha-1}, \\
 j_{21} &= (1 + \tau + \theta)[z + q], \\
 j_{22} &= x(1 + \tau + \theta) - \eta + \sigma - (\alpha + 1)z^\alpha \\
 &= -x(1 + \tau + \theta)qz^{-1} - \alpha z^\alpha.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Eine negative Determinante der Jacobi-Matrix ist im (2×2) -Fall notwendig und hinreichend für Sattelpfadstabilität. Es folgt: $\det(J) < 0$, wenn gilt:

$$x(1 + \tau + \alpha\theta)(j_{22}) + x\alpha^2 z^{\alpha-1}(1 + \tau + \theta)[z + q] < 0. \tag{5.34}$$

Division durch x und $(1 + \tau + \alpha\theta)$ ergibt unter Verwendung der Definition für R , daß die Ungleichung erfüllt ist, wenn $\alpha^2 z^{\alpha-1} R[z + q] < -(j_{22})$ gilt. Ersetzen von (j_{22}) führt zu $\alpha^2 R z^\alpha + \alpha^2 R z^{\alpha-1} q < x(1 + \tau + \theta)qz^{-1} + \alpha z^\alpha$. Dies ist der Fall, wenn der folgende paarweise Vergleich erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 R z^\alpha &< \alpha z^\alpha, \\
 \alpha^2 R z^{\alpha-1} q &< x(1 + \tau + \theta)qz^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Die erste Ungleichung ist erfüllt, wenn $\alpha R < 1$ gilt. Dies wurde bereits gezeigt. Die zweite Ungleichung ist erfüllt, wenn nach Substitution von x unter Verwendung von R die Ungleichung $\alpha R \alpha z^\alpha < R\rho + R \alpha z^\alpha$ gilt. Wegen $\alpha R \alpha z^\alpha < R \alpha z^\alpha$ ist das der Fall. \square

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei ist die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* wie folgt gegeben:

$$\omega^* \equiv z^\alpha - z^\alpha (1 + \tau) bn - (1 + \tau) x - \sigma. \quad (5.36)$$

Wegen $z^\alpha (1 + \tau) bn = \theta x$ ist die Wachstumsrate ω^* dann positiv, wenn $z^\alpha > x(1 + \tau + \theta) + \sigma$ gilt. Die Substitution von x führt unter Verwendung von R zu der Ungleichung $z^\alpha > R\rho + \alpha R z^\alpha + \sigma$. Die gleichgewichtige Wachstumsrate ist schließlich positiv, wenn gilt:

$$z > \left[\frac{R\rho + \sigma}{1 - \alpha R} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.37)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert die Einhaltung der Budgetbeschränkung der privaten Akteure. Das bedeutet, daß der Output die gesamten Brutto-Ausgaben (Ausgaben zuzüglich Steuerlast) decken muß.

Die Modellsimulation

Wir starten wieder mit der Basiskonfiguration, und es gelte: Wir nehmen für den Nutzenparameter $\theta = 0,5$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsraten gelte $\sigma = \eta = 0,10$. Die Zeitpräferenzrate sei $\rho = 0,025$, und die Ausbildungskosten seien $b = 20$. Bezüglich der Variation des Steuersatzes τ ergeben sich dann die in Tabelle 5.3 dargestellten Resultate.

Tabelle 5.3: Variation der Ausgabensteuer bei konstanter Population

τ	x	z	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,08	0,20	0,23	1,11	0,09
0,10	0,21	0,27	1,06	1,48
0,12	0,23	0,31	1,02	2,73
0,14	0,24	0,34	0,99	3,86
0,16	0,25	0,38	0,95	4,91

In Tabelle 5.3 ist wieder $\tilde{n} \equiv n100$ die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ die Wachstumsrate in Prozent. Es zeigt sich wieder, daß ein Anstieg des Steuersatzes die Wachstumsrate erhöht und die Fertilitätsrate reduziert. Ferner ergibt sich, daß eine Steuererhöhung, welche die Wachstumsrate von etwa 0 Prozent auf etwa 5 Prozent ansteigen läßt, die Werte für x und z nicht in dem Maße erhöht, wie dies beim Einkommensteuerregime der Fall war.

Wir wollen nun für einen gegebenen Steuersatz von $\tau = 0,12$ die Ausbildungskosten b variieren. Dabei zeigt sich wieder, daß sowohl x und z als auch die Wachstumsrate ω unverändert bleiben, während sich für die Fertilitätsrate die Veränderungen wie in Tabelle 5.4 ergeben.

Tabelle 5.4: Variation der Ausbildungskosten im Ausgabensteuermodell bei konstanter Population

$\tau = 0,12$					
b	18	19	20	21	22
\tilde{n}	1,14	1,08	1,02	0,97	0,93

Es zeigt sich, daß eine Erhöhung der Ausbildungskosten um eine Einheit die Fertilitätsrate zwischen 0,06 und 0,04 Prozentpunkte absinken läßt. Damit verhält sich die Reaktion der Fertilitätsrate auf eine Veränderung der Ausbildungskosten ähnlich wie im Einkommensteuersystem.

5.2.3 Das Modell mit Pauschalsteuer

Die Bemessungsgrundlage für die Pauschalsteuer sind die Akteure selbst. Für $L = 1$ (normiert) ist dann das aggregierte Steueraufkommen gleich der Pro-Kopf-Steuerlast.

Das Modell

Das Modell besteht wieder aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und den folgenden beiden Kapitalakkumulationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{k} &\equiv g^\alpha k^{1-\alpha} - c - bng^\alpha k^{1-\alpha} - T - \sigma k, \\
 &\equiv [1 - bn] g^\alpha k^{1-\alpha} - c - T - \sigma k, \\
 \dot{g} &\equiv T - \eta g.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Wir bilden wieder die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und erhalten bei Betrachtung des kompetitiven Falles die notwendigen Bedingungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0 && \Rightarrow \lambda = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b g^\alpha k^{1-\alpha} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda(1-\alpha)[1-bn]g^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda\sigma = \rho\lambda - \dot{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Aus den Bedingungen $\partial H/\partial c = 0$ sowie $\partial H/\partial n = 0$ folgt für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{bz^\alpha}. \quad (5.40)$$

Die Fertilitätsrate hängt wiederum positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab.

Die Modelldynamik

Die Entwicklung des Schattenpreises λ ergibt sich aus $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda}/\lambda = \rho + \sigma - (1-\alpha)[1-bn]z^\alpha$ gegeben. Wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1-\alpha)[1-bn]z^\alpha - \rho - \sigma, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv [1-bn]z^\alpha - x - \frac{T}{k} - \sigma, \\ \frac{\dot{g}}{g} &\equiv \frac{T}{g} - \eta. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Dann hat das resultierende dynamische System für $n = \theta x [bz^\alpha]^{-1}$ die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &\equiv x(1 + \alpha\theta) + \frac{T}{k} - \rho - \alpha z^\alpha, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv x(1 + \theta) + \frac{T}{g} + \frac{T}{k} + \sigma - \eta - z^\alpha. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Bevor wir fortfahren, müssen wir noch eine Regel finden, nach der die Pauschalsteuer festgesetzt wird. Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad ist $\omega_g = Tg^{-1} - \eta$. Dabei ist η eine Konstante und ω_g ist positiv, wenn $Tg^{-1} > \eta$ erfüllt ist. Da g auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad zunimmt, kann eine konstante gleichgewichtige Wachstumsrate ω_g nur erreicht werden, wenn auch T nach einer bestimmten Regel wächst. Es bieten sich hier verschiedene Steuerregime an, wobei wir annehmen wollen, daß die Steuerfestlegungsregel von den privaten Akteuren nicht antizipiert wird. Das bedeutet, daß die Steuerregel nicht im Optimierungskalkül berücksichtigt wird. Prinzipiell könnte T proportional zu den Modellkomponenten

- Output
- Ausgaben
- Privates physisches Kapital
- Öffentliches Infrastrukturkapital

wachsen. Wir wollen im Folgenden lediglich die ersten beiden Fälle betrachten.

Pauschalsteuer - Teil I

Wir betrachten nun den Fall, daß die Pauschalsteuer proportional zum Output wächst. Es gilt also für das Steueraufkommen: $T \equiv \tau g^\alpha k^{1-\alpha}$, sowie entsprechend $Tg^{-1} \equiv \tau z^{\alpha-1}$ und $Tk^{-1} \equiv \tau z^\alpha$. Ersetzen von T im reduzierten dynamischen System ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv x(1 + \alpha\theta) + z^\alpha(\tau - \alpha) - \rho, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv x(1 + \theta) + \tau z^{\alpha-1} + z^\alpha(\tau - 1) + \sigma - \eta.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Satz 5.6 *Das System besitzt wegen $[(\alpha - \tau)R + \tau - 1] < 0$ einen eindeutigen gleichgewichtigen Wachstumspfad. Dabei ist: $R \equiv (1 + \theta)[1 + \alpha\theta]^{-1}$.*

Beweis: Wir betrachten zuerst die Gleichung $(\dot{x}/x) = 0$ und erhalten als Lösung:

$$x = \frac{\rho + (\alpha - \tau)z^\alpha}{1 + \alpha\theta}.\quad (5.44)$$

Wir kommen nun zu: $(\dot{z}/z) = 0$. Mit $x(1 + \theta) = R\rho + (\alpha - \tau)Rz^\alpha$ und $q \equiv R\rho + \sigma - \eta$ erhalten wir für $(\dot{z}/z) = 0$:

$$\frac{\dot{z}}{z} = q + \tau z^{\alpha-1} + [(\alpha - \tau)R + \tau - 1]z^\alpha.\quad (5.45)$$

Für $[(\alpha - \tau)R + \tau - 1] < 0$ und $z \in (0, +\infty)$ ergibt sich¹¹:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{z}}{z}\right) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{z}}{z}\right) = -\infty.\quad (5.46)$$

Wenn die Funktion nun streng monoton fällt, dann muß aufgrund des stetigen Verlaufs eine Nullstelle existieren. Wir betrachten daher:

$$\frac{\partial(\dot{z}/z)}{\partial z} \equiv \tau(\alpha - 1)z^{\alpha-2} + \alpha[(\alpha - \tau)R + \tau - 1]z^{\alpha-1} < 0.\quad (5.47)$$

¹¹Es gilt: $(\alpha - \tau)R + \tau - 1 < 0 \Leftrightarrow (\alpha - \tau)(1 + \theta) < (1 - \tau)(1 + \alpha\theta) \Leftrightarrow \alpha - \tau + \alpha\theta - \tau\theta < 1 + \alpha\theta - \tau - \tau\alpha\theta \Leftrightarrow \alpha - \tau\theta < 1 - \tau\alpha\theta \Leftrightarrow \tau\alpha\theta - \tau\theta < 1 - \alpha \Leftrightarrow \tau\theta(\alpha - 1) < 1 - \alpha$. Gilt wegen $\alpha < 1$.

Damit ist aufgrund von $[(\alpha - \tau)R + \tau - 1] < 0$ ein gleichgewichtiger Wachstumspfad gegeben. \square

Das System ist sattelpfadstabil. Der Beweis befindet sich im Anhang. Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei ist die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* wie folgt gegeben:

$$\omega^* \equiv z^\alpha - bnz^\alpha - x - \frac{T}{k} - \sigma. \quad (5.48)$$

Mit $bnz^\alpha = \theta x$ und $Tk^{-1} = \tau z^\alpha$ folgt, daß die Wachstumsrate positiv ist, wenn $z^\alpha > x(1 + \theta) + \tau z^\alpha + \sigma$ gilt. Ersetzen von x und Auflösen nach z führt unter Verwendung von R zu:

$$z > \left[\frac{R\rho + \sigma}{1 - \tau - (\alpha - \tau)R} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.49)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert wieder die Einhaltung der Budgetbeschränkung der privaten Akteure.

Wir kommen nun zur Modellsimulation und starten mit der Basiskonfiguration. Wir nehmen für den Nutzenparameter $\theta = 0,5$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsrate gelte $\sigma = \eta = 0,10$. Die Zeitpräferenzrate sei $\rho = 0,025$, und die Ausbildungskosten seien $b = 20$. Bezüglich der Variation des Steuersatzes τ ergeben sich dann die in Tabelle 5.5 dargestellten Resultate.

Tabelle 5.5: Variation der Pauschalsteuer-I bei konstanter Population

τ	x	z	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,06	0,20	0,24	1,15	0,60
0,07	0,21	0,27	1,12	1,75
0,08	0,22	0,31	1,10	2,84
0,09	0,22	0,34	1,07	3,89
0,10	0,23	0,37	1,05	4,89

In der Tabelle 5.5 ist wieder $\tilde{n} \equiv n100$ die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ die Wachstumsrate in Prozent. Es zeigt sich wieder, daß ein Anstieg des Steuersatzes die Wachstumsrate erhöht und die Fertilitätsrate reduziert. Ferner ergibt sich wieder, daß eine Steuererhöhung, welche die Wachstumsrate von etwa 0 Prozent auf etwa 5 Prozent ansteigen läßt, die Werte für x und z nicht in dem Maße erhöht, wie dies beim Einkommensteuerregime der Fall war.

Bei einer Variation der Ausbildungskosten b zeigt sich wieder, daß sowohl x und z als auch die Wachstumsrate ω unverändert bleiben. Ferner verhält sich die Reaktion der Fertilitätsrate auf eine Veränderung der Ausbildungskosten ähnlich wie im Einkommensteuersystem. Wir wollen daher auf eine tabellarische Darstellung verzichten.

Pauschalsteuersystem - Teil II

Wir betrachten nun den zweiten Fall, daß sich die Steuer proportional zu den Ausgaben entwickelt. Dann gilt für das Steueraufkommen: $T \equiv \tau c + \tau b n g^\alpha k^{1-\alpha}$, sowie entsprechend: $T g^{-1} \equiv \tau c k^{-1} k g^{-1} + \tau b n g^{\alpha-1} k^{1-\alpha} \equiv \tau x z^{-1} + \tau b n z^{\alpha-1}$ und $T k^{-1} \equiv \tau c k^{-1} + \tau b n g^\alpha k^{-\alpha} \equiv \tau x + \tau b n z^\alpha$. Für das reduzierte dynamische System resultiert dann:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &\equiv x [1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta] - \rho - \alpha z^\alpha, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv x [1 + \theta + \tau + \tau\theta] + x (1 + \theta) \tau z^{-1} - z^\alpha + \sigma - \eta. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Satz 5.7 *Es sei $R \equiv (1 + \theta + \tau + \tau\theta) [1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta]^{-1}$ definiert. Ferner sei $Q \equiv (1 + \theta) [1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta]^{-1}$ und $q \equiv R\rho + \sigma - \eta$. Dann existiert wegen $\alpha R - 1 < 0$ ein eindeutiger gleichgewichtiger Wachstumspfad.*

Beweis: Wir beginnen mit $(\dot{x}/x) = 0$ und erhalten als Lösung:

$$x = \frac{\rho + \alpha z^\alpha}{1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta}. \quad (5.51)$$

Nun bleibt noch zu zeigen, daß ein $z \in (0, +\infty)$ existiert, so daß $(\dot{z}/z) = 0$ erfüllt ist. Wir substituieren $x [1 + \theta + \tau + \tau\theta]$ durch $R(\rho + \alpha z^\alpha)$, sowie $x(1 + \theta)$ durch $Q(\rho + \alpha z^\alpha)$ und erhalten mit $q \equiv R\rho + \sigma - \eta$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{z}}{z} &= R(\rho + \alpha z^\alpha) + Q(\rho + \alpha z^\alpha) \tau z^{-1} - z^\alpha + \sigma - \eta, \\ &= q + (\alpha R - 1) z^\alpha + Q\rho\tau z^{-1} + Q\tau\alpha z^{\alpha-1}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Wegen $Q > 0$ und $\alpha R - 1 < 0$ resultiert¹²:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = +\infty; \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = -\infty. \quad (5.53)$$

¹²Wir ersetzen R in $\alpha R - 1 < 0$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha\theta + \alpha\tau + \alpha\tau\theta &< 1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta \Leftrightarrow \\ \alpha [1 + \tau + \tau\theta] &< 1 + \tau + \tau\theta \Leftrightarrow \alpha < 1. \end{aligned}$$

Wenn die Funktion nun streng monoton fällt, dann muß aufgrund des stetigen Verlaufs eine Nullstelle existieren. Wir betrachten daher:

$$\frac{\partial(\dot{z}/z)}{\partial z} \equiv \alpha(\alpha R - 1)z^{\alpha-1} + (\alpha - 1)Q\tau\alpha z^{\alpha-2} - Q\rho\tau z^{-2} < 0. \quad (5.54)$$

Damit ist aufgrund der Grenzwerte und des fallenden Verlaufes der Funktion die Existenz einer Nullstelle und damit ein gleichgewichtiger Wachstumspfad gesichert. \square

Das System ist sattelpfadstabil. Der Beweis befindet sich im Anhang. Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei ist die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* wie folgt gegeben:

$$\omega^* \equiv z^\alpha - bnz^\alpha - x - \frac{T}{k} - \sigma. \quad (5.55)$$

Mit $bnz^\alpha = \theta x$ und $Tk^{-1} = \tau x + \tau bnz^\alpha$ folgt, daß die Wachstumsrate positiv ist, wenn $z^\alpha > x[1 + \theta + \tau + \tau\theta] + \sigma$ gilt. Ersetzen von x und Auflösen nach z führt unter Verwendung von R zu:

$$z > \left[\frac{R\rho + \sigma}{1 - \alpha R} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.56)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert wieder die Einhaltung der Budgetbeschränkung der privaten Akteure.

Wir fahren mit der Modellsimulation fort. Für die Basiskonfiguration gilt: Wir nehmen für den Nutzenparameter $\theta = 0,5$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsraten gelte $\sigma = \eta = 0,10$. Die Zeitpräferenzrate sei $\rho = 0,025$, und die Ausbildungskosten seien $b = 20$. Bezüglich der Variation des Steuersatzes τ ergeben sich dann die in Tabelle 5.6 dargestellten Resultate.

Tabelle 5.6: Variation der Pauschalsteuer-II bei konstanter Population

τ	x	z	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,08	0,19	0,23	1,16	0,11
0,10	0,20	0,27	1,13	1,50
0,12	0,22	0,30	1,10	2,76
0,14	0,22	0,34	1,07	3,90
0,16	0,23	0,37	1,05	4,95

In der Tabelle 5.6 ist wieder $\tilde{n} \equiv n100$ die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ die Wachstumsrate in Prozent. Es zeigt sich wieder, daß ein Anstieg des Steuersatzes die Wachstumsrate erhöht und die Fertilitätsrate reduziert. Ferner ergibt sich wieder, daß eine Steuererhöhung, welche die Wachstumsrate von etwa 0 Prozent auf etwa 5 Prozent ansteigen läßt, die Werte für x und z nicht in dem Maße erhöht, wie dies beim Einkommensteuerregime der Fall war.

Bei einer Variation der Ausbildungskosten b zeigt sich wieder, daß sowohl x und z als auch die Wachstumsrate ω unverändert bleiben. Ferner verhält sich die Reaktion der Fertilitätsrate auf eine Veränderung der Ausbildungskosten ähnlich wie im Einkommensteuersystem. Wir wollen daher wieder auf eine tabellarische Darstellung verzichten.

5.2.4 Vergleich

Wir wollen nun die verschiedenen Steuersysteme miteinander vergleichen. Dabei soll uns die Frage interessieren, ob die Steuersysteme für vorgegebene (bzw. ähnliche) Fertilitätsraten unterschiedliche Wachstumsraten erzeugen, und welche Reihenfolge sich dann gegebenenfalls ergibt. Der Vergleich ist bei vier verschiedenen Steuersystemen bereits dann vollständig, wenn wir drei Systeme paarweise miteinander vergleichen. Wir wollen die folgenden Vergleiche betrachten:

- Einkommensteuer versus Pauschalsteuer-I
- Pauschalsteuer-I versus Pauschalsteuer-II
- Pauschalsteuer-II versus Ausgabensteuer

Dabei zeigt sich, daß die beiden Pauschalsteuersysteme sehr ähnliche Resultate liefern, so daß wir uns auf die verbleibenden beiden Vergleiche beschränken können. Im Folgenden gilt wieder: $\tilde{n} \equiv n100$ ist die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ ist die Wachstumsrate in Prozent. Wir starten mit dem Vergleich des Einkommensteuersystems (E-Steuer) und des Pauschalsteuer-I-Systems (P-Steuer-I) in Tabelle 5.7.

Tabelle 5.7: Vergleich Einkommensteuer versus Pauschalsteuer-I bei konstanter Population

E-Steuer			P-Steuer-I		
τ	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$	τ	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,090	1,14	2,14	0,065	1,14	1,19
0,100	1,12	2,84	0,070	1,12	1,75
0,115	1,10	3,78	0,080	1,10	2,84
0,130	1,08	4,63	0,0875	1,08	3,63
0,140	1,06	5,15	0,095	1,06	4,40

Die Fertilitätsrate und die Wachstumsrate sind in Tabelle 5.7 jeweils auf zwei Stellen gerundet. Damit sind die resultierenden Fertilitätsraten unter den beiden Steuerregimen für vorgegebene Steuersätze nur ungefähr gleich. Dennoch läßt sich erkennen, daß das Einkommensteuersystem bei etwa gleichen Fertilitätsraten eine Wachstumsrate liefert, die im Durchschnitt etwa einen Prozentpunkt oberhalb der entsprechenden Wachstumsrate des Pauschalsteuer-I-Systems liegt.

Da in beiden Steuersystemen steigende Steuersätze im relevanten Bereich mit steigenden Wachstumsraten verbunden sind, gilt offenbar, daß sich eine gegebene Fertilitätsrate im Einkommensteuersystem mit einem vergleichsweise wachstumsfreundlicheren Steuersatz erzeugen läßt. Wenn man also aus demografischen Gründen die Fertilitätsrate fixieren möchte, dann ist unter Wachstumsgesichtspunkten das Einkommensteuersystem dem Pauschalsteuer-

I-System vorzuziehen. Wir kommen nun zum Vergleich des Pauschalsteuer-II-Systems (P-Steuer-II) mit dem Ausgabensteuersystem (A-Steuer) in Tabelle 5.8.

Tabelle 5.8: Vergleich Pauschalsteuer-II versus Ausgabensteuer bei konstanter Population

P-Steuer-II			A-Steuer		
τ	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$	τ	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,095	1,14	1,17	0,0675	1,14	-0,88
0,105	1,12	1,83	0,075	1,12	-0,29
0,120	1,10	2,76	0,085	1,10	0,45
0,135	1,08	3,62	0,090	1,08	0,80
0,150	1,06	4,43	0,100	1,06	1,48

Die Fertilitätsraten sind in Tabelle 5.8 jeweils wieder gerundet und damit nur ungefähr gleich. Es zeigt sich, daß das Pauschalsteuer-II-System bei etwa gleichen Fertilitätsraten eine Wachstumsrate liefert, die im Durchschnitt etwa zwei bis drei Prozentpunkte oberhalb der entsprechenden Wachstumsrate des Ausgabensteuersystems liegt. Offenbar gilt, daß sich eine gegebene Fertilitätsrate im Ausgabensteuersystem nur mit einem vergleichsweise wachstumsunfreundlichen Steuersatz erzeugen läßt. Dieses Ergebnis ist durchaus plausibel, da die Ausgabensteuer die tatsächlichen Ausbildungskosten erhöht und damit in direkter Weise negativ auf die Fertilitätsrate wirkt. Wir wollen nun abschließend die Ergebnisse in Tabelle 5.9 in einer Gesamtübersicht

zusammenfassen.

Tabelle 5.9: Gesamtvergleich der Steuersysteme bei konstanter Population

\tilde{n}	$\tilde{\omega}_{eink}$	$\tilde{\omega}_{pausch-I}$	$\tilde{\omega}_{pausch-II}$	$\tilde{\omega}_{ausg}$
1, 14	2, 14	1, 19	1, 17	-0, 88
1, 12	2, 84	1, 75	1, 83	-0, 29
1, 10	3, 78	2, 84	2, 76	0, 45
1, 08	4, 63	3, 63	3, 62	0, 80
1, 06	5, 15	4, 40	4, 43	1, 48

Wir können feststellen, daß das Einkommensteuersystem für gegebene Fertilitätsraten die vergleichsweise höchsten Wachstumsraten erzeugt, während das Ausgabensteuersystem die vergleichsweise niedrigsten Wachstumsraten generiert. Der Unterschied bei den resultierenden Wachstumsraten liegt immerhin bei etwa drei bis fast vier Prozentpunkten. Offenbar macht sich hier der negative Direkteffekt der Ausgabensteuer auf die Fertilitätsrate doch recht deutlich bemerkbar. Eine gegebene Fertilitätsrate ist unter dem Ausgabensteuersystem scheinbar nur mit einem relativ wachstumsunfreundlichen Steuersatz zu erreichen. Die beiden Pauschalsteuersysteme unterscheiden sich nicht wesentlich und nehmen bezüglich der Wachstumsrate eine mittlere Position ein. Wir erhalten insgesamt für eine gegebene Fertilitätsrate also die folgende Reihenfolge bezüglich der Wachstumsrate:

$$\tilde{\omega}_{eink} > \tilde{\omega}_{pausch-I} \cong \tilde{\omega}_{pausch-II} > \tilde{\omega}_{ausg}. \quad (5.57)$$

5.3 Das Modell mit variabler Population

Wir gehen nun davon aus, daß aus institutionellen Gründen keine Einwanderung $m = 0$ stattfinden kann, wie es auch für die Welt als Ganzes gilt. Wir betrachten also eine Welt mit nur einem Land. Dann gilt für die zeitliche Entwicklung des Bevölkerungsbestandes $\dot{L} \equiv (n - d)L$, und wir müssen nun zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Im allgemeinen kann nun die Fertilität von der Mortalität abweichen ($n \neq d$) und wir erhalten mit $\dot{L}L^{-1} \equiv (n - d)$ eine weitere Gleichung, welche das dynamische Verhalten unseres Systems beschreibt. Wir werden noch sehen, daß dadurch der Populationsbestand L zu einer modell-endogenen Variable wird. Für die zeitliche Entwicklung des physischen Kapitals k und des Infrastrukturkapitals g ergibt sich:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv g^\alpha k^{1-\alpha} [1 - bn] - TL^{-1} - c - \sigma k - (n - d)k, \\ \dot{g} &\equiv TL^{-\pi} - \eta g - \pi(n - d)g.\end{aligned}\tag{5.58}$$

Wir wollen nun wieder verschiedene Steuerregime unterscheiden. Wir behandeln dabei den Fall der Einkommensteuer und den der Ausgabensteuer und verzichten diesmal auf die Betrachtung von Pauschalsteuersystemen. Wir starten mit dem Einkommensteuersystem.

5.3.1 Das Modell mit Einkommensteuer

Die Bemessungsgrundlage für die Steuer ist wieder der Output und wir erhalten für das aggregierte Steueraufkommen $T \equiv \tau (gL)^\alpha K^{1-\alpha} \equiv \tau g^\alpha k^{1-\alpha} L$. Dabei ist $\tau \in (0, 1)$ der Einkommensteuersatz.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$, den beiden Kapitalakkumulationsgleichungen und der Gleichung für die Bevölkerungsentwicklung:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv (1 - \tau - bn) g^\alpha k^{1-\alpha} - c - \sigma k - (n - d) k, \\ \dot{g} &\equiv \tau g^\alpha k^{1-\alpha} L^{1-\pi} - \eta g - \pi g (n - d), \\ \dot{L} &\equiv (n - d) L.\end{aligned}\tag{5.59}$$

Wir betrachten wieder den kompetitiven Fall und bilden die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$. Dann erhalten wir die folgenden Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b g^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda k = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda(1 - \alpha) g^\alpha k^{-\alpha} [1 - \tau - bn] - \lambda \sigma - \lambda(n - d) = \\ &= \rho \lambda - \dot{\lambda},\end{aligned}\tag{5.60}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Aus den Bedingungen $\partial H / \partial c = 0$ sowie $\partial H / \partial n = 0$ folgt für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{1 + bz^\alpha}.\tag{5.61}$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) muß stets $n = d$ gelten. In der Ungleichgewichtssituation ist n variabel und hängt positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Wir erhalten wie im Fall der konstanten

Population: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Falls die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft verschwindend gering sind ($b \rightarrow 0$), so folgt diesmal allerdings, daß die Fertilitätsrate den endlichen Wert $n = \theta x$ annimmt.

Wir kommen nun zur Budgetbeschränkung der privaten Akteure. Dabei wollen wir Kreditaufnahme ausschließen und müssen daher fordern, daß der Netto-Output (das ist der Output abzüglich der Steuerlast) zu jedem Zeitpunkt die gesamten Ausgaben deckt. In Pro-Kopf-Größen ergibt sich als Budgetbeschränkung für die privaten Akteure:

$$c + bny \leq (1 - \tau) y. \quad (5.62)$$

Unter Verwendung der Optimalitätsbedingung für n resultiert, daß die Beschränkung erfüllt ist, wenn gilt:

$$x \leq \left[\frac{1 - \tau}{1 + \theta} \right] z^\alpha. \quad (5.63)$$

Die Modelldynamik

Die Entwicklung des Schattenpreises λ ergibt sich aus $\partial H / \partial k = \rho \lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda} / \lambda = \rho + \sigma - (1 - \alpha) z^\alpha [1 - \tau - bn] + (n - d)$ gegeben. Wir erhalten schließlich wegen $\dot{\lambda} / \lambda = -\dot{c} / c$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha) z^\alpha [1 - \tau - bn] - \rho - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv [1 - \tau - bn] z^\alpha - x - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{g}}{g} &\equiv \tau z^{\alpha-1} L^{1-\pi} - \eta - \pi (n - d). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Wir bestimmen: $\dot{x}/x \equiv \dot{c}/c - \dot{k}/k$ und $\dot{z}/z \equiv \dot{g}/g - \dot{k}/k$ unter Verwendung von $\theta x = n + nbz^\alpha$. Dann hat das resultierende

dynamische System mit Berücksichtigung des Bevölkerungswachstums die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv x - \rho - \alpha z^\alpha (1 - \tau - bn), \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \tau z^{\alpha-1} L^{1-\pi} - z^\alpha (1 - \tau) + \Omega + (1 + \theta)x - \pi n, \\ \frac{\dot{L}}{L} &\equiv \frac{\theta x}{1 + bz^\alpha} - d,\end{aligned}\tag{5.65}$$

mit $\Omega \equiv \sigma - \eta - (1 - \pi)d - \pi n$. Der gleichgewichtige Wachstumspfad sei dadurch definiert, daß c , k und g mit der gleichen Rate wachsen, während die Bevölkerung nicht wachsen soll. Das bedeutet, daß $\dot{L} = \dot{x} = \dot{z} = 0$ erfüllt sein muß. Die resultierenden Werte für z , x und L lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}z &\equiv \left[\frac{d - \theta\rho}{\alpha\theta(1 - \tau - bd) - bd} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x &\equiv \left[\frac{d(1 + bz^\alpha)}{\theta} \right], \\ L &\equiv \left[\frac{(\omega^* + \eta) z^{1-\alpha}}{\tau} \right]^{\frac{1}{1-\pi}},\end{aligned}\tag{5.66}$$

mit: $\omega^* \equiv z^\alpha (1 - \tau - bd) - x - \sigma$. Es wird sich noch zeigen, daß aus Stabilitätsgründen $\theta\alpha(1 - \tau - bd) < bd$ gelten muß. Daher muß wegen der Nichtnegativität von z auch $d < \theta\rho$ erfüllt sein. Wir fahren nun mit der Stabilitätsanalyse fort:

Satz 5.8 *Das System ist sattelpfadstabil, wenn $\theta\alpha(1 - \tau bd) < db$ und $\rho + f(\pi) < (1 - \alpha)[\omega^* + \eta]$ erfüllt sind.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts¹³ $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{L})$ und bestimmen die Deter-

¹³Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

minante und die Spur der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{L} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \\ L - \bar{L} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - & 0 \\ ? & ? & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (3×3) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} j_{11} &= x + \alpha b d z^\alpha, \\ j_{12} &= -x \alpha^2 z^{\alpha-1} \left[1 - \tau - b d + \frac{z^\alpha b^2 d^2}{\theta x} \right], \\ j_{13} &= 0, \\ \\ j_{21} &= (1 + \theta) z - \frac{\pi z d}{x}, \\ j_{22} &= (\alpha - 1) \tau z^{\alpha-1} L^{1-\pi} - \alpha z^\alpha (1 - \tau) + \frac{\pi \alpha z^\alpha b d^2}{\theta x}, \\ j_{23} &= (1 - \pi) \tau z^\alpha L^{-\pi}, \\ \\ j_{31} &= \frac{L d}{x}, \\ j_{32} &= -\frac{\alpha z^{\alpha-1} b d^2 L}{\theta x}, \\ j_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Im (3×3) - Fall stellt eine positive Determinante in Kombination mit einer negativen Spur Sattelpfadstabilität sicher. Der Sattelpfad ist dann eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit¹⁴. Wir beginnen mit der Determinante und

¹⁴Siehe hierzu Wirl (1997), sowie den Anhang in dieser Arbeit.

erhalten $\det(J) = -(j_{23}) [(j_{11})(j_{32}) - (j_{31})(j_{12})]$. Wegen $(j_{23}) > 0$ ist die Determinante positiv, wenn $(j_{11})(j_{32}) < (j_{31})(j_{12})$ erfüllt ist. Einsetzen und Umformen führt nach einigen elementaren Schritten zu:

$$\theta\alpha(1 - \tau - bd) < bd. \quad (5.69)$$

Der obige Ausdruck repräsentiert den Nenner von z^α . Damit die Nichtnegativitätsbedingung für z eingehalten werden kann, muß zusätzlich $d < \theta\rho$ gelten. Wir wollen nun noch die Stabilitätsuntersuchung mit der Betrachtung der Spur $sp(J) = (j_{11}) + (j_{22})$ fortsetzen. Einsetzen und Umformen ergibt:

$$sp(J) = x - \alpha z^\alpha [1 - \tau - bd] + \frac{\pi\alpha z^\alpha bd^2}{\theta x} + (\alpha - 1)\tau z^{\alpha-1}L^{1-\pi}. \quad (5.70)$$

Im Gleichgewicht gilt $\rho = x - \alpha z^\alpha [1 - \tau - bd]$ sowie $\tau z^{\alpha-1}L^{1-\pi} = \omega^* + \eta$. Ferner gilt: $\theta x = d(1 + bz^\alpha)$. Es resultiert schließlich, daß die Spur negativ ist, wenn gilt:

$$\rho + f(\pi) < (1 - \alpha)[\omega^* + \eta]; \quad f(\pi) \equiv \frac{\pi\alpha dbz^\alpha}{1 + bz^\alpha}. \quad (5.71)$$

Dabei gilt die Abschätzung $f(\pi) < \pi\alpha d$. Die Spur ist also negativ, wenn $\rho + \pi\alpha d < (1 - \alpha)[\omega^* + \eta]$ gilt. Wenn $\rho < (1 - \alpha)\eta$ erfüllt ist, und ferner die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* positiv ist, so ist die obige Bedingung für hinreichend kleines π stets erfüllt. Damit stellt die Kombination aus positiver Determinante und negativer Spur die Existenz zweier negativer Eigenwerte sicher. \square

Steuerpolitik und Wachstumsrate

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei ist die gleichgewichtige Wachstumsrate durch $\omega^* = (1 - \alpha)z^\alpha [1 - \tau - bd] - \rho - \sigma$ gegeben. Eine notwendige

Bedingung für positives Wachstum ist durch $1 - \tau - bd > 0 \Leftrightarrow \tau < 1 - bd$ gegeben. Wir haben folglich mit $\tau_{o(1)} = 1 - bd$ bereits einen ersten Ausdruck für die Steuerobergrenze τ_o . Wir kommen später noch darauf zurück. Auflösen nach z ergibt, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate positiv ist, wenn gilt:

$$z > \left[\frac{\rho + \sigma}{(1 - \alpha)(1 - \tau - bd)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.72)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert die Einhaltung der oben behandelten Budgetbeschränkung. Ferner können wir feststellen, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* eine Funktion des Steuersatzes τ ist, so daß gilt: $\omega^* \equiv \omega^*(\tau)$. Wir wollen daher den Steuersatz τ bestimmen, der die gleichgewichtige Wachstumsrate maximiert und erhalten:

Satz 5.9 *Der Steuersatz $\tau^* = a + \epsilon$ mit $a \equiv 1 - bd - bd(\theta\alpha)^{-1}$ maximiert die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* , falls $a > 0$ erfüllt ist. Dabei gilt: $\epsilon > 0$ und $\epsilon \cong 0$.*

Beweis: Wir betrachten hierzu die gleichgewichtige Wachstumsrate $\omega^* = (1 - \alpha)z^\alpha [1 - \tau - bd] - \rho - \sigma$. Wir substituieren den Gleichgewichtswert z und können nach einigen Umformungen feststellen, daß die Maximierung von ω^* äquivalent zur Maximierung von $\hat{\omega}(\tau) \equiv (q_1 - \tau)[\alpha\theta\tau - q_2]^{-1}$ ist. Dabei ist $q_1 \equiv 1 - bd$ und $q_2 \equiv \alpha\theta - \alpha\theta bd - bd$. Wir betrachten nun die Reaktion von $\hat{\omega}$ auf die Variation des Steuersatzes τ und erhalten:

$$\frac{\partial \hat{\omega}(\tau)}{\partial \tau} \equiv -\frac{bd}{(\alpha\theta\tau - q_2)^2} < 0. \quad (5.73)$$

Es zeigt sich, daß τ so niedrig wie möglich gewählt werden sollte. Die untere Schranke für τ ergibt sich aus der Stabilitätsbedingung $\theta\alpha(1 - \tau - bd) < bd$.

Umstellen nach τ ergibt, daß $\tau > 1 - bd - bd(\theta\alpha)^{-1}$ gelten muß, woraus die Behauptung folgt. \square

Es sei noch erwähnt, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate für $\tau = a$ gegen $+\infty$ strebt. Dies ist natürlich kein realistisches Resultat. Es ist daher im Rahmen von Politikanalysen erforderlich, den Bereich der frei wählbaren Steuersätze so einzuschränken, daß er mit realistischen Wachstumsraten korrespondiert. Ferner ist für $a < 0$ der Steuersatz $\tau = 0$ ein Wachstumsratenmaximierer. Dies ist ebenfalls kein realitätsnahes Ergebnis, da Steuersätze von Null nicht praxisrelevant sind. Darüberhinaus ergibt sich, daß in diesem Fall der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand L gegen $+\infty$ streben würde. Für den Fall $a < 0$ wäre daher die Annahme einer institutionell gegebenen Steuersatzuntergrenze τ_u sinnvoll.

Wir kommen nun zu den steuerpolitischen Spielräumen des Staates. Diese sind durch das offene Intervall (τ_u, τ_o) gegeben. Dabei ist die Untergrenze bereits ermittelt. Zur Bestimmung der Obergrenze betrachten wir erneut die Bedingung $\omega^* > 0$ und ersetzen in Gleichung (5.72) den Gleichgewichtswert z . Wir lösen nach τ auf und erhalten als Ergebnis $\tau_{o(2)} = 1 - bd - Q_2 Q_1^{-1} = \tau_{o(1)} - Q_2 Q_1^{-1}$ mit $Q_1 \equiv \theta\rho + \sigma\alpha\theta + (\alpha - 1)d$ und $Q_2 \equiv (\rho + \sigma)db > 0$. Dabei ist Q_1 wegen $\theta\rho > d$ positiv. Ferner können wir feststellen, daß $\tau_{o(2)} < \tau_{o(1)}$ gilt. Damit ist $\tau_o = \tau_{o(2)}$ die bindende Steuerobergrenze und der steuerpolitische Spielraum (τ_u, τ_o) des Staates ist wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned}\tau_u &= 1 - bd - \frac{bd}{\alpha\theta}, \\ \tau_o &= 1 - bd - \frac{Q_2}{Q_1}.\end{aligned}\tag{5.74}$$

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß die Menge (τ_u, τ_o) nicht leer ist. Das ist der Fall, wenn $1 - bd - bd(\alpha\theta)^{-1} < 1 - bd - Q_2Q_1^{-1}$ erfüllt ist. Die Substitution von Q_1 und Q_2 ergibt nach einigen Umformungen, daß die Existenz eines steuerpolitischen Spielraumes wegen $\theta\rho > d$ gesichert ist.

Die Modellsimulation

Wir gehen bei der Simulation des Modells wie folgt vor. Zuerst legen wir die Basisparameter fest. Dann ermitteln wir den Bereich (τ_u, τ_o) , der für die Steuerpolitik des Staates relevant ist. Anschließend untersuchen wir die Auswirkungen verschiedener Steuersätze auf das System. Dabei interessieren uns besonders die gleichgewichtige Wachstumsrate und der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand.

Wir starten mit der Basiskonfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,5$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsrate gelte $\sigma = \eta = 0,10$ und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,025$ gegeben. Ferner nehmen wir die Mortalitätsrate mit $d = 0,012$ an. Der Rivalisierungsgrad der Nutzung des öffentlichen Infrastrukturkapitals sei durch $\pi = 0,5$ gegeben. Der Ausbildungsparameter b liefert dann in Tabelle 5.10 für unterschiedliche Werte jeweils verschiedene steuerpolitische Spielräume.

Tabelle 5.10: Steuerpolitische Spielräume im Einkommensteuermodell bei variabler Population

b	τ_u	τ_o
17	0,1160	0,1196
17,5	0,0900	0,0937
18	0,0640	0,0678

Es zeigt sich in Tabelle 5.10, daß steigende Ausbildungskosten b mit sinkenden Steuersätzen verbunden sein müssen. Dabei ergibt sich auch, daß die Steuersätze sehr sensitiv auf eine Veränderung der Ausbildungskosten reagieren. So bewirkt beispielsweise eine Variation der Ausbildungskosten um $\Delta b = 1$ nahezu eine Halbierung (bzw. Verdoppelung) der Steuersätze. Ferner ergibt sich, daß die steuerpolitischen Spielräume des Staates sehr klein sind, wenn

- pos. Gleichgewichtswachstum mit nichtnegativen Gleichgewichtswerten
- Sattelpfadstabilität des Systems

realisiert werden soll. Der steuerpolitische Spielraum des Staates liegt für die angenommenen Ausbildungskosten bei etwa 0,36 bis 0,38 Prozentpunkten. Wir wollen nun im Rahmen dieser Möglichkeiten die Steuersätze variieren, und betrachten hierzu die Tabelle 5.11:

Tabelle 5.11: Variation der Einkommensteuer bei variabler Population

b	τ	x	z	L	$\tilde{\omega}$	$sp(J)$
17	0,1195	0,22	0,29	0,28	0,39	–
	0,1190	0,25	0,38	0,51	2,54	–
	0,1185	0,30	0,51	1,01	5,57	–
17,5	0,0935	0,22	0,29	0,49	0,77	–
	0,0930	0,26	0,38	0,89	2,99	–
	0,0925	0,30	0,51	1,76	6,10	–
18	0,0675	0,23	0,29	1,01	1,15	–
	0,0670	0,26	0,38	1,84	3,43	–
	0,0665	0,31	0,51	3,64	6,63	–

In der Tabelle 5.11 ist $\tilde{\omega} \equiv \omega 100$ die Wachstumsrate in Prozent und $sp(J)$ das Vorzeichen der Spur der Jacobi-Matrix. Es ergibt sich, daß die Spur $sp(J)$ in allen betrachteten Fällen negativ ist, so daß sich stets Sattelpfadstabilität ergibt. Ferner zeigt sich für unterschiedliche Ausbildungskosten b , daß sinkende Steuersätze zu steigenden Werten für x und z führen. Dabei ergibt sich ein relativ stabiles Muster. Scheinbar ergeben ähnlich große Differenzen zwischen Steuerobergrenze und Steuersatz jeweils ähnliche Werte für x und z . Desweiteren gehen sinkende Steuersätze mit steigenden Bevölkerungsbeständen L und steigenden Wachstumsraten einher, wobei sowohl die Bevölkerung als auch das Wachstum auf geringe Steuersatzänderungen sehr sensitiv reagieren. So führt eine Steuersatzänderung von 0,10 Prozentpunkten bereits zu

einer Vervielfachung des gleichgewichtigen Bevölkerungsbestandes.

5.3.2 Das Modell mit Ausgabensteuer

Die Bemessungsgrundlage für die Ausgabensteuer ist durch die Gesamtausgaben (also Konsumausgaben zuzüglich den Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft) gegeben. Dann gilt für das aggregierte Steueraufkommen $T \equiv \tau C + \tau bn (gL)^\alpha K^{1-\alpha} \equiv \tau cL + \tau bng^\alpha k^{1-\alpha}L$. Dabei ist $\tau \in (0, 1)$ der Ausgabensteuersatz.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$, den beiden Kapitalakkumulationsgleichungen und der Gleichung für das Bevölkerungswachstum:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv [1 - (1 + \tau)bn]g^\alpha k^{1-\alpha} - (1 + \tau)c - \sigma k - (n - d)k, \\ \dot{g} &\equiv \tau [c + bng^\alpha k^{1-\alpha}]L^{1-\pi} - \eta g - \pi(n - d)g, \\ \dot{L} &\equiv (n - d)L.\end{aligned}\tag{5.75}$$

Wir betrachten wieder den kompetitiven Fall und bilden die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H(c, n, k) \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und erhalten die Optimalitätsbedingungen wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda(1 + \tau) = 0 \quad \Rightarrow \lambda(1 + \tau) = c^{-1}, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda(1 + \tau)bng^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda k = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda(1 - \alpha)g^\alpha k^{-\alpha} [1 - (1 + \tau)bn] - \lambda\sigma - \lambda(n - d) = \\ &= \rho\lambda - \dot{\lambda},\end{aligned}\tag{5.76}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Dann folgt aus den Bedingungen $\partial H / \partial c = 0$ und $\partial H / \partial n = 0$ für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{1 + (1 + \tau) bz^\alpha}. \quad (5.77)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) muß wieder stets $n = d$ gelten. In der Ungleichgewichtssituation ist n variabel, und die Fertilitätsrate hängt wie im Modell mit Einkommensteuer positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Aufgrund der Tatsache, daß wir in diesem Modell die Ausbildungsausgaben für die Nachkommen besteuern, erhöhen sich die tatsächlichen Ausbildungskosten für die privaten Akteure. Es folgt daher, daß n negativ von τ abhängt. Ob auf dem GGW n im Ausgabensteuersystem kleiner oder größer als n im Einkommensteuersystem ist, kann nicht ohne weiteres beantwortet werden, da auch die jeweiligen Werte für x und z von den jeweiligen Steuersätzen abhängen, wie noch zu sehen sein wird. Wir erhalten wieder: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Sowie $b \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \theta x$.

Wir kommen zur Budgetbeschränkung der privaten Akteure. Da wir Kreditaufnahme wieder ausschließen wollen, muß der Output die gesamten Bruttoausgaben (das sind die Ausgaben zuzüglich der Steuerlast) zu jedem Zeitpunkt decken. In Pro-Kopf-Größen resultiert dann als Budgetbeschränkung:

$$(1 + \tau) c + (1 + \tau) bny \leq y. \quad (5.78)$$

Unter Verwendung der Optimalitätsbedingung für n folgt, daß die Budgetbeschränkung eingehalten wird, wenn gilt:

$$x \leq \frac{z^\alpha}{1 + \tau + \theta}. \quad (5.79)$$

Die Modelldynamik

Die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ ergibt sich aus der Optimalitätsbedingung $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch die Gleichung $\dot{\lambda}/\lambda = \rho + \sigma - (1 - \alpha)z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] + (n - d)$ gegeben. Wir erhalten wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha)z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] - \rho - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] - (1 + \tau)x - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{g}}{g} &\equiv \frac{\tau L^{1-\pi}}{z} [x + bnz^\alpha] - \eta - \pi(n - d).\end{aligned}\quad (5.80)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv gk^{-1}$. Dann hat das resultierende dynamische System unter Berücksichtigung des Bevölkerungswachstums die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv (1 + \tau)x - \rho - \alpha z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn], \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \frac{\tau L^{1-\pi}}{z} [x + bnz^\alpha] - z^\alpha [1 - (1 + \tau)bn] + \\ &\quad (1 + \tau)x + \sigma - \eta + (1 - \pi)[n - d], \\ \frac{\dot{L}}{L} &\equiv \frac{\theta x}{1 + (1 + \tau)bz^\alpha} - d.\end{aligned}\quad (5.81)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gilt wieder $\dot{L} = \dot{x} = \dot{z} = 0$, so daß sich für die Gleichgewichtswerte folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned}z &\equiv \left[\frac{d(1 + \tau) - \rho\theta}{\alpha\theta(1 - (1 + \tau)bd) - (1 + \tau)^2 bd} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x &\equiv \left[\frac{d + (1 + \tau)bdz^\alpha}{\theta} \right], \\ L &\equiv \left[\frac{z(\omega^* + \eta)}{\tau(x + bdz^\alpha)} \right]^{\frac{1}{1-\pi}}.\end{aligned}\quad (5.82)$$

mit: $\omega^* \equiv z^\alpha [1 - (1 + \tau)bd] - (1 + \tau)x - \sigma$. Wie wir noch sehen werden, muß aus Stabilitätsgründen $[1 - (1 + \tau)bd]\alpha\theta < (1 + \tau)^2bd$ gelten. Wegen der Nichtnegativität von z muß dann auch $d(1 + \tau) < \rho\theta$ erfüllt sein. Wir wollen nun mit der Stabilitätsuntersuchung fortfahren:

Satz 5.10 *Das System ist für $[1 - (1 + \tau)bd]\alpha\theta < (1 + \tau)^2bd$ und $\rho + \pi\alpha d < (1 - \alpha)[\omega^* + \eta]$ sattelpfadstabil.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir wieder das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts¹⁵ $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{L})$ und bestimmen die Determinante und die Spur der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{L} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \\ L - \bar{L} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - & 0 \\ ? & ? & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (3×3) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} j_{11} &= (1 + \tau)[x + \alpha bdz^\alpha], \\ j_{12} &= -\alpha^2 x z^{\alpha-1} \left[1 - (1 + \tau)bd + \frac{z^\alpha (1 + \tau)^2 b^2 d}{1 + (1 + \tau)bz^\alpha} \right], \\ j_{13} &= 0, \end{aligned}$$

$$j_{21} = \tau L^{1-\pi} + (1 + \tau + \theta)z - \frac{\pi z \theta}{1 + (1 + \tau)bz^\alpha} + \frac{\tau L^{1-\pi} b z^\alpha \theta}{1 + (1 + \tau)bz^\alpha},$$

¹⁵Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

$$\begin{aligned}
j_{22} &= (1 + \tau + \theta)x - (\alpha + 1)z^\alpha + \sigma - \eta - d + \alpha z^{\alpha-1} \tau L^{1-\pi} bd + \\
&\quad \frac{\pi z d \alpha (1 + \tau) b z^{\alpha-1}}{1 + (1 + \tau) b z^\alpha} - \frac{\tau L^{1-\pi} b d z^\alpha \alpha (1 + \tau) b z^{\alpha-1}}{1 + (1 + \tau) b z^\alpha}, \\
j_{23} &= (1 - \pi) \tau L^{-\pi} [1 + b d z^\alpha], \\
j_{31} &= \frac{\theta L}{1 + (1 + \tau) b z^\alpha}, \\
j_{32} &= -\frac{L \theta x \alpha (1 + \tau) b z^{\alpha-1}}{[1 + (1 + \tau) b z^\alpha]^2}, \\
j_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Im (3×3) - Fall stellt eine positive Determinante in Kombination mit einer negativen Spur Sattelpfadstabilität sicher. Der Sattelpfad ist dann wieder eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit¹⁶. Wir beginnen mit der Determinante und erhalten $\det(J) = -(j_{23}) [(j_{11})(j_{32}) - (j_{31})(j_{12})]$. Wegen $(j_{23}) > 0$ ist die Determinante positiv, wenn $(j_{11})(j_{32}) < (j_{31})(j_{12})$ erfüllt ist. Einsetzen und Umformen führt nach einigen elementaren Schritten zu:

$$\theta < \frac{bd(1 + \tau)^2}{\alpha [1 - (1 + \tau) bd]}. \tag{5.85}$$

Der obige Ausdruck repräsentiert den Nenner von z^α . Damit die Nichtnegativitätsbedingung für z eingehalten werden kann, muß zusätzlich $d(1 + \tau) < \theta\rho$ gelten. Wir wollen nun noch die Stabilitätsuntersuchung mit der Betrachtung der Spur $sp(J) = (j_{11}) + (j_{22})$ fortsetzen. Wir verwenden hierzu einige Bedingungen, die im Gleichgewicht erfüllt sein müssen. Aus $\dot{L}/L = 0$ folgt $\theta x - d = (1 + \tau) b d z^\alpha$. Unter Verwendung dieser Beziehung folgt aus $\dot{z}/z = 0$ die Gleichung $\tau L^{1-\pi} z^{-1} [x + b d z^\alpha] + \sigma - \eta - d = z^\alpha - (1 + \tau + \theta)x$. Aus $\dot{x}/x = 0$ folgt die Bedingung: $(1 + \tau) [x + \alpha b d z^\alpha] = \rho + \alpha z^\alpha$. Aus dem Gleich-

¹⁶Vgl. Wirl (1997), sowie den Anhang dieser Arbeit.

gewichtswert für L ergibt sich $\tau L^{1-\pi} z^{-1} [x + bdz^\alpha] = \omega^* + \eta$. Einsetzen und Umformen ergibt schließlich, daß die Spur negativ ist, wenn gilt:

$$\rho + \frac{\pi \alpha b d z^\alpha}{1 + (1 + \tau) b z^\alpha} + \frac{\alpha \tau L^{1-\pi} b d z^{\alpha-1}}{1 + (1 + \tau) b z^\alpha} < \omega^* + \eta. \quad (5.86)$$

Wir substituieren den Ausdruck $\alpha \tau L^{1-\pi} b d z^{\alpha-1} [1 + (1 + \tau) b z^\alpha]^{-1}$ durch den Term $\alpha \tau L^{1-\pi} b d z^{\alpha-1}$ und addieren zur linken Seite von (5.86) den Ausdruck $\alpha \tau L^{1-\pi} x z^{-1}$ hinzu. Dadurch wird die linke Seite von (5.86) insgesamt größer. Wenn die neue Ungleichung erfüllt ist, dann gilt auch die Ungleichung (5.86). Durch Umformen erhalten wir wegen $\alpha \tau L^{1-\pi} x z^{-1} + \alpha \tau L^{1-\pi} b d z^{\alpha-1} = \alpha \omega^* + \alpha \eta$ schließlich:

$$\rho + f(\pi) < (1 - \alpha) [\omega^* + \eta]; \quad f(\pi) \equiv \frac{\pi \alpha b d z^\alpha}{1 + (1 + \tau) b z^\alpha}. \quad (5.87)$$

Dabei gilt die Abschätzung $f(\pi) < \pi \alpha d$. Die Spur ist also negativ, wenn $\rho + \pi \alpha d < (1 - \alpha) [\omega^* + \eta]$ gilt. Wenn $\rho < (1 - \alpha) \eta$ erfüllt ist und ferner die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* positiv ist, so ist die obige Bedingung für hinreichend kleines π stets erfüllt. Damit stellt die Kombination aus positiver Determinante und negativer Spur die Existenz zweier negativer Eigenwerte sicher. \square

Steuerpolitik und Wachstumsrate

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei ist die gleichgewichtige Wachstumsrate durch $\omega^* = \omega_c = (1 - \alpha) z^\alpha [1 - (1 + \tau) b d] - \rho - \sigma$ gegeben. Eine notwendige Bedingung für positives Wachstum ist durch $1 - b d - \tau b d > 0 \Leftrightarrow \tau < (1 - b d) (b d)^{-1}$ gegeben. Wir haben daher mit $\tau_{o(1)} = (1 - b d) (b d)^{-1}$ eine erste Abschätzung für die Steuerobergrenze τ_o . Eine zweite Abschätzung

für die Steuerobergrenze ergibt sich aus der Nichtnegativität von z . Wir wissen bereits, daß dafür $d(1 + \tau) < \rho\theta \Leftrightarrow \tau < (\rho\theta - d)d^{-1}$ erforderlich ist. Somit lautet die zweite Abschätzung der Steuerobergrenze: $\tau_{o(2)} = (\rho\theta - d)d^{-1}$. Dabei gilt $\tau_{o(2)} < \tau_{o(1)}$, sofern $b\rho\theta < 1$ erfüllt ist, so daß die Grenze $\tau_{o(1)}$ nicht bindend ist¹⁷. Wir kommen auf die Bestimmung der Steuerobergrenze noch zurück und wollen nun eine weitere Bedingung für positives Gleichgewichtswachstum ermitteln. Dazu betrachten wir erneut $\omega^* = \omega_c = (1 - \alpha)z^\alpha [1 - (1 + \tau)bd] - \rho - \sigma > 0$. Auflösen nach z ergibt, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate positiv ist, wenn gilt:

$$z > \left[\frac{\rho + \sigma}{(1 - \alpha)[1 - (1 + \tau)bd]} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.88)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert die Einhaltung der oben behandelten Budgetbeschränkung. Ferner können wir feststellen, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* eine Funktion des Steuersatzes τ ist, so daß gilt: $\omega^* = \omega^*(\tau)$. Wir wollen daher den Steuersatz τ bestimmen, der die gleichgewichtige Wachstumsrate maximiert, und erhalten:

Satz 5.11 *Es sei τ_u die Steueruntergrenze. Dann gilt: der Steuersatz $\tau^* = \tau_u + \epsilon$ maximiert die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* , falls $\tau_u > 0$ erfüllt ist. Dabei ist: $\epsilon > 0$ und $\epsilon \cong 0$.*

Beweis: Wir betrachten hierzu die gleichgewichtige Wachstumsrate $\omega^* = (1 - \alpha)z^\alpha [1 - (1 + \tau)bd] - \rho - \sigma$. Wir substituieren den Gleichgewichtswert z und können nach einigen Umformungen feststellen, daß die Maximierung von ω^* äquivalent zur Maximierung von $\hat{\omega}(\tau) \equiv Q_1 Q_2^{-1}$ ist. Dabei ist

¹⁷Es gilt: $\tau_{o(2)} < \tau_{o(1)} \Leftrightarrow bd(\rho\theta - d) < d(1 - bd) \Leftrightarrow b\rho\theta - bd < 1 - bd \Leftrightarrow b\rho\theta < 1$.

$Q_1 \equiv [q_1 q_2 - q_2 b d \tau + q_1 d \tau - b d^2 \tau^2]$ und $Q_2 \equiv [(q_1 - \tau b d) \alpha \theta - (1 + \tau)^2 b d]$. Hierbei wiederum ist $q_1 \equiv 1 - b d$ und $q_2 \equiv d - \rho \theta$. Wir betrachten nun die Reaktion von $\hat{\omega}$ auf die Variation des Steuersatzes τ und erhalten:

$$\frac{\partial \hat{\omega}(\tau)}{\partial \tau} \equiv [q_1 d - q_2 b d - 2 b d^2 \tau] Q_2^{-1} + [\alpha \theta b d + 2(1 + \tau) b d] Q_1 Q_2^{-2} < 0. \quad (5.89)$$

Die Reaktion ist wegen $[q_1 d - q_2 b d - 2 b d^2 \tau] > 0$, sowie wegen $Q_1 < 0$ und $Q_2 < 0$ negativ¹⁸. Es zeigt sich also, daß τ so niedrig wie möglich gewählt werden sollte. \square

Wir wollen nun eine Abschätzung für die Steueruntergrenze angeben. Die untere Schranke für τ ergibt sich aus der Bedingung $[1 - (1 + \tau) b d] \alpha \theta < (1 + \tau)^2 b d$. Die Ungleichung ist erfüllt, wenn $[1 - (1 + \tau) b d] \alpha \theta < (1 + \tau) b d$ gilt. Wir lösen nach τ auf und erhalten schließlich, daß $\tau > a_1$ mit $a_1 \equiv (\alpha \theta - b d - \alpha \theta b d) [(1 + \alpha \theta) b d]^{-1}$ gelten muß. Hierbei ist a_1 die Abschätzung für die Steueruntergrenze τ_u .

Es sei noch erwähnt, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate für $\tau = \tau_u$ wieder gegen $+\infty$ strebt. Dabei ist $\tau > \tau_u$ bindend, wenn τ_u positiv ist. Die Abschätzung a_1 ist für $\theta > b d [\alpha (1 - b d)]^{-1}$ positiv¹⁹. Ebenfalls ist für $\tau_u < 0$ der Steuersatz $\tau = 0$ ein Wachstumsratenmaximierer. Dies führt wieder dazu, daß dann der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand L gegen $+\infty$ streben würde. Es ergibt sich also wieder die Schlußfolgerung, daß für Politikanalysen die Annahme einer institutionell gegebenen Steuersatzuntergrenze τ_u sinnvoll wäre.

¹⁸Es gilt: $[q_1 d - q_2 b d - 2 b d^2 \tau] > 0 \Leftrightarrow q_1 - b d \tau - b d \tau - q_2 b > 0$. Wegen $q_1 > b d \tau$ ist die Ungleichung erfüllt, wenn $0 > b d \tau + q_2 b$ gilt. Ersetzen von q_2 ergibt: $0 > d(1 + \tau) - \rho \theta$. Diese Bedingung ist erfüllt, denn wir wissen bereits, daß $\rho \theta > d(1 + \tau)$ gelten muß.

¹⁹Es muß gelten: $\alpha \theta > b d + \alpha \theta b d$. Auflösen nach θ ergibt: $\theta > b d [\alpha (1 - b d)]^{-1}$.

Wir kommen nun zu den steuerpolitischen Spielräumen des Staates. Diese sind durch das offene Intervall (τ_u, τ_o) gegeben. Dabei wurde die Untergrenze bereits behandelt und kann durch $\tau_u = \max\{0, a_1\}$ abgeschätzt werden, sofern sie nicht institutionell festgelegt ist. Zur Bestimmung der Obergrenze betrachten wir erneut die Bedingung $\omega^* > 0$ und ersetzen in Gleichung (5.88) den Gleichgewichtswert z . Die resultierende Ungleichung kann jedoch aufgrund der komplexen Struktur nicht ohne Weiteres nach τ aufgelöst werden. Wir können jedoch die folgende Abschätzung für $\tau_{o(3)}$ angeben.

$$a_2 \equiv \frac{q_3(\alpha\theta q_1 - bd) - q_1 q_2}{d[q_1 - q_2 b + q_3(\alpha\theta b + 3b)]}, \quad (5.90)$$

falls $bd^2\tau^2 - q_1 q_2 + q_3(\alpha\theta q_1 - bd) > 0$ gilt²⁰. Dabei ist wie oben im Text $q_1 \equiv 1 - bd$ und $q_2 \equiv d - \rho\theta$; zusätzlich gilt: $q_3 \equiv (\rho + \sigma)(1 - \alpha)^{-1}$. Die Herleitung befindet sich im Anhang zu diesem Kapitel. Der Vergleich von $\tau_{o(3)} \cong a_2$ mit den anderen beiden Steuerobergrenzen $\tau_{o(1)}$ und $\tau_{o(2)}$ ist ebenfalls aufgrund der komplexen Struktur von a_2 nicht ohne Weiteres möglich. Wir wissen aber bereits, daß $\tau_{o(1)}$ nicht bindend ist, und daß $\tau_{o(2)}$ aus der Nichtnegativitätsbedingung für z resultiert. Die Nichtnegativität ist jedoch nur eine notwendige Bedingung für positives Gleichgewichtswachstum. Daraus folgt, daß die hinreichende Bedingung für positives Gleichgewichtswachstum die bindende Steuerobergrenze $\tau_{o(3)} = \tau_o$ liefert. Damit ist der steuerpolitische Spielraum (τ_u, τ_o) wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} \tau_u &= \max\{0, a_1\}, \\ \tau_o &\cong a_2. \end{aligned} \quad (5.91)$$

²⁰Siehe hierzu den Anhang zu diesem Kapitel.

Die Modellsimulation

Wir kommen nun wieder zur Modellsimulation und starten mit der Basis-konfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,6$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsraten gelte $\sigma = \eta = 0,10$, und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,03$ gegeben. Ferner nehmen wir die Mortalitätsrate wieder mit $d = 0,012$ an. Der Rivalisierungsgrad der Nutzung des öffentlichen Infrastrukturkapitals sei wieder durch $\pi = 0,5$ gegeben. Es gilt wieder: Der Ausbildungsparameter b liefert dann für unterschiedliche Werte jeweils verschiedene steuerpolitische Spielräume.

Tabelle 5.12: Steuerpolitische Spielräume im Ausgabensteuermodell bei variabler Population

b	$\tilde{\tau}_u$	$\tilde{\tau}_o$	τ_u	τ_o
17	0,30	0,13	0,1606	0,1770
17,5	0,26	0,12	0,1416	0,1587
18	0,23	0,10	0,1235	0,1410

In der Tabelle 5.12 ist $\tilde{\tau}_u = \max\{0, a_1\} = a_1$ die Abschätzung für die Steueruntergrenze und $\tilde{\tau}_o = a_2$ die Abschätzung für die Steuerobergrenze. Aufgrund dieser Abschätzungen wäre kein steuerpolitischer Spielraum gegeben. Bei genauer Bestimmung der Steueruntergrenze τ_u und der Steuerobergrenze τ_o zeigt sich jedoch, daß ein solcher Spielraum durchaus besteht. Hierbei folgt τ_u aus der Stabilitätsbedingung (5.85) und τ_o aus der Bedingung $\omega^* > 0$

(positives Gleichgewichtswachstum)²¹. Es zeigt sich in Tabelle 5.12 wie im Fall der Einkommensteuer, daß steigende Ausbildungskosten b mit sinkenden Steuersätzen verbunden sein müssen. Dabei ergibt sich auch, daß die Steuersätze sehr sensitiv auf eine Veränderung der Ausbildungskosten reagieren. Ferner ergibt sich, daß die steuerpolitischen Spielräume des Staates sehr klein sind. Er liegt für die angenommenen Ausbildungskosten bei etwa 1,6 Prozentpunkten. Wir wollen nun im Rahmen dieser Möglichkeiten die Steuersätze variieren und betrachten hierzu die Tabelle 5.13:

Tabelle 5.13: Variation der Ausgabensteuer bei variabler Population

b	τ	x	z	L	$\tilde{\omega}$	$sp(J)$
17	0,1760	0,20	0,27	0,32	0,92	—
	0,1740	0,23	0,35	0,59	3,11	—
	0,1720	0,27	0,46	1,16	6,07	—
17,5	0,1580	0,20	0,26	0,35	0,58	—
	0,1560	0,23	0,33	0,63	2,58	—
	0,1540	0,26	0,43	1,19	5,23	—
18	0,1400	0,21	0,28	0,48	0,92	—
	0,1380	0,24	0,35	0,85	2,94	—
	0,1360	0,27	0,45	1,60	5,62	—

In der Tabelle 5.13 ist wieder $\tilde{\omega} \equiv \omega 100$ die Wachstumsrate in Prozent und

²¹Die Werte τ_u und τ_o wurden jeweils numerisch mit der Software: Mathematica, Version (3.0) bestimmt.

$sp(J)$ das Vorzeichen der Spur der Jacobi-Matrix. Es ergibt sich wie im Fall der Einkommensteuer, daß die Spur $sp(J)$ in allen betrachteten Fällen negativ ist, so daß stets Sattelpfadstabilität resultiert. Bei unterschiedlichen Ausbildungskosten b ergibt sich wieder, daß sinkende Steuersätze zu steigenden Werten für x und z führen. Offenbar ergeben ferner ähnliche Differenzen zwischen Steuerobergrenze und Steuersatz jeweils ähnliche Werte für x und z . Desweiteren gehen sinkende Steuersätze mit steigenden Bevölkerungsbeständen L und steigenden Wachstumsraten einher, wobei sowohl die Bevölkerung als auch das Wachstum auf geringe Steuersatzänderungen sehr sensitiv reagieren.

5.3.3 Vergleich

Wir wollen nun die beiden Steuersysteme miteinander vergleichen. Dabei soll uns die Frage interessieren, ob die Steuersysteme für vorgegebene (bzw. ähnliche) Bevölkerungsbestände unterschiedliche Wachstumsraten erzeugen, und welche Reihenfolge sich dann gegebenenfalls ergibt.

Für den Vergleich ist es notwendig, daß wir für beide Steuersysteme die gleiche Parameterkonstellation annehmen. Es gelte also: Der Nutzenparameter sei $\theta = 0,6$, und der Produktionsparameter sei $\alpha = 0,6$. Für die Abschreibungsraten gelte $\sigma = \eta = 0,10$, und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,03$ gegeben. Ferner nehmen wir die Mortalitätsrate mit $d = 0,012$ an. Der Rivalisierungsgrad der Nutzung des öffentlichen Infrastrukturkapitals sei durch $\pi = 0,5$ gegeben.

Tabelle 5.14: Vergleich der Steuerspielräume bei variabler Population

b	E-Steuer		A-Steuer	
	τ_u	τ_o	τ_u	τ_o
16,5	0,2520	0,2788	0,1804	0,1961
17	0,2294	0,2569	0,1606	0,1770
17,5	0,2067	0,2351	0,1417	0,1586
18	0,1840	0,2132	0,1235	0,1410
18,5	0,1614	0,1914	0,1061	0,1241

Es zeigt sich in Tabelle 5.14, daß steigende Ausbildungskosten in beiden Steuersystemen mit sinkenden Steuersätzen einhergehen müssen. Dabei sind die steuerpolitischen Spielräume des Staates in beiden Fällen als eher gering anzusehen. So beträgt dieser Spielraum im Ausgabensteuersystem etwa zwischen 1,6 und 1,8 Prozentpunkten. Im Einkommensteuersystem beträgt der Spielraum etwa 2,7 bis 3 Prozentpunkte und fällt damit vergleichsweise höher aus.

Tabelle 5.15: Vergleich der Steuersysteme bei variabler Population

b	E-Steuer				A-Steuer			
	τ	L	$\tilde{\omega}$	$sp(J)$	τ	L	$\tilde{\omega}$	$sp(J)$
16,5	0,2695	0,39	7,29	–	0,1940	0,39	2,19	–
17	0,2475	0,43	7,13	–	0,1750	0,43	1,94	–
17,5	0,2256	0,47	6,87	–	0,1570	0,47	1,52	–
18	0,2028	0,64	7,61	–	0,1390	0,64	1,86	–
18,5	0,1818	0,62	6,42	–	0,1230	0,62	0,97	–

In der Tabelle 5.15 ist wieder $\tilde{\omega} \equiv \omega 100$ die Wachstumsrate in Prozent und $sp(J)$ das Vorzeichen der Spur der Jacobi-Matrix. Es ergibt sich in allen betrachteten Fällen, daß die Spur $sp(J)$ negativ ist, so daß stets Sattelpfadstabilität resultiert.

Der Bevölkerungsbestand L und die Wachstumsrate sind in Tabelle 5.15 jeweils auf zwei Stellen gerundet. Damit sind die resultierenden Bevölkerungsbestände unter den beiden Steuerregimen für vorgegebene Steuersätze nur ungefähr gleich. Dennoch läßt sich erkennen, daß das Einkommensteuersystem bei etwa gleicher Bevölkerungsgröße eine Wachstumsrate liefert, die im Durchschnitt etwa fünf Prozentpunkte oberhalb der entsprechenden Wachstumsrate des Ausgabensteuer-Systems liegt. Offenbar ist es also im Einkommensteuersystem möglich, einen vorgegebenen Bevölkerungsbestand mit einem vergleichsweise wachstumsfreundlicheren Steuersatz zu generieren.

Wenn also aus demografischen Gründen eine bestimmte Bevölkerungs-

größe realisiert werden soll, dann erweist sich das Einkommensteuersystem hinsichtlich der erzielbaren Wachstumsraten als das überlegenen Steuersystem.

5.4 Fazit

Wir haben in diesem Kapitel endogene Wachstumsmodelle mit Infrastrukturkapital betrachtet und haben in diesen Modellen die Fertilitätsrate endogen bestimmt. Dabei wurde der Fall der konstanten Population von dem der variablen Population unterschieden.

In den Modellen mit konstanter Bevölkerung konnte der Bevölkerungsbestand mit Hilfe einer geeignet gewählten Einwanderungsrate konstant gehalten werden. Wir haben mit dem Einkommensteuer-, dem Ausgabensteuer- und dem Pauschalsteuersystem verschiedene Steuerregime betrachtet. Dabei konnte stets gezeigt werden, daß es einen sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad gibt. Ferner wurden die Bedingungen für ein positives Gleichgewichtswachstum herausgearbeitet. Abschließend haben wir die verschiedenen Steuerregime miteinander verglichen. Hierbei konnte festgestellt werden, daß mit den Steuersätzen sowohl die Fertilitätsrate als auch die Wachstumsrate beeinflusst werden kann. Es hat sich gezeigt, daß für vorgegebene Fertilitätsraten das Einkommensteuersystem die vergleichsweise höchsten Wachstumsraten erzeugen konnte, während das Ausgabensteuersystem in dieser Hinsicht zu den vergleichsweise niedrigsten Wachstumsraten führte. Das Pauschalsteuersystem nahm hierbei eine mittlere Position ein.

In den Modellen mit variabler Population haben wir angenommen, daß

keine Einwanderung möglich ist. Folglich konnte die Bevölkerung nur stabil bleiben, wenn die Fertilitätsrate der exogen gegebenen Mortalitätsrate entsprach. In diesem Zusammenhang wurde die gleichgewichtige Bevölkerungsgröße endogen bestimmt. Ferner haben wir mit dem Einkommensteuer- und dem Ausgabensteuersystem zwei verschiedene Steuerregime untersucht. Es konnte gezeigt werden, daß stets ein sattelpfadstabiler gleichgewichtiger Wachstumspfad existiert. Wir haben ferner die Bedingungen für ein positives Gleichgewichtswachstum ermittelt und darüber hinaus die jeweiligen steuerpolitischen Spielräume des Staates bestimmt. Bei der Modellsimulation konnte festgestellt werden, daß mit den Steuersätzen sowohl die Wachstumsrate als auch der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand beeinflußt werden kann. Dabei hat sich gezeigt, daß für eine vorgegebene Bevölkerungsgröße das Einkommensteuersystem in der Lage war, höhere Wachstumsraten zu generieren.

5.5 Anhang

Stabilitätsuntersuchung: Modell mit konstanter Population und Pauschalsteuer - Teil I

Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts²² (\bar{x}, \bar{z}) und bestimmen die Determinante der

²²Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (2×2) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2$ und $k = 1, 2$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} j_{11} &= 2x(1 + \alpha\theta) + z^\alpha(\tau - \alpha) - \rho = x(1 + \alpha\theta), \\ j_{12} &= x\alpha z^{\alpha-1}(\tau - \alpha), \\ j_{21} &= z(1 + \theta), \\ j_{22} &= x(1 + \theta) + \alpha\tau z^{\alpha-1} + (\alpha + 1)(\tau - 1)z^\alpha + \sigma - \eta, \\ &= (\alpha - 1)\tau z^{\alpha-1} + \alpha(\tau - 1)z^\alpha. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Eine negative Determinante der Jacobi-Matrix ist im (2×2) -Fall notwendig und hinreichend für Sattelpfadstabilität. Es folgt: $\det(J) < 0$, wenn gilt:

$$x(1 + \alpha\theta)(j_{22}) < x\alpha z^{\alpha-1}(\tau - \alpha)z(1 + \theta). \quad (5.94)$$

Die Ungleichung ist erfüllt, falls $(j_{22}) < \alpha z^\alpha(\tau - \alpha)R$ gilt. Ersetzen von (j_{22}) ergibt $(\alpha - 1)\tau z^{\alpha-1} + \alpha(\tau - 1)z^\alpha < \alpha z^\alpha(\tau - \alpha)R$. Da für den ersten Term $(\alpha - 1)\tau z^{\alpha-1} < 0$ gilt, ist die Ungleichung erfüllt, falls die Beziehung $(\tau - 1) < (\tau - \alpha)R$ erfüllt ist. Gleichbedeutend hierzu ist die Ungleichung $(\alpha - \tau)R + (\tau - 1) < 0$, was bereits gezeigt wurde.

Stabilitätsuntersuchung: Modell mit konstanter Population und Pauschalsteuer - Teil II

Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts²³ (\bar{x}, \bar{z}) und bestimmen die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}. \quad (5.95)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (2×2) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2$ und $k = 1, 2$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} j_{11} &= x [1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta], \\ j_{12} &= -x\alpha^2 z^{\alpha-1}, \\ j_{21} &= z [1 + \theta + \tau + \tau\theta] + (1 + \theta)\tau, \\ j_{22} &= -x(1 + \theta)\tau z^{-1} - \alpha z^\alpha. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Eine negative Determinante der Jacobi-Matrix ist im (2×2) -Fall notwendig und hinreichend für Sattelpfadstabilität. Es folgt: $\det(J) < 0$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \det(J) &\equiv x\alpha^2 z^{\alpha-1} [z(1 + \theta + \tau + \tau\theta) + (1 + \theta)\tau] + \\ &\quad x [1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta] (j_{22}) < 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Division durch x und $[1 + \alpha\theta + \tau + \tau\theta]$ unter Verwendung von R und Q führt bei Substitution von (j_{22}) nach einigen Umstellungen zu folgender Un-

²³Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

gleichung:

$$\alpha^2 z^\alpha R + \alpha^2 Q \tau z^{\alpha-1} < x(1 + \theta) \tau z^{-1} + \alpha z^\alpha. \quad (5.98)$$

Wir vergleichen nun paarweise und zeigen zuerst, daß $\alpha^2 z^\alpha R < \alpha z^\alpha$ gilt. Division durch αz^α ergibt: $\alpha R < 1$. Es wurde bereits weiter oben die Gültigkeit dieser Ungleichung gezeigt. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\alpha^2 Q \tau z^{\alpha-1} < x(1 + \theta) \tau z^{-1}$ erfüllt ist. Wir ersetzen $x(1 + \theta)$ durch $Q(\rho + \alpha z^\alpha)$ und erhalten: $\alpha^2 Q \tau z^{\alpha-1} < Q \rho \tau z^{-1} + \alpha Q \tau z^{\alpha-1}$. Diese Ungleichung gilt, wenn die Ungleichung $\alpha \alpha Q \tau z^{\alpha-1} < \alpha Q \tau z^{\alpha-1}$ gilt. Wegen $\alpha < 1$, ist das der Fall.

Steuerobergrenze: Modell mit variabler Population und Ausgabensteuer

Wir behandeln das Modell mit variabler Population und Ausgabensteuer und wollen die Steuerobergrenze τ_o abschätzen. Dazu betrachten wir die Bedingung $\omega^* > 0$ und ersetzen in Gleichung (5.88) den Gleichgewichtswert z . Die resultierende Ungleichung lautet wie folgt:

$$\frac{d - \rho\theta + d\tau}{\alpha\theta(1 - bd - \tau bd) - (1 + \tau)^2 bd} > \frac{\rho + \sigma}{(1 - \alpha)[1 - bd - \tau bd]}. \quad (5.99)$$

Wegen $1 - bd - \tau bd > 0$ und $\alpha\theta(1 - bd - \tau bd) - (1 + \tau)^2 bd < 0$ ergibt sich unter Verwendung von $q_1 \equiv 1 - bd$ und $q_2 \equiv d - \rho\theta$, wenn wir zusätzlich $q_3 \equiv (\rho + \sigma)(1 - \alpha)^{-1}$ definieren:

$$d\tau [q_1 - q_2 b + q_3 \alpha \theta b + 2q_3 b + q_3 b \tau] < bd^2 \tau^2 - q_1 q_2 + q_3 (\alpha \theta q_1 - bd). \quad (5.100)$$

Die linke Seite ist wegen $q_2 < 0$ positiv, also muß auch die rechte Seite positiv sein. Wir wollen annehmen, daß dies der Fall ist²⁴. Wir ersetzen nun auf der

²⁴In jedem Fall ist wegen $q_2 < 0$ die rechte Seite von (5.100) positiv, wenn $\alpha \theta q_1 > bd \Leftrightarrow \theta > bd[\alpha(1 - bd)]^{-1}$ gilt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Abschätzung a_1 für die

rechten Seite den Ausdruck $q_3 b \tau$ durch $q_3 b$; dadurch wird sie wegen $\tau < 1$ größer. Ferner lassen wir auf der linken Seite den Ausdruck $b d^2 \tau^2 > 0$ weg; dadurch wird sie kleiner. Wenn die resultierende Ungleichung erfüllt ist, dann ist auch die Ungleichung (5.100) erfüllt. Auflösen nach τ liefert schließlich:

$$\tau < \frac{q_3 (\alpha \theta q_1 - b d) - q_1 q_2}{d [q_1 - q_2 b + q_3 \alpha \theta b + 3 q_3 b]}. \quad (5.101)$$

Damit ist die Abschätzung für die Steuerobergrenze τ_o gefunden.

Steueruntergrenze bindend ist.

Kapitel 6

Endogene Fertilität in Humankapitalmodellen

6.1 Einführung: Modelle mit Humankapital

In diesem Kapitel behandeln wir eine Modellgruppe, die sich dadurch auszeichnet, daß die privaten Akteure in zwei verschiedene akkumulierbare private Kapitalgrößen investieren können. Es handelt sich dabei um privates physisches Kapital K und um privates Humankapital M . Ein allgemeiner Ansatz, welcher auf Rebelo (1991) zurückgeht, unterstellt, daß die Produktion des Outputs in beiden Sektoren mittels einer Cobb-Douglas-Technologie erfolgt. Die beiden Kapitalakkumulationsgleichungen sind dann wie folgt gegeben:

$$\dot{K} \equiv A(uM)^\alpha (vK)^{1-\alpha} - C - \sigma K,$$

$$\dot{M} \equiv B [(1-u)M]^\varsigma [(1-v)K]^{1-\varsigma} - \eta M. \quad (6.1)$$

Dabei sind α und ς Produktionsparameter mit $0 < \alpha < 1$ und $0 < \varsigma < 1$. Desweiteren sind $A > 0$ und $B > 0$ Niveauparameter. Die Parameter u und v mit $0 < u < 1$ und $0 < v < 1$ geben an, in welchem Ausmaß die jeweiligen Kapitalbestände in den beiden Sektoren eingesetzt werden. Das aggregierte Humankapital M kann als effektiver Arbeitseinsatz mit $M \equiv mL$ interpretiert werden. Hierbei ist Humankapital ein reines privates Gut, so daß die Nutzung vollkommen rivalisierend ist. Folglich ist $m = ML^{-1}$ der Humankapitalbestand pro Kopf und L der reine Arbeitseinsatz. Der Pro-Kopf-Bestand an Humankapital wirkt also arbeitsvermehrend. Ferner unterscheiden wir nicht zwischen Arbeitseinsatz und Populationsgröße; wir nehmen also an, daß jedes Bevölkerungsmitglied auch arbeitet. Ferner ist $\sigma \geq 0$ die Abschreibungsrate auf physisches Kapital und $\eta \geq 0$ die Abschreibungsrate für das Humankapital. Der aggregierte Konsum ist durch die Variable C gegeben.

Aus diesem Modell ergibt sich für $\varsigma = 1$ als Spezialfall das auf Uzawa (1965) und Lucas (1988) zurückgehende Uzawa-Lucas Modell. Für $\varsigma = 1$ ist physisches Kapital im Humankapitalsektor nicht produktiv. Der entsprechende Einsatz des physischen Kapitals ergibt also keinen Sinn, so daß dann konsequenterweise $v = 1$ gelten muß. Für die neuen Kapitalakkumulationsgleichungen folgt also mit $\varsigma = 1$, $v = 1$ und $M \equiv mL$:

$$\begin{aligned} \dot{K} &\equiv A(umL)^\alpha K^{1-\alpha} - C - \sigma K, \\ \dot{M} &\equiv B[(1-u)mL] - \eta mL. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Wir wollen nun wieder annehmen, daß die Wachstumsrate des Bevölkerungsbestandes durch die Summe aus Nettofertilitätsrate ($n - d$) und Einwande-

rungsrate g gegeben ist, so daß $\dot{L} \equiv (n - d + g)L$ gilt. Die Kapitalbestände pro Kopf sind mit $k \equiv KL^{-1}$ und $m \equiv ML^{-1}$ gegeben. Die jeweilige zeitliche Entwicklung der Pro-Kopf-Größen ergibt sich aus $\dot{k} \equiv \dot{K}L^{-1} - k\dot{L}L^{-1}$ und $\dot{m} \equiv \dot{M}L^{-1} - m\dot{L}L^{-1}$, so daß die neuen Akkumulationsgleichungen wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv A(um)^\alpha k^{1-\alpha} - c - \sigma k - (n - d + g)k, \\ \dot{m} &\equiv B(1 - u)m - \eta m - (n - d + g)m.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Der Zusammenhang von Humankapital, Fertilität und Bevölkerungswachstum wurde in verschiedenen Arbeiten bereits betrachtet¹. Insbesondere wurde das Uzawa-Lucas Modell von Robertson (2002) verwendet, um demographische Schocks zu untersuchen. In diesem Artikel wird zwischen unqualifizierter und qualifizierter Arbeit unterschieden, und es wird ein nicht antizipierter Anstieg des unqualifizierten Arbeitsstocks betrachtet.

Wir wollen an dieser Stelle mit der Fertilitätswahl die demographische Komponente in das oben betrachtete Modell einführen.

6.2 Endogene Fertilität und der Uzawa-Lucas Ansatz

Im Folgenden wollen wir das Modell um die endogene Fertilitätswahl und um Ausbildungskosten erweitern. Die Fertilitätswahl erfassen wir in der Nutzenfunktion des repräsentativen Akteurs. Dabei wollen wir annehmen, daß der

¹Siehe hierzu z.B.: Becker / Murphy / Tamura (1990) und Kalemli-Ozcan (2003), sowie: Rosenzweig (1990).

Nutzen des repräsentativen Akteurs vom Pro-Kopf-Konsum $c \equiv CL^{-1}$ und von der Pro-Kopf-Fertilität $n \equiv NL^{-1}$ abhängt. Hierbei ist L der Bevölkerungsbestand, N die gesamte Nachkommenschaft und n die Fertilitätsrate. Dann sei für die individuelle Nutzenfunktion folgende Gestalt angenommen:

$$U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n, \quad (6.4)$$

mit dem Nutzenparameter $\theta \geq 0$. Der repräsentative Akteur hat im folgenden einen unendlich langen Planungshorizont und maximiert den abdiskontierten Nutzenstrom durch geeignete Wahl von c und n :

$$\max_{c, n} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} U(c, n) dt. \quad (6.5)$$

Dabei bezeichnet ρ die Diskontrate und t ist der Zeitindex. Die Ausbildungskosten nehmen wir aus Gründen der rechnerischen Vereinfachung als proportional zum Pro-Kopf-Kapital k an. Die aggregierten Ausbildungsausgaben sind dann $bnk = bnLk = bnK$, und die entsprechenden Ausgaben für den repräsentativen Akteur sind dann bnk . Ferner nehmen wir $A = 1$ (normiert) an und betrachten B als Funktion des Bevölkerungsbestandes. Es sei $B(L) \equiv \gamma L^\beta$ definiert mit $\gamma > 0$ und $\beta > 0$. Das bedeutet, daß wir annehmen, daß die Humankapitalbildung in einer größeren Gesellschaft in effizienterer Form stattfindet. Wir erhalten schließlich für die Akkumulationsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{k} &\equiv (um)^\alpha k^{1-\alpha} - c - bnk - \sigma k - (n - d + g)k, \\ \dot{m} &\equiv B(L)(1 - u)m - \eta m - (n - d + g)m. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Für $b = 0 = \theta$ und $B(L) \equiv B$ erhalten wir als Spezialfall wieder das Uzawa-Lucas Modell mit logarithmischer Nutzenfunktion und $A = 1$ (normiert).

Die Modelle sollen nun dahingehend überprüft werden, ob ein gleichgewichtiger Wachstumspfad (GGW) existiert, und ob dieser eindeutig ist. Ein GGW sei dadurch gekennzeichnet, daß der Konsum und die Kapitalbestände mit der gleichen Rate wachsen. Die Bevölkerung ist aus definitiven Gründen konstant. Ferner sollen die Stabilitätseigenschaften der jeweiligen Systeme untersucht werden. Darüber hinaus ist an eine Simulation der Modelle gedacht, so daß reale Situationen abgebildet werden können.

Wir wollen nun den Fall des konstanten von dem des variablen Bevölkerungsbestandes unterscheiden und beginnen mit der konstanten Population.

6.2.1 Das Modell mit konstanter Population

Da in diesem Modell die Fertilitätsrate n endogen bestimmt wird, ist im allgemeinen damit zu rechnen, daß die Fertilität von der Mortalität d abweichen wird ($n \neq d$). Folglich kann dann Einwanderung g benutzt werden, um die Population konstant zu halten. Es muß dann stets $g = d - n$ gelten. Wir wollen annehmen, daß g nicht vorzeichenbeschränkt ist, und daß die staatlichen Autoritäten immer in der Lage sind, die Einwanderung in geeigneter Weise festzulegen. Dann können wir den Bevölkerungsbestand auf $L = 1$ normieren und müssen nicht zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Die Niveaufunktion $B(L)$ nimmt dann den konstanten Wert $B(L) = \gamma = B$ an.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und den folgenden beiden Kapitalakkumulationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv (um)^\alpha k^{1-\alpha} - c - bnk - \sigma k, \\ \dot{m} &\equiv B(1-u)m - \eta m.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Wir bilden nun die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, u, k, m) + \mu \dot{m}(c, n, u, k, m)$ und gehen bei der Optimierung vom kompetitiven Fall aus. Die resultierenden Optimalitätsbedingungen lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda bk = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &\equiv \lambda \alpha u^{\alpha-1} m^\alpha k^{1-\alpha} - \mu B m = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda(1-\alpha)(um)^\alpha k^{-\alpha} - \lambda bn - \lambda \sigma = \rho \lambda - \dot{\lambda}, \\ \frac{\partial H}{\partial m} &\equiv \lambda \alpha u^\alpha m^{\alpha-1} k^{1-\alpha} + \mu B(1-u) - \mu \eta = \rho \mu - \dot{\mu},\end{aligned}\tag{6.8}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} [\lambda(t)k(t) + \mu(t)m(t)] \geq 0$. Es sei wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv mk^{-1}$ definiert. Dann folgt aus den Optimalitätsbedingungen für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{b}.\tag{6.9}$$

Die optimale Fertilitätsrate ist also proportional zu x mit $\partial n / \partial x > 0$. Ferner hängt n positiv von θ und negativ von b ab. In welcher Weise θ und b die

Fertilitätsrate auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) beeinflussen, kann an dieser Stelle noch nicht beantwortet werden. Denn es ist noch nicht klar, von welchen Parametern der Gleichgewichtswert x auf dem GGW abhängt. Wir kommen darauf weiter unten noch zurück. Für endliche Werte für x gilt jedoch: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Falls der Staat die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft in voller Höhe übernimmt ($b = 0$), so folgt für endliches x : $b \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$.

Die Modelldynamik

Wir betrachten nun die zeitliche Entwicklung der Schattenpreise λ und μ . Für die Entwicklung von λ gilt dann: $\dot{\lambda}/\lambda \equiv \rho - (1 - \alpha)u^\alpha z^\alpha + \theta x + \sigma$. Aus der Bedingung $\partial H/\partial u = 0$ folgt $\mu = \alpha B^{-1} [\lambda u^{\alpha-1} z^{\alpha-1}]$. Daraus ergibt sich für die zeitliche Entwicklung von μ :

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \equiv (\alpha - 1) \left[\frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{z}}{z} \right] - \frac{\dot{c}}{c}. \quad (6.10)$$

Aus der Bedingung $\partial H/\partial m = \rho\mu - \dot{\mu}$ folgt mit $uB\mu = \alpha\lambda u^\alpha z^{\alpha-1}$:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \equiv \rho + \eta - B(1 - u) - uB = \rho + \eta - B. \quad (6.11)$$

Satz 6.1 *Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad ist $u = \rho B^{-1}$. Ferner ist die gleichgewichtige Wachstumsrate nur dann positiv, wenn $B > \rho + \eta$ erfüllt ist.*

Beweis: Aus den Gleichungen (6.10) und (6.11) folgt die Beziehung $\rho + \eta - B = (\alpha - 1) [\dot{u}u^{-1} + \dot{z}z^{-1}] - \dot{c}c^{-1}$. Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad ist $\dot{u}/u = 0$. Ferner wachsen die Größen c , k und m mit jeweils gleicher Rate.

Es gilt also $\dot{c}/c = \dot{k}/k = \dot{m}/m = \omega^*$. Das bedeutet, daß die Variable z auf dem GGW konstant bleibt, so daß $\dot{z}/z = 0$ gilt. Es resultiert also:

$$B - \rho - \eta = \frac{\dot{c}}{c} = \omega^* = \frac{\dot{m}}{m} = B(1 - u) - \eta. \quad (6.12)$$

Hieraus folgt $uB = \rho$ und damit der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus $\omega^* = B - \rho - \eta$. \square

Die Modelldynamik lautet wegen $\dot{c}/c = -\dot{\lambda}/\lambda$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha)u^\alpha z^\alpha - \theta x - \rho - \sigma, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv u^\alpha z^\alpha - x - \theta x - \sigma, \\ \frac{\dot{m}}{m} &\equiv B(1 - u) - \eta, \\ \frac{\dot{u}}{u} &\equiv \frac{B + \theta x + \sigma - \eta}{1 - \alpha} - u^\alpha z^\alpha - \frac{\dot{z}}{z}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Wir formulieren nun für die weiteren Untersuchungen das dynamische System um:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &\equiv x - \rho - \alpha u^\alpha z^\alpha, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv B(1 - u) - \eta - u^\alpha z^\alpha + x + \theta x - \sigma, \\ \frac{\dot{u}}{u} &\equiv \frac{B + \sigma - \eta + \theta x}{1 - \alpha} - B(1 - u) + \eta - x - \theta x - \sigma. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gelte nun $\dot{u} = \dot{x} = \dot{z} = 0$, so daß sich für die Gleichgewichtswerte folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned} z &\equiv \frac{1}{u} \left[\frac{x - \rho}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x &\equiv \frac{\alpha B u - \alpha q - \rho}{\alpha + \alpha \theta - 1}, \\ u &\equiv \frac{\rho}{B}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

mit $q \equiv B + \sigma - \eta$.

Satz 6.2 Für $\alpha(1 + \theta) < 1$ sind alle Gleichgewichtswerte nichtnegativ.

Beweis: Für u ist die Nichtnegativität in jedem Fall erfüllt, da sowohl ρ als auch B positiv sind. Der Gleichgewichtswert für z ist positiv, falls $x > \rho$ gilt und x ist positiv, wenn der Zähler und der Nenner von x vorzeichengleich sind. Wegen $B > \eta$ (siehe oben) folgt, daß q positiv ist, und folglich ist der Zähler von x negativ. Also muß auch der Nenner von x negativ sein. Dies ist für $\alpha(1 + \theta) < 1$ gewährleistet. Es bleibt noch zu zeigen, daß x dann auch größer als ρ ist. Das ist der Fall, wenn $(\alpha - 1)\rho - \alpha q < \alpha(1 + \theta)\rho - \rho$ gilt. Die Ungleichung ist erfüllt, wie sich sehr leicht überprüfen läßt². \square

Satz 6.3 Das System ist sattelpfadstabil.

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts³ $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u})$ und bestimmen die Determinante und die Spur der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \\ u - \bar{u} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - & - \\ + & - & - \\ - & 0 & + \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (3×3) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter

²Es gilt: $(\alpha - 1)\rho - \alpha q < \alpha(1 + \theta)\rho - \rho \Leftrightarrow$

$\alpha\rho - \rho - \alpha q < \alpha\rho + \alpha\theta\rho - \rho \Leftrightarrow 0 < \alpha q + \alpha\theta\rho.$

³Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= 2x - \rho - \alpha u^\alpha z^\alpha = x, \\
 j_{12} &= -x\alpha^2 u^\alpha z^{\alpha-1}, \\
 j_{13} &= -x\alpha^2 u^{\alpha-1} z^\alpha, \\
 \\
 j_{21} &= (1 + \theta) z, \\
 j_{22} &= q - Bu + (1 + \theta)x - (\alpha + 1)u^\alpha z^\alpha = -\alpha u^\alpha z^\alpha, \\
 j_{23} &= -z [B + \alpha u^{\alpha-1} z^\alpha], \\
 \\
 j_{31} &= Ru, \\
 j_{32} &= 0, \\
 j_{33} &= Bu, \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

mit $R \equiv \frac{\alpha(1+\theta)-1}{1-\alpha} < 0$. Im (3×3) - Fall stellt eine negative Determinante in Kombination mit einer positiven Spur Sattelpfadstabilität sicher. Der Sattelpfad ist dann eine eindimensionale Mannigfaltigkeit⁴. Wir beginnen mit der Determinante und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \det(J) &\equiv Rux\alpha^2 u^\alpha z^\alpha [B + \alpha u^{\alpha-1} z^\alpha] - Rux\alpha^2 u^{\alpha-1} z^\alpha [\alpha u^\alpha z^\alpha] - \\
 &\quad Bux\alpha u^\alpha z^\alpha + Bux\alpha^2 u^\alpha z^\alpha (1 + \theta). \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

Die Determinante ist negativ, wenn gilt:

$$Rux [B + \alpha u^{\alpha-1} z^\alpha] + Bu\alpha (1 + \theta) < R\alpha [\alpha u^\alpha z^\alpha] + Bu. \tag{6.19}$$

⁴Vgl. Wirl (1997), sowie den Anhang dieser Arbeit.

Die Ungleichung ist erfüllt, wenn jeweils gilt:

$$\begin{aligned} Bu\alpha(1+\theta) &< Bu, \\ Ru\alpha[B + \alpha u^{\alpha-1} z^\alpha] &< R\alpha[\alpha u^\alpha z^\alpha]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Die erste Ungleichung ist erfüllt, wenn $\alpha(1+\theta) < 1$ erfüllt ist. Wir haben jedoch weiter oben schon die Gültigkeit dieser Beziehung angenommen. Die zweite Ungleichung ist wegen $R < 0$ erfüllt, wenn $uB + \alpha u^\alpha z^\alpha > \alpha u^\alpha z^\alpha$ gilt. Wegen $uB > 0$ ist das jedoch der Fall, und folglich ist die Determinante negativ. Für die Spur gilt:

$$sp(J) \equiv x - \alpha u^\alpha z^\alpha + Bu = \rho + Bu > 0. \quad (6.21)$$

Damit ist also Sattelpfadstabilität gezeigt. \square

Die Modellsimulation

Wir gehen bei der Simulation des Modells wie folgt vor. Zuerst legen wir die Basisparameter fest. Anschließend nehmen wir an, daß der Staat die Ausbildungskosten b beeinflussen kann. Wir untersuchen dann die Auswirkungen verschiedener Werte für b wie auch für θ auf das System. Dabei interessieren uns besonders die gleichgewichtige Wachstumsrate und die resultierende Fertilitätsrate auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad.

Wir starten mit der Basiskonfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,4$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsrate gelte $\sigma = \eta = 0,07$, und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,03$ gegeben. Ferner sei $B = 0,12$.

Durch die Wahl der Basisparameter sind sowohl die Variable $u = \rho B^{-1}$ als auch die gleichgewichtige Wachstumsrate $\omega^* = B - \rho - \eta$ bereits festgelegt.

Tabelle 6.1: Variation der Ausbildungskosten im Uzawa-Lucas Modell bei konstanter Population

b	x	z	\tilde{n}	u	$\tilde{\omega}$
18	0,53	2,90	1,17	0,25	0,02
19	.	.	1,11	.	.
20	.	.	1,05	.	.
21	.	.	1,00	.	.
22	.	.	0,95	.	.

In der Tabelle 6.1 ist $\tilde{n} \equiv n100$ die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ die Wachstumsrate in Prozent. Es zeigt sich, daß die Variation der Ausbildungskosten b die Gleichgewichtswerte x und z nicht beeinflußt. Erwartungsgemäß nimmt die gleichgewichtige Fertilitätsrate ab, wenn die Ausbildungskosten erhöht werden. Dabei verursacht eine Kostenzunahme von $\Delta b = 1$ eine Abnahme der Fertilitätsrate zwischen 0,05 und 0,06 Prozentpunkten. Offenbar stellt diese Abnahme der Fertilität gerade sicher, daß die aggregierten Ausbildungsausgaben für die gesamte Nachkommenschaft gleich bleiben, so daß sich die Werte für x und z nicht verändern.

Wir wollen nun den Nutzenparameter θ variieren und halten die Ausbildungskosten auf $b = 20$ konstant:

Tabelle 6.2: Variation des Nutzenparameters im Uzawa-Lucas Modell bei konstanter Population

θ	x	z	\tilde{n}	u	$\tilde{\omega}$
0,41	0,55	3,11	1,12	0,25	0,02
0,42	0,57	3,33	1,19	.	.
0,43	0,59	3,58	1,27	.	.
0,44	0,62	3,86	1,36	.	.
0,45	0,65	4,18	1,45	.	.

Es zeigt sich, daß für die betrachtete Basiskonfiguration bereits eine geringe Erhöhung des Nutzenparameters θ um $\Delta\theta = 0,01$ deutliche Veränderungen bei den Modellvariablen hervorruft. Dabei nehmen die Gleichgewichtswerte x und z zu, wenn der Parameter θ erhöht wird. Erwartungsgemäß nimmt auch die Fertilitätsrate zu, wenn sich θ erhöht.

6.2.2 Das Modell mit variabler Population

Wir gehen nun davon aus, daß aus institutionellen Gründen keine Einwanderung $g = 0$ stattfinden kann, wie es auch für die Welt als Ganzes gilt. Wir betrachten also eine Welt mit nur einem Land. Dann gilt für die zeitliche Entwicklung des Bevölkerungsbestandes $\dot{L} \equiv (n - d)L$ und wir müssen nun zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Im allgemeinen kann nun die Fertilität von der Mortalität abweichen ($n \neq d$), und wir erhalten mit $\dot{L}L^{-1} \equiv (n - d)$ eine weitere Gleichung, welche das dynamische

Verhalten unseres Systems beschreibt. Ferner ist daher auch $B(L) \equiv \gamma L^\beta$ eine Funktion der Populationsgröße. Wir werden noch sehen, daß dadurch der Populationsbestand L zu einer modellendogenen Variable wird.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$, den beiden Kapitalakkumulationsgleichungen und der Gleichung für die Bevölkerungsentwicklung:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv (um)^\alpha k^{1-\alpha} - c - bnk - \sigma k - (n-d)k, \\ \dot{m} &\equiv \gamma L^\beta (1-u)m - \eta m - (n-d)m, \\ \dot{L} &\equiv (n-d)L,\end{aligned}\tag{6.22}$$

mit $\gamma > 0$ und $\beta > 0$. Wir bilden die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, u, k, m) + \mu \dot{m}(c, n, u, k, m)$ und gehen bei der Optimierung vom kompetitiven Fall aus. Die resultierenden Optimalitätsbedingungen lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda bk - \lambda k - \mu m = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &\equiv \lambda \alpha u^{\alpha-1} m^\alpha k^{1-\alpha} - \mu \gamma L^\beta m = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda (1-\alpha) (um)^\alpha k^{-\alpha} - \lambda bn - \lambda \sigma - \lambda (n-d) = \rho \lambda - \dot{\lambda}, \\ \frac{\partial H}{\partial m} &\equiv \lambda \alpha u^\alpha m^{\alpha-1} k^{1-\alpha} + \mu \gamma L^\beta (1-u) - \mu \eta - \mu (n-d) \\ &= \rho \mu - \dot{\mu},\end{aligned}\tag{6.23}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} [\lambda(t)k(t) + \mu(t)m(t)] \geq 0$. Es sei wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv mk^{-1}$ definiert. Dann folgt aus den Optimalitätsbedingungen für die Fertilitätsrate n :

$$n \equiv n(x, z, u, L) = \frac{\theta x \gamma L^\beta}{(b+1) \gamma L^\beta + \alpha u^{\alpha-1} z^\alpha}. \quad (6.24)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) muß stets $n = d$ gelten. In der Ungleichgewichtssituation ist n variabel. Dabei sind $\partial n / \partial x$, $\partial n / \partial u$ und $\partial n / \partial L$ jeweils positiv, während $\partial n / \partial z$ negativ ist. Wir erhalten wie im Fall der konstanten Population: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Falls der Staat die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft in voller Höhe übernimmt ($b = 0$), so folgt diesmal allerdings, daß die Fertilitätsrate einen endlichen Wert annimmt.

Die Modelldynamik

Wir betrachten zuerst die zeitliche Entwicklung der Schattenpreise λ und μ . Für die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ folgt aus $\partial H / \partial k = \rho \lambda - \dot{\lambda}$ die Beziehung $\dot{\lambda} / \lambda \equiv \rho - (1 - \alpha) u^\alpha z^\alpha + bn + \sigma + (n - d)$. Aus $\partial H / \partial u = 0$ folgt $\lambda \alpha u^\alpha m^{\alpha-1} k^{1-\alpha} = \mu u \gamma L^\beta$. Einsetzen in $\partial H / \partial m = \rho \mu - \dot{\mu}$ führt nach einigen Umformungen zu:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \equiv \rho - \gamma L^\beta + \eta + (n - d). \quad (6.25)$$

Aus $\partial H / \partial u = 0$ folgt ferner $\mu = \alpha \gamma^{-1} u^{\alpha-1} z^{\alpha-1} L^{-\beta}$. Ableiten nach der Zeit und teilen durch μ führt nach einigen Umformungen zu:

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} \equiv (\alpha - 1) \frac{\dot{u}}{u} + (\alpha - 1) \frac{\dot{z}}{z} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - \beta \frac{\dot{L}}{L}. \quad (6.26)$$

Für die zeitliche Entwicklung von c , k und m folgt wegen $\dot{c}/c = -\dot{\lambda}/\lambda$:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha) u^\alpha z^\alpha - \sigma - \rho - bn - (n - d), \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv u^\alpha z^\alpha - x - bn - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{m}}{m} &\equiv \gamma L^\beta (1 - u) - \eta - (n - d).\end{aligned}\quad (6.27)$$

Dann hat das resultierende dynamische System die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv x - \rho - \alpha u^\alpha z^\alpha, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \gamma L^\beta (1 - u) + x - u^\alpha z^\alpha + bn + \sigma - \eta, \\ \frac{\dot{u}}{u} &\equiv \frac{1}{\alpha - 1} \left[\rho + \eta - \gamma L^\beta + (1 + \beta)(n - d) + \frac{\dot{c}}{c} \right] - \frac{\dot{z}}{z}, \\ \frac{\dot{L}}{L} &\equiv \frac{\theta x \gamma L^\beta}{(b + 1) \gamma L^\beta + \alpha u^{\alpha-1} z^\alpha} - d.\end{aligned}\quad (6.28)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad sollen wieder c , k und m mit der gleichen Rate wachsen. Daraus folgt $\dot{x} = 0 = \dot{z}$. Ferner soll auch die Aufteilungsvariable u im Zeitablauf konstant bleiben $\dot{u} = 0$, da sie nicht stetig wachsen oder schrumpfen kann. Da wir Land als exogen gegebene und beschränkte Ressource unterstellen, gilt auch für die Population, daß sie nicht stetig wachsen darf. Wenn sie darüber hinaus nicht aussterben soll, dann darf sie ebenfalls nicht stetig schrumpfen. Es folgt also $\dot{L} = 0$ und wir erhalten für den gleichgewichtigen Wachstumspfad $\dot{u} = \dot{x} = \dot{z} = \dot{L} = 0$. Für die Gleichgewichtswerte resultieren dann die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}x &\equiv \frac{db\rho}{\theta\rho - d}, \\ L &\equiv \left[\frac{(1 - \alpha)(x - \rho)}{\gamma\alpha} + \frac{\eta - \sigma - bd}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\beta}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{\rho}{\gamma L^\beta}, \\ z &\equiv \frac{1}{u} \left[\frac{x - \rho}{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Dabei erfordert die Nichtnegativität von x , daß $\theta\rho > d$ erfüllt ist. Der Gleichgewichtswert z ist positiv, wenn $x > \rho$ gilt. Der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand L ist positiv, wenn $(1 - \alpha)[x - \rho] > \alpha(\sigma - \eta + bd)$ gilt. Ferner gilt:

Satz 6.4 *Die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* ist dann positiv, wenn $x > \rho + \frac{\alpha}{1-\alpha}[\sigma + \rho + bd]$. In diesem Fall ist auch die Nichtnegativität aller Gleichgewichtswerte gewährleistet.*

Beweis: Die Wachstumsrate ω^* ist positiv, wenn $(1 - \alpha)u^\alpha z^\alpha > \sigma + \rho + bd$ gilt. Mit $u^\alpha z^\alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \rho)$ folgt dann $(1 - \alpha)(x - \rho) > \alpha[\sigma + \rho + bd]$ und daraus schließlich der erste Teil der Behauptung. Damit ist sichergestellt, daß $x > \rho$ erfüllt ist. Folglich sind die Gleichgewichtswerte x und z positiv. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Gleichgewichtswert für L ebenfalls positiv ist. Dies ist der Fall, wenn $\gamma L^\beta > 0$ gilt. Aus der Gleichgewichtsbeziehung folgt dann: $(1 - \alpha)\left[\frac{x - \rho}{\alpha}\right] > \sigma - \eta + bd$. Wir wissen bereits, daß $(1 - \alpha)\left[\frac{x - \rho}{\alpha}\right] > \sigma + \rho + bd$ gilt. Also ist L positiv, wenn $\sigma + \rho + bd > \sigma - \eta + bd$ erfüllt ist. Das ist jedoch der Fall, und damit ist dann gezeigt, daß auch L und schließlich u positiv sind. \square

Wir kommen nun zur Stabilitätsanalyse. Dazu linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts⁵ $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{L})$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{u} \\ \dot{L} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \\ u - \bar{u} \\ L - \bar{L} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - & - & 0 \\ + & - & ? & + \\ ? & ? & ? & ? \\ + & - & + & + \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (4×4) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, \dots, 4$ und $k = 1, \dots, 4$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$j_{11} = 2x - \rho - \alpha u^\alpha z^\alpha = x,$$

$$j_{12} = -x\alpha^2 u^\alpha z^{\alpha-1},$$

$$j_{13} = -x\alpha^2 u^{\alpha-1} z^\alpha,$$

$$j_{14} = 0,$$

$$j_{21} = z + bz \frac{\partial n}{\partial x},$$

$$j_{22} = \gamma L^\beta (1 - u) + x - u^\alpha z^\alpha + bn + \sigma - \eta + bz \frac{\partial n}{\partial z} - \alpha u^\alpha z^\alpha,$$

$$j_{23} = -z\gamma L^\beta - \alpha u^{\alpha-1} z^{\alpha+1} + bz \frac{\partial n}{\partial u},$$

$$j_{24} = \beta z \gamma L^{\beta-1} (1 - u) + bz \frac{\partial n}{\partial L},$$

$$j_{31} = \frac{\partial n}{\partial x} \psi u - u,$$

⁵Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

$$\begin{aligned}
j_{32} &= \frac{\partial n}{\partial z} \psi u, \\
j_{33} &= \Omega + n\psi - x + \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma L^\beta + u\gamma L^\beta + \frac{\partial n}{\partial u} \psi u + u\gamma L^\beta, \\
j_{34} &= \frac{\partial n}{\partial L} \psi u + \frac{\alpha}{1-\alpha} u\beta\gamma L^{\beta-1} + \beta u^2 \gamma L^{\beta-1}, \\
\\
j_{41} &= \frac{\partial n}{\partial x} L, \\
j_{42} &= \frac{\partial n}{\partial z} L, \\
j_{43} &= \frac{\partial n}{\partial u} L, \\
j_{44} &= \frac{\partial n}{\partial L} L,
\end{aligned} \tag{6.31}$$

mit $\Omega \equiv \frac{(\eta-\sigma)\alpha-\beta d}{\alpha-1}$ und $\psi \equiv \frac{\beta-\alpha b}{\alpha-1}$. Es gilt, daß eine positive Determinante in Kombination mit einem negativen V_1 -Wert Sattelpfadstabilität mit einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit sicherstellt⁶. Dabei ist V_1 wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
V_1 \equiv & \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{22} & j_{23} \\ j_{32} & j_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{33} & j_{34} \\ j_{43} & j_{44} \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} j_{11} & j_{13} \\ j_{31} & j_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{22} & j_{24} \\ j_{42} & j_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{11} & j_{14} \\ j_{41} & j_{44} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Sowohl die Determinante $\det(J)$ als auch V_1 lassen sich nur numerisch bestimmen. Wir wollen uns jedoch an dieser Stelle auf die Angabe der Stabilitätsbedingungen beschränken und verzichten auf die Modellsimulation.

⁶Vgl. hierzu die Ausführungen im Anhang in dieser Arbeit zur Lokalen Stabilitätsanalyse für (4×4) - Systeme.

6.3 Fazit

Wir haben in diesem Kapitel endogene Wachstumsmodelle mit Humankapital betrachtet und haben in diesen Modellen die Fertilitätsrate endogen bestimmt. Dabei wurde der Fall der konstanten Population von dem der variablen Population unterschieden.

In dem Modell mit konstanter Bevölkerung haben wir den Bevölkerungsbestand mit Hilfe einer geeignet gewählten Einwanderungsrate konstant gehalten. Dabei konnte gezeigt werden, daß es einen sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad gibt. Ferner wurden die Bedingungen für ein positives Gleichgewichtswachstum herausgearbeitet. Im Rahmen der Modellsimulation haben wir zuerst die Ausbildungskosten b variiert. Erwartungsgemäß zeigte sich, daß die Fertilitätsrate n sinkt, wenn die Ausbildungskosten zunehmen. Die Gleichgewichtswerte für x und z blieben von dieser Variation unberührt, während die Aufteilungsvariable u ebenso wie Wachstumsrate ω^* bereits durch die Wahl der Basisparameter festgelegt waren. Anschließend wurde der Nutzenparameter θ variiert. Dabei zeigte sich, daß die Modellvariablen sehr sensitiv auf eine Erhöhung von θ reagierten. Ein Anstieg von θ führte zu einem Anstieg von x und z , und erwartungsgemäß nahm auch die Fertilitätsrate n zu.

In dem Modell mit variabler Population haben wir angenommen, daß keine Einwanderung möglich ist. Folglich konnte die Bevölkerung nur stabil bleiben, wenn die Fertilitätsrate der exogen gegebenen Mortalitätsrate entsprach. In diesem Zusammenhang wurde die gleichgewichtige Bevölkerungsgröße endogen bestimmt. Wir konnten weiterhin zeigen, daß ein gleichgewichtiger Wachstumspfad existiert. Darüber hinaus wurden die Bedingungen für

ein positives Gleichgewichtswachstum ermittelt. Ferner haben wir die Bedingungen für Sattelpfadstabilität angegeben, und dabei festgestellt, daß diese Bedingungen lediglich numerisch überprüft werden können. Auf die Modellsimulation haben wir für diesen Fall verzichtet.

Kapitel 7

Endogene Fertilität in Wissenskapitalmodellen

7.1 Einführung: Modelle mit Wissenskapital

In diesem Kapitel untersuchen wir Modelle, die dadurch charakterisiert sind, daß die Akteure Wissenskapital $A(t)$ bilden können. Der wohl bekannteste Ansatz ist der Learning by Doing Ansatz, welcher auf Arrow (1962) zurückgeht. In diesem Ansatz bildet sich Wissenskapital als Nebenprodukt der Investitionstätigkeit der privaten Akteure. In einem alternativen Ansatz von Cigno (1984) dient der kumulierte Output als ein Indikator für Wissen. Wir starten hier mit der Formulierung aus dem Artikel von Greiner (2003), die sich an Arrow orientiert. Für den Bestand an Wissenskapital $A(t)$ gilt dann:

$$A(t) \equiv \int_{-\infty}^t \varphi e^{-\eta(t-s)} I(s) ds. \quad (7.1)$$

Dabei sind $I(\cdot)$ die Bruttoinvestitionen in privates physisches Kapital, und $\varphi e^{-\eta(t-s)}$ ist das Gewicht¹, mit dem die Investitionen zur Wissensbildung beitragen. Die letzte durchgeführte Investition im Zeitpunkt $t = s$ trägt für $\varphi = 1$ in voller Höhe zur Wissensbildung bei. Für die zeitliche Entwicklung des Wissens ergibt sich²:

$$\dot{A}(t) \equiv \varphi I(t) - \eta A(t). \quad (7.2)$$

Die Kapitalakkumulationsgleichungen des Modells ergeben sich unter Verwendung der Bruttoinvestitionen $I \equiv [A^\alpha K^{1-\alpha} - C]$ wie folgt³:

$$\begin{aligned} \dot{K} &\equiv A^\alpha K^{1-\alpha} - C - \sigma K, \\ \dot{A} &\equiv \varphi [A^\alpha K^{1-\alpha} - C] - \eta A, \end{aligned} \quad (7.3)$$

mit dem Produktionsparameter $0 < \alpha < 1$. In der obigen Formulierung gibt $\varphi > 0$ an, wie effektiv die Bruttoinvestitionen in physisches Kapital den Wissensstock erhöhen. Die Variable C beschreibt den aggregierten Konsum. Ferner ist $\sigma \geq 0$ die Abschreibungsrate auf physisches Kapital und $\eta \geq 0$ die Abschreibungsrate für das Wissenskapital.

Wir gehen in diesem Kapitel wie folgt vor: Wir beginnen mit dem Learning by Doing Ansatz und berücksichtigen die endogene Fertilitätswahl und die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft. Dabei unterscheiden wir den Fall der konstanten von dem der variablen Population. Am Ende des

¹Zur Verwendung von Gewichtsfunktionen siehe auch Grossman und Helpman (1992), Kapitel (3.2).

²Es gilt: $A(t) \equiv \int_{-\infty}^t \varphi e^{-\eta(t-s)} I(s) ds \equiv \varphi e^{-\eta t} \int_{-\infty}^t e^{\eta s} I(s) ds$.

Daraus folgt: $e^{\eta t} A(t) \equiv \varphi \int_{-\infty}^t e^{\eta s} I(s) ds$. Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$\eta e^{\eta t} A(t) + e^{\eta t} \dot{A}(t) \equiv \varphi e^{\eta t} I(t) \quad \Leftrightarrow \quad \eta A(t) + \dot{A}(t) \equiv \varphi I(t).$$

³Wir verzichten von nun ab auf den Zeitindex t .

Kapitels betrachten wir einen alternativen Ansatz bezüglich der Produktion von Wissen.

Die Modelle sollen dahingehend überprüft werden, ob ein gleichgewichtiger Wachstumspfad (GGW) existiert, und ob dieser eindeutig ist. Ein GGW sei dadurch gekennzeichnet, daß der Konsum und die Kapitalbestände mit der gleichen Rate wachsen. Die Bevölkerung ist aus definitorischen Gründen konstant. Ferner sollen die Stabilitätseigenschaften der jeweiligen Systeme untersucht werden. Darüber hinaus ist an eine Simulation der Modelle gedacht, so daß reale Situationen abgebildet werden können.

7.2 Endogene Fertilität und der Learning-by-Doing Ansatz

Wir wollen nun die Fertilitätswahl, die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft und die Bevölkerung in das Modell mit Wissenskapital einführen⁴. Die Fertilitätswahl erfassen wir in der Nutzenfunktion des repräsentativen Akteurs. Dabei wollen wir annehmen, daß der Nutzen des repräsentativen Akteurs vom Pro-Kopf-Konsum $c \equiv CL^{-1}$ und von der Pro-Kopf-Fertilität $n \equiv NL^{-1}$ abhängt. Hierbei ist L die Bevölkerungsgröße, N die gesamte Nachkommenschaft und n die Fertilitätsrate. Dann sei für die individuelle Nutzenfunktion folgende Gestalt angenommen:

$$U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n, \quad (7.4)$$

⁴Ein auf Cigno (1984) basierendes Learning-by-Doing Modell mit Bevölkerungswachstum wird in Strulik (1997) behandelt.

mit dem Nutzenparameter $\theta \geq 0$. Der repräsentative Akteur hat im Folgenden einen unendlich langen Planungshorizont und maximiert den abdiskontierten Nutzenstrom durch geeignete Wahl von c und n :

$$\max_{c,n} \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} U(c, n) dt. \quad (7.5)$$

Dabei bezeichnet ρ die Diskontrate, und t ist der Zeitindex. Die Ausbildung der Nachkommen reduziert die Möglichkeit in physisches Kapital zu investieren. Wir nehmen an, daß sich die Ausbildungskosten proportional zum Pro-Kopf-Output $y \equiv YL^{-1}$ verhalten und durch $bNy = bnLy = bnY$ gegeben sind. Die Bevölkerung L sei dabei gleich dem Arbeitseinsatz. Wie nehmen also an, daß jedes Bevölkerungsmitglied auch arbeitet. Die zeitliche Entwicklung des Populationsbestandes sei wieder durch $\dot{L} \equiv (n - d + m)L$ gegeben. Dabei ist d die Mortalitätsrate und m die vorzeichenunbeschränkte Einwanderungsrate. Zusätzlich nehmen wir an, daß die Effektivität, mit der die Bruttoinvestitionen das Wissen vermehren, vom Arbeitseinsatz (Populationsgröße) abhängig ist. Als neue Effizienzfunktion unterstellen wir $\chi(L) \equiv \varphi L^\beta$ mit $\varphi > 0$ und $\beta > 0$. Die neuen Akkumulationsgleichungen ergeben sich unter Berücksichtigung des Arbeitseinsatzes, der Ausbildungskosten und der neuen Effizienzfunktion wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{K} &\equiv (AL)^\alpha K^{1-\alpha} - C - bnY - \sigma K, \\ &\equiv (1 - bn)(AL)^\alpha K^{1-\alpha} - C - \sigma K, \\ \dot{A} &\equiv \varphi L^\beta [(1 - bn)(AL)^\alpha K^{1-\alpha} - C] - \eta A. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Für $b = 0 = \theta$ und $L = 1$ ergibt sich als Spezialfall der in Greiner (2003) vorgeschlagene Ansatz mit einer logarithmischen Nutzenfunktion. Es sei noch

erwähnt, daß in der neuen Version (AL) der Effektivarbeitseinsatz ist. Wir unterstellen also, daß Wissen arbeitsvermehrend wirkt. Hierbei ist Wissen ein reines öffentliches Gut, so daß bezüglich der Nutzung vollkommene Nichtrivalität gegeben ist. Damit ist der aggregierte Bestand A gleich dem Pro-Kopf-Bestand. Die jeweilige zeitliche Entwicklung der Pro-Kopf-Größen ergibt sich mit $\dot{k} \equiv \dot{K}L^{-1} - k\dot{L}L^{-1}$ sowie $k \equiv KL^{-1}$ und $c \equiv CL^{-1}$ zu:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv (1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c - \sigma k - (n - d + m) k, \\ \dot{A} &\equiv \varphi L^\beta L [(1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c] - \eta A.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Wir wollen nun den Fall der konstanten Population und den der variablen Population untersuchen und beginnen mit dem konstanten Bevölkerungsbestand.

7.2.1 Das Modell mit konstanter Population

Da in diesem Modell die Fertilitätsrate n endogen bestimmt wird, ist im allgemeinen damit zu rechnen, daß die Fertilität von der Mortalität d abweichen wird ($n \neq d$). Folglich kann dann Einwanderung m benutzt werden, um die Population konstant zu halten. Es muß dann stets $m = d - n$ gelten. Wir wollen annehmen, daß m nicht vorzeichenbeschränkt ist und daß die staatlichen Autoritäten immer in der Lage sind, die Einwanderung in geeigneter Weise festzulegen. Dann können wir den Bevölkerungsbestand auf $L = 1$ normieren und müssen nicht zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Die Effizienzfunktion nimmt dann den Wert $\chi = \varphi$ an.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$ und den folgenden beiden Kapitalakkumulationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv (1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c - \sigma k, \\ \dot{A} &\equiv \varphi \left[(1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c \right] - \eta A.\end{aligned}\quad (7.8)$$

Wir bilden nun die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und gehen bei der Optimierung vom kompetitiven Fall aus. Die resultierenden Optimalitätsbedingungen lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b A^\alpha k^{1-\alpha} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda (1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda \sigma = \rho \lambda - \dot{\lambda},\end{aligned}\quad (7.9)$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte nun $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv Ak^{-1}$. Dann folgt aus den Optimalitätsbedingungen für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{bz^\alpha}.\quad (7.10)$$

Die Fertilitätsrate hängt positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Über das Vorzeichen von $\partial n / \partial \theta$ und $\partial n / \partial b$ auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) kann vorerst keine Aussage getroffen werden, da noch nicht klar ist, inwiefern die Variablen x und z auf dem GGW von θ und b abhängen. Für endliche Werte x und z gilt jedoch: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$ sowie $b \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$.

Die Modelldynamik

Die Entwicklung des Schattenpreises λ ergibt sich aus $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda}/\lambda = \rho + \sigma - (1 - bn)(1 - \alpha)z^\alpha$ gegeben. Wir erhalten schließlich wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha)z^\alpha - (1 - \alpha)\theta x - \sigma - \rho, \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv z^\alpha - \theta x - x - \sigma, \\ \frac{\dot{A}}{A} &\equiv \varphi z^{\alpha-1} - \varphi x z^{-1}(1 + \theta) - \eta.\end{aligned}\quad (7.11)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv Ak^{-1}$. Dann hat das resultierende dynamische System die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv x(1 + \alpha\theta) - \alpha z^\alpha - \rho, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \varphi z^{\alpha-1} - \varphi x z^{-1}(1 + \theta) - z^\alpha + x(1 + \theta) + \sigma - \eta.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gilt wieder $\dot{x} = 0 = \dot{z}$. Dabei resultiert für x die folgende Beziehung:

$$x \equiv \frac{\alpha z^\alpha + \rho}{1 + \alpha\theta}.\quad (7.13)$$

Die Nullstellen von $f(z) \equiv \dot{z}z^{-1}$ lassen sich nur numerisch bestimmen. Es läßt sich jedoch die folgende Behauptung aufstellen:

Satz 7.1 *Für $\sigma > \eta$ hat die Funktion $f(z) \equiv \dot{z}z^{-1}$ mindestens zwei Nullstellen und das System damit mindestens zwei gleichgewichtige Wachstumspfade (GGW). Für $\sigma = \eta$ hat die Funktion $f(z) \equiv \dot{z}z^{-1}$ mindestens eine Nullstelle und das System entsprechend mindestens einen GGW.*

Beweis: Zuerst ersetzen wir die Variable x in der Gleichung (7.12) durch den entsprechenden Gleichgewichtswert und erhalten für $f(z) \equiv \dot{z}z^{-1}$ den folgenden Ausdruck:

$$\frac{\dot{z}}{z} \equiv \varphi z^{\alpha-1} \psi - z^\alpha \psi - \varphi q \rho (1 + \theta) z^{-1} + (1 + \theta) q \rho + \sigma - \eta, \quad (7.14)$$

mit $\psi \equiv [1 - q\alpha(1 + \theta)]$ und $q \equiv (1 + \alpha\theta)^{-1}$. Dabei zeigt sich, daß die Funktionswerte für sehr kleine und sehr große z gegen $-\infty$ streben. Also gilt:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{\dot{z}}{z} \right) = -\infty. \quad (7.15)$$

Es seien nun die Werte z_1 und z_2 wie folgt gegeben:

$$z_1 = \varphi, \quad z_2 = \left[\frac{q\rho(1 + \theta)}{\psi} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (7.16)$$

mit $\psi \equiv [1 - q\alpha(1 + \theta)]$ und $q \equiv (1 + \alpha\theta)^{-1}$. Dann folgt:

$$\frac{\dot{z}}{z} \Big|_{z \equiv z_1} = \frac{\dot{z}}{z} \Big|_{z \equiv z_2} = \sigma - \eta. \quad (7.17)$$

Falls nun $\sigma > \eta$ gilt, dann ist $f(z) \equiv \dot{z}z^{-1} > 0$. Da die Funktion $f(z)$ stetig ist für $z \in (0, +\infty)$, folgt mit Gleichung (7.15), daß es mindestens zwei Nullstellen geben muß. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt.

Falls $\sigma = \eta$ gilt, dann ist $f(z) \equiv \dot{z}z^{-1} = 0$. In diesem Fall sind z_1 und z_2 Nullstellen. Wenn $z_1 = z_2$ ist, dann liegt eine doppelte Nullstelle vor. Damit ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt. \square

Der Output deckt die Konsumausgaben, wenn für $n = d$ die Bedingung $z^\alpha(1 - bd) - x \geq 0$ erfüllt ist. Mit $bdz^\alpha = \theta x$ erhalten wir als Bedingung $z^\alpha \psi \geq (1 + \theta)q\rho$. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $z^\alpha \geq z_2^\alpha$, so daß also $z \geq z_2$ gelten muß.

Wir kommen nun zur Stabilitätsuntersuchung und wollen aus Vereinfachungsgründen annehmen, daß $\sigma = \eta$ gilt. Dann liegen für $z_1 \neq z_2$ mindestens zwei gleichgewichtige Wachstumspfade vor, und es gilt:

Satz 7.2 *Das System ist für $\tilde{z} = \max\{z_1, z_2\}$ sattelpfadstabil.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts⁵ (\bar{x}, \bar{z}) und bestimmen die Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - \\ ? & ? \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (2×2) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2$ und $k = 1, 2$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} j_{11} &= 2x(1 + \alpha\theta) - \alpha z^\alpha - \rho, \\ j_{12} &= -\alpha^2 x z^{\alpha-1}, \\ j_{21} &= z(1 + \theta) - \varphi(1 + \theta), \\ j_{22} &= \alpha\varphi z^{\alpha-1} - (\alpha + 1)z^\alpha + (\sigma - \eta) + x(1 + \theta). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Eine negative Determinante der Jacobi-Matrix ist im (2×2) -Fall notwendig und hinreichend für Sattelpfadstabilität. Es folgt: $\det(J) < 0$, wenn gilt:

$$(j_{22}) < \alpha z^\alpha \left[\frac{\alpha + \alpha\theta}{1 + \alpha\theta} \right] - \varphi \alpha z^{\alpha-1} \left[\frac{\alpha + \alpha\theta}{1 + \alpha\theta} \right]. \quad (7.20)$$

⁵Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

Nun muß eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. Wir betrachten zuerst die Nullstelle $z = z_1 = \varphi$. Dann reduziert sich für $\sigma = \eta$ die Stabilitätsbedingung zu $(j_{22}) < 0$. Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich:

$$q\rho(1+\theta) < z_1^\alpha \underbrace{[1 - (1+\theta)q\alpha]}_{\psi}. \quad (7.21)$$

Wegen Gleichung (7.16) muß also $z_1^\alpha > z_2^\alpha$ gelten. Daraus folgt $\varphi = z_1 > z_2$, und das bedeutet, daß $\varphi = z_1$ die größere der beiden Nullstellen sein muß. Wir betrachten nun die Nullstelle $z = z_2$. Dann folgt für die Stabilitätsbedingung:

$$(j_{22}) < \alpha q(1+\theta) [1 - \varphi z_2^{-1}] \alpha z_2^\alpha. \quad (7.22)$$

Für (j_{22}) ergibt sich durch Einsetzen und Umformen:

$$(j_{22}) = \alpha \varphi z_2^{\alpha-1} - \alpha z_2^\alpha + \varphi z_2^{-1} \underbrace{[q\rho(1+\theta) - \psi z_2^\alpha]}_{=0}. \quad (7.23)$$

Daraus ergibt sich, daß die folgende Ungleichung erfüllt sein muß:

$$\alpha z_2^\alpha [\varphi z_2^{-1} - 1] < \alpha q(1+\theta) [1 - \varphi z_2^{-1}] \alpha z_2^\alpha. \quad (7.24)$$

Die Ungleichung ist erfüllt, wenn gilt:

$$0 < [\alpha q(1+\theta) + 1] (1 - \varphi z_2^{-1}). \quad (7.25)$$

Die Ungleichung ist erfüllt, wenn $1 > \varphi z_2^{-1}$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $z_2 > \varphi = z_1$, so daß z_2 die größere der beiden Nullstellen sein muß. Damit ist gezeigt, daß die größere der beiden Nullstellen die Bedingung für Sattelpfadstabilität erfüllt. \square

Wir kommen nun zu den resultierenden Wachstumsraten, die sich auf den gleichgewichtigen Wachstumspfad ergeben. Dabei gilt:

Satz 7.3 Für $z_1^\alpha > z_2^\alpha + \sigma\psi^{-1}$ ist die gleichgewichtige Wachstumsrate positiv.

Beweis: Wir gehen von folgender Gleichung aus:

$$\omega^* = z^\alpha - x(1 + \theta) - \sigma > 0. \quad (7.26)$$

Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich:

$$z^\alpha > \frac{q\rho(1 + \theta)}{\psi} + \frac{\sigma}{\psi}. \quad (7.27)$$

Daraus folgt die Bedingung $z^\alpha > z_2^\alpha + \sigma\psi^{-1}$ mit der Folge, daß die Nullstelle $z = z_2$ kein positives gleichgewichtiges Wachstum generiert. Damit ist ein positives gleichgewichtiges Wachstum nur für die Nullstelle $z = z_1 = \varphi$ möglich, wenn die Bedingung $\varphi^\alpha = z_1^\alpha > z_2^\alpha + \sigma\psi^{-1}$ erfüllt ist. \square

Die Modellsimulation

Wir gehen bei der Simulation des Modells wie folgt vor. Zuerst legen wir die Basisparameter fest. Anschließend nehmen wir an, daß der Staat die Ausbildungskosten b beeinflussen kann. Wir untersuchen dann die Auswirkungen verschiedener Werte für b sowie auch θ auf das System. Dabei interessieren uns besonders die gleichgewichtige Wachstumsrate und die resultierende Fertilitätsrate auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad.

Wir starten mit der Basiskonfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,4$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsrate gelte $\sigma = \eta = 0,10$, und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,025$ gegeben. Ferner sei $\varphi = 0,25$.

Tabelle 7.1: Variation der Ausbildungskosten im Learning-by-Doing Modell bei konstanter Population

b	x	z	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
18	0,23	0,25	1,18	1,22
19	.	.	1,12	.
20	.	.	1,06	.
21	.	.	1,01	.
22	.	.	0,96	.

In der Tabelle 7.1 ist $\tilde{n} \equiv n100$ die Fertilitätsrate in Prozent und $\tilde{\omega} \equiv \omega100$ die Wachstumsrate in Prozent. Es zeigt sich, daß die Variation der Ausbildungskosten b die Gleichgewichtswerte x und z , sowie die gleichgewichtige Wachstumsrate ω nicht beeinflußt. Erwartungsgemäß nimmt die gleichgewichtige Fertilitätsrate ab, wenn die Ausbildungskosten erhöht werden. Dabei verursacht eine Kostenzunahme von $\Delta b = 1$ eine Abnahme der Fertilitätsrate zwischen 0,05 und 0,06 Prozentpunkten. Offenbar stellt diese Abnahme der Fertilität gerade sicher, daß die aggregierten Ausbildungsausgaben für die gesamte Nachkommenschaft gleich bleiben, so daß sich die Werte für x und z , sowie für ω nicht verändern.

Wir wollen nun den Nutzenparameter θ variieren und halten die Ausbildungskosten auf $b = 20$ konstant:

Tabelle 7.2: Variation des Nutzenparameters im Learning-by-Doing Modell bei konstanter Population

θ	x	z	\tilde{n}	$\tilde{\omega}$
0,30	0,24	0,25	0,84	2,00
0,35	0,24	·	0,95	1,60
0,40	0,23	·	1,06	1,22
0,45	0,23	·	1,16	0,86
0,50	0,22	·	1,26	0,51

Es zeigt sich, daß die Variation des Nutzenparameters θ den Gleichgewichtswert z unverändert läßt, während der Gleichgewichtswert x für $\Delta\theta = 0,20$ geringfügig absinkt. Erwartungsgemäß nimmt die gleichgewichtige Fertilitätsrate zu, wenn der Parameter θ erhöht wird. Allerdings geht die Zunahme der Fertilitätsrate mit einer absinkenden gleichgewichtigen Wachstumsrate einher. Dieses Ergebnis ist plausibel, da bei steigenden n und konstantem b die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft zunehmen. Folglich geht eine Erhöhung von θ zu Lasten der Akkumulation des privaten physischen Kapitals und damit zu Lasten der Wachstumsrate des Systems.

7.2.2 Das Modell mit variabler Population

Wir gehen nun davon aus, daß aus institutionellen Gründen keine Einwanderung $m = 0$ stattfinden kann, wie es auch für die Welt als Ganzes gilt. Wir betrachten also eine Welt mit nur einem Land. Dann gilt für die zeitliche

Entwicklung des Bevölkerungsbestandes $\dot{L} \equiv (n - d) L$, und wir müssen nun zwischen aggregierten und Pro-Kopf-Größen unterscheiden. Im allgemeinen kann nun die Fertilität von der Mortalität abweichen ($n \neq d$) und wir erhalten mit $\dot{L}L^{-1} \equiv (n - d)$ eine weitere Gleichung, welche das dynamische Verhalten unseres Systems beschreibt. Wir werden noch sehen, daß dadurch der Populationsbestand L zu einer modellendogenen Variable wird.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$, den Kapitalakkumulationsgleichungen und der Gleichung für das Bevölkerungswachstum:

$$\begin{aligned}\dot{k} &\equiv (1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c - \sigma k - (n - d) k, \\ \dot{A} &\equiv \chi(L) L [(1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c] - \eta A, \\ &\equiv \varphi L^{\beta+1} [(1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - c] - \eta A, \\ \dot{L} &\equiv (n - d) L.\end{aligned}\tag{7.28}$$

Wir bilden nun die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und gehen bei der Optimierung vom kompetitiven Fall aus. Die resultierenden Optimalitätsbedingungen lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b A^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda k = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda (1 - bn) A^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda \sigma - \lambda (n - d) = \rho \lambda - \dot{\lambda},\end{aligned}\tag{7.29}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte nun wieder $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv Ak^{-1}$. Dann folgt aus den Optimalitätsbedingungen

für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{1 + bz^\alpha}. \quad (7.30)$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) muß stets $n = d$ gelten. In der Ungleichgewichtssituation ist n variabel und hängt positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Wir erhalten wie im Fall der konstanten Population: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Falls die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft verschwindend gering sind ($b \rightarrow 0$), so folgt diesmal allerdings, daß die Fertilitätsrate den endlichen Wert $n = \theta x$ annimmt.

Die Modelldynamik

Die Entwicklung des Schattenpreises λ ergibt sich aus $\partial H / \partial k = \rho \lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda} / \lambda = \rho + \sigma + (n - d) - (1 - \alpha)(1 - bn)z^\alpha$ gegeben. Wir erhalten schließlich wegen $\dot{\lambda} / \lambda = -\dot{c} / c$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1 - \alpha)(1 - bn)z^\alpha - \rho - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv z^\alpha(1 - bn) - x - \sigma - (n - d), \\ \frac{\dot{A}}{A} &\equiv \varphi L^{\beta+1} [z^{\alpha-1}(1 - bn) - xz^{-1}] - \eta. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv Ak^{-1}$. Dann hat das resultierende dynamische System nach Substitution von n und einigen Umformungen die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{x} &\equiv x - \rho - \alpha z^\alpha + \alpha b \theta x (1 + bz^\alpha)^{-1} z^\alpha, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \varphi L^{\beta+1} [z^\alpha - b \theta x (1 + bz^\alpha)^{-1} z^\alpha - x] z^{-1} + \\ &\quad x(1 + \theta) - z^\alpha + q, \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} \equiv \left[\frac{\theta x}{1 + bz^\alpha} - d \right], \quad (7.32)$$

mit $q \equiv \sigma - \eta - d$. Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gelte nun $\dot{L} = \dot{x} = \dot{z} = 0$, so daß sich für die Gleichgewichtswerte folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned} z &\equiv \left[\frac{d - \theta\rho}{\alpha\theta(1 - bd) - bd} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x &\equiv \frac{d(1 + bz^\alpha)}{\theta}, \\ L &\equiv \left[\frac{(\omega^* + \eta)z}{(\omega^* + \sigma)\varphi} \right]^{\frac{1}{\beta+1}}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Für den Spezialfall $\sigma = \eta$ vereinfacht sich der gleichgewichtige Populationsbestand L zu:

$$L = \left(\frac{z}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}. \quad (7.34)$$

Satz 7.4 *Das System ist für $b\rho > \alpha(1 - bd)$ und $\rho + \left[\frac{\omega^* + \eta}{\omega^* + \sigma} \right] \alpha z^\alpha < \omega^* + \eta$ sattelpfadstabil.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts⁶ $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{L})$ und bestimmen die Determinante und die Spur der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{L} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \\ L - \bar{L} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - & 0 \\ ? & ? & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (3×3) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ über die oben

⁶Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= x + \alpha b d z^\alpha, \\
 j_{12} &= -\alpha^2 x z^{\alpha-1} \left[1 - b d + \frac{b^2 d z^\alpha}{1 + b z^\alpha} \right], \\
 j_{13} &= 0, \\
 \\
 j_{21} &= z(1 + \theta) - \varphi L^{\beta+1} \left[\frac{b \theta z^\alpha}{1 + b z^\alpha} - 1 \right], \\
 j_{22} &= -\alpha z^\alpha - \varphi L^{\beta+1} [z^\alpha - b d z^\alpha - x] z^{-1} + \\
 &\quad \varphi L^{\beta+1} [\alpha z^\alpha - \alpha b d z^\alpha] z^{-1} + \varphi L^{\beta+1} \left[\frac{b^2 d \alpha z^\alpha}{1 + b z^\alpha} \right] z^{\alpha-1}, \\
 j_{23} &= (\beta + 1) \varphi L^\beta [z^\alpha - b d z^\alpha - x], \\
 \\
 j_{31} &= \frac{\theta L}{1 + b z^\alpha}, \\
 j_{32} &= -\frac{\theta x}{(1 + b z^\alpha)^2} L \alpha b z^{\alpha-1}, \\
 j_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Im (3×3) - Fall stellt eine positive Determinante in Kombination mit einer negativen Spur Sattelpfadstabilität sicher. Der Sattelpfad ist dann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit⁷. Wir zeigen zuerst, daß die Determinante positiv ist. Für die Determinante gilt nun:

$$\det(J) \equiv - (j_{23}) [(j_{11}) (j_{32}) - (j_{31}) (j_{12})]. \tag{7.37}$$

⁷Vgl. Wirl (1997), sowie den Anhang dieser Arbeit.

Die Determinante ist wegen $(j_{23}) > 0$ positiv, wenn $(j_{11})(j_{32}) < (j_{31})(j_{12})$ gilt. Einsetzen und Umformen ergibt:

$$-b \left[\frac{x + \alpha b d z^\alpha}{1 + b z^\alpha} \right] < -\alpha \left[1 - b d + \frac{b^2 d z^\alpha}{1 + b z^\alpha} \right]. \quad (7.38)$$

Mit $x + \alpha b d z^\alpha = \rho + \alpha z^\alpha$ folgt nach einigen Umformungen:

$$\alpha \left[1 + b z^\alpha - b d \underbrace{-b^2 d z^\alpha + b^2 d z^\alpha}_{=0} \right] < \rho b + \alpha b z^\alpha. \quad (7.39)$$

Es folgt schließlich $\alpha(1 - b d) < \rho b$, wodurch der erste Teil der Behauptung gezeigt wäre. Wir kommen nun zum zweiten Teil und zeigen, daß die Spur $tr(J)$ negativ ist. Wegen $(j_{33}) = 0$ muß dann für die Spur gelten: $tr(J) \equiv (j_{11}) + (j_{22}) < 0$. Wir ersetzen nun (j_{11}) und (j_{22}) . Ferner verwenden wir die Beziehung $x + \alpha b d z^\alpha - \alpha z^\alpha = \rho$ und bestimmen anschließend einen Ausdruck für $tr(J) z(1 + b z^\alpha)$:

$$\begin{aligned} tr(J) z(1 + b z^\alpha) &= \rho z(1 + b z^\alpha) - \varphi L^{\beta+1} [z^\alpha - b d z^\alpha - x] (1 + b z^\alpha) + \\ &\quad \varphi L^{\beta+1} \alpha z^\alpha [(1 - b d)(1 + b z^\alpha) + b^2 d z^\alpha]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Wegen $z > 0$ und $(1 + b z^\alpha) > 0$ ist die Spur $tr(J)$ negativ, wenn die rechte Seite von (7.40) negativ ist. Mit $[(1 - b d)(1 + b z^\alpha) + b^2 d z^\alpha] = 1 - b d + b z^\alpha$ ist die rechte Seite von (7.40) negativ, wenn gilt:

$$\rho z(1 + b z^\alpha) + \varphi L^{\beta+1} \alpha z^\alpha (1 - b d + b z^\alpha) < \varphi L^{\beta+1} [z^\alpha - b d z^\alpha - x] (1 + b z^\alpha). \quad (7.41)$$

Wenn nun $(1 - b d + b z^\alpha)$ durch $(1 + b z^\alpha)$ ersetzt wird, wird die linke Seite von (7.41) größer. Wenn die neue Ungleichung gilt, gilt auch die Ungleichung (7.41). Die neue Ungleichung lautet nach Division durch $(1 + b z^\alpha)$ wie folgt:

$$\rho z + \varphi L^{\beta+1} \alpha z^\alpha < \varphi L^{\beta+1} [z^\alpha (1 - b d) - x]. \quad (7.42)$$

Wegen $\omega^* + \eta = \varphi L^{\beta+1} [z^\alpha (1 - bd) - x] z^{-1}$ und $z^\alpha (1 - bd) - x = \omega^* + \sigma$ ergibt sich:

$$\rho + \left[\frac{\omega^* + \eta}{\omega^* + \sigma} \right] \alpha z^\alpha < \omega^* + \eta. \quad (7.43)$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Die Modellsimulation

Wir gehen bei der Simulation des Modells wie folgt vor. Zuerst legen wir die Basisparameter fest. Anschließend nehmen wir an, daß der Staat die Ausbildungskosten b beeinflussen kann. Wir untersuchen dann die Auswirkungen verschiedener Werte für b auf das System. Dabei interessieren uns besonders die gleichgewichtige Wachstumsrate und der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand.

Wir starten mit der Basiskonfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,6$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsrate gelte $\sigma = \eta = 0,07$, und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,03$ gegeben. Die Mortalitätsrate sei mit $d = 0,012$ angenommen. Ferner sei $\varphi = 0,10$ und $\beta = 0,50$.

Tabelle 7.3: Variation der Ausbildungskosten im Learning-by-Doing Modell bei variabler Population

b	x	z	L	$\tilde{\omega}$	$sp(J)$	W
23, 0	0, 20	0, 21	1, 63	1, 31	+	+
22, 9	0, 22	0, 25	1, 85	2, 68	+	+
22, 8	0, 25	0, 31	2, 13	4, 41	+	+
22, 7	0, 28	0, 40	2, 50	6, 69	+	+
22, 6	0, 33	0, 52	3, 02	9, 80	+	+

In der Tabelle 7.3 ist $\tilde{\omega} \equiv \omega 100$ die Wachstumsrate in Prozent, sowie $sp(J)$ das Vorzeichen der Spur und W das Vorzeichen des W -Wertes. Es zeigt sich, daß die Ausbildungskosten nur innerhalb eines sehr kleinen Bereiches sinnvoll variiert werden können, da das System sehr sensitiv auf diese Kostenvariation reagiert. So nehmen insbesondere der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand und die gleichgewichtige Wachstumsrate stark zu, wenn die Ausbildungskosten b geringfügig reduziert werden. Für die Zunahme der Wachstumsrate ergeben sich zwei Erklärungen. Erstens erhöhen sinkende Ausbildungskosten die Möglichkeit, in privates physisches Kapital zu investieren; zweitens wirkt eine größere Bevölkerung in diesem Modell positiv auf die Akkumulation des Wissenskapitals.

Ferner sind sowohl die Spur $sp(J)$ als auch der W -Wert stets positiv, so daß wir nicht auf Sattelpfadstabilität schließen können. Wir fahren daher mit der Betrachtung der resultierenden Eigenwerte e_k mit $k = 1, \dots, 3$ fort:

Tabelle 7.4: Bestimmung der Eigenwerte im Learning-by-Doing Modell bei variabler Population

b	e_1	e_2	e_3
23,0	0,00 (+)	$0,09 + i0,16$	$0,09 - i0,16$
22,9	0,00 (+)	$0,09 + i0,18$	$0,09 - i0,18$
22,8	0,00 (+)	$0,10 + i0,20$	$0,10 - i0,20$
22,7	0,00 (+)	$0,12 + i0,22$	$0,12 - i0,22$
22,6	0,00 (+)	$0,13 + i0,26$	$0,13 - i0,26$

Die Tabelle 7.4 zeigt, daß wir bei der betrachteten Parameterkonstellation einen nahe bei Null liegenden positiven reellen Eigenwert e_1 und ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar $e_{2,3}$ mit positivem Realteil erhalten. Folglich liegt in diesem Fall keine Sattelpfadstabilität vor. Wir verzichten nun auf die Variation des Nutzenparameters θ und stellen nun einen alternativen Ansatz der Wissensgewinnung bei variabler Population vor.

7.3 Populationsgröße und Ideenproduktion

In diesem Abschnitt wollen wir einen alternativen Ansatz der Wissenskaptalakkumulation in einem endogenen Wachstumsmodell mit endogener Fertilitätswahl betrachten. Eine sehr gängige Modellierung hinsichtlich der Wissenskaptalbildung ist der Learning by doing Ansatz, der bereits weiter oben im Text vorgestellt wurde. In diesem Ansatz erhöht sich der Bestand an

Wissenskapital als Nebenprodukt der Investitionstätigkeit⁸.

Das hier vorzustellende Modell geht davon aus, daß die zeitliche Entwicklung des Bestandes an Wissenskapital positiv vom Wissensbestand und von der Bevölkerungsgröße abhängt. Dahinter steht die Überlegung, daß eine große Bevölkerung mehr gute Ideen⁹ produziert als eine kleine Bevölkerung. Dieser Grundgedanke findet sich bereits in Kuznets (1960). Kuznets vermutet in dieser Arbeit, daß eine größere Bevölkerung mit einer höheren Wahrscheinlichkeit nützliche Innovationen hervorbringt¹⁰.

Wir wollen nun annehmen, daß Wissen ein reines öffentliches Gut ist. Die zeitliche Entwicklung des Wissensbestandes ergibt sich dann wie folgt:

$$\dot{A} \equiv \gamma AL^\beta - \eta A. \quad (7.44)$$

Damit ist die Bruttozunahme $\dot{A} + \eta A$ des Wissensbestandes eine Funktion des Wissens und der Populationsgröße, und die Wachstumsrate ω_A des Wissensstocks ist durch $\omega_A \equiv \gamma L^\beta - \eta$ gegeben und hängt also ausschließlich von der Größe der Bevölkerung ab. Für den Spezialfall $\eta = 0$ und $\beta = 1$ ist die Wachstumsrate des Wissens proportional zur Bevölkerungsgröße; dies ist die Formulierung, die in Kremer (1993) für die Entwicklung des technologischen Niveaus verwendet wurde.

Das Modell

Das Modell besteht aus der Nutzenfunktion $U(c, n) \equiv \ln c + \theta \ln n$, der Gleichung für die zeitliche Entwicklung des physischen Kapitals und der Gleichung

⁸Vgl. Arrow (1962). Eine verallgemeinerte Version findet sich in Greiner (2003).

⁹Siehe hierzu auch Jones (2003).

¹⁰Vgl. hierzu auch: Ehrlich und Lui (1997), S. 232.

chung für das Bevölkerungswachstum:

$$\begin{aligned}
 \dot{k} &\equiv A^\alpha k^{1-\alpha} - c - bny - \sigma k - (n-d)k, \\
 \dot{A} &\equiv \gamma AL^\beta - \eta A, \\
 \dot{L} &\equiv (n-d)L.
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

Wir bilden nun die Hamiltonfunktion in laufenden Werten $H \equiv \ln c + \theta \ln n + \lambda \dot{k}(c, n, k)$ und gehen bei der Optimierung vom kompetitiven Fall aus. Die resultierenden Optimalitätsbedingungen lauten dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial c} &\equiv \frac{1}{c} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = c^{-1}, \\
 \frac{\partial H}{\partial n} &\equiv \frac{\theta}{n} - \lambda b A^\alpha k^{1-\alpha} - \lambda k = 0, \\
 \frac{\partial H}{\partial k} &\equiv \lambda(1-\alpha)(1-bn)A^\alpha k^{-\alpha} - \lambda\sigma - \lambda(n-d) = \\
 &= \rho\lambda - \dot{\lambda},
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

mit der Transversalitätsbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \lambda(t) k(t) \geq 0$. Es gelte nun $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv Ak^{-1}$. Dann folgt aus den Optimalitätsbedingungen für die Fertilitätsrate n :

$$n = \frac{\theta x}{1 + bz^\alpha}. \tag{7.47}$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) muß stets $n = d$ gelten. In der Ungleichgewichtssituation ist n variabel und hängt positiv von x und θ , sowie negativ von z und b ab. Wir erhalten wie im Fall der konstanten Population: $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow 0$. Falls die Ausbildungskosten für die Nachkommenschaft verschwindend gering sind ($b \rightarrow 0$), so folgt diesmal allerdings, daß die Fertilitätsrate den endlichen Wert $n = \theta x$ annimmt.

Die Modelldynamik

Die zeitliche Entwicklung des Schattenpreises λ folgt aus $\partial H/\partial k = \rho\lambda - \dot{\lambda}$ und ist durch $\dot{\lambda}/\lambda = \rho + \sigma + (n-d) - (1-\alpha)[1-bn]z^\alpha$ gegeben. Die Modelldynamik ergibt sich wegen $\dot{\lambda}/\lambda = -\dot{c}/c$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} &\equiv (1-\alpha)(1-bn)z^\alpha - \rho - \sigma - (n-d), \\ \frac{\dot{k}}{k} &\equiv (1-bn)z^\alpha - x - \sigma - (n-d), \\ \frac{\dot{A}}{A} &\equiv \gamma L^\beta - \eta.\end{aligned}\tag{7.48}$$

Es gelte $x \equiv ck^{-1}$ und $z \equiv Ak^{-1}$. Dann hat das resultierende dynamische System die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x} &\equiv x - \rho - \alpha(1-bn)z^\alpha, \\ \frac{\dot{z}}{z} &\equiv \gamma L^\beta - \eta + \sigma + (n-d) + x - (1-bn)z^\alpha, \\ \frac{\dot{L}}{L} &\equiv (n-d).\end{aligned}\tag{7.49}$$

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad gilt wieder $\dot{L} = \dot{x} = \dot{z} = 0$, so daß sich für die Gleichgewichtswerte folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned}z &\equiv \left[\frac{d - \theta\rho}{\alpha\theta(1-bd) - db} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \\ x &\equiv \left[\frac{d(1+bz^\alpha)}{\theta} \right], \\ L &\equiv \left[\frac{\omega^* + \eta}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\beta}},\end{aligned}\tag{7.50}$$

mit: $\omega^* \equiv z^\alpha(1-bd) - x - \sigma$. Wir werden weiter unten noch sehen, daß $\theta < db[\alpha(1-bd)]^{-1}$ aus Stabilitätsgründen gelten muß. Dann jedoch muß

wegen der Nichtnegativität von z auch $d < \theta\rho$ gelten. Da wir die Möglichkeit der Kreditaufnahme ausschließen wollen, muß der Output die gesamten Ausgaben decken. Die entsprechende Budgetbeschränkung pro Kopf lautet dann $A^\alpha k^{1-\alpha} > c + bnA^\alpha k^{1-\alpha} \Leftrightarrow (1 - bd)z^\alpha > x$. Wir substituieren x und nehmen an, daß $\theta(1 - bd) > bd$ gilt. Dann folgt, daß die Budgetbeschränkung erfüllt ist, wenn gilt:

$$z > \left[\frac{d}{\theta(1 - bd) - bd} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.51)$$

Wir können an dieser Stelle bereits feststellen, daß der Nutzenparameter θ aus Stabilitätsgründen (wie noch zu zeigen sein wird) und aus Budgetgründen der folgenden Beschränkung genügen muß:

$$\frac{bd}{1 - bd} < \theta < \frac{bd}{\alpha(1 - bd)}. \quad (7.52)$$

Wir wollen nun mit der Stabilitätsuntersuchung fortfahren:

Satz 7.5 *Das System ist für $\theta < db[\alpha(1 - bd)]^{-1}$ sattelpfadstabil, wenn außerdem $\alpha(1 + \theta) < 1$ und $\beta(\omega^* + \eta) < \alpha z^\alpha$ erfüllt sind.*

Beweis: Um Sattelpfadstabilität zu zeigen, linearisieren wir das dynamische System in der Nähe des Gleichgewichts¹¹ $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{L})$ und bestimmen die Determinante und die Spur der Jacobi-Matrix:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{L} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ z - \bar{z} \\ L - \bar{L} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} + & - & 0 \\ + & - & + \\ + & - & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

¹¹Wir werden im Folgenden aus Gründen der Vereinfachung im allgemeinen auf die besondere Kennzeichnung der Gleichgewichtswerte verzichten.

Dabei ist J eine im Gleichgewicht berechnete (3×3) -Jacobi-Matrix, die bezüglich der Einträge j_{ik} mit $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ über die oben angegebene Vorzeichenstruktur verfügt. Die Einträge j_{ik} ergeben sich unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbeziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= x + \alpha b d z^\alpha, \\
 j_{12} &= -\alpha^2 x z^{\alpha-1} \left[1 - b d + \frac{b^2 d z^\alpha}{1 + b z^\alpha} \right], \\
 j_{13} &= 0, \\
 \\
 j_{21} &= (1 + \theta) z, \\
 j_{22} &= -\alpha z^\alpha, \\
 j_{23} &= \beta \gamma z L^{\beta-1}, \\
 \\
 j_{31} &= \frac{\theta L}{1 + b z^\alpha}, \\
 j_{32} &= -\frac{L \alpha b d z^{\alpha-1}}{1 + b z^\alpha}, \\
 j_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{7.54}$$

Im (3×3) - Fall stellt eine positive Determinante in Kombination mit einem negativen W -Wert Sattelpfadstabilität sicher. Der Sattelpfad ist dann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit¹². Wir zeigen zuerst, daß die Determinante positiv ist. Die Determinante ist wegen $(j_{23}) > 0$ positiv, wenn $(j_{11})(j_{32}) < (j_{31})(j_{12})$ erfüllt ist. Einsetzen und Umformen ergibt:

$$\alpha \theta x - \alpha \theta x b d + \frac{\alpha b^2 z^\alpha d \theta x}{(1 + b z^\alpha)} < x d b + \alpha b d z^\alpha b d. \tag{7.55}$$

¹²Vgl. Wirl (1997), sowie den Anhang dieser Arbeit.

Im Gleichgewicht gilt die Beziehung $d = \theta x [1 + bz^\alpha]^{-1}$. Einsetzen ergibt schließlich $\alpha \theta x (1 - bd) < xdb$. Daraus folgt $\theta < db [\alpha (1 - db)]^{-1}$. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt. Wir kommen nun zur Betrachtung des W -Wertes, wobei für W gilt:

$$\begin{aligned} W &\equiv \begin{vmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{11} & j_{13} \\ j_{31} & j_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} j_{22} & j_{23} \\ j_{32} & j_{33} \end{vmatrix}, \\ &= (j_{11})(j_{22}) - (j_{21})(j_{12}) - (j_{32})(j_{23}). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Dieser Wert ist negativ, wenn gilt:

$$\alpha x (1 + \theta) \left[1 - bd + \frac{b^2 dz^\alpha}{1 + bz^\alpha} \right] + \frac{bd\gamma\beta L^\beta}{1 + bz^\alpha} < x + \alpha bdz^\alpha. \quad (7.57)$$

Da sowohl $bz^\alpha [1 + bz^\alpha]^{-1} < 1$ als auch $[1 + bz^\alpha]^{-1} < 1$ gilt¹³, können beide Ausdrücke jeweils durch 1 ersetzt werden. Dann wird die linke Seite von (7.57) größer. Wenn die neue Ungleichung gilt, dann gilt auch die Ungleichung (7.57). Die neue Ungleichung lautet nun wie folgt:

$$\alpha x (1 + \theta) + db\gamma\beta L^\beta < x + \alpha bdz^\alpha. \quad (7.58)$$

Falls nun $\alpha (1 + \theta) < 1$ erfüllt ist, resultiert unter Verwendung von $\gamma L^\beta = \omega^* + \eta$ die Ungleichung $\beta (\omega^* + \eta) < \alpha z^\alpha$, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Wir wollen noch die resultierende Wachstumsrate ω^* auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad betrachten. Dabei ist die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* durch $\omega^* \equiv z^\alpha (1 - bd) - x - \sigma$ gegeben. Die gleichgewichtige

¹³Es gilt $bz^\alpha [1 + bz^\alpha]^{-1} < 1 \Leftrightarrow bz^\alpha < 1 + bz^\alpha$
sowie: $[1 + bz^\alpha]^{-1} < 1 \Leftrightarrow 1 < 1 + bz^\alpha$.

Wachstumsrate ist positiv, wenn gilt:

$$z > \left[\frac{d + \theta\sigma}{\theta(1 - db) - bd} \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (7.59)$$

Eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate impliziert die Einhaltung der oben behandelten Budgetbeschränkung.

Die Modellsimulation

Wir kommen wieder zur Modellsimulation und starten mit der Basiskonfiguration. Hierbei nehmen wir für den Nutzenparameter $\theta = 0,6$ und für den Produktionsparameter $\alpha = 0,6$ an. Für die Abschreibungsraten gelte $\sigma = \eta = 0,07$, und die Zeitpräferenzrate sei mit $\rho = 0,03$ gegeben. Die Mortalitätsrate sei mit $d = 0,012$ angenommen. Ferner sei $\gamma = 0,10$ und $\beta = 0,50$.

Tabelle 7.5: Variation der Ausbildungskosten im Modell: Populationsgröße und Ideenproduktion

b	x	z	L	$\tilde{\omega}$	W
23,0	0,20	0,21	0,69	1,31	–
22,9	0,22	0,25	0,94	2,68	–
22,8	0,25	0,31	1,30	4,41	–
22,7	0,28	0,40	1,87	6,69	–
22,6	0,33	0,52	2,82	9,80	–

In der Tabelle 7.5 ist $\tilde{\omega} \equiv \omega 100$ die Wachstumsrate in Prozent und W das

Vorzeichen des W -Wertes. Es zeigt sich, daß das Modell durchaus in der Lage ist, für eine plausible aber sehr spezifische Parameterkonstellation realistische Ergebnisse zu liefern. Allerdings existiert für die gewählte Basiskonfiguration wie im Learning-by-Doing Modell bei variabler Population nur ein sehr kleines Intervall für b , wenn das Modell realitätsnahe Ergebnisse generieren soll. Interessanterweise stimmen die resultierenden Gleichgewichtswerte für x und z , sowie die gleichgewichtige Wachstumsrate jeweils mit den Ergebnissen des Learning-by-Doing Modells überein. Für die Zunahme der Wachstumsrate gelten wieder die entsprechenden Erklärungen: Sinkende Ausbildungskosten führen zu höheren Investitionen in privates physisches Kapital und eine wachsende Bevölkerung wirkt sich günstig auf den Prozeß der Wissenskapitalbildung aus.

Unterschiede zwischen diesen beiden Modellen ergeben sich bei der Höhe des gleichgewichtigen Bevölkerungsbestandes sowie beim Stabilitätsverhalten. So erhalten wir diesmal stets einen negativen W -Wert. Folglich können wir in diesem Fall auf Sattelpfadstabilität schließen.

Wir wollen nun den Nutzenparameter θ variieren und halten die Ausbildungskosten auf $b = 23$ konstant:

Tabelle 7.6: Variation des Nutzenparameters im Modell: Populationsgröße und Ideenproduktion

θ	x	z	L	$\tilde{\omega}$	W
0,610	0,28	0,39	1,84	6,56	–
0,605	0,23	0,28	1,10	3,51	–
0,600	0,20	0,21	0,69	1,31	–
0,595	0,17	0,16	0,44	–0,34	–
0,590	0,16	0,13	0,29	–1,62	–

Es zeigt sich, daß das System insgesamt sehr sensitiv auf geringe Veränderungen des Nutzenparameters θ reagiert. Wenn θ innerhalb eines sehr kleinen Bereiches erhöht wird, nimmt der gleichgewichtige Bevölkerungsbestand zu, und interessanterweise nimmt dann auch die gleichgewichtige Wachstumsrate zu. Dies erklärt sich wieder daraus, daß in diesem Modell der Bevölkerungsbestand über den Prozeß der Ideengewinnung einen positiven Effekt auf den Produktionsprozeß und damit auf die Wachstumsrate hat.

7.4 Fazit

Wir haben in diesem Kapitel endogene Wachstumsmodelle mit Wissenskapital betrachtet und haben in diesen Modellen die Fertilitätsrate endogen bestimmt. Dabei sind wir zuerst vom Learning-by-Doing Ansatz ausgegangen und haben den Fall der konstanten Population von dem der variablen

Population unterschieden. Anschließend haben wir einen alternativen Ansatz der Wissensgewinnung vorgestellt.

Im Learning-by-Doing Modell mit konstanter Bevölkerung haben wir den Bevölkerungsbestand mit Hilfe einer geeignet gewählten Einwanderungsrate konstant gehalten. Dabei konnte gezeigt werden, daß es einen sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad gibt. Wir haben ferner die Bedingungen für ein positives Gleichgewichtswachstum herausgearbeitet. Im Rahmen der Modellsimulation haben wir die Ausbildungskosten und den Nutzenparameter variieren lassen. Dabei hat sich gezeigt, daß sich bei einer Veränderung der Ausbildungskosten b die gleichgewichtige Fertilitätsrate n so anpasst, daß die Gleichgewichtswerte für x und z , sowie die gleichgewichtige Wachstumsrate ω^* unverändert bleiben. Eine Erhöhung des Nutzenparameters θ ließ den Gleichgewichtswert z unverändert, während x geringfügig absank. Erwartungsgemäß nahm die Fertilitätsrate zu, allerdings auf Kosten einer sinkenden Wachstumsrate.

In den Modellen mit variabler Population haben wir angenommen, daß keine Einwanderung möglich ist. Folglich konnte die Bevölkerung nur stabil bleiben, wenn die Fertilitätsrate der exogen gegebenen Mortalitätsrate entsprach. In diesem Zusammenhang haben wir die gleichgewichtige Bevölkerungsgröße endogen bestimmt. Wir haben ferner die Bedingungen für die Existenz eines sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfades sowie die Bedingungen für eine positive gleichgewichtige Wachstumsrate herausgearbeitet.

Dabei hat sich für das Learning-by-Doing Modell im Rahmen der Modellsimulation gezeigt, daß die Kriterien für die Sattelpfadstabilität bei der

gewählten Basiskonfiguration nicht erfüllbar waren. Für das Alternativmodell hingegen konnte bei der Modellsimulation Sattelpfadstabilität nachgewiesen werden. Wir haben daraufhin für dieses Modell die Ausbildungskosten b und den Nutzenparameter θ variieren lassen. Dabei zeigte sich, daß b nur innerhalb eines sehr kleinen Intervalls variieren durfte, wenn das Modell realitätsnahe Ergebnisse erzeugen soll. Eine Reduzierung von b führte ebenso wie eine Erhöhung von θ sowohl zu einer steigenden Bevölkerung und als auch zu einer steigenden Wachstumsrate.

Kapitel 8

Schlußbetrachtung

8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Da wir bereits zum Ende der jeweiligen Kapitel ein abschließendes Fazit gezogen haben, können wir uns an dieser Stelle auf die wichtigsten Resultate beschränken.

Im zweiten Kapitel (Optimale Einwanderungspolitiken) haben wir ermittelt, wie ein vorgegebenes Bevölkerungsziel in der Zukunft kostenminimal über Einwanderung erreicht werden kann. Als Ergebnis konnten optimale Einwanderungspfade ermittelt werden. In einer Anwendung wurden die Resultate auf den Fall Deutschlands bezogen. Dabei wurde ersichtlich, welche Ausmaße der Bevölkerungsrückgang annehmen kann. Ferner wurde deutlich, daß die ermittelte optimale Einwanderungspolitik mit gewissen Schwankungen sowohl beim Einwanderungsvolumen als auch beim Bevölkerungsbestand

verbunden ist.

Im vierten Kapitel (Endogene Fertilität im AK-Modell) haben wir ein einfaches AK-Modell betrachtet. Wir haben hierbei den Fall der konstanten und den der variablen Population behandelt. Es konnte gezeigt werden, daß es in beiden Modellvarianten einen sattelpfadstabilen gleichgewichtigen Wachstumspfad (GGW) gibt. Im Fall der konstanten Population führte ein steigender Fertilitätsnutzen aufgrund zunehmender Ausbildungskosten zu einer sinkenden Wachstumsrate. Im Fall der variablen Population hingegen führte ein steigender Fertilitätsnutzen über einen höheren gleichgewichtigen Bevölkerungsbestand zu einer steigenden Wachstumsrate.

Im fünften Kapitel (Endogene Fertilität in Infrastrukturkapitalmodellen) haben wir Modelle mit öffentlichem Infrastrukturkapital behandelt. Wir haben wieder den Fall der konstanten und den der variablen Population untersucht. Dabei konnten wir für alle betrachteten Modellvarianten stets zeigen, daß es einen sattelpfadstabilen GGW gibt. Wir haben hier verschiedene Steuerregime betrachtet und diese im Rahmen von Modellsimulationen miteinander verglichen. Dabei zeigte sich stets die relative Vorteilhaftigkeit eines Einkommensteuerregimes. So ging im Fall der konstanten Population eine Einkommensteuer für eine vorgegebene Fertilitätsrate mit den vergleichsweise höchsten Wachstumsraten einher. Für den Fall der variablen Population führte ebenfalls eine Einkommensteuer für einen vorgegebenen Bevölkerungsbestand zu den höchsten Wachstumsraten.

Im sechsten Kapitel (Endogene Fertilität in Humankapitalmodellen) haben wir das Uzawa-Lucas-Modell betrachtet. Wir haben den Fall der konstanten und den der variablen Population betrachtet, und gezeigt, daß jeweils

ein GGW existiert. Dabei konnte für den Fall der konstanten Population Sattelpfadstabilität gezeigt werden. Für den Fall der variablen Population haben wir lediglich allgemeine Bedingungen für Sattelpfadstabilität angeben können¹.

Im siebenten Kapitel (Endogene Fertilität in Wissenskapitalmodellen) haben wir zuerst einen Learning-by-Doing Ansatz betrachtet. Für das Modell mit konstanter Population konnte die Existenz eines sattelpfadstabilen GGW gezeigt werden. Für das Modell mit variabler Population konnten die Bedingungen für einen sattelpfadstabilen GGW ermittelt werden. Jedoch hat sich im Rahmen der Modellsimulation gezeigt, daß die Kriterien für die Sattelpfadstabilität bei der gewählten Basiskonfiguration nicht erfüllbar waren. Im späteren Verlauf des Kapitel wurde ein alternativer Ansatz zur Wissensproduktion eingeführt. Für diesen Ansatz wurde die Existenz eines sattelpfadstabilen GGW gezeigt. Ferner ergab die Modellsimulation, daß die Stabilitätsbedingungen für plausible Parameterwerte stets erfüllt waren.

8.2 Ausblick

Es sind in dieser Arbeit verschiedene Aspekte unbehandelt geblieben, so daß sich hier noch Raum für zukünftige Untersuchungen bietet. Es soll im Folgenden kurz dargestellt werden, inwiefern Modellmodifikationen bzw. Modelerweiterungen interessant sein könnten.

Bei der Bestimmung der optimalen Einwanderungspolitik im zweiten Kapitel sind wir davon ausgegangen, daß die Einwanderung und der Bevölke-

¹Siehe hierzu auch den Anhang dieser Arbeit.

rungsbestand keinerlei Beschränkungen unterliegt. Es wäre jedoch interessant, solche Beschränkungen im Optimierungsprogramm zu berücksichtigen. Ebenso wäre vorstellbar, die gewählte Verlustfunktion um einen Term zu erweitern, der die Abweichung der Bevölkerung von einem gewünschten Bevölkerungsbestand erfaßt.

Wir haben in dieser Arbeit in den wachstumstheoretischen Kapiteln aus Gründen der rechnerischen Vereinfachung immer den Spezialfall der logarithmischen Nutzenfunktion angenommen. Ferner wurde immer von einer exogen gegebenen Mortalitätsrate ausgegangen. Desweiteren haben wir stets angenommen, daß die Altersstruktur der Bevölkerung innerhalb der Modelle keine Rolle spielt.

Bezüglich der Ausbildung der Nachkommenschaft wurde immer angenommen, daß die Erziehung lediglich Kosten verursacht. Die Qualität der Nachkommen - resultierend aus den Ausbildungsinvestitionen - spielte in den Modellen keine Rolle. Darüberhinaus wurden die Kosten stets als exogen gegeben betrachtet. Wir haben diese Kosten im Rahmen der Modellsimulationen variieren lassen. Als eine mögliche Erweiterung in den Infrastrukturkapitalmodellen würde sich in diesem Zusammenhang anbieten, eine Ausbildungssubvention (Kindergeld) einzuführen. Der Staat hätte dann die Möglichkeit, die Fertilitätsrate und den Bevölkerungsbestand sowohl über Steuern als auch über Subventionen zu beeinflussen.

In den Modellen mit konstanter Population sind wir ausschließlich davon ausgegangen, daß die staatlichen Autoritäten über das Niveau der Einwanderung entscheiden können. In dem Zusammenhang wurde in allen Fällen angenommen, daß Einwanderung nicht die Pro-Kopf-Ausstattung mit Kapi-

talgütern verändert. Das bedeutet, daß die Einwanderer in allen behandelten Modellen ohne privates physisches Kapital (personenungebundenes Kapital) einwandern. Im Humankapitalmodell verfügen die Einwanderer per Annahme über eine durchschnittliche Humankapitalausstattung (personengebundenes Kapital).

In den Modellen mit variabler Population wurde der Bevölkerungsbestand endogen bestimmt. Es handelte sich dabei stets um einen gleichgewichtigen und nicht um einen optimalen Bevölkerungsbestand. Interessant wäre natürlich die Frage, welche Bevölkerungsgröße unter Wachstums Gesichtspunkten optimal wäre.

Anhang A

Lokale Stabilitätsanalyse höherer Systeme

A.1 Verallgemeinerter Satz von Vieta

Im Folgenden wird der verallgemeinerte Satz von Vieta benötigt. Es sei ein Polynom n -ten Grades $Q(x)$ wie folgt gegeben:

$$Q(x) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n. \quad (\text{A.1})$$

Dieses Polynom läßt sich stets auf die folgende Form bringen:

$$P(x) \equiv x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \quad (\text{A.2})$$

Dabei gilt: $P(x) \equiv Q(x)/A_0$. Für die Koeffizienten folgt: $a_i \equiv A_i/A_0$ mit $i = 1, \dots, n$. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_i und den

Nullstellen x_i lautet dann wie folgt¹:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -(x_1 + \dots + x_n), \\
 a_2 &= +(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n), \\
 a_3 &= -(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n), \\
 &\vdots \\
 a_k &= (-1)^k [x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1}x_k + \dots + x_{n-(k-1)}x_{n-(k-2)} \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n], \\
 &\vdots \\
 a_n &= (-1)^n [x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n].
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Der Koeffizient a_k ist also gleich der Summe der k -fach Produkte bezüglich der Nullstellen, wobei das Vorzeichen der Summe durch $(-1)^k$ gegeben ist.

Es sei nun im Folgenden J eine $(n \times n)$ -Jacobi-Matrix mit den Einträgen j_{rs} mit $r, s = 1, \dots, n$:

$$J \equiv \begin{vmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ j_{n1} & \cdots & j_{nn} \end{vmatrix}. \tag{A.4}$$

Ferner sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit den Einträgen $a_{rs} = j_{rs}$ für $r \neq s$ und $r, s = 1, \dots, n$, sowie: $a_{rr} = j_{rr} - x$ für $r = 1, \dots, n$:

$$A \equiv \begin{vmatrix} j_{11} - x & \cdots & j_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ j_{n1} & \cdots & j_{nn} - x \end{vmatrix}. \tag{A.5}$$

¹Vgl.: Kostrikin (1982), S. 275.

A.2 Lokale Stabilitätsanalyse für (3×3) - Systeme

Wir haben in der vorliegenden Arbeit einige (3×3) - Systeme betrachtet und wollen nun an dieser Stelle kurz die grundlegenden Aspekte der lokalen Stabilitätsanalyse für solche Systeme darstellen. Dabei werden wir uns sehr stark an der Arbeit von Wirl (1997) orientieren. Die Eigenwerte einer Jacobi-Matrix der Ordnung (3×3) sind durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\det(A) \equiv x^3 - sp(J)x^2 + Wx - \det(J) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Dabei gilt für W :

$$W \equiv \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{13} \\ \dot{j}_{31} & \dot{j}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{22} & \dot{j}_{23} \\ \dot{j}_{32} & \dot{j}_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Für den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $sp(A)$, W und $\det(A)$ und den Nullstellen x_i folgt:

$$\begin{aligned} sp(J) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ W &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ \det(J) &= x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dabei liegen entweder drei reelle Eigenwerte vor oder nur einer. Falls nur ein reeller Eigenwert existiert, so ist er mit einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte verbunden. Wir betrachten zuerst den Fall, daß alle Eigenwerte reell sind.

Drei reelle Eigenwerte

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der reellen negativen Eigenwerte und dem jeweiligen Vorzeichen von $sp(J)$, W und $\det(J)$ ergibt sich aus der folgenden Tabelle. Die Werte in der Kopfzeile stehen für die Anzahl der reellen negativen Eigenwerte:

Tabelle A.1: Konstellation bei drei reellen Eigenwerten im (3×3) -Fall

	3	2	1	0
$sp(J)$	-	?	?	+
W	+	?	?	+
$\det(J)$	-	+	-	+

Wir betrachten nun den Fall, daß nur ein reeller Eigenwert vorliegt.

Ein reeller Eigenwert und ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (O.B.d.A.) sei x_1 der reelle Eigenwert. Dann ist $x_{2,3} = b \pm ic$ das konjugiert komplexe Eigenwertpaar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
 sp(J) &= x_1 + 2b, \\
 W &= x_1 2b + (b^2 + c^2), \\
 \det(J) &= x_1 (b^2 + c^2).
 \end{aligned}
 \tag{A.9}$$

Der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem jeweiligen Vorzeichen von $sp(J)$, W und $\det(J)$ ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

Tabelle A.2: Konstellation bei einem reellen Eigenwert und einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte im (3×3) -Fall

	$b < 0$		$b > 0$	
	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$	$x_1 < 0$	$x_1 > 0$
$sp(J)$	–	?	?	+
W	+	?	?	+
$\det(J)$	–	+	–	+

Für den Fall eines Paares rein imaginärer Eigenwerte ($b = 0$) folgt:

$$\begin{aligned}
 sp(J) &= x_1, \\
 W &= c^2, \\
 \det(J) &= x_1 c^2,
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

mit: $\det(J) = W sp(J) = c^2 sp(J)$. Damit kann der Fall eines Paares rein imaginärer Eigenwerte nur auftreten, wenn $W > 0$ gilt, und wenn $\det(J)$ und $sp(J)$ vorzeichengleich sind.

Resultate

Die folgenden Ergebnisse können unmittelbar aus den bisherigen Ausführungen geschlossen werden. Wir geben sie daher ohne Beweis an:

Satz A.1 *Eine negative Determinante $\det(J)$ in Kombination mit einem negativen W -Wert oder einer positiven Spur $sp(J)$ korrespondiert mit einem*

negativen reellen Eigenwert. Der stabile Bereich ist dann eine eindimensionale Mannigfaltigkeit.

Diese Konstellation ist in der vorliegenden Arbeit relevant für den Fall, daß zwei Anfangswerte frei gewählt werden können und betrifft das Modell mit Humankapital bei konstanter Population.

Satz A.2 *Eine positive Determinante $\det(J)$ in Kombination mit einem negativen W -Wert oder einer negativen Spur $sp(J)$ korrespondiert entweder mit zwei negativen reellen Eigenwerten oder mit einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar mit negativem Realteil. Der stabile Bereich ist dann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.*

Diese Konstellation ist in der vorliegenden Arbeit relevant für die Fälle, daß nur ein Anfangswert frei gewählt werden kann und betrifft die Modelle mit Infrastrukturkapital und Wissenskapital bei variabler Population.

A.3 Lokale Stabilitätsanalyse für (4×4) - Systeme

In der vorliegenden Arbeit mündet das Humankapitalmodell bei variabler Population in ein (4×4) - System. Wir wollen daher das Vorgehen aus dem (3×3) - Fall auf den (4×4) - Fall übertragen². Die Eigenwerte einer Jacobi-Matrix der Ordnung (4×4) sind durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\det(A) \equiv x^4 - sp(J)x^3 + V_1x^2 - V_2x + \det(J) = 0. \quad (\text{A.11})$$

²Zur Behandlung von (3×3) - Systemen siehe auch Wirl (1997).

Dabei gilt für V_1 und V_2 :

$$V_1 \equiv \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{22} & \dot{j}_{23} \\ \dot{j}_{32} & \dot{j}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{33} & \dot{j}_{34} \\ \dot{j}_{43} & \dot{j}_{44} \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{13} \\ \dot{j}_{31} & \dot{j}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{22} & \dot{j}_{24} \\ \dot{j}_{42} & \dot{j}_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{14} \\ \dot{j}_{41} & \dot{j}_{44} \end{vmatrix}; \quad (\text{A.12})$$

sowie:

$$V_2 \equiv \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} & \dot{j}_{13} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} & \dot{j}_{23} \\ \dot{j}_{31} & \dot{j}_{32} & \dot{j}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{22} & \dot{j}_{23} & \dot{j}_{24} \\ \dot{j}_{32} & \dot{j}_{33} & \dot{j}_{34} \\ \dot{j}_{42} & \dot{j}_{43} & \dot{j}_{44} \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{12} & \dot{j}_{14} \\ \dot{j}_{21} & \dot{j}_{22} & \dot{j}_{24} \\ \dot{j}_{41} & \dot{j}_{42} & \dot{j}_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{j}_{11} & \dot{j}_{13} & \dot{j}_{14} \\ \dot{j}_{31} & \dot{j}_{33} & \dot{j}_{34} \\ \dot{j}_{41} & \dot{j}_{43} & \dot{j}_{44} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Für den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten $sp(J)$, V_1 , V_2 und $\det(J)$ und den Nullstellen x_i folgt:

$$\begin{aligned} sp(J) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ V_1 &= x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4, \\ &= x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4, \\ V_2 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\ &= x_1x_2(x_3 + x_4) + (x_1 + x_2)x_3x_4, \\ \det(J) &= x_1x_2x_3x_4. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Dabei liegen entweder vier reelle Eigenwerte vor oder nur zwei oder keiner. Falls nur zwei reelle Eigenwerte existieren, so sind sie mit einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte verbunden. Falls kein reeller Eigenwert existiert,

so liegen zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare vor. Wir betrachten zuerst den Fall, daß alle Eigenwerte reell sind.

Vier reelle Eigenwerte

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der reellen negativen Eigenwerte und dem jeweiligen Vorzeichen von $sp(J)$, V_1 , V_2 und $\det(J)$ ergibt sich aus der folgenden Tabelle. Die Werte in der Kopfzeile stehen für die Anzahl der reellen negativen Eigenwerte:

Tabelle A.3: Konstellation bei vier reellen Eigenwerten im (4×4) -Fall

	4	3	2	1	0
$sp(J)$	-	?	?	?	+
V_1	+	?	?	?	+
V_2	-	?	?	?	+
$\det(J)$	+	-	+	-	+

Wir betrachten nun den Fall, daß nur zwei reelle Eigenwerte vorliegen.

Zwei reelle Eigenwerte und ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar

O.B.d.A. seien x_1 und x_2 die reellen Eigenwerte. Dann ist $x_{3,4} = b \pm ic$ das konjugiert komplexe Eigenwertpaar, und es gilt:

$$sp(J) = x_1 + x_2 + 2b,$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= x_1 x_2 + (x_1 + x_2) 2b + (b^2 + c^2), \\
V_2 &= x_1 x_2 2b + (x_1 + x_2) (b^2 + c^2), \\
\det(J) &= x_1 x_2 (b^2 + c^2).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem jeweiligen Vorzeichen von $sp(J)$, V_1 , V_2 und $\det(J)$ ergibt sich aus der folgenden Tabelle. Die Werte in der zweiten Kopfzeile stehen für die Anzahl der reellen negativen Eigenwerte:

Tabelle A.4: Konstellation bei zwei reellen Eigenwerten und einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar im (4×4) -Fall

	$b < 0$			$b > 0$		
	2	1	0	2	1	0
$sp(J)$	-	?	?	?	?	+
V_1	+	?	?	?	?	+
V_2	-	?	?	?	?	+
$\det(J)$	+	-	+	+	-	+

Für den Fall eines Paares rein imaginärer Eigenwerte ($b = 0$) folgt:

$$\begin{aligned}
sp(J) &= x_1 + x_2, \\
V_1 &= x_1 x_2 + c^2, \\
V_2 &= (x_1 + x_2) c^2, \\
\det(J) &= x_1 x_2 c^2,
\end{aligned} \tag{A.16}$$

mit: $V_2 = c^2 sp(J)$. Damit kann der Fall eines Paares rein imaginärer Eigenwerte nur auftreten, wenn V_2 und $sp(J)$ vorzeichengleich sind. Ferner folgt für diesen Fall: Wenn $\det(J) > 0$ gilt, dann muß auch $V_1 > 0$ erfüllt sein. Wir betrachten nun den Fall, daß kein reeller Eigenwert vorliegt.

Zwei konjugiert komplexe Eigenwertpaare

Dann sind $x_{1,2} = b_1 \pm ic_1$ und $x_{3,4} = b_2 \pm ic_2$ die beiden konjugiert komplexen Eigenwertpaare, und es gilt:

$$\begin{aligned} sp(J) &= 2b_1 + 2b_2, \\ V_1 &= (b_1^2 + c_1^2) + 4b_1b_2 + (b_2^2 + c_2^2), \\ V_2 &= (b_1^2 + c_1^2) 2b_2 + (b_2^2 + c_2^2) 2b_1, \\ \det(J) &= (b_1^2 + c_1^2) (b_2^2 + c_2^2). \end{aligned} \tag{A.17}$$

Der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und dem jeweiligen Vorzeichen von $sp(J)$, V_1 , V_2 und $\det(J)$ ergibt sich aus der folgenden Tabelle. Die Werte in der Kopfzeile stehen für die Anzahl der negativen Realteile:

Tabelle A.5: Konstellation bei zwei konjugiert komplexen Eigenwertpaaren im (4×4) -Fall

	2	1	0
$sp(J)$	-	?	+
V_1	+	?	+
V_2	-	?	+
$\det(J)$	+	+	+

Es kann nun wieder ein rein imaginäres Eigenwertpaar vorliegen. O.B.d.A. nehmen wir an, daß $b_1 = 0$ gilt. Dann resultiert:

$$\begin{aligned} sp(J) &= 2b_2, \\ V_1 &= c_1^2 + b_2^2 + c_2^2, \\ V_2 &= 2b_2c_1^2, \\ \det(J) &= c_1^2(b_2^2 + c_2^2), \end{aligned} \tag{A.18}$$

mit: $V_2 = c_1^2 sp(J)$. Ein rein imaginäres Eigenwertpaar kann diesmal nur auftreten, wenn V_2 und $sp(J)$ vorzeichengleich sind, und wenn ferner $\det(J) > 0$ und $V_1 > 0$ gelten.

Für den Fall zweier rein imaginärer Eigenwertpaare ($b_1 = 0 = b_2$) folgt:

$$\begin{aligned} sp(J) &= 0, \\ V_1 &= c_1^2 + c_2^2, \\ V_2 &= 0, \\ \det(J) &= c_1^2c_2^2. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn $V_2 = 0 = sp(J)$, sowie $\det(J) > 0$ und $V_1 > 0$ erfüllt sind.

Resultat

Das folgende Ergebnis ergibt sich unmittelbar aus den bisherigen Ausführungen und wird daher ohne Beweis angegeben:

Satz A.3 *Es ergibt sich, daß eine positive Determinante in Kombination mit einem negativen V_1 -Wert entweder zwei negative reelle Eigenwerte oder*

*ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar mit negativem Realteil sicherstellt.
Der stabile Bereich ist dann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.*

Diese Konstellation ist relevant für den Fall, daß zwei Anfangswerte frei gewählt werden können, so wie es in der vorliegenden Arbeit im Modell mit Humankapital bei variabler Population der Fall ist.

Literaturverzeichnis

- [1] **Aghion, P. / Howitt, P. (1999)**, *Endogenous Growth Theory*, Cambridge, Mass. [u.a.]: MIT Press.
- [2] **Arrow, K. J. (1962)**, The economic implications of learning by doing, *Review of Economic Studies*, 29, 155-173.
- [3] **Barro, R. J. (1990)**, Government spending in a simple model of endogenous growth, *Journal of Political Economy*, 98 (5), part II, 103-125.
- [4] **Barro, R. J. / Becker, G. S. (1989)**, Fertility choice in a model of economic growth, *Econometrica*, 57 (1), 481-501.
- [5] **Barro, R. J. / Sala-i-Martin, X. (1995)**, *Economic Growth*, McGraw Hill, Boston MA.
- [6] **Becker, G. S. (1991)**, *A Treatise on the Family*, Cambridge, Mass [u.a.]: Harvard Univ. Press.
- [7] **Becker, G. S. / Barro, R. J. (1988)**, A reformulation of the economic theory of fertility, *Quarterly Journal of Economics*, 103 (1), 1-25.

-
- [8] **Becker, G. S. / Lewis, H. G. (1973)**, On the interaction between the quantity and quality of children, *Journal of Political Economy*, 81, 279-288.
- [9] **Becker, G. S. / Murphy, K. M. / Tamura, R. (1990)**, Human capital, fertility, and economic growth, *Journal of Political Economy*, 98 (5), 12-37.
- [10] **Blackburn, K. / Cipriani, G. P. (1998)**, Endogenous fertility, mortality and growth, *Journal of Population Economics*, 11, 517-534.
- [11] **Cai, D. (2002)**, An economic growth model with endogenous fertility: multiple growth paths, poverty trap and bifurcation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 144, 119-130.
- [12] **Cigno, A. (1984)**, Further implications of learning by doing: The effect of population on per-capita income, *Bulletin of Economic Research*, 36(2), 97-108.
- [13] **Eckstein, Z. / Wolpin, K. (1985)**, Endogenous fertility and optimal population size, *Journal of Public Economics*, 27, 93-106.
- [14] **Ehrlich, I. / Lui, F. (1997)**, The problem of population and growth: A review of the literature from Malthus to contemporary models of endogenous population and endogenous growth, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 205-242.
- [15] **Galor, O. / Weil, D. N. (1996)**, The gender gap, fertility, and growth, *American Economic Review*, 86, 374-387.

-
- [16] **Gandolfo, G. (1997)**, *Economic Dynamics*, Berlin [u.a.]: Springer.
- [17] **Greiner, A. (1996)**, *Fiscal Policy and Economic Growth*, Ashgate Publishing Company, Aldershot.
- [18] **Greiner, A. (2003)**, On the dynamics of an endogenous growth model with learning by doing, *Economic Theory*, Vol. 21, No. 1, 205-214.
- [19] **Greiner, A. / Hanusch, H. (1998)**, Growth and welfare effects of fiscal policy in an endogenous growth model with public investment, *International Tax and Public Finance*, Vol. 5, No. 3, 249-261.
- [20] **Grossman, G. / Helpman, E. (1992)**, *Innovation and Growth in the Global Economy*, MIT-Press, Cambridge.
- [21] **Jones, C. I. (2003)**, Population and ideas: a theory of endogenous growth, in: Aghion, P. (u.a.) [Hrsg.], *Knowledge, Information, and Expectations in Modern Macroeconomics: In Honor of Edmund S. Phelps*, Princeton [u.a.]: Princeton Univ. Press.
- [22] **Jöst, F. / Quaas, M. / Schiller, J. (2001)**, *Population Growth, Economy and the Natural Environment: A Dynamic Model with Endogenous Fertility*, Discussion Paper Series, University of Heidelberg, Department of Economics, No. 344.
- [23] **Kalemli-Ozcan, S. (2003)**, A stochastic model of mortality, fertility, and human capital investment, *Journal of Development Economics*, 70, 103-118.

-
- [24] **Kamien, M. I. / Schwartz, N. L. (2000)**, *Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amsterdam [u.a.]: Elsevier.
- [25] **Kostrikin, A. I. (1982)**, *Introduction to Algebra*, New York [u.a.]: Springer.
- [26] **Kremer, M. (1993)**, Population growth and technological change: one million B.C. to 1990, *Quarterly Journal of Economics*, 108, 681-716.
- [27] **Kuznets, S. (1960)**, Population change and aggregate output, in: *Demographic and Economic Change in Developed Countries*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [28] **Leibenstein, H. (1969)**, Pitfalls in the benefit cost analysis of birth prevention, *Population Studies*, 23 (2), 161-170.
- [29] **Lucas, R. E. (1988)**, On the mechanics of development planning, *Journal of Monetary Economics*, 22 (1), 3-42.
- [30] **Nerlove, M. / Raut, L. K. (1997)**, Growth models with endogenous population: a general framework, in: Rosenzweig, M. R. (u.a.) [Hrsg.], *Handbook of Population and Family Economics*, Elsevier Science, Amsterdam.
- [31] **Nerlove, M. / Razin, A. / Sadka, E. (1986)**, Some welfare theoretic implications of endogenous fertility, *International Economic Review*, 27, 3-31.

-
- [32] **Pfähler, W. / Hofmann, U. / Bönte, W. (1996)**, Does extra public infrastructure capital matter? - An appraisal of empirical literature. *Finanzarchiv*, Bd. 53, S. 68-112.
- [33] **Pitchford, J. D. (1974)**, *Population in Economic Growth*, Amsterdam [u.a.]: North-Holland Publ.
- [34] **Prskawetz, A. / Feichtinger, G. / Luptacik, M. (1998)**, The accomplishment of the Maastricht criteria with respect to initial debt, *Journal of Economics*, Vol. 68, No. 2, 93-110.
- [35] **Razin, A. / Ben-Zion, U. (1975)**, An intergenerational model of population growth, *American Economic Review*, 66, 923-933.
- [36] **Rebelo, S. (1991)**, Long-run policy analysis and long-run growth, *Journal of Political Economy*, 99 (3), 500-521.
- [37] **Robertson, P. E. (2002)**, Demographic shocks and human capital accumulation in the Uzawa-Lucas model, *Economics Letters*, 74, 151-156.
- [38] **Rosenzweig, M. R. (1990)**, Population growth and human capital investment: theory and evidence, *Journal of Political Economy*, 98 (5), 38-70.
- [39] **Samuelson, P. A. (1975)**, The optimum growth rate for population, *International Economic Review*, 16, 531-538.

-
- [40] **Strulik, H. (1997)**, Learning-by-doing, population pressure, and the theory of demographic transition, *Journal of Population Economics*, 10, 285-298.
- [41] **U.S. Census Bureau (2005)**, International Data Base, (Data updated: 04-26-2005), Internetquelle: <http://www.census.gov>
- [42] **Uzawa, H. (1965)**, Optimal technical change in an aggregative model of economic growth, *International Economic Review*, 6, 18-31.
- [43] **Wirl, F. (1997)**, Stability and limit cycles in one-dimensional dynamic optimisations of competitive agents with a market externality, *Journal of Evolutionary Economics*, 7, 73-89.
- [44] **Wolfram, S. (1991)**, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Redwood City, Calif. [u.a.]: Addison-Wesley.
- [45] **Yip, C. K. / Zhang, J. (1997)**, A simple endogenous growth model with endogenous fertility: Indeterminacy and uniqueness, *Journal of Population Economics*, 10, 97-110.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Geburtsort: Berlin
Geburtsdatum: Dezember 31, 1966
Familienstand: verheiratet, ein Kind
Staatsangehörigkeit: deutsch

Ausbildung

1984 Abitur in Berlin
1985 - 1987 Ausbildung zum Bankkaufmann bei der Bank für Gemeinwirtschaft AG in Berlin
1988 - 1995 Studium der Ökonomie am Fachbereich Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin mit dem Abschluß: Diplom-Volkswirt
1995 - 1997 Studium der Mathematik an der Freien Universität Berlin
2005 Abschluß des Promotionsverfahrens mit der mündlichen Prüfung an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Bielefeld

Tätigkeiten

- 1987 - 1988 Bankkaufmann bei der Bank für Gemeinwirtschaft AG
in Berlin
- 1992 - 1995 Studentischer Tutor mit Unterrichtsaufgaben (Mathe-
matik und Statistik) im Ökonomiegrundstudium an der
Freien Universität Berlin
- 1997 - 1999 Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für So-
zioökonomie im Zentrum für Agrarlandschafts- und
Landnutzungsforschung (ZALF) e.V. in Müncheberg
(Mark Brandenburg)
- 1999 Freier wissenschaftlicher Mitarbeiter beim Öko-Institut
in Darmstadt
- 1999 - 2000 Erziehungspause
- 2000 - 2005 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Wirt-
schaftswissenschaften (Lehrstuhl: Prof. Greiner) der
Universität Bielefeld
- 2005 - Wissenschaftlicher Mitarbeiter (Vertretungsstelle) an
der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Univer-
sität Bielefeld