

# Einfluss subjektiver Erwartungen auf endogene Wertpapierpreise in Ökonomien überlappender Generationen

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Wirtschaftswissenschaften (Dr. rer. pol.)  
an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
der Universität Bielefeld

vorgelegt von  
**Dipl. Wirt. Math. Nicole Deutscher**  
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
Universität Bielefeld

Bielefeld im November 2003

# Inhaltsverzeichnis

Danksagungen	3
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Modell mit überlappenden Generationen</b>	<b>9</b>
2.1 Die Konsumenten . . . . .	15
2.2 Monotone Nachfragefunktionen . . . . .	19
2.3 Der Wertpapierpreis . . . . .	22
2.4 Erwartungstreue Prognosen . . . . .	26
2.5 CARA-Nutzenfunktionen . . . . .	27
2.5.1 Die Exponential-Verteilung . . . . .	30
2.5.2 Die Gamma-Verteilung . . . . .	39
2.6 Abschließende Bemerkungen . . . . .	53
<b>3 Heterogene Konsumentenmengen</b>	<b>56</b>
3.1 Mittelwert-Varianz-Präferenzen . . . . .	60
3.2 Das Wertpapiermarktgleichgewicht . . . . .	64
3.2.1 Die Marktteilnahme . . . . .	65
3.2.2 Der Wertpapierpreis . . . . .	67
3.3 Erwartungs- und varianztreue Prognosen . . . . .	74
3.4 Risikozuschläge . . . . .	76
3.5 Abschließende Bemerkungen . . . . .	81
<b>4 Variables Wertpapierangebot</b>	<b>84</b>
4.1 Die Konsumenten . . . . .	86
4.2 Der Fond-Manager . . . . .	87
4.3 Kostenfunktionen . . . . .	92
4.3.1 Logarithmische Kostenfunktionen . . . . .	93

4.3.2	Quadratische Kostenfunktionen . . . . .	94
4.3.3	Lineare Kostenfunktionen . . . . .	94
4.4	Der Wertpapierpreis . . . . .	95
4.5	Das Handelsvolumen . . . . .	98
4.6	Das Vermögen des Fond-Managers . . . . .	99
4.7	Erwartungstreue Prognosen . . . . .	100
4.8	Identische Konsumenten . . . . .	101
4.8.1	Der Wertpapierpreis . . . . .	101
4.8.2	Das Handelsvolumen . . . . .	106
4.8.3	Das Vermögen des Fond-Managers . . . . .	109
4.8.4	Erwartungstreue Prognosen . . . . .	111
4.8.5	Risikozuschläge . . . . .	113
4.8.6	Zusammenfassung . . . . .	119
4.9	Heterogene Konsumenten . . . . .	121
4.9.1	Das Wertpapiermarktgleichgewicht . . . . .	121
4.9.2	Das Handelsvolumen . . . . .	130
4.9.3	Vermögen des Fond-Managers . . . . .	132
4.9.4	Risikozuschläge . . . . .	134
4.9.5	Zusammenfassung . . . . .	137
4.10	Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>142</b>
<b>6</b>	<b>Abbildungen</b>	<b>145</b>
6.1	Modell mit überlappenden Generationen . . . . .	145
6.2	Variables Wertpapierangebot . . . . .	146
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>149</b>

# Danksagungen

Meinem Gutachter Walter Trockel möchte ich für seine Unterstützung, seine hilfreichen Anregungen, ermutigenden Bemerkungen und seine Diskussionsbereitschaft danken. Die Gespräche und Diskussionen motivierten mich stets und ließen mich mit Elan an meine Arbeit gehen.

Weiter danke ich meinen (damaligen) Kollegen Leo Kaas, Jens-Ulrich Peter, Klaus-Reiner Schenk-Hoppé und Anton Stiefenhofer für die vielen Anmerkungen, gute Zusammenarbeit und ihre Kollegialität. Sie besaßen stets eine im wahrsten Sinne des Wortes offene Tür, die zur Diskussion einlud und das Stellen von Fragen erleichterte. Oft erhielt ich somit zwischen Tür und Angel hilfreiche Anregungen für meine Arbeit. Schließlich gilt mein Dank den Menschen aus meiner Familie und meinem Freundeskreis, die mich in dieser langen Zeit ertragen und tatkräftig unterstützt haben.

Claus-Jochen Haake und Matthias Raith hatten stets ein offenes Ohr und viele gute Ratschläge. Sventje Dieter gab der Arbeit den letzten Schliff in Bezug auf Grammatik und Rechtschreibung. Renate Köhler und Doris Deutscher haben sich regelmäßig um meinen Sohn Janik gekümmert, um mir Arbeitszeit zu verschaffen. Ein offenes Ohr für Frust, aber auch für Freude hatte immer meine Freundin Susanne Rolf. Mein Bruder Mike stellte mir stets sein LaTeX-Wissen zur Verfügung und installierte in regelmäßigen Abständen neue LaTeX-Versionen auf meinen Rechner.

Ein besonderer Dank gilt meinem Mann Martin, der während der Anfertigung der vorliegenden Arbeit stets an meiner Seite stand, mich auf unterschiedlichste Weise motivierte und moralische Unterstützung gab. Ohne die Hilfe all dieser Menschen wäre die Fertigstellung der Dissertation nicht möglich gewesen.

Für die finanzielle Unterstützung, die ich im Rahmen des Graduiertenkollegs „Mathematische Wirtschaftsforschung“ und als wissenschaftliche Mitarbeiterin im Projekt „Dynamische Makroökonomik“ erhielt, bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft sehr dankbar.

Darüber hinaus möchte ich den Teilnehmern der zahlreichen Tagungen und Konferenzen,

auf denen ich meine Arbeiten vorstellen durfte, für ihre Zuhörerschaft, ihre hilfreichen Kommentare und Anregungen danken.

# Kapitel 1

## Einleitung

„Wer nur ein Ökonom ist, kann kein guter Ökonom sein.“

*Friedrich August von Hayek*

Das wachsende Interesse an Finanzmärkten gründet sich auf deren erheblichen Einfluss auf die Wirtschaft. Viele Erkenntnisse über Finanzmärkte erlauben oftmals Einsichten über Zusammenhänge auf anderen Märkten. Nach Uszczapowski (1995) gibt es zu jedem Zeitpunkt viele Wirtschaftssubjekte in unterschiedlichen Lebenslagen mit z.B. verschiedener Vermögensstruktur und Risikotoleranz. Auf Grund dieser Unterschiede haben Wirtschaftssubjekte oft einander ergänzende Interessen. Auf Finanzmärkten finden diese Wirtschaftssubjekte zueinander und teilen Risiken untereinander auf. Dies geschieht so, dass zu jedem Zeitpunkt diejenigen, die das Risiko am besten tragen können, auch eine angemessene Gegenleistung dafür erhalten. Für die Bereitstellung ihres Kapitals erhalten die Investoren z.B. Wertpapiere. Somit unterliegt der Handel auf Wertpapiermärkten, insbesondere die Entwicklung von Wertpapierpreisen, vielen Einflüssen. Zu diesen zählen auch ökonomische und politische Veränderungen (Arbeitslosigkeit, Wahlen), genauso wie Ereignisse des öffentlichen Lebens (11.9.2001) oder Naturkatastrophen. Oftmals bewirken solche Ereignisse extrem schnelle Preisänderungen. Die Interaktion zwischen diesen Einflussfaktoren und der Entwicklung der Wertpapierpreise ist zwar beobachtbar, aber nicht messbar. Vielmehr hat jeder Investor eine eigene Einschätzung der Auswirkungen solcher Ereignisse auf Wertpapierpreise, Dividendenzahlungen und Renditen. Somit kumuliert die jeweilige Einschätzung eines Investors über die Signifikanz verschiedener Faktoren in einer subjektiven Erwartung über Preise, Dividenden oder Renditen. Der Handel auf Wertpapiermärkten wird somit in erster Linie durch seine Händler und ihre Eigenarten geprägt. Dabei kann wichtig sein, auf

welchen Wissensstand sie zurückgreifen, wie groß ihr Vermögen ist, ob sie eher optimistisch oder pessimistisch veranlagt sind, ob sie „Freude am Spekulieren“ haben und welche Präferenzen sie besitzen. Diese fundamentale Einsicht über den Handel auf Finanzmärkten und insbesondere der Preisentwicklung erfordert die Einführung von Modellen, die die Berücksichtigung subjektiver Einschätzungen der Käufer und Verkäufer über die Wertpapiermarktentwicklung ermöglichen. Diese nehmen bedeutenden Einfluss auf die Determinierung von Wertpapierpreisen und Risikozuschlägen und entscheiden über die Höhe der Marktteilnahme und das Handelsvolumen. Der Bedeutung von Erwartungen für Finanzmärkte, Wertpapierpreis- und Renditeentwicklungen wird in der Literatur auf unterschiedliche Weise Rechnung getragen. Häufig werden statische oder adaptive Erwartungen modelliert. Konsumenten mit statischen Erwartungen glauben, dass der morgige Wertpapierpreis mit dem heutigen übereinstimmt. Die Bildung adaptiver Erwartungen erfolgt, z.B. durch Regression, auf Grund der bis zu dem betrachteten Zeitpunkt bekannten ökonomischen Daten. Eine weitere Möglichkeit betrifft die perfekte Vorhersage. Dabei wird unterstellt, dass Individuen den zukünftigen Preis exakt vorher sagen können. Sehr häufig wird die von Muth (1961) eingeführte Hypothese rationaler Erwartungen verwendet (vgl. z.B. Cox, Ingersoll, Jr. & Ross (1985a, 1985b), Huang & Litzenberger (1988) oder Orosel (1998)), die die Übereinstimmung des subjektiven und des mathematischen Erwartungswertes fordert. Der mathematische Erwartungswert ergibt sich aus den Modellstrukturen und den zum Betrachtungszeitpunkt verfügbaren Informationen.

Im klassischen Finanzmarktmodell, dem *Capital Asset Pricing Model* nach Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966), spielen Erwartungen eine Rolle, da jeder Konsument seinen Erwartungsnutzen maximiert. Wenngleich sich die einzelnen Nutzenfunktionen unterscheiden, so benutzen doch alle Konsumenten die gleiche – objektive – Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Bestimmung ihres Erwartungsnutzens. Somit wird angenommen, dass alle die richtigen Erwartungen haben. Modelle, in denen markträumende Wertpapierpreise implizit und oftmals für sämtliche Perioden gleichzeitig berechnet werden, lassen keinen Spielraum für individuelle und möglicherweise „falsche“ Erwartungen der Konsumenten.

Böhm & Wenzelburger (1999) machen auf die Bedeutung des Wechselspiels zwischen Realisierungen ökonomischer Variablen und der zu diesen Variablen korrespondierenden Erwartungen aufmerksam. Ihrem Ansatz folgend wird in der hier vorliegenden Arbeit ein Modell entwickelt, in dem Wertpapierpreise, Risikozuschläge, Marktteilnahme und Handelsvolumen in Abhängigkeit der Charakteristiken der Investoren, insbesondere der

subjektiven Erwartungen über die Preis- bzw. Renditenentwicklung der Wertpapiere, untersucht werden. Sämtliche Variablen wie Wertpapierpreis, Risikozuschlag, Marktteilnahme und Handelsvolumen werden explizit determiniert. Eine direkte Auswertung der Abhängigkeiten und Interaktionen kann erfolgen. Durch die in diesem Modell gegebene Struktur können verschieden starke Forderungen an die Güte einer Prognose gestellt werden. In der Literatur wird häufig von der Annahme rationaler Erwartungen Gebrauch gemacht. Diese Annahme kann in manchen theoretischen Modellen die Erklärung empirischer Phänomene, wie z.B. das *Equity Premium Puzzle* nach Mehra & Prescott (1985), erschweren. Die Frage, welchen Einflüssen eine individuelle Entscheidung über die Teilnahme am Wertpapiermarkt unterliegt, kann gestellt und auch beantwortet werden. So können einzelne Investoren andere durch steigenden Optimismus vom Markt drängen. Die Entscheidung der individuellen Marktteilnahme muss stets in Verbindung mit den Charakteristiken sämtlicher Konsumenten betrachtet werden. Weiter können die Fragen, welchen Einfluss die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie auf den Wertpapiermarkt hat, und welche Rolle ein Fonds-Manager spielt, der Wertpapiere anbietet, beantwortet werden.

Der weitere Aufbau der Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 wird ein Modell überlappender Generationen vorgestellt, in dem der allgemeine markträumende Wertpapierpreis explizit ermittelt wird. Die Determinierung geschieht endogen unter Berücksichtigung sämtlicher individueller Merkmale der Konsumenten. Die Konsumenten maximieren dabei ihren Erwartungsnutzen, den sie mithilfe subjektiver Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmen. Es werden Bedingungen an die individuellen Merkmale aufgezeigt, die zu monotonen Nachfragefunktionen führen. In mehreren Spezifikationen des Modells werden Wertpapierpreise und Risikozuschläge diskutiert. Eine umfassende Analyse der Rolle der Risikoaversion und der subjektiven und auch rationalen Erwartungen wird durchgeführt. Das Modell aus Kapitel 2 entstammt einer gemeinsamen Arbeit mit Volker Böhm und Jan Wenzelburger (vgl. Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000)). Die Darstellung des Modells ist überarbeitet, die verwendeten Notationen und Formulierungen sind zum großen Teil denen in Böhm & Chiarella (2000)<sup>1</sup> angepasst. Das Kapitel enthält jedoch mehrere Abschnitte, die nicht in Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000) zu finden sind. Es handelt sich hierbei um die Diskussion einer Modellspezifikation, die auf Köhler (1998a)<sup>2</sup> zurückgeht (vgl. Abschnitt 2.5.2), und einer

---

<sup>1</sup>Böhm & Chiarella (2000) erweitern das Modell aus Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000) auf eine Ökonomie mit  $K > 1$  Wertpapieren.

<sup>2</sup>Seit meiner Heirat im Juli 1998 heiße ich *Deutscher*. Mein Geburtsname lautet *Köhler*.



weiteren Verallgemeinerung<sup>3</sup>.

In Kapitel 3 steht die Analyse der Marktteilnahme in Abhängigkeit der individuellen Merkmale der Konsumenten im Vordergrund. Dazu wird das Modell aus Kapitel 2 um heterogene Konsumenten mit Mittelwert–Varianz–Präferenzen erweitert. Die Entscheidung eines jeden Konsumenten über seine Teilnahme am Wertpapiermarkt wird in Abhängigkeit seiner Charakteristiken untersucht, und es werden Bedingungen für die Teilnahme aller Konsumenten am Wertpapiermarkt aufgezeigt. Es schließt sich eine Analyse des Einflusses der Heterogenität auf Wertpapierpreis, Marktteilnahme, Risikozuschläge und die Volatilität des Wertpapierpreises an.

Das Modell in Kapitel 4 berücksichtigt die Existenz eines Fond–Managers, der Wertpapiere verkauft. Die Modellierung der Konsumenten ist identisch zu der aus Kapitel 2 bzw. 3. Es stellt sich die Frage, wie groß der Einfluss eines Fond–Managers auf den Wertpapiermarkt ist, der in jeder Periode neu entscheidet, wieviele Wertpapiere er anbietet. Am Ende der einzelnen Kapitel bzw. Abschnitte finden sich kurze Zusammenfassungen der vorangegangenen Aussagen. Literaturüberblicke bilden den Anfang der einzelnen Kapitel.

---

<sup>3</sup>Diese Verallgemeinerung habe ich im Rahmen des Doktoranden– und Diplomandenseminars am Lehrstuhl Prof. Volker Böhm vorgetragen (vgl. Abschnitt 2.2 und 2.5).

## Kapitel 2

# Ein Finanzmarktmodell mit überlappenden Generationen

Auf Finanzmärkten haben subjektive Erwartungen der Investoren – neben deren Präferenzen, Erstausstattungen und anderen individuellen mikrotheoretischen Merkmalen – einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung von Wertpapierpreisen. Investoren, die auf der gleichen Seite eines Wertpapiermarktes agieren, haben nach empirischen Analysen unterschiedliche Erwartungen über die zukünftige Entwicklung von Wertpapierpreisen. Somit können nicht alle Erwartungen der Investoren rational sein. Diese Beobachtungen führen zu einer endogenen<sup>1</sup> Modellierung von Wertpapierpreisen unter Berücksichtigung nicht-rationaler Erwartungen der Investoren.

Die Literatur trägt der Endogenisierung und der Berücksichtigung nicht-rationaler Erwartungen auf unterschiedliche Weise Rechnung. In vielen Fällen werden Beschränkungen wie z.B. die *no-arbitrage-condition* als notwendige Gleichgewichtsbedingung eingeführt. Oftmals werden gleichgewichtige Wertpapierpreise dadurch unabhängig von den Präferenzen und Erwartungen der Investoren und folgen einem exogen vorgegebenen stochastischen Prozess. Dieses wird z.B. von Merton (1973) festgestellt. Andere Arbeiten wie u.a. die von Lucas (1978), Cox, Ingersoll, Jr. & Ross (1985a, 1985b), Duffie (1996) und Huang & Litzenberger (1988) benutzen intertemporale Gleichgewichtsbedingungen, um endogene Wertpapierpreise zu generieren. Typischerweise nutzen sie die Annahme rationaler Erwartungen, um ihre Modelle zu schließen.

Die Berücksichtigung nicht-rationaler Erwartungen der Konsumenten erfolgt z.B. in Varian (1985) und DeLong, Shleifer, Summers & Waldmann (1990b). Kurz (1994) entwickelt eine eigene Theorie der *rational beliefs*. Diese „rationale Mutmaßung“ wird durch

---

<sup>1</sup>durch individuelle Merkmale der Konsumenten bestimmte

Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben, die nicht mit der objektiven Verteilung übereinstimmen. Dennoch generiert die Ökonomie im Zeitablauf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die von allen Konsumenten korrekt antizipiert wurde. In diesem Sinne ist sie rational<sup>2</sup>.

Varian (1985) untersucht Wertpapierpreise in einem Arrow–Debreu–Modell mit Konsumenten, die unterschiedliche subjektive Wahrscheinlichkeiten besitzen. Diese gleichgewichtigen Wertpapierpreise hängen im Allgemeinen vom aggregiertem Konsum und der Verteilung subjektiver Wahrscheinlichkeiten ab. Der Wert eines Wertpapiers ist somit durch eine Funktion individueller Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben. Ein Anstieg der Streuung dieser Verteilungen kann die Preise erhöhen oder senken. Das Ergebnis ist abhängig von den Parametern der Nutzenfunktion. Besitzen die Konsumenten identische CARA–Präferenzen und ist ihre Risikoaversion nicht zu klein, so sind die Preise von Wertpapieren mit „gestreuter“ Wahrscheinlichkeitsverteilung kleiner als die mit weniger „gestreuter“. Üblicherweise werden „gestreute“ Erwartungen mit kleinen Wertpapierpreisen im Arrow–Debreu–Gleichgewicht assoziiert. Die Ergebnisse der Analyse, in welcher Weise divergente Meinungen auf Wertpapierpreise in einer Arrow–Debreu–Ökonomie wirken, verallgemeinern die Ergebnisse aus Rubinstein (1976) und Breeden & Litzenberger (1978) auf den Fall unterschiedlicher subjektiver Erwartungen. DeLong, Shleifer, Summers & Waldmann (1990b) betrachten ein Modell überlappender Generationen mit rationalen Investoren und Händlern, die eine fehlerhafte Verteilung besitzen<sup>3</sup>. Die Einführung solcher Händler ändert das Verhalten der „rationalen Investoren“. Ihre Anwesenheit erhöht zudem die Varianz der Wertpapierpreise und des Risikozuschlags.

Weitere Untersuchungen des Einflusses heterogener und nicht notwendig rationaler Erwartungen auf Wertpapierpreise führen z.B. Lintner (1969), Miller (1977), Williams (1977), Jarrow (1980) und Mayshar (1983) im Rahmen des CAPM durch.

Zur Modellierung eines Wertpapiermarktes mit aktivem Handel bietet sich die Struktur überlappender Generationen an. Auf Grund der vorhandenen Heterogenität der Population, bestehend aus jungen und alten Konsumenten, findet Handel immer statt. Die jungen Konsumenten fragen Wertpapiere nach, die die alten Konsumenten verkaufen (vergleiche Samuelson (1958) oder Diamond (1965)). Diesen Vorteil machen sich z.B. Huberman (1984) und Orosel (1998) zu Nutze. So unternimmt Huberman (1984) den Versuch, die Struktur überlappender Generationen (vergleiche Samuelson (1958))

---

<sup>2</sup>Eine umfangreiche Darstellung der Theorie bietet Kurz (1997).

<sup>3</sup>In der angelsächsischen Literatur heißen diese Händler *noise trader*.

mit der Bewertung von Wertpapieren zu verbinden. Er kann die Existenz von Wertpapierpreisen nachweisen und diskutiert ihre Eigenschaften. Die Verteilung dieser Preise ist endogen und hängt von den Präferenzen der Konsumenten und ihren rationalen Erwartungen über zukünftige Auszahlungen ab. Seine Arbeit ähnelt der von Lucas (1978), der ein Modell gleichgewichtigen Wertpapierpreisverhaltens in einem stochastischen Kontext modelliert. Allerdings verzichtet Lucas (1978) auf die Struktur überlappender Generationen und unterstellt identische Konsumenten, die unendlich lange leben. Die Dividendenzahlungen folgen einem Markov-Prozess. Huberman (1984) verallgemeinert die Modellierung der Dividenden, indem jeder junge Konsument ein Signal (ein Stück Information) erhält. Diese Signale folgen einem Markov-Prozess, der wiederum die Dividendenzahlungen bestimmt. In diesem Szenario ist der Dividendenprozess nach Lucas (1978) als Spezialfall (die Dividende ist das Signal selber) enthalten. Der Wertpapierpreis ist funktional abhängig von den Signalen, und seine Eigenschaften wechseln mit der Verhaltensänderung der Konsumenten gegenüber Risiko. Die Struktur der überlappenden Generationen ermöglicht in Orosel (1998) die Analyse des Wertpapiermarktes mit heterogenen Konsumenten. Er studiert den Einfluss heterogener Konsumenten auf den Wertpapiermarkt und insbesondere auf die Marktteilnahme<sup>4</sup>. Labadie (1986) nutzt ein Modell überlappender Generationen, um das Verhalten von Wertpapierpreisen zu analysieren. Die Modellform überlappender Generationen weist viele vorteilhafte Strukturen auf. So sind die Märkte unvollständig, die gehandelten Wertpapiere sind Ansprüche auf zukünftige Dividendenzahlungen, Konsumenten können keine *contingent claims* verkaufen, da die zukünftigen Käufer noch nicht auf der Welt sind. Alle diese Marktfraktionen verhalten sich wie Liquiditäts- oder Kreditbeschränkungen und haben bedeutende Auswirkungen auf Wertpapierpreise und Risikozuschläge. Auch Vayanos (1998) benutzt ein allgemeines Gleichgewichtsmodell überlappender Generationen mit einer risikolosen und mehreren risikobehaftete Anlagen. Der Handel findet zwischen jungen und alten Konsumenten statt, und jede Transaktion verursacht Kosten. Die Wertpapierpreise werden in einer geschlossenen Form angegeben und steigen mit steigenden Transaktionskosten. Nach Böhm & Wenzelburger (1999) stellt die explizite und sequentielle Modellierung einer Ökonomie eine attraktive Alternative zu den herkömmlichen Vorgehensweisen dar. Häufig können Lösungen selbst unter Annahme rationaler Erwartungen nur als impliziter Fixpunkt angegeben werden. Eine (empirische) Untersuchung dieses Fixpunktes ist mit sehr hohem Aufwand verbunden, häufig sogar unmöglich. Weiter ist die Berücksich-

---

<sup>4</sup>In Kapitel 3 wird ein Modell mit heterogenen Konsumenten vorgestellt und die Marktteilnahme endogen bestimmt. Die Resultate werden mit der Arbeit von Orosel (1998) in Verbindung gebracht.

tigung von Lernen bzw. die Bildung subjektiver Erwartungen durch die an vielen Stellen notwendige Annahme rationaler Erwartungen gänzlich ausgeschlossen. Diese Probleme werden durch eine sequentielle Modellierung umgangen. Böhm & Wenzelburger (1999) schlagen vor, die rekursiven Strukturen ökonomischer Systeme explizit zu formulieren. Ökonomische Mechanismen werden nicht länger durch implizite Gleichungen, sondern durch Abbildungen beschrieben, die maßgeblich von den individuellen Merkmalen der Ökonomie (z.B. Präferenzen, Erwartungen etc.) abhängen. Vorhersageregeln charakterisieren die Erwartungen der Konsumenten. Die Kombination aus diesen Vorhersageregeln und der Abbildung liefern ein ökonomisches dynamisches System, welches global auf dem ganzen Zustandsraum definiert ist. Die Verbindung dieses dynamischen Systems mit zufälligen Störungen, die durch einen exogenen stochastischen Prozess beschrieben werden, liefert ein zufälliges dynamisches System<sup>5</sup>.

Der Idee von Böhm & Wenzelburger (1999) folgend wird in diesem Kapitel ein Modell überlappender Generationen entwickelt, in dem Konsumenten subjektive – nicht notwendig rationale – Erwartungen bezüglich der Entwicklung von Wertpapierpreisen und deren Rendite besitzen. Die Determinierung des Wertpapierpreises geschieht endogen und resultiert aus der Erwartungsnutzenmaximierung aller Konsumenten unter Berücksichtigung sämtlicher individueller Merkmale. Der resultierende cum dividend Wertpapierpreis lässt sich als zufälliges dynamisches System formulieren. Das Modell findet sich zu großen Teilen bereits in der Arbeit Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000), allerdings ist die Schreibweise der in Böhm & Chiarella (2000) angepasst worden. Köhler (1998a)<sup>6</sup> liefert die Grundlage für den Abschnitt 2.5.2. Die Verallgemeinerungen aus Abschnitt 2.2 und Abschnitt 2.5 sind die Resultate eines Vortrags, den ich im Rahmen des Doktoranden- und Diplomandenseminars am Lehrstuhl Prof. Volker Böhm gehalten habe.

Die hier benutzte Vorgehensweise zur Modellierung eines Finanzmarktmodells mit sequentieller Struktur und endogenen durch eine explizite Abbildung beschriebenen Wertpapierpreisen kann einige Hinweise zur Lösung des von Mehra & Prescott (1985) entdeckten *Equity Premium Puzzles* liefern. Dieses Puzzle bezeichnet die Tatsache, dass Risikozuschläge zu hoch sind, um sie mit ökonomischen Standardmodellen erklären zu können. Der durchschnittliche reale Ertrag von Wertpapieren war in den vergangenen 100 Jahren in den USA um 6% pro Jahr höher als der Ertrag von risikolosen Anlagen

---

<sup>5</sup>Mit Arnold (1998) steht eine wohl-definierte mathematische Theorie für zufällige dynamische Systeme zur Verfügung.

<sup>6</sup>Diese Arbeit entstand noch unter meinem Geburtsnamen.

(z.B. Schatzwechsel). Eine risikolose Anlage erzielt im Durchschnitt pro Jahr 1% Rendite während der Kauf von Wertpapieren oder anderen risikobehafteten Anlagen im Durchschnitt 7% pro Jahr erzielt. Mehra & Prescott (1985) unterstellen in ihrem allgemeinen Gleichgewichtsmodell einen unendlich lange lebenden Konsumenten, der eine additiv-separable Nutzenfunktionen mit konstanter relativer Risikoaversion besitzt. Auf einem reibungslosen Markt werden Wertpapiere und Bonds gehandelt. Die historischen Daten lassen sich nur mit einer Risikoaversion zwischen 30 und 40 imitieren. Dieser Wert ist viel zu hoch und völlig unrealistisch. Die Literatur hat sich in vielfältiger Form mit der Schätzung von Risikoaversion (vergleiche z.B. Kocherlakota (1996)) beschäftigt. Arrow (1971) fasst verschiedene Beobachtungen zusammen und schließt auf eine Risikoaversion von ungefähr eins. Friend & Blume (1975) hingegen schlagen eine Risikoaversion in Höhe von etwa zwei vor. Zur Imitation beobachteter Variabilitäten zwischen Konsum und Investition benötigen Kydland & Prescott (1982) Risikoaversionen zwischen eins und zwei.

Eine umfassende Zusammenfassung der Problematik des Equity Premium Puzzles bietet Kocherlakota (1996). Er sieht das Equity Premium Puzzle weiterhin als ungelöst an, denn es demonstriert das Unwissen über die Gründe der Aversion der Investoren gegenüber des Risikos der Wertpapiererträge.

Die Literatur hält viele Ansätze zur Lösung des Puzzles bereit. Naheliegend ist die Modifikation der Präferenzen. Epstein & Zin (1989, 1991) unterstellen einen verallgemeinerten Erwartungsnutzen<sup>7</sup>. Dabei determiniert eine Funktion, die von heutigem und zukünftigem Konsum abhängt und konstante Elastizität aufweist, den heutigen Nutzen. Die in dieser Weise implizierte Trennung der Risikoaversion von der intertemporalen Substitution hilft viele Anomalien aus dem Paper von Mehra & Prescott (1985) zu erklären. Durch die Verwendung intertemporaler Präferenzen ist in einer beliebigen Periode der marginale Nutzen des Konsums eine im Nutzen der Vorperiode steigende Funktion<sup>8</sup>. Durch die Verwendung solcher Präferenzen ist in Constantinides (1990) und Heaton (1995) der zukünftige Konsumwunsch der Investoren größer als der heutige. Aus diesem Grund erhöht sich das Sparen im Laufe der Zeit. Dieser Umstand hat Einfluss auf die Höhe der Risikozuschläge und mindert das Equity Premium Puzzle. Schon Du-

---

<sup>7</sup>Weil (1989) und Kandel & Stambaugh (1991) liefern eine komplementäre Analyse des verallgemeinerten Erwartungsnutzens. Interessante Implikationen für Wertpapierpreise generieren Epstein & Wang (1994) und Epstein & Zin (1990) durch eine Verallgemeinerung des Erwartungsnutzens auf ganz andere Art.

<sup>8</sup>In der Literatur wird dieser Umstand der Gewöhnung an einen Konsumlevel auch als *habit formation* bezeichnet.

esensberry (1949) setzt voraus, dass der individuelle Nutzen eines Investoren nicht nur eine Funktion des eigenen Konsums ist, sondern auch das soziale Niveau des Konsums beachtet<sup>9</sup>. Dieser Intuition folgend, berücksichtigen Abel (1990, 1999), und Cali (1994) relative Konsumeffekte und unterstellen Präferenzen, in denen individueller Nutzen eines fixen Konsumniveaus vom per capita Konsum abhängt. Sie beschreiben die Auswirkung solcher Konsumeffekte auf die Wertpapierpreise und können das Rätsel um die Höhe der Risikozuschläge teilweise lösen. Zusätzlich liefert Abel (1999) einen Algorithmus, der den empirisch determinierten Mittelwert und die Varianz des risikobehafteten Zinssatzes – und damit den statistischen Risikozuschlag – ermittelt.

Sämtliche Arbeiten, in denen die Modifikation der Präferenzen in Modellen mit repräsentativen Konsumenten<sup>10</sup> die Lösung des Equity Premium Puzzles liefern sollte, hatten gemischten Erfolg. Sie lösten eine Debatte über die Güte von Resultaten, die auf unüblichen Präferenzen beruhen, aus.

Das Modell von Mehra & Prescott (1985) beschreibt eine Ökonomie ohne Friktionen (keine Transaktionskosten, keine Unvollständigkeit der Märkte etc.). Zur Aufhebung dieser Friktionslosigkeit unterstellt Weil (1992) in einem zweiperiodigem Modell unvollständige Märkte. Auf Grund dessen müssen die Individuen mehr sparen, um sich gegenüber dem Zufall ihres zukünftigen Konsums zu versichern. Durch die erhöhte Unsicherheit verlieren Wertpapiere als Investitionsmöglichkeit ihre Attraktivität und die Risikozuschläge steigen. Weil (1992) kann das Puzzle in seinem Modell lösen. Allerdings ist die Benutzung eines zweiperiodigen Modells eine starke Einschränkung. Es abstrahiert von dynamischem Handel, der auch als Versicherung gegen Risiko dient. Lucas (1994) weist auf die Tatsache hin, dass das Equity Premium Puzzle gegenüber vielen Quellen der Marktunvollständigkeit robust ist. Häufig liefern empirische Tests, z.B. des CAPMs mit einem repräsentativen Konsumenten, negative Resultate.

Eine andere Möglichkeit zur Untersuchung des Equity Premium Puzzles resultiert aus der Nutzung von Modellen überlappender Generationen. Diese liefern automatisch eine heterogene Population – bestehend aus jungen und alten Konsumenten – und verwerfen die grundlegende Annahme eines unendlich lange lebenden repräsentativen Konsumenten (vgl. Mehra & Prescott (1985)). Labadie (1986) zeigt in einem Modell überlappender Generationen, dass hohe Risikoaversion nicht notwendig einen größeren Risikozuschlag nach sich zieht. Der fundamentale Unterschied des Risikozuschlags in einem Modell überlappender Generationen und einem Modell mit einem repräsentativen unendlich

---

<sup>9</sup>In der Literatur wird dieser Umstand mit *Keeping up with the Joneses* bezeichnet.

<sup>10</sup>Epstein & Zin (1989), Kandel & Stambaugh (1990, 1991), Constantinides (1990), Kocherlakota (1990) und Weil (1989).

lange lebenden Konsumenten<sup>11</sup> begründet sich durch die unterschiedlichen Grenzzraten der Substitution. Dieser Zusammenhang kann zur Lösung des Equity Premium Puzzles beitragen. Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell überlappender Generationen gibt ebenfalls einige Hinweise auf die Lösung des Equity Premium Puzzles. Es zeigt sich, dass ein Risikozuschlag von 6% selbst unter rationalen Erwartungen und mit geringer Risikoaversion imitiert werden kann.

Nach Kocherlakota (1996) muss zur Lösung des Equity Premium Puzzles im Rahmen eines jeden Modells mit einem unendlich lange lebenden repräsentativen Konsumenten hohe Aversion gegenüber des Konsumrisikos oder des Risikos des per capita Konsums angenommen werden. Leichte Änderungen des Modells von Mehra & Prescott (1985) wie z.B. die Einführung einer *cash-in-advance* Beschränkung für die Geldnachfrage (vergleiche Labadie (1989) und Giovanni & Labadie (1991)) ändern die Implikationen nicht signifikant. Dennoch kann die Benutzung eines weitaus aufwändigeren Modells dramatische Einflüsse auf die Wertpapierpreise haben.

Im Folgenden wird ein Finanzmarktmodell mit überlappenden Generationen entwickelt, in dem die markträumenden Wertpapierpreise explizit determiniert werden. Dabei spielt es keine Rolle, welches Wahrscheinlichkeitsmaß ein beliebiger Konsument zur Bildung seines Erwartungsnutzens gebraucht.

## 2.1 Die Konsumenten

Es wird ein Modell überlappender Generationen mit endlich vielen Konsumenten  $i \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$  betrachtet. Jeder dieser Konsumenten „lebt“ zwei Perioden lang. In der ersten Lebensperiode erhält er eine Erstausrüstung  $e^i > 0$  in Einheiten eines nicht lagerfähigen Konsumgutes. Er konsumiert in dieser Periode nicht. In der zweiten Lebensperiode möchte er konsumieren. Somit muss er seine Erstausrüstung in der ersten Lebensperiode investieren. Es existieren zwei Investitionsmöglichkeiten. Zum einen kann er seine Erstausrüstung risikolos zum exogen gegebenen Zinssatz  $r > 0$  anlegen oder risikobehaftete Anteile an einer Firma kaufen. Die Firma produziert in jeder Periode einen stochastischen Output. Dieser wird unter den Anteilseignern als Dividendenzahlungen verteilt. Junge Konsumenten können gleichzeitig beide Investitionsmöglichkeiten in Anspruch nehmen, Leerverkäufe sind allerdings nicht erlaubt.

Jeder junge Konsument maximiert seinen erwarteten Nutzen über zukünftigen Konsum. Die Rendite der risikolosen Anlage sei durch  $R := 1+r$  definiert. Des Weiteren bezeichne

---

<sup>11</sup>wie z.B. in Lucas (1978)



$0 \leq y^i \leq e^i$  die risikolose Investition und  $x^i \geq 0$  die Anzahl der zum Preis  $p$  gekauften Firmenanteile (Wertpapiere). Der Konsum in der zweiten Lebensperiode eines beliebigen Konsumenten  $i$  ist dann durch  $c^i := Ry^i + (d + p_{+1})x^i$ , gegeben, d. h. der zukünftige Konsum des  $i$ -ten Konsumenten wird durch eine Funktion  $c^i : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben. Die Dividendenzahlungen sind stets nicht-negativ und werden mit  $d \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}_+$  bezeichnet. Weiter bezeichnet  $p_{+1} \geq 0$  den Verkaufspreis des Wertpapiers. Der Index  $+1$  trägt dem Umstand Rechnung, dass der Verkaufspreis eine zukünftige Größe ist, die in der kommenden Periode ermittelt wird. Mithilfe der Budgetgleichung  $y^i + px^i = e^i$  ergibt sich

$$c^i = R \cdot \underbrace{(e^i - px^i)}_{\text{riskikolose Anlage}} + \underbrace{(d + p_{+1})x^i}_{\text{Wertpapierertrag}} .$$

Die Konsumenten betrachten den Wertpapierpreis  $p$  als Parameter und bilden Erwartungen über den Wertpapierertrag, d. h. über die Summe aus Dividendenzahlung  $d$  und Verkaufspreis  $p_{+1}$ . Der Ertrag eines Wertpapiers  $q := d + p_{+1}$  ist eine Zufallsvariable<sup>12</sup> auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $\mathbb{R}_+$ . Der Konsument  $i$  besitzt ein subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu^i$ , mit dessen Hilfe er die Erwartungen über  $q$  bildet. Somit definiert

$$V_p^i(x) := \int_{\mathbb{R}_+} U^i (Re^i + (q - p) \cdot x) \nu^i(dq), \quad i \in \mathcal{I}$$

den Erwartungsnutzen des  $i$ -ten Konsumenten. Jeder Konsument maximiert unter Benutzung seines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\nu^i$  seinen Erwartungsnutzen, d. h.

$$\max_{x \in [0, \frac{e^i}{p}]} V_p^i(x). \tag{2.1}$$

Die Lösung liefert seine Wertpapiernachfrage in Abhängigkeit des Wertpapierpreises  $p$  und des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\nu^i$ . Zur Sicherung der Existenz und Eindeutigkeit des Maximierungsproblems (2.1) werden folgende Annahmen gemacht<sup>13</sup>.

**Annahme 2.1** *Die Nutzenfunktion und das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß eines jeden Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$  erfüllen die folgenden Bedingungen:*

- (i) *Die Nutzenfunktion  $U^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist zweimal stetig differenzierbar, streng monoton wachsend, streng konkav und beschränkt.*

---

<sup>12</sup>Die Dividendenzahlungen werden im Folgenden als stochastischer Prozess modelliert. Somit ist  $q$  eine Zufallsvariable, da die Dividendenzahlungen stochastisch sind. Der zukünftige Wertpapierpreis  $p_{+1}$  hängt von diesen Dividendenzahlungen ab, ist aber nicht stochastisch.

<sup>13</sup>Siehe auch Grandmont (1982).

(ii) Jedes subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu^i : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}_+$ .

Durch die Annahme 2.1 ist es erlaubt, Differentiation und Integration in der Bedingung erster Ordnung des Maximierungsproblems aus Gleichung (2.1) zu vertauschen<sup>14</sup>. Das folgende Lemma gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die strenge Konkavität der Funktion  $V_p^i(\cdot)$  für alle  $p \in \mathbb{R}_+$  und  $i \in \mathcal{I}$  an.

### Lemma 2.2

Sei  $p \in \mathbb{R}_+$  beliebig, aber fest. Es gelte Annahme 2.1. Die Funktion  $V_p^i : [0, \frac{e^i}{p}] \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist genau dann streng konkav, wenn  $\nu^i(\{q \in \mathbb{R}_+ | q \neq Rp\}) > 0$  gilt.

### Beweis von Lemma 2.2:

Unter Annahme 2.1 gilt für die zweite Ableitung von  $V_p^i$

$$(V_p^i)''(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (U^i)''(Re^i + (q-p)x)(q-Rp)^2 \nu^i(dq)$$

und  $(U^i)''(\cdot) < 0$ . Somit gilt  $(V_p^i)''(x) < 0$  genau dann, wenn  $\nu^i(\{q \in \mathbb{R}_+ | q \neq Rp\}) > 0$  erfüllt ist. □

Damit besitzt ein beliebiger Konsument  $i$  nur dann eine eindeutige Lösung seines Maximierungsproblems (2.1), wenn er „glaubt“, dass die Risikoprämie  $\frac{q}{p} - R$  nicht Null ist, d. h. er rechnet dem Ereignis  $\frac{q}{p} \neq R$  eine positive Wahrscheinlichkeit zu. Um die Schreibweise zu erleichtern, wird eine Menge  $\{q \in \mathbb{R}_+ | q \neq Rp\}$  im Folgenden stets mit  $\{q \neq Rp\}$  identifiziert. Die Betrachtung der von Neumann–Morgenstern–Nutzenfunktion  $U^i$  lässt weitere Aufschlüsse über das Verhalten des Konsumenten  $i$  zu. Sei dazu  $p$  beliebig, aber fest. Die Betrachtung der Bedingung erster Ordnung

$$(V_p^i)'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (U^i)'(Re^i + (q-Rp)x)(q-Rp) \nu^i(dq) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.2)$$

liefert drei Spezialfälle.

(i)  $\nu_p^i(\{q = Rp\}) = 1$ .

In diesem Fall gilt  $(V_p^i)'(x) = 0$  für alle  $x \in [0, \frac{e^i}{p}]$ , d. h. Konsument  $i$  ist indifferent zwischen all seinen zulässigen Portfeuillees.

(ii)  $\nu_p^i(\{q > Rp\}) = 1$ .

Hier gilt, dass  $(V_p^i)'(x) > 0$  für alle  $x \in [0, \frac{e^i}{p}]$ . Dann ist  $V_p^i$  streng monoton steigend. Konsument  $i$  ist überzeugt, dass der Wertpapierertrag stets größer als der der risikolosen Anlage ist. Damit investiert er sein gesamtes Vermögen in Wertpapiere. Risikolose Anlagen kauft er nicht.

---

<sup>14</sup>Siehe auch Bauer (1992).

(iii)  $\nu_p^i(\{q < Rp\}) = 1$ .

Dieser Fall ist der zu (ii) gegenteilige. Hier gilt  $(V_p^i)'(x) < 0$  für alle  $x \in [0, \frac{e^i}{p}]$  und  $V_p^i$  ist streng monoton fallend in  $x$ . Konsument  $i$  „glaubt“, dass die risikolose Anlage der risikobehafteten vorzuziehen ist. Er investiert sein gesamtes Vermögen in die risikolose Anlage und verlässt den Wertpapiermarkt.

Die obigen Fälle (i)–(iii) liefern Randlösungen des Maximierungsproblems. Im Folgenden ist es von Bedeutung, unter welchen Bedingungen die Konsumenten innere Lösungen haben und sowohl risikolose als auch risikobehaftete Anlagen nachfragen.

### Satz 2.3

Sei  $p > 0$  beliebig, aber fest. Es gelte  $\nu^i(\{q \neq Rp\}) > 0$  und die Annahme 2.1 sei erfüllt.  $x^* \in (0, \frac{e^i}{p})$  ist genau dann die einzige innere Lösung des Maximierungsproblems (2.1), wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$(i) \quad \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}_+} q \nu^i(dq) > R, \quad (ii) \quad \int_{\mathbb{R}_+} (U^i)' \left( q \cdot \frac{e^i}{p} \right) (q - Rp) \nu^i(dq) > 0.$$

### Beweis von Satz 2.3:

Nach Lemma 2.2 ist die Funktion  $V_p^i$  streng konkav, d. h.  $(V_p^i)'' < 0$ . Daraus folgt, dass  $(V_p^i)'$  streng monoton fallend und  $x^*$  eine eindeutige Lösung des Maximierungsproblems (2.1) ist. Sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen  $x^* \in (0, \frac{e^i}{p})$  und  $(V_p^i)'(x) = 0$  erfüllt, so ist  $x^*$  eine innere Lösung. Das ist genau dann der Fall, wenn  $(V_p^i)'(0) > 0$  und  $(V_p^i)'(\frac{e^i}{p}) < 0$ . Nun gelten weiter

$$(V_p^i)'(0) = \underbrace{(U^i)'(Re^i)}_{>0} \int_{\mathbb{R}_+} (q - Rp) \nu^i(dq) \text{ und}$$

$$(V_p^i)' \left( \frac{e^i}{p} \right) = \int_{\mathbb{R}_+} (U^i)' \left( q \frac{e^i}{p} \right) (q - Rp) \nu^i(dq).$$

Damit ist  $x^*$  genau dann eine innere Lösung, wenn die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt sind.  $\square$

Bedingung (i) trägt der allgemeinen Intuition Rechnung, dass ein Konsument nur dann risikobehaftete Wertpapiere kauft, wenn er „glaubt“, dass die erwartete Risikoprämie positiv ist. Der folgende Satz beschreibt die Eigenschaften der individuellen Wertpapiernachfrage

$$\varphi^i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (p, \nu) \mapsto \arg \max_{x \in [0, \frac{e^i}{p}]} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} U^i(Re^i + (q - p)x) \nu^i(dq) \right\}. \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+)$  die Menge aller Borel-Maße  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

#### Satz 2.4

Die Annahme 2.1 sei erfüllt. Sei  $\nu^i$  beliebig, aber fest, und es gelte  $\nu^i(\{q \neq Rp\}) > 0$  für alle  $p \in \mathbb{R}_+$ . Die individuelle Wertpapiernachfrage (für festes  $\nu^i$ )  $\varphi^i(\cdot, \nu^i)$  ist eine in  $p$  stetige Funktion und erfüllt die Randeigenschaften

$$(i) \lim_{p \rightarrow 0} \varphi^i(p, \nu^i) = \infty \quad \text{und} \quad (ii) \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^i(p, \nu^i) = 0.$$

#### Beweis von Satz 2.4:

Auf Grund der strengen Konkavität der Funktion  $V_p^i$  (vgl. Lemma 2.2) ist  $\varphi^i(\cdot, \nu^i)$  die Lösung des Maximierungsproblems (2.1). Die Korrespondenz  $p \mapsto [0, \frac{e^i}{p}]$  ist kompaktwertig und stetig. Dann ist auch  $\varphi^i$  stetig in  $p$ .

Für hinreichend kleine Wertpapierpreise  $p$  gilt  $\nu^i(\{q > Rp\}) = 1$ . Dann folgt aus  $(V_p^i)' > 0$   $\varphi^i(p, \nu^i) = \frac{e^i}{p}$ . Das ist die Aussage (i). Die Aussage (ii) folgt direkt aus der Budgetrestriktion  $0 \leq \varphi^i(p, \nu^i) \leq \frac{e^i}{p}$ .  $\square$

## 2.2 Monotone Nachfragefunktionen

Dieser Abschnitt widmet sich der Frage, unter welchen Bedingungen Nachfragefunktionen monoton sind<sup>15</sup>. Es wird sich zeigen, dass – für beliebige Verteilungsfunktionen – eine ganze Klasse von Nutzenfunktionen zu monotonen Wertpapiernachfragen führt. Zunächst wird an die Definition der Risikoaversion<sup>16</sup> und die der Risikotoleranz<sup>17</sup> erinnert.

#### Definition 2.5

Das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion ist für eine zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \mapsto u(c)$  durch

$$ARA_u(c) := -\frac{u''(c)}{u'(c)}$$

definiert. Der inverse Ausdruck  $T_u(c) := (ARA_u(c))^{-1}$  wird als Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikotoleranz bezeichnet.

<sup>15</sup>Die Ergebnisse und Überlegungen aus diesem Abschnitt entstammen nicht der Arbeit Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000).

<sup>16</sup>Siehe dazu auch Arrow (1971) und Pratt (1964).

<sup>17</sup>Siehe dazu auch Huang & Litzenberger (1988, Seite 134).

Mit obiger Definition folgt in Satz 2.6 die erste Aussage über die Monotonie der Nachfragefunktion.

**Satz 2.6**

Die Annahme 2.1 sei erfüllt, und  $i \in \mathcal{I}$  sei beliebig. Weiter sei  $ARA_{U^i}(c) > 0$  für alle  $c > 0$ , und es gelte  $\nu^i\{q \neq Rp\} > 0$ . Dann ist die Wertpapiernachfrage  $\varphi^i(\cdot, \nu^i)$  monoton fallend, falls  $T_{U^i}(c) > c - Re^i$  für alle  $c$  gilt.

**Beweis von Satz 2.6:** Die Wertpapiernachfrage ergibt sich aus dem Maximierungsproblem (2.1) und lautet

$$\varphi^i(p, \nu^i) := \max \left\{ 0, \min \left\{ \arg \max_x V_p^i(x), \frac{e^i}{p} \right\} \right\}.$$

Für  $\varphi^i(p, \nu^i) = \frac{e^i}{p}$  ist  $\varphi^i(\cdot, \nu^i)$  immer streng monoton fallend. Betrachte nun die Bedingung erster Ordnung des Maximierungsproblems (2.1)

$$F^i(x, p) := \int_{\mathbb{R}} (U^i)'(Re^i + (q - Rp)x)(q - Rp)\nu^i(dq) \stackrel{!}{=} 0$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion  $F^i$  lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial x}(x, p) &= \int_{\mathbb{R}} (U^i)''(c)(q - Rp)^2 \nu^i(dq) < 0 \quad \text{und} \\ \frac{\partial F^i}{\partial p}(x, p) &= R \int_{\mathbb{R}} [-(U^i)''(c)(q - Rp) - (U^i)'(c)] \nu^i(dq) \\ &= R \int_{\mathbb{R}} (U^i)'(c) \left[ -\frac{(U^i)''(c)}{(U^i)'(c)} x(q - Rp) - 1 \right] \nu^i(dq) \\ &= R \int_{\mathbb{R}} (U^i)'(c) [ARA_{U^i}(c)(c - Re^i) - 1] \nu^i(dq), \end{aligned}$$

wobei  $c = Re^i + (q - Rp)x$ . Gilt nun  $T_{U^i}(c) > c - Re^i$ , so ist  $\frac{\partial F^i}{\partial x}(x, p)$  negativ und nach dem Satz über implizite Funktionen  $\frac{\partial}{\partial p}x(\cdot)$  negativ. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

In der Klasse von Nutzenfunktionen mit linearer Risikotoleranz (auch bekannt als Klasse der HARA<sup>18</sup>-Nutzenfunktionen) gibt es viele Funktionen, die die in Satz 2.6 geforderten Bedingungen erfüllen und somit zu einer monotonen Wertpapiernachfrage führen. Dabei ist die Wahl des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes nicht von Bedeutung. Für eine beliebige Nutzenfunktion  $u$  sei die absolute Risikotoleranz durch  $T_u(c) := \kappa + \psi \cdot c$ ,

<sup>18</sup>HARA = Hyperbolic Absolute Risk Aversion.

$\kappa, \psi \in \mathbb{R}$  gegeben. Die Bedingung aus Satz 2.6 ist z.B. sofort für  $\psi > 1$  und  $\kappa > -Re^i$  erfüllt.

Die Lösung der Differentialgleichung

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)} = (\kappa + \psi c)^{-1}$$

besteht aus drei verschiedenen Funktionenmengen<sup>19</sup>. Diese drei Lösungsmengen sind abhängig von  $\psi$ , d. h.

$$\psi \neq 0, 1 : u(c) \sim \left[ \frac{1}{\psi - 1} \right] (\kappa + \psi c)^{\frac{\psi - 1}{\psi}}, \quad (2.4)$$

$$\psi = 1 : u(c) \sim \log(\kappa + c), \quad (2.5)$$

$$\psi = 0 : u(c) \sim -\kappa \exp\left(-\frac{c}{\kappa}\right). \quad (2.6)$$

Im Zusammenhang mit den Ausdrücken (2.4), (2.5) und (2.6) bedeutet das Zeichen  $\sim$ , dass die Lösungen bis auf affin-lineare Transformationen eindeutig sind. Die folgenden Beispiele zeigen Funktionen aus jeder der obigen drei Lösungsmengen.

**Beispiel 2.7**  $\hat{u}(c) := k + b \cdot c^a$ ,  $k, b > 0$  und  $0 < a < 1$ .

Die Funktion  $\hat{u}$  ist vom Typ (2.4) und es gilt  $T_{\hat{u}}(c) = \frac{c}{1-a}$ . Damit ist die Ungleichung  $T_{\hat{u}}(c) > c - Re^i$  aus Satz 2.6 erfüllt, und die Wertpapiernachfrage ist monoton fallend.

**Beispiel 2.8**  $\bar{u}(c) := \log(c + \kappa)$ ,  $\kappa > 0$ .

Die Funktion  $\bar{u}$  ist vom Typ (2.5). Wegen  $T_{\bar{u}}(c) = c + \kappa$  ist die Ungleichung  $T_{\bar{u}}(c) > c - Re^i$  aus Satz 2.6 erfüllt, und es ergibt sich eine monotone Wertpapiernachfrage.

**Beispiel 2.9**  $\tilde{u}(c) := 1 - \exp(-\alpha c)$ ,  $\alpha > 0$ .

Die negative Exponential-Nutzenfunktion  $\tilde{u}$  ist vom Typ (2.6). Wegen  $T_{\tilde{u}}(c) = \frac{1}{\alpha}$  ist die Ungleichung  $T_{\tilde{u}}(c) > c - Re^i$  aus Satz 2.6 nicht für alle  $c$  erfüllt. Somit kann nicht auf Grund von Satz 2.6 auf Monotonie der Wertpapiernachfrage geschlossen werden.

Die negative Exponential-Nutzenfunktion gehört zu der Klasse der Nutzenfunktionen mit konstanter absoluter Risikoaversion<sup>20</sup> und ist die Grundlage der in diesem Kapitel

<sup>19</sup>Siehe dazu Ohlson (1987, Seite 25f).

<sup>20</sup>Die absolute Risikoaversion wird für eine Nutzenfunktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch den Quotienten  $-\frac{u''(c)}{u'(c)}$  definiert. Im Falle konstanter absoluter Risikoaversion ist dieser Quotient für alle  $c \in \mathbb{R}$  konstant.

folgenden Modellspezifikationen. Die Klasse der CARA<sup>21</sup>-Nutzenfunktionen ist analytisch leichter zu handhaben als die oftmals plausiblere Klasse der Nutzenfunktionen mit konstanter relativer Risikoaversion<sup>22</sup> (CRRA<sup>23</sup>-Klasse). Aus diesem Grund gehört die Klasse der Funktionen mit konstanter absoluter Risikoaversion ebenfalls zu den Standardwerkzeugen ökonomischer Analysen. In den folgenden Abschnitten lassen sich auf Grund der Annahme konstanter absoluter Risikoaversion viele der folgenden Ausdrücke berechnen, und die Untersuchung der Interaktionen zwischen Risikoaversion, Wertpapierpreis und Risikozuschlag wird möglich. In Abschnitt 2.5 zeigt sich, dass individuelle Wertpapiernachfragen auch für CARA-Nutzenfunktionen monoton sind.

## 2.3 Der Wertpapierpreis

Das Verhalten jedes einzelnen Konsumenten basiert sowohl auf objektiven Größen wie Präferenzen, Preisen und Erstaussstattungen, als auch auf subjektiven Erwartungen bzgl. der zukünftigen Entwicklung von Wertpapierpreisen und Dividendenzahlungen. Somit hängt nicht nur das individuelle Verhalten, sondern insbesondere auch die aggregierte Wertpapiernachfrage von individuellen Merkmalen ab. Folgerichtig wird jeder markträumende Wertpapierpreis endogen in Abhängigkeit solcher Merkmale bestimmt. Im Folgenden wird eine einfache und zugleich sehr allgemeine Möglichkeit vorgestellt, die Interaktionen zwischen individuellen Charakteristiken und endogenem Wertpapierpreis zu berücksichtigen<sup>24</sup>. Die Erwartungen der Konsumenten können dabei beliebig sein, d. h. sie sind nicht notwendig rational.

Im Folgenden sei angenommen, dass die einzige Firma in dem vorliegenden Modell überlappender Generationen mit stationärer Population die Anzahl emittierter Wertpapiere nicht verändert. Damit ist für jede Generation junger Konsumenten die Anzahl der von den alten Konsumenten angebotenen Wertpapiere konstant. Sie sei mit  $\bar{x}$  bezeichnet. Weiter bezeichne  $\nu := \{\nu^1, \dots, \nu^N\}$  die Menge der subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße der  $N$  Konsumenten. Damit schreibt sich die aggregierte Wertpapierfrage als Summe

---

<sup>21</sup>CARA = Constant Absolute Risk Aversion.

<sup>22</sup>Die relative Risikoaversion wird für eine Nutzenfunktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $-\frac{u''(c)}{u'(c)} \cdot c$  definiert. Im Falle konstanter relativer Risikoaversion ist dieser Quotient für alle  $c \in \mathbb{R}$  konstant.

<sup>23</sup>CRRA = Constant Relative Risk Aversion.

<sup>24</sup>Das resultierende Modell ist ein diskretes zufälliges dynamisches System. Eine allgemeine Ausführung der Theorie zufälliger dynamischer Systeme liefert z.B. Arnold (1998).

aller individuellen Wertpapiernachfragen (vergleiche Definition (2.3))

$$\varphi(p, \nu) := \sum_{i=1}^N \varphi^i(p, \nu^i).$$

Der markträumende Wertpapierpreis ist der höchste Preis, der die Gleichheit von Angebot und Nachfrage auf dem Wertpapiermarkt garantiert. Dann lautet die Definition des Wertpapierpreises in Periode  $t$

$$p_t = \max \{p \in \mathbb{R}_+ \mid \varphi(p, \nu) = \bar{x}\}, \quad (2.7)$$

d. h. der sich einstellende Wertpapierpreis ist eine Funktion des aggregierten Angebots  $\bar{x}$  und sämtlicher subjektiver Wahrscheinlichkeitsmaße  $\nu$ . Unter den Bedingungen von Satz 2.4 ist der Wertpapierpreis eine wohldefinierte Funktion des aggregierten Angebots und aller subjektiven Erwartungen, d. h.

$$\begin{aligned} S : (\mathbb{P}(\mathbb{R}_+))^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \nu &\longmapsto S(\nu) = \max \{p \in \mathbb{R}_+ \mid \varphi(p, \nu) = \bar{x}\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

In Abbildung 2.1 ist die sequentielle Modellstruktur illustriert. Sie zeigt die sich überlappenden Generationenstruktur mit jungen und alten Konsumenten. Zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  gibt es  $N$  junge und  $N$  alte Konsumenten in der Ökonomie. Die alten Konsumenten bieten  $\bar{x}$  Wertpapiere an. Das ist genau die Menge, die sie zum Zeitpunkt  $t-1$  als junge Konsumenten gekauft haben. Die im Zeitpunkt  $t$  jungen Konsumenten möchten auch Wertpapiere kaufen, ihre Wertpapiernachfrage zu einem beliebigen Wertpapierpreis  $p$  lautet  $\sum_{i=1}^N \varphi^i(p, \nu^i)$ . Der markträumende Wertpapierpreis wird so determiniert, dass Angebot und Nachfrage übereinstimmen und der Wertpapiermarkt geräumt ist. Zum Zeitpunkt  $t+1$  sind die in Zeitpunkt  $t$  jungen Konsumenten alt und verkaufen ihre in  $t$  gekauften Wertpapiere an die im Zeitpunkt  $t+1$  jungen Konsumenten.

Definiere  $\nu_t$  als den Vektor aller subjektiver Wahrscheinlichkeitsmaße zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist der *ex dividend* Wertpapierpreis<sup>25</sup> in Periode  $t$  durch

$$p_t = S(\nu_t) := \varphi^{-1}(\bar{x}, \nu_t), \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.9)$$

determiniert. Diese Schreibweise ist nicht ganz korrekt, da  $\varphi^{-1}(\bar{x}, \nu_t)$  formal betrachtet eine Menge ist. Dennoch ist die Formulierung sehr intuitiv. Analog ist der *cum dividend*

---

<sup>25</sup>In Böhm & Chiarella (2000) ist die Wertpapiernachfrage  $\varphi^i(\cdot, \nu^i)$  nicht wie hier als Funktion des Wertpapierpreises  $p$ , sondern als Funktion des Produkts aus risikoloser Rendite und Wertpapierpreis, d. h.  $Rp$ , definiert. In der vorliegenden Arbeit soll der Eindruck vermieden werden, dass die risikolose Rendite ausschließlich in Form von  $Rp$  Einfluss auf die Wertpapiernachfrage nimmt.



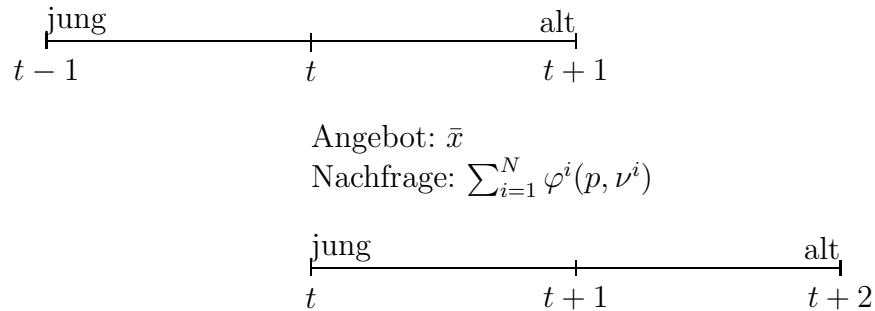


Abbildung 2.1: Die sequentielle Handelsstruktur.

Wertpapierpreis in Periode  $t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , durch

$$q_t = S(\nu_t) + d_t \tag{2.10}$$

gegeben,  $d_t$  bezeichnet dabei die Dividendenzahlung in Periode  $t$ . Die Gleichungen (2.9) und (2.10) sind ökonomische Gesetze<sup>26</sup>. Sie beschreiben die Entwicklung der Zustände einer Ökonomie und berücksichtigen die Interaktionen von Erwartungen und Dividendenzahlungen<sup>27</sup>. Der ex dividend Wertpapierpreis ist eine deterministische Funktion individueller Merkmale. Der cum dividend Wertpapierpreis ist nur dann stochastisch, wenn die Dividendenzahlungen stochastisch sind.

**Annahme 2.10**

*Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Die Menge möglicher Dividendenzahlungen sei mit  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}_+$  bezeichnet. Die Dividendenzahlungen werden durch einen stationären Markov-Prozess  $(D_t)_{t \in \mathbb{N}}$  mit  $D_t : \Omega \rightarrow \mathcal{D}$  beschrieben.*

Mit der Spezifikation des Dividendenprozesses in Annahme 2.10 ist die Entwicklung des Wertpapierpreises vollständig durch die in Gleichung (2.8) definierte Funktion determiniert. Es zeigt sich sehr deutlich, dass der cum und der ex dividend Wertpapierpreis sowohl durch individuelle Charakteristiken der Konsumenten, wie z.B. Erstausrüstung und Präferenzen, als auch durch subjektive Einschätzungen zukünftiger Preise bestimmt

<sup>26</sup>Vgl. Böhm & Wenzelburger (1999) und Böhm & Wenzelburger (2002).

<sup>27</sup>Sei  $x \in \mathbb{R}^d, d > 0$ ,  $\text{Prob}(X)$  bezeichne die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$ . Böhm & Wenzelburger (2002) beschreiben ein ökonomisches Gesetz durch eine stetige Funktion

$$S : \mathbb{R}^n \times X \times \text{Prob}(X) \rightarrow X, \quad (w, x, \nu^e) \mapsto S(w, x, \nu^e)$$

mit Parameter bzw. exogener Variable  $w$ , dem aktuellen Zustand  $x \in X$  und  $\nu^e \in \text{Prob}(X)$  als subjektivem Wahrscheinlichkeitsmaß zur Bestimmung zukünftiger Zustände der Ökonomie  $S(w, x, \nu^e)$ .

werden. Für feste und beliebige subjektive Wahrscheinlichkeitsmaße  $\nu_t$  ist der Prozess des cum dividend Wertpapierpreises unter der Annahme 2.10

$$S(\nu_t) + D_t(\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{N}$$

ein stationärer Markov-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Auf Grund der Marktstruktur und unter Berücksichtigung von (2.9) und (2.10), sowie der Annahme 2.10 bilden die jungen Konsumenten in einer beliebigen Periode  $t$  ihre Erwartungen über den cum dividend Wertpapierpreis der Periode  $t + 1$ , bevor der Wertpapierpreis in Periode  $t$  realisiert wird. Somit basieren die Erwartungen der Konsumenten lediglich auf den Informationen, die bis zum Zeitpunkt  $t - 1$  erhältlich sind. Erwartungswert und Varianz des cum dividend Wertpapierpreises in Periode  $t$  lauten

$$\mathbb{E}_{t-1}(q_t) = S(\nu_t) + \mathbb{E}_{t-1}(D_t) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}_{t-1}(q_t) = \mathbb{V}_{t-1}(D_t).$$

Der Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises hängt wesentlich von den individuellen Merkmalen eines jeden einzelnen Konsumenten ab. Die Varianz des cum dividend Wertpapierpreises hingegen wird ausschließlich durch die Varianz des Dividendenprozesses bestimmt. Benutzen alle Generationen das gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß zur Bestimmung subjektiver Preiserwartungen, d. h.  $\nu_t = \nu_{t+1}$  für alle  $t \in \mathbb{N}$ , so ist der cum dividend Wertpapierpreisprozess lediglich eine Verschiebung des Dividendenprozesses um  $S(\nu_t)$ . Der ex dividend und der cum dividend Wertpapierpreis (vgl. (2.9) und (2.10)) sind Funktionen auf dem Raum der subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße und dienen der Berechnung subjektiver Wertpapierpreiserwartungen. Die Wertpapierpreise, über die Erwartungen gebildet werden, sind für die Bestimmung des aktuellen Wertpapierpreises jedoch unbedeutend. Die Eigenschaft einer Funktion, nur von Erwartungen über eine bestimmte Größe abzuhängen und nicht von dieser Größe selbst, wird auch als *Cobweb*-Eigenschaft bezeichnet. In einer beliebigen Periode  $t$  bildet jeder Konsument mit seinem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu_t^i$  Erwartungen über den Wertpapierertrag der Periode  $t + 1$ . Diese Erwartungsbildung geschieht ohne Kenntnis der Preise und Dividenden der Periode  $t$ , d. h. die Konsumenten bilden Erwartungen über morgige Erträge auf der Basis gestriger Erkenntnisstände. Dieses Phänomen wird nach Böhm & Wenzelburger (1997) als *expectational lead* bezeichnet.

Der cum dividend Wertpapierpreis wird als Summe aus einer deterministischen und einer stochastischen Komponente beschrieben. Die deterministische Komponente  $S(\nu_t)$  wird durch das aggregierte Angebot an Wertpapieren und dem Vektor aller subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße bestimmt. Die stochastische Komponente wird ausschließlich

durch den Dividendenprozess beschrieben. Somit gehen sämtliche Eigenschaften des Dividendenprozesses auf den Wertpapierpreisprozess über. Alle genannten Eigenschaften bleiben im OLG-Modell mit mehr als einem risikobehafteten Wertpapier erhalten<sup>28</sup>.

## 2.4 Erwartungstreue Prognosen

Im Allgemeinen unterscheidet sich die tatsächliche Verteilung des cum dividend Wertpapierpreises von den Verteilungen, die die Konsumenten benutzen, um ihre subjektiven Erwartungen über den cum dividend Wertpapierpreis zu bilden. Wollen die Konsumenten ihre Vorhersagen über zukünftige cum dividend Wertpapierpreise auf Basis der letzten Beobachtungen verbessern, so scheint es sinnvoll, Markov-Kerne zu benutzen (vgl. Böhm & Wenzelburger (1997)). Um die Analyse rationaler Erwartungen zu erleichtern, wird im Folgenden unterstellt, dass alle Konsumenten den gleichen Markov-Kern  $\Psi|\mathcal{D} \implies \mathbb{R}_+$  für ihre Prognosen zukünftiger cum dividend Wertpapierpreise benutzen. Dann ist  $\nu_t^i = \Psi_{d_t}$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  die subjektive Verteilung für den zukünftigen cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t + 1$ . Damit ist der subjektive Erwartungswert der Konsumenten für den cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t + 1$  durch  $\int_{\mathbb{R}_+} q\Psi(d_t, dq)$  gegeben. Diesen Erwartungswert bestimmen die Konsumenten auf Basis aller in Periode  $t$  zur Verfügung stehenden Informationen.  $(S(\Psi_{D_t(\omega)} + D_t(\omega)))_{t \in \mathbb{N}}$  ( $\omega \in \Omega$ ) beschreibt dann den Prozess des cum dividend Wertpapierpreises. Dabei sind sowohl der Markov-Kern als auch vergangene Beobachtungen von Bedeutung. Ändert sich der Markov-Kern über die Zeit nicht, so ist der cum dividend Wertpapierpreisprozess stationär. Das folgende Konzept stationärer erwartungstreuer Markov-Kerne (vgl. Wenzelburger (1999), Böhm & Wenzelburger (2002)) definiert die besten Vorhersagen bedingt auf verfügbare Informationen.

### Definition 2.11

Die Funktion  $S$  sei gegeben. Dann heißt ein Markov-Kern  $\Psi|\mathcal{D} \implies \mathbb{R}_+$  *erwartungstreu*, falls für alle  $d_t \in \mathcal{D}$  und  $t \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$S(\Psi_{d_t}) + \mathbb{E}_t(D_{t+1}) = \int_{\mathbb{R}_+} q\Psi(d_t, dq) \quad (2.11)$$

erfüllt ist.

Damit bezeichnen erwartungstreue Markov-Kerne gerade solche Markov-Kerne, für die die subjektiven Erwartungswerte mit den objektiven Erwartungswerten entlang aller

---

<sup>28</sup>Siehe dazu Böhm & Chiarella (2000).

Orbits des Preisprozesses übereinstimmen. Konsumenten, die einen erwartungstreuen Markov-Kern benutzen, haben entlang aller Orbits des Systems rationale Erwartungen. Dabei ist zu beachten, dass alle Konsumenten den gleichen Markov-Kern benutzen müssen.

## 2.5 CARA-Nutzenfunktionen

Die Untersuchung der Klasse der Nutzenfunktionen mit konstanter absoluter Risikoaversion (CARA-Nutzen) in Abschnitt 2.2 hat gezeigt, dass die resultierenden Nachfragefunktionen nicht notwendig (streng) monoton im Wertpapierpreis sind. Es stellt sich nunmehr die Frage, ob die Verwendung von CARA-Nutzenfunktionen zu weiteren strukturellen Ergebnissen über die Wertpapiernachfrage führt. Dazu wird unterstellt, dass die Konsumenten beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen benutzen, deren Dichtefunktionen unabhängig von Dividendenzahlungen und aktuellen Wertpapierpreisen sind.

### Annahme 2.12

Die Nutzenfunktion und das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß eines jeden Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$  erfüllen die folgenden Bedingungen:

- (i) Die Nutzenfunktion  $u^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die CARA-Nutzenfunktion

$$U(c) := u^i(c) := 1 - \exp(-\alpha c), \quad \alpha > 0.$$

Der Parameter  $\alpha$  beschreibt dabei die absolute Risikoaversion der Konsumenten.

- (ii) Jeder Konsument bildet seine Erwartungen mithilfe einer durch die Dichtefunktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $q \mapsto f(q)$  definierten Verteilung.

Zur Analyse des Maximierungsproblems ist die Einführung der folgenden Notationen sinnvoll.

### Notation 2.13

$$\begin{aligned} F_1(x) &:= \int_{\mathbb{R}_+} q \cdot \exp(-\alpha x q) f(q) \, dq, & F_2(x) &:= \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\alpha x q) f(q) \, dq > 0 \\ F_3(x) &:= \int_{\mathbb{R}_+} q^2 \cdot \exp(-\alpha x q) f(q) \, dq, & H(x) &:= \frac{F_1(x)}{F_2(x)}. \end{aligned}$$

### Lemma 2.14

Die Funktion  $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist monoton fallend.

**Beweis von Lemma 2.14:**

Die erste Ableitung der Funktion  $H(\cdot)$  lautet

$$H'(x) = \frac{\alpha}{[F_2(x)]^2} ([F_1(x)]^2 - F_2(x) \cdot F_3(x)).$$

Zu zeigen ist die Ungleichung

$$[F_1(x)]^2 \leq F_2(x) \cdot F_3(x). \quad (2.12)$$

Wegen  $F_2(x) > 0$  für alle  $x > 0$  ist die Ungleichung (2.12) äquivalent zu

$$\left[ \frac{F_1(x)}{F_2(x)} \right]^2 \leq \frac{F_3(x)}{F_2(x)}.$$

Das ist aber die *Jensensche Konvexitätsungleichung für Integrale*<sup>29</sup> □

Lemma 2.14 zeigt, dass die Monotonie der Funktion  $H$  unter beliebigen Verteilungsfunktionen garantiert ist.

**Satz 2.15**

Sei  $H(\cdot)$  streng monoton fallend und  $\lambda^1$  bezeichne das Lebesgue–Borel–Maß auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ . Unter Annahme 2.12 ist die individuelle Wertpapiernachfrage der Konsumenten durch

$$\varphi(p, f\lambda^1) := \min \left\{ 0, \max \left\{ H^{-1}(Rp), \frac{e}{p} \right\} \right\}$$

determiniert.

**Beweis von Satz 2.15:**

Die Bedingung erster Ordnung für das Maximierungsproblem (2.1) lautet unter der Annahme 2.12  $F_1(x) = RpF_2(x)$ . Wegen  $F_2(x) \neq 0$  ist das äquivalent zu  $Rp = H(x)$ .

<sup>29</sup>Die Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei konvex,  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei integrierbar und es gelte  $\int p(x)g(x)dx < \infty$  und  $\int p(x)F(g(x))dx < \infty$ . Dann gilt

$$F \left( \frac{\int p(x)g(x)dx}{\int p(x)dx} \right) \leq \frac{\int p(x)F(g(x))dx}{\int p(x)dx}.$$

Diese Ungleichung wird als *Jensensche Konvexitätsungleichung für Integrale* bezeichnet und gilt für Riemann- und Lebesgue-Integration (vgl. Bronstein (1996, Seite 39f)).

Im Beweis des Satzes 2.14 gelten folgende Definitionen:

$$p(q) := \exp(-\alpha \bar{x}q)f(q) \quad \text{und} \quad g(q) := q.$$

Auf Grund der strengen Monotonie und der Stetigkeit von  $H(\cdot)$  ist  $H(\cdot)$  invertierbar. Zusammen mit der Surjektivität der Funktion  $H(\cdot)$  ist  $x^* := H^{-1}(Rp)$  die innere Lösung des Maximierungsproblems. Unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen  $x \geq 0$  und  $x \leq \frac{e}{p}$  liefert diese Aussage die Behauptung.  $\square$

Die Abhängigkeit der individuellen Wertpapiernachfrage von der Dichtefunktion  $f(\cdot)$  geht über die Funktion  $H(\cdot)$  ein. Laut Gleichung (2.7) bestimmt sich der ex dividend Wertpapierpreis als der höchste Preis, der die Gleichheit von Angebot und Nachfrage garantiert<sup>30</sup>, d. h.

$$S_H(f\lambda^1) := \max \left\{ p \in \mathbb{R}_+ \mid N\varphi(p, f\lambda^1) = \bar{x} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{R}H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right), N\frac{e}{\bar{x}} \right\}.$$

Die Funktion  $H$  wird durch die CARA–Nutzenfunktion und eine beliebige Verteilungsfunktion, die der Bedingung (ii) aus Annahme 2.12 genügt, bestimmt. Allein durch die Unterstellung der CARA–Nutzenfunktion wird es möglich, den Wertpapierpreis ohne exaktes Wissen des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes zu bestimmen. Weiter unten zeigt sich, dass die komparativ–statischen Analysen durchführbar sind. Der cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t + 1$  ergibt sich entsprechend als  $S_H(f\lambda^1) + D_{t+1}$  mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t(S_H(f\lambda^1) + D_{t+1}) &= \min \left\{ \frac{1}{R}H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right), N\frac{e}{\bar{x}} \right\} + \mathbb{E}_t(D_{t+1}) \quad \text{und} \\ \mathbb{V}_t(S_H(f\lambda^1) + D_{t+1}) &= \sigma_t^2. \end{aligned}$$

Die Ergebnisse der komparativ–statischen Analyse des erwarteten Wertpapierpreises<sup>31</sup> sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Die Risikoaversion, die Größe der Population, das Wertpapierangebot und die risikolose Rendite haben einen negativen Einfluss auf den erwarteten cum dividend Wertpapierpreis.

$\partial$	$\alpha$	$N$	$\bar{x}$	$R$	$\mathbb{E}_t(D_t + 1)$
$\mathbb{E}_t(S(f\lambda^1) + D_{t+1})$	–	+	–	–	+

Tabelle 2.1: Komparative Statik des erwarteten cum dividend Wertpapierpreises.

Zur Berechnung sämtlicher erwarteter Risikozuschläge und der zugehörigen Varianzen ist die folgende Annahme nützlich.

<sup>30</sup>Für die Bestimmung des Wertpapierpreises ist es bedeutungslos, ob die individuelle Wertpapiernachfrage streng monoton ist. Es reicht die Stetigkeit und Surjektivität auf  $\mathbb{R}_+$ . Durch den Maximumoperator ist der markträumende Wertpapierpreis immer eindeutig.

<sup>31</sup>Die Ergebnisse der Tabelle 2.1 unterstellen, dass stets  $\frac{1}{R}H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right) > N\frac{e}{\bar{x}}$  gilt. Der ex dividend Wertpapierpreis lautet dann  $S_H(f\lambda^1) = \frac{1}{R}H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)$ .

**Annahme 2.16**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sei ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $d \in \mathcal{D}$  beliebig, aber fest. Die Funktionen  $g, h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  seien zeitunabhängig und  $\mathcal{F}$ -messbar. Dann bezeichnen

$$g(d) := \mathbb{E}_t(D_{t+1} | D_t = d) \quad \text{und} \quad h(d) := \mathbb{V}_t(D_{t+1} | D_t = d)$$

den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz des Dividendenprozesses.

Mit Annahme 2.16 ergeben sich der Erwartungswert und die Varianz des Risikozuschlag als

$$MEP_H(d, \alpha) = 1 - R + R \frac{g(d)}{H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)} \quad \text{und} \quad VEP_H(d, \alpha) = R^2 \frac{h(d)}{\left[H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)\right]^2}.$$

Die Tabelle 2.2 fasst die komparativ-statischen Ergebnisse zusammen. Sowohl der erwartete Risikozuschlag als auch die Varianz des Risikozuschlags steigen, falls die Risikoaversion, die Anzahl der Konsumenten oder das Wertpapierangebot steigt. Nur für einen Anstieg der risikolosen Rendite ist keine eindeutige Aussage möglich. Deshalb steht in Tabelle 2.2 an dieser Stelle ein  $+/-$ .

$\partial$	$\alpha$	$N$	$\bar{x}$	$R$
$MEP_H(d, \alpha)$	+	-	+	$+/-$
$VEP_H(d, \alpha)$	+	-	+	+

Tabelle 2.2: Komparative Statik des Risikozuschlags.

Für hinreichend große bedingte Erwartungswerte des Dividendenprozesses, d. h.  $g(d) > H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)$ , wächst mit zunehmender risikoloser Rendite auch der erwartete Risikozuschlag. In diesem Fall ist der erwartete Risikozuschlag immer positiv. Für  $g(d) < H\left(\frac{\bar{x}}{N}\right)$  sinkt der erwartete Risikozuschlag mit einem Anstieg der risikolosen Rendite. Er kann dabei sogar negativ werden. Die Varianz des Risikozuschlags steigt mit zunehmender risikoloser Rendite.

**2.5.1 Die Exponential-Verteilung**

In diesem Abschnitt besitzen die  $N$  identischen Konsumenten eine CARA-Nutzenfunktion und benutzen die *Exponential-Verteilung* mit Parameter  $\theta > 0$  zur Bildung ihrer subjektiven Erwartungen. Die zu dieser Verteilung gehörende Dichtefunktion ist für  $\theta > 0$  durch

$$f^\theta(q) := \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{\theta}{q}\right)$$

gegeben und erfüllt die Bedingungen aus Annahme 2.12. Der Erwartungswert und die Varianz der Exponential-Verteilung betragen  $\theta$  und  $\frac{1}{\theta^2}$ . Mit steigendem Parameter  $\theta$  steigt der Erwartungswert, die Varianz wird kleiner. Die Nutzenfunktion aller Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$  lautet  $U(c) := 1 - \exp(-\alpha c)$ , dabei gilt  $\alpha > 0$ . Mit diesen Spezifikationen liefert die Erwartungsnutzenmaximierung analog zum Maximierungsproblem (2.1)

$$\tilde{\varphi}(p; \theta, \alpha) := \varphi(p, f^\theta \lambda^1) = N \cdot \begin{cases} \frac{e}{p} & : p \leq \frac{\theta}{R}(1 - \alpha Re) \\ \frac{\theta}{\alpha R p} - \frac{1}{\alpha \theta} & : \frac{\theta}{R}(1 - \alpha Re) < p < \frac{\theta}{R} \\ 0 & : p \geq \frac{\theta}{R} \end{cases} \quad (2.13)$$

als aggregierte Wertpapiernachfrage. Dabei bezeichnet  $\lambda^1$  an dieser Stelle das Lebesgue-Borel-Maß auf  $\mathcal{B}$ . Die aggregierte Wertpapiernachfrage ist im Intervall  $[0, \frac{\theta}{R}]$  streng monoton fallend in  $p$ . In Abschnitt 2.2 wird in Beispiel 2.9 die Wertpapiernachfrage für die Exponential-Nutzenfunktion diskutiert. Dabei zeigt sich, dass die Annahme dieser Funktion nicht ausreicht, um auf eine monotone Wertpapiernachfrage zu schließen. Erst die Spezifikation des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes durch die Exponential-Verteilung wird die Wertpapiernachfrage (streng) monoton. In Abschnitt 2.5 blieb die Dichtefunktion unspezifisch. Die resultierende aggregierte Wertpapiernachfrage wird u.a. durch die Inverse der Funktion<sup>32</sup>  $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  determiniert. In dem hier betrachteten Fall der Exponential-Verteilung gilt  $H(x) := \frac{\theta}{\alpha \theta x + 1}$ . Sie ist streng monoton fallend.

In Gleichung (2.13) spielt der subjektive Erwartungswert  $\theta$  eine bedeutende Rolle. Je größer dieser ist, desto mehr Wertpapierpreise korrespondieren zu einer positiven Wertpapiernachfrage, d. h. die Konsumenten sind auf Grund ihres Optimismus (gemessen im subjektiven Erwartungswert  $\theta$ ) bereit, Wertpapiere auch zu hohen Preisen zu kaufen. Wie intuitiv erwartet, führt ein steigender Erwartungswert zu einer steigenden Wertpapiernachfrage. Eine zweite bedeutende Komponente der individuellen Wertpapiernachfrage ist der Koeffizient der absoluten Risikoaversion  $\alpha$ . Je risikoaverser die Konsumenten sind, desto weniger Wertpapiere fragen sie nach. Für Konsumenten mit sehr kleiner Risikoaversion gibt es Wertpapierpreise, zu denen sie ihr ganzes Vermögen in risikobehaftete Wertpapiere investieren. Ist jedoch der Risikoaversionskoeffizient größer als das Inverse des mit der risikolosen Rendite multiplizierten Vermögens, d. h.  $\alpha > \frac{1}{Re}$ , so diversifizieren die Konsumenten ihr Portfolio immer und kaufen stets risikolose

<sup>32</sup>Vergleiche Notation 2.13 auf Seite 27



und risikobehaftete Anlagen. In diesem Fall bestimmt die Höhe des Wertpapierpreises die Aufteilung des Vermögens auf die beiden Investitionsmöglichkeiten. Abbildung 2.2 illustriert die Wertpapiernachfrage ohne Randbedingungen und die Budgetrestriktion in Abhängigkeit des Wertpapierpreises. Die fett gedruckte Kurve ist eine Kombination aus der Nachfrage ohne Randbedingungen und den Randbedingungen selber. Die Wertpapiernachfrage ist auf dem Intervall  $]0, \frac{\theta}{R}[$  eine im Wertpapierpreis streng monoton fallende Funktion. Für Wertpapierpreise, die größer als  $\frac{\theta}{R}$  sind, fragen die Konsumenten keine risikobehafteten Wertpapiere mehr nach. Liegt der Wertpapierpreis im Intervall  $]\frac{\theta(1-\alpha Re)}{R}, \frac{\theta}{R}[$ , so ist die Wertpapiernachfrage durch die innere Lösung des Maximierungsproblems bestimmt. Sind die Wertpapierpreise sehr klein, so investieren die Konsumenten ihr gesamtes Vermögen in risikobehaftete Wertpapiere.

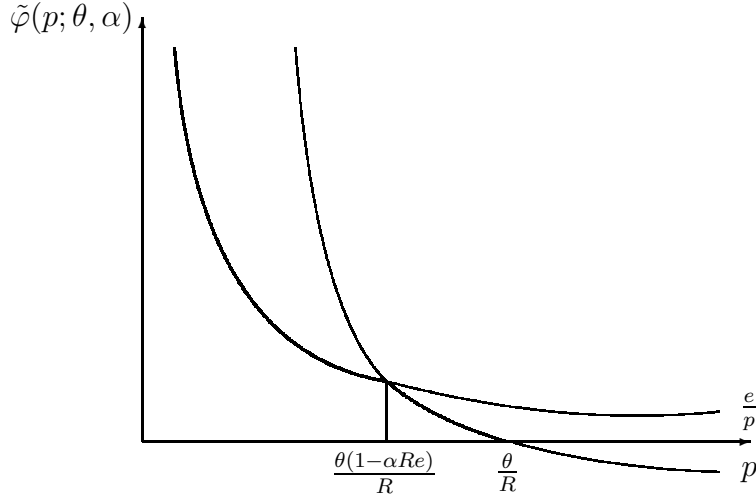


Abbildung 2.2: Die aggregierte Wertpapiernachfrage.

Der Wertpapierpreis ergibt sich in Analogie zur Gleichung (2.7) als

$$\tilde{S}(\theta, \alpha, \bar{x}) := S(f^\theta \lambda^1) := \min \left\{ N \frac{e}{\bar{x}}; \frac{1}{R} \frac{N\theta}{(\alpha\theta\bar{x} + N)} \right\}.$$

Unter Annahme 2.10 lauten die ersten beiden Momente des cum dividend Wertpapierpreises aus Gleichung (2.10)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t \left( \tilde{S}(\theta, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1} \right) &:= \min \left\{ N \frac{e}{\bar{x}}; \frac{N\theta}{R(\alpha\theta\bar{x} + N)} \right\} + \mu_t, \\ \mathbb{V}_t \left( \tilde{S}(\theta, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1} \right) &:= \sigma_t^2, \end{aligned}$$

wobei  $\mu_t := \mathbb{E}_t(D_{t+1})$  und  $\sigma_t^2 := \mathbb{V}_t(D_{t+1})$ . Durch die additive Struktur des cum dividend Wertpapierpreises haben alle individuellen Charakteristiken der Konsumenten Einfluss

auf den Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises. Tabelle 2.3 enthält die komparativ-statischen Ergebnisse für  $\alpha > \frac{1}{Re}$ .

$\partial$	$\alpha$	$\theta$	$N$	$\bar{x}$	$R$	$e$	$\mathbb{E}_t(D_{t+1})$
$\mathbb{E}_t(\tilde{S}(\theta, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1})$	-	+	+	-	-	0	+

Tabelle 2.3: Komparative Statik für  $\alpha > \frac{1}{Re}$ .

Steigender Optimismus führt zu höheren Preisen. Höhere Risikoaversion impliziert allerdings kleinere Wertpapierpreise. Im Gegensatz zum Erwartungswert ist die Varianz des cum dividend Wertpapierpreises unabhängig von sämtlichen individuellen Merkmalen der Konsumenten. Sie ist mit der Varianz des Dividendenprozesses identisch. Wie bereits oben bemerkt, diversifizieren die Konsumenten ihre Portfeuilleen sobald die Risikoaversion  $\alpha$  größer als  $\frac{1}{Re}$  ist. Nur für sehr kleine Risikoaversionskoeffizienten sind die Konsumenten bereit, zu kleinen Preisen ausschließlich risikobehaftete Wertpapiere zu kaufen. Diese Tatsache schlägt sich auch im Wertpapierpreis nieder. Für  $\alpha > \frac{1}{Re}$  gilt stets  $S(\theta, \alpha) = \frac{1}{R} \cdot \frac{N\theta}{\alpha\theta\bar{x} + N}$ .

### Erwartungstreue Prognosen

Dieser Abschnitt widmet sich der Bestimmung und Analyse erwartungstreuer Prognosen. Sei dazu  $\alpha > \frac{1}{Re}$ . Unter den Annahmen 2.10 und 2.16 lautet die Gleichung (2.11) für erwartungstreue Markov-Kerne aus Definition 2.11

$$\frac{N\theta}{R(\alpha\theta\bar{x} + N)} + g(d) \stackrel{!}{=} \theta \iff \theta^2 - \theta \frac{N(1-R) + g(d)R\alpha\bar{x}}{R\alpha\bar{x}} - \frac{g(d)N}{\alpha\bar{x}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Sie besitzt

$$\bar{\theta}(d, \alpha) := \frac{1}{2} \left( R \cdot g(d) + \sqrt{(R \cdot g(d))^2 + 4R \cdot g(d) \frac{N}{\alpha\bar{x}}} \right) \quad (2.14)$$

als einzige positive Lösung der quadratischen Gleichung.  $\bar{\theta}(d, \alpha)$  korrespondiert zu einem erwartungstreuen Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen generiert. Mit steigender Risikoaversion wird  $\bar{\theta}(d, \alpha)$  kleiner. Wächst die risikolose Rendite oder die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie, wächst auch  $\bar{\theta}(d, \alpha)$ . Eine Erhöhung des Wertpapierangebots führt jedoch zu sinkendem  $\bar{\theta}(d, \alpha)$ .

### Risikozuschläge

Die Differenz aus risikobehafteter und risikoloser Rendite wird als Risikozuschlag bezeichnet. Diesen Betrag erhalten die Investoren für ihre Bereitschaft, risikobehaftete

anstatt risikolose Wertpapiere zu kaufen. Die risikobehaftete Rendite in Periode  $t + 1$  wird gewöhnlich als Quotient aus cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t + 1$  und ex dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  definiert. Für  $\alpha > \frac{1}{Re}$  determiniert

$$\frac{\tilde{S}(\theta, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1}}{\tilde{S}(\theta, \alpha, \bar{x})} - R = 1 - R + R \frac{\alpha \theta \bar{x} + N}{N\theta} D_{t+1} \quad (2.15)$$

den Risikozuschlag in Periode  $t + 1$ . Für sehr kleine Dividendenzahlungen kann der Risikozuschlag in einer beliebigen Periode negativ werden. Dies ist der Fall, falls für  $\omega \in \Omega$  die Ungleichung

$$D_{t+1}(\omega) < \frac{R - 1}{R} \cdot \frac{N\theta}{\alpha\theta\bar{x} + N}$$

gilt. Mit der Notation aus Abschnitt 2.5.1 definiert

$$MEP(d, \theta, \alpha) := 1 - R + R \frac{\alpha\theta\bar{x} + N}{N\theta} g(d)$$

den bedingten Erwartungswert des Risikozuschlags<sup>33</sup> als Funktion der Dividendenzahlungen, der subjektiven Erwartungen und der Risikoaversion. Je optimistischer die Konsumenten sind, desto geringer ist der Risikozuschlag. Steigt hingegen die Risikoaversion, so vergrößert sich auch der Risikozuschlag. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} MEP(d, \theta, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \theta && \text{und} \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} MEP(d, \theta, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \alpha \end{aligned}$$

sind erwartete Risikozuschläge für sehr risikoaverse bzw. sehr pessimistische Konsumenten unbeschränkt. Im umgekehrten Fall von sehr großem Optimismus bzw. sehr kleiner Risikoaversion sind erwartete Risikozuschläge durch

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} MEP(d, \theta, \alpha) &= 1 - R + R \frac{\alpha\bar{x}}{N} g(d) && \text{für alle } d, \alpha && \text{und} \\ MEP(d, \theta, 0) &= 1 - R + \frac{R}{\theta} g(d) && \text{für alle } d, \theta \end{aligned}$$

beschränkt. Diese unteren Schranken können negativ sein. Dabei spielt der bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses eine bedeutende Rolle. Steigt das Wertpapierangebot, so steigt auch der Risikozuschlag. Mit sinkender Anzahl an Konsumenten in der Population wachsen die Risikozuschläge, bleiben jedoch durch  $1 - R + R(\alpha\bar{x} + \frac{1}{\theta})g(d)$  beschränkt. Steigt die Anzahl der Konsumenten, so wird der erwartete Risikozuschlag kleiner und ist für alle  $d, \alpha$  und  $\theta$  durch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MEP(d, \theta, \alpha) = 1 - R + \frac{R}{\theta} g(d).$$

---

<sup>33</sup>MEP = Mean Equity Premium.

beschränkt. Die Höhe der Risikoaversion ist für den erwarteten Risikozuschlag unbedeutend, wenn die Population sehr groß ist. Daher ist der Grenzwert mit dem erwarteten Risikozuschlag für eine Risikoaversion von Null identisch, d. h.  $\lim_{N \rightarrow \infty} MEP(d, \theta, \alpha) = MEP(d, \theta, 0)$ . Der Einfluss der risikolosen Rendite auf den Risikozuschlag ist im Gegensatz zu allen anderen Parametern uneindeutig. Der bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses ist dabei ausschlaggebend. Ist die Ungleichung

$$g(d) > \frac{N\theta}{\alpha\theta\bar{x} + N},$$

erfüllt, so steigt der Risikozuschlag mit steigender risikoloser Rendite. Im umgekehrten Fall

$$g(d) < \frac{N\theta}{\alpha\theta\bar{x} + N},$$

sinkt der Risikozuschlag mit steigender risikoloser Rendite. Alle komparativ-statischen Ergebnisse sind in Tabelle 2.4 zusammengefasst. Das Sternchen (\*) bedeutet, dass das Vorzeichen der partiellen Ableitung nicht eindeutig zu bestimmen ist.

$\partial$	$\alpha$	$\theta$	$N$	$\bar{x}$	$R$
$MEP(d, \theta, \alpha)$	+	-	-	+	*
$VEP(d, \theta, \alpha)$	+	-	-	+	+

Tabelle 2.4: Komparative Statik des Risikozuschlags.

Es fällt auf, dass die Vorzeichen der partiellen Ableitungen des erwarteten Risikozuschlags – ausgenommen die der partiellen Ableitung bzgl. der risikolosen Rendite – invers zu den partiellen Ableitungen des erwarteten Wertpapierpreises in der betrachteten Periode sind. Damit senkt alles, was den erwarteten Wertpapierpreis erhöht, den Risikozuschlag.

Unter Annahme 2.16 gilt für die Varianz des Risikozuschlags

$$VEP(d, \theta, \alpha) = R^2 \left[ \frac{\alpha\theta\bar{x} + N}{N\theta} \right]^2 h(d).$$

In Tabelle 2.4 finden sich die Ergebnisse der komparativ-statischen Untersuchungen der Varianz des Risikozuschlags. Die Vorzeichen der partiellen Ableitungen stimmen – mit Ausnahme der partiellen Ableitung bzgl. der risikolosen Rendite – mit denen der partiellen Ableitungen des erwarteten Risikozuschlags überein. Steigende Risikoaversion, steigendes Wertpapierangebot und steigende risikolose Rendite erhöhen die Varianz des

Risikozuschlags. Optimismus und eine große Population senken sie. Die Varianz des Risikozuschlags ist unbeschränkt, falls die subjektiven Erwartungen beliebig klein werden oder die Risikoaversion beliebig groß wird, d. h. es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} VEP(d, \theta, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \alpha && \text{und} \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} VEP(d, \theta, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \theta.\end{aligned}$$

Konvergiert die Risikoaversion gegen Null oder die subjektiven Erwartungswerte gegen Unendlich, so bleibt die Varianz des Risikozuschlags durch

$$\begin{aligned}VEP(d, \theta, 0) &= \left[ \frac{R}{\theta} \right]^2 h(d) && \text{für alle } d, \theta && \text{und} \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} VEP(d, \theta, \alpha) &= R^2 \left[ \frac{\alpha \bar{x}}{N} \right]^2 h(d) && \text{für alle } d, \alpha\end{aligned}$$

beschränkt. Weiter gilt für alle  $d, \theta, \alpha$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} VEP(d, \theta, \alpha) = \left[ \frac{R}{\theta} \right]^2 h(d).$$

Diese untere Schranke ist unabhängig von der Risikoaversion und stimmt mit dem Wert  $VEP(d, \theta, 0)$  überein.

Satz 2.3 auf Seite 18 zeigt, dass Konsumenten nur dann in risikobehaftete Wertpapiere investieren, wenn sie „glauben“, dass der Risikozuschlag positiv ist. Im Allgemeinen hängen der Wertpapierpreis sowie der Risikozuschlag in nicht-trivialer Weise vom subjektiven Erwartungswert des Wertpapierpreises ab. Seien nun  $d, \theta$  und  $\alpha$  beliebig. Der bedingte erwartete Vorhersagefehler für den Wertpapierpreis wird durch die bedingte Fehlerfunktion<sup>34</sup>

$$e^{\mathbb{E}}(d, \theta, \alpha) := \frac{N\theta}{R(\alpha\theta\bar{x} + N)} + g(d) - \theta$$

definiert. Für feste Dividendenzahlung  $d$  beschreibt die bedingte Fehlerfunktion die Differenz zwischen allen möglichen wahren und subjektiven Erwartungswerten des Wertpapierpreises. Dabei ist der Risikoaversionskoeffizient ein Parameter. Die bedingte Fehlerfunktion  $e^{\mathbb{E}}$  ist monoton fallend im subjektiven Erwartungswert  $\theta$  und in der Risikoaversion  $\alpha$ . Für rationale Erwartungen bzw. erwartungstreue Vorhersagen muss die bedingte Fehlerfunktion den Wert Null annehmen. Für festes  $d$  ist das für  $\bar{\theta}(d, \alpha)$  aus Gleichung (2.14) der Fall. Die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags und die Konturlinien der bedingten Fehlerfunktion hängen von den gleichen Variablen ab.

<sup>34</sup>Vergleiche dazu Böhm & Wenzelburger (1997), Wenzelburger (1999).

In Abbildung 2.3 sind diese Konturlinien als Funktionen der subjektiven Erwartungen  $\theta$  und der Risikoaversion  $\alpha$  dargestellt. Der Dividendenprozess wird als homogene diskrete Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten  $(\pi_{ij})_{i,j=1,2,3}$  mit  $\pi_{ij} := \frac{1}{3}$  für alle  $i$  und  $j$  modelliert. Die Dividendenzahlungen<sup>35</sup> sind durch  $d_1 = 0.001$ ,  $d_2 = 0.025$ ,  $d_3 = 0.05$  gegeben. Weiter gilt  $R = 1.01$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{x} = 50$ , die aktuelle Dividendenzahlung ist  $d_1$ . Die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags sind streng monoton steigend im subjektiven Erwartungswert, der erwartete Risikozuschlag nimmt allerdings mit steigendem subjektiven Erwartungswert der Konsumenten ab. Die drei im subjektiven Erwartungswert monoton fallenden Kurven sind Konturlinien der bedingten Fehlerfunktion. Die mittlere Kurve ist die Null-Konturlinie, d. h. der subjektive und der objektive Erwartungswert des Wertpapierpreises stimmen überein. Die obere Konturlinie korrespondiert zu einem Vorhersagefehler von  $-1\%$  und die untere zu einem Vorhersagefehler von  $+1\%$ .

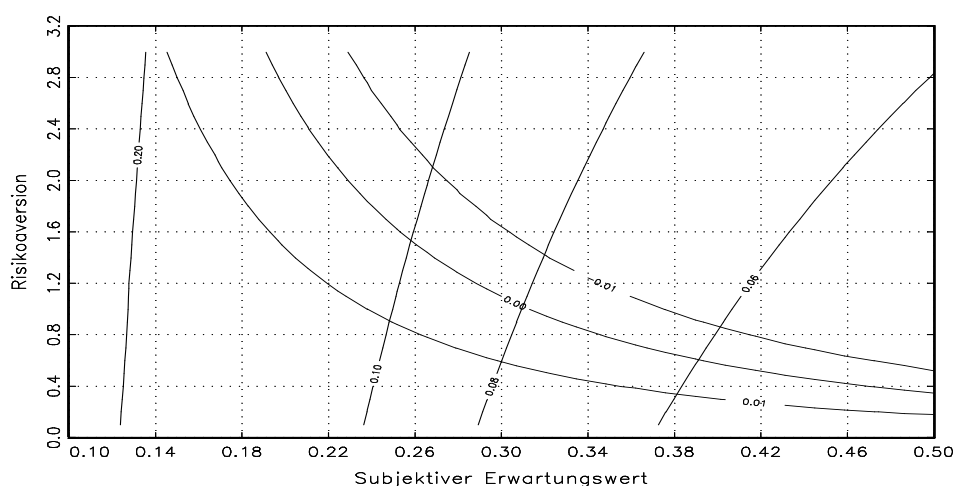


Abbildung 2.3: Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags und der mittleren Fehlerfunktion.

Abbildung 2.3 bestätigt, dass risikoaverse und pessimistische Konsumenten im Durchschnitt mit höheren Risikozuschlägen „belohnt“ werden. Unter rationalen Erwartungen, d. h. entlang der Null-Konturlinie der bedingten Fehlerfunktion, korrespondieren hohe Risikozuschläge mit hoher Risikoaversion. Dennoch ist ein erwarteter Risikozuschlag von etwa 6% für die zu Grunde gelegte Parameterspezifikation für einen Risikoaversionskoeffizienten in Höhe von etwa 0.6 zu erreichen. Der subjektive Erwartungswert ist dann mit etwa 0.39 rational. Dieses Beispiel zeigt, dass das von Mehra & Prescott

<sup>35</sup>Für Dezimalzahlen wird in der vorliegenden Arbeit aus Gründen der Übersichtlichkeit stets die amerikanische Schreibweise benutzt.

(1985) entdeckte Equity Premium Puzzle in dem hier vorliegenden Modell nicht auftritt. Mehra & Prescott (1985) können in ihrem Modell Risikozuschläge<sup>36</sup> von ca. 6% nur für Konsumenten mit unplausibel hoher Risikoaversion erreichen. Im Gegensatz zu ihrem Modell besitzt das hier vorgestellte eine Struktur überlappender Generationen und unterstellt CARA–Nutzenfunktionen. Mehra & Prescott (1985) dagegen arbeiten mit einem unendlich lange lebenden Konsumenten und einer CRRA Nutzenfunktion. Um die Beziehung zwischen Risikozuschlag und Risikoaversion zu analysieren, wird der erwartete Risikozuschlag unter rationalen Erwartungen

$$MEP^*(d, \alpha) := MEP(d, \bar{\theta}(d, \alpha), \alpha)$$

betrachtet. Abbildung 2.4 illustriert die Konturlinien von  $MEP^*$  im Raum der Risikoaversion und der risikolosen Rendite. Die übrigen Parameter sind genauso wie in Abbildung 2.3 gewählt. Die Konturlinien haben als Funktion der risikolosen Rendite eine positive Steigung. Der erwartete Risikozuschlag nimmt unter rationalen Erwartungen mit dem Anstieg der risikolosen Rendite ab und wächst für steigende Risikoaversion. Dennoch zeigt Abbildung 2.4, dass hohe Risikozuschläge auch für kleine Risikoaversionen möglich sind. Für Risikozuschläge in Höhe von 6% steigt die Risikoaversion der Konsumenten – selbst bei risikolosen Renditen bis 1.03 – nicht über 1.2.

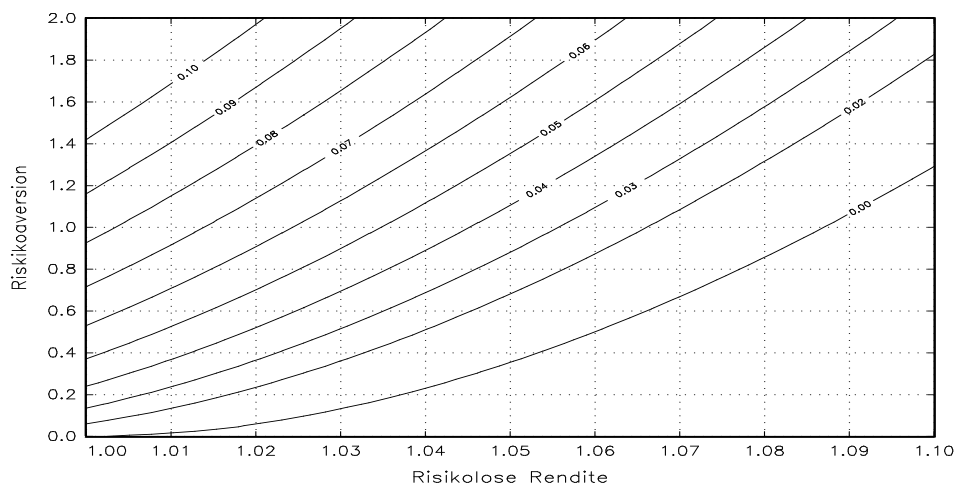


Abbildung 2.4: Konturlinien des mittleren Risikozuschlags mit rationalen Erwartungen.

Wegen  $\lim_{N \rightarrow \infty} MEP^*(d, \alpha) = 1 - R$  existiert unter rationalen Erwartungen ein  $\bar{N} > 0$ ,

<sup>36</sup>Die amerikanischen Daten der letzten 100 Jahre liefern einen mittleren Risikozuschlag von 6%.

so dass in allen Ökonomien mit mehr als  $\bar{N}$  Konsumenten Risikozuschläge stets negativ sind.

### Zusammenfassung

Die im vorangegangenen Abschnitt spezifizierte Ökonomie mit Konsumenten, die nicht notwendig rationale Erwartungen haben, zeigt welche Kraft in der expliziten Modellierung des Preisprozesses steckt. Die vollständige quantitative Analyse der Auswirkungen von Risikoaversion, subjektiven Erwartungen und Populationsgröße auf Wertpapierpreise und Risikozuschläge lässt neue Erkenntnisse zu. So zeigt sich, dass pessimistischere Erwartungen zu niedrigeren Wertpapierpreisen, aber gleichzeitig zu höheren Risikozuschlägen führen. Mit dem Anwachsen der Anzahl an Konsumenten in der Ökonomie wird die Risikoaversion immer unbedeutender für den Risikozuschlag. Die subjektiven Erwartungen behalten jedoch ihren starken Einfluss. Unter rationalen Erwartungen nimmt dieser Grenzwert den Wert  $1 - R$  an und ist negativ.

Rationale Erwartungen werden durch spezielle Markov-Kerne generiert. Es zeigt sich, dass für jede Risikoaversion ein solcher Kern existiert. Im vorliegenden Modell ist es auch unter rationalen Erwartungen möglich, empirisch beobachtete Risikozuschläge zu imitieren. Die explizite Preismodellierung in Rücksicht auf individuelle Konsumentenmerkmale wirft somit neues Licht auf die Debatte über den Zusammenhang zwischen Risikozuschlägen und Risikoaversion. Ein direkter Vergleich mit bereits vorhandenen Ergebnissen der Literatur ist nicht möglich, da in der Regel CRRA<sup>37</sup>- anstatt CARA-Nutzenfunktionen unterstellt werden (vgl. z.B. Mehra & Prescott (1985)).

### 2.5.2 Die Gamma-Verteilung

Wie in Abschnitt 2.5 und in Abschnitt 2.5.1 besitzen die  $N$  identischen Konsumenten auch hier die CARA-Nutzenfunktion. Allerdings unterscheiden sich die zu Grunde gelegten Verteilungsfunktionen zur Bestimmung der subjektiven Erwartungen bzgl. des zukünftigen Wertpapierertrags. Die Konsumenten benutzen die Gamma-Verteilung zu den Parametern  $\tau$  und  $\nu$  mit der zugehörigen Dichtefunktion

$$f^{\tau,\nu}(q) := \frac{\nu^\tau}{\Gamma(\tau)} q^{\tau-1} \exp(-\nu q), \quad \tau, \nu > 0. \quad (2.16)$$

---

<sup>37</sup>CRRA = Constant Relative Risk Aversion.



Dabei bezeichnet  $\Gamma(\tau)$  die *Gamma-Funktion*<sup>38</sup>. Die Dichtefunktion aus Gleichung (2.16) erfüllt die Bedingungen aus Annahme 2.12. Der Erwartungswert und die Varianz der Gamma-Verteilung sind gleich  $\frac{\tau}{v}$  und  $\frac{\tau}{v^2}$ . Mit steigendem Parameter  $\tau$  steigt sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz. Das Gegenteil gilt, falls der Parameter  $v$  steigt. Dann sinken Erwartungswert und Varianz der Gamma-Verteilung. Des Weiteren ist die Varianz eine lineare Funktion des Erwartungswertes. Für  $v < 1$  nimmt die Varianz mit steigendem Erwartungswert überproportional zu. Allerdings wächst sie für  $v > 1$  langsamer als der Erwartungswert. Die Nutzenfunktion aller Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$  lautet  $U(c) := 1 - \exp(-\alpha c)$ , dabei gilt  $\alpha > 0$ .

Mit diesen Spezifikationen liefert die Erwartungsnutzenmaximierung analog zum Maximierungsproblem (2.1)

$$\tilde{\varphi}(p; \tau, v, \alpha) := \varphi(p, f^{\tau, v} \lambda^1) = N \cdot \begin{cases} \frac{e}{p} & : p \leq \frac{\tau - \alpha Re}{Rv} \\ \frac{\tau - Rpv}{\alpha Rp} & : \frac{\tau - \alpha Re}{Rv} < p < \frac{1}{R} \frac{\tau}{v} \\ 0 & : p \geq \frac{1}{R} \frac{\tau}{v} \end{cases} \quad (2.17)$$

als aggregierte Wertpapiernachfrage. In Gleichung (2.17) spielen beide Parameter der Gamma-Verteilung eine bedeutende Rolle. Die Wertpapiernachfrage wird für Preise, die größer als der abdiskontierte subjektive Erwartungswert  $\frac{1}{R} \frac{\tau}{v}$  sind, Null. Je optimistischer die Konsumenten (gemessen im subjektiven Erwartungswert  $\frac{\tau}{v}$ ) sind, desto höher ist der Wertpapierpreis, bei dem die Konsumenten den Wertpapiermarkt verlassen. Ein zweiter bestimmender Faktor der Wertpapiernachfrage ist die Risikoaversion. Falls  $\alpha < \frac{\tau}{Re}$ , gibt es Wertpapierpreise, zu denen die Konsumenten ihr gesamtes Vermögen ausschließlich in risikobehaftete Wertpapiere investieren. Sobald  $\alpha$  jedoch größer als  $\frac{\tau}{Re}$  ist, sind sie dazu nicht mehr bereit. Sie diversifizieren ihre Portfeuille und investieren bis zu einem Preis von  $\frac{\tau}{Rv}$  ihr Vermögen sowohl in risikobehaftete Wertpapiere als auch in die risikolose Anlage. Die Höhe des aktuellen Wertpapierpreises bestimmt dann die Zusammensetzung des Portfeuille. In Abbildung 2.5 ist die aggregierte Wertpapiernachfrage illustriert.

In Analogie zur Gleichung (2.7) beschreibt

$$\tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) := S(f^{\tau, v} \lambda^1) = \min \left\{ N \frac{e}{\bar{x}}; \frac{1}{R} \frac{\tau N}{(\alpha \bar{x} + vN)} \right\}$$

<sup>38</sup>Die Definition der *Gamma-Funktion* lautet

$$\Gamma(\tau) := \int_0^{\infty} z^{\tau-1} \exp(-z) dz \quad \text{für alle } \tau > 0.$$

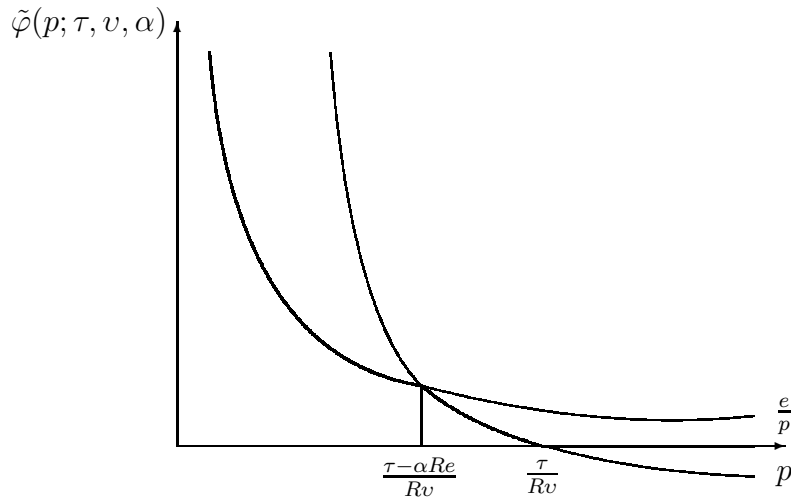


Abbildung 2.5: Die aggregierte Wertpapiernachfrage.

den ex dividend Wertpapierpreis. Der Erwartungswert und die Varianz des cum dividend Wertpapierpreises sind mit  $\mu_t := \mathbb{E}_t(D_{t+1})$  und  $\sigma_t^2 := \mathbb{V}_t(D_{t+1})$  durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t \left( (\tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1}) \right) &:= \min \left\{ N \frac{e}{\bar{x}}; \frac{\tau N}{R(\alpha \bar{x} + vN)} \right\} + \mu_t \\ \mathbb{V}_t \left( (\tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1}) \right) &:= \sigma_t^2 \end{aligned}$$

determiniert. Für  $\alpha > \frac{\tau}{Re}$  ist der Wertpapierpreis stets durch

$$\tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) = \frac{\tau N}{R(\alpha \bar{x} + vN)} \quad (2.18)$$

gegeben. Tabelle 2.5 fasst die komparativ-statischen Ergebnisse für den erwarteten cum dividend Wertpapierpreis aus Gleichung (2.18) zusammen.

$\partial$	$\alpha$	$\tau$	$v$	$N$	$\bar{x}$	$R$	$e$	$\mu_t$
$\mathbb{E}_t(\tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) + D_{t+1})$	-	+	-	+	-	-	0	+

 Tabelle 2.5: Komparative Statik des cum dividend Wertpapierpreises für  $\alpha > \frac{\tau}{Re}$ .

Ein Anstieg der Risikoaversion oder der risikolosen Rendite führt zu einem geringeren erwarteten cum dividend Wertpapierpreis. Durch einen Anstieg der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie steigt auch der cum dividend Wertpapierpreis. Eine höhere Erstausrüstung hat für  $\alpha > \frac{\tau}{Re}$  keinen Einfluss. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ mit denen aus Abschnitt 2.5.1 überein. Die subjektiven Parameter  $\tau$  und  $v$  haben gegensätzliche Auswirkungen auf den Erwartungswert des Wertpapierpreises in Gleichung (2.18).

Mithilfe dieser beiden Parameter sind Aussagen über den Optimismus der Konsumenten möglich. Ein hoher Wert des Parameters  $\tau$  korrespondiert mit großem Optimismus. Dasselbe gilt für kleine Werte des Parameters  $v$ . Ein Anstieg von  $\tau$  (bei festem  $v$ ) erhöht – genauso wie ein Sinken des Parameters  $v$  (bei festem  $\tau$ ) – den Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises. Gilt  $v > \tau$ , so ist der Anstieg des ex dividend Wertpapierpreises durch ein wachsendes  $\tau$  größer als der Betrag der Verringerung durch ein wachsendes  $v$ . Damit ist der Einfluss von  $\tau$  mit  $\tau < v$  größer als der von  $v$ .

**Lemma 2.17**

Es gelte  $\alpha > \frac{\tau}{Re}$ , und es sei  $\tau < v$ . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) > \left| \frac{\partial}{\partial v} \tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) \right|.$$

**Beweis von Lemma 2.17:**

Die Behauptung ergibt sich durch partielle Differentiation der Funktion  $\tilde{S}$  aus Gleichung (2.18), d. h.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) = \frac{N}{R(\alpha \bar{x} + vN)} > \frac{\tau N^2}{R(\alpha \bar{x} + vN)^2} = \left| \frac{\partial}{\partial v} \tilde{S}(\tau, v, \alpha, \bar{x}) \right|,$$

falls  $v > \tau$ . □

Lemma 2.17 analysiert, welcher Parameter der Gamma-Verteilung einen größeren Einfluss auf den Wertpapierpreis hat. Es zeigt sich, dass die Auswirkungen einer Änderung des Parameters  $\tau$  die einer Änderung des Parameters  $v$  betragsmäßig übersteigen, falls  $\tau < v$ . Der positive Einfluss von  $\tau$  und der negative Einfluss von  $v$  stimmen betragsmäßig überein, falls

$$\tau = v + \frac{\alpha \bar{x}}{N}$$

gilt. Für eine sehr große Population unterscheiden sich  $\tau$  und  $v$  dann nur minimal.

**Erwartungstreue Prognosen**

Sei  $\alpha > \frac{a}{Re}$ . Unter den Annahmen 2.10 und 2.16 lautet Gleichung (2.11) aus Definition 2.11

$$\frac{\tau N}{R(\alpha \bar{x} + vN)} + g(d) \stackrel{!}{=} \frac{\tau}{v} \quad (2.19)$$

und liefert mit  $K(d, \alpha, \tau) := g(d)R\alpha \bar{x} - (R-1)\tau N$

$$\bar{\tau}(v, d, \alpha) := \frac{Rv(\alpha \bar{x} + vN)}{R\alpha \bar{x} + vN(R-1)} g(d) \quad \text{und} \quad (2.20)$$

$$\bar{v}(\tau, d, \alpha) := \frac{1}{2g(d)NR} \left[ -K(d, \alpha, \tau) + \sqrt{K(d, \alpha, \tau)^2 + 4g(d)R\alpha \bar{x}N} \right] \quad (2.21)$$

als positive Lösungen der Gleichung (2.19). Offensichtlich kann es überabzählbar viele Paare  $(\bar{\tau}, \bar{v})$  geben, die zu erwartungstreuen Prognosen führen. Die Funktion  $\bar{\tau}(\cdot, d, \alpha) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist streng monoton steigend und streng konvex. Weiter gilt für festes  $d$  und  $\alpha$ ,  $\bar{\tau}(0, d, \alpha) = 0$  und  $\lim_{v \rightarrow \infty} \bar{\tau}(v, d, \alpha) = \infty$ . Für festes  $v$ ,  $d$  und  $\alpha$  korrespondiert  $\bar{\tau}(v, d, \alpha)$  zu einem erwartungstreuen Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen generiert. Mit steigender Risikoaversion wird  $\bar{\tau}(v, d, \alpha)$  kleiner. Gleiches gilt sowohl für eine zunehmende risikolose Rendite als auch für ein Anwachsen der Population. Eine Erhöhung des Wertpapierangebots führt zu einem sinkendem  $\bar{\tau}(v, d, \alpha)$ . Die Funktion  $\bar{v}(\cdot, d, \alpha)$  ähnelt auf den ersten Blick der Lösung  $\bar{\theta}$  aus Abschnitt 2.5.1.

**Lemma 2.18**

(i): Die Risikoaversion  $\alpha$  und die Dividendenzahlung  $d$  seien beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}(\tau, d, \alpha) > 0.$$

(ii): Der Parameter  $\tau$  und die Dividendenzahlung  $d$  seien beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{v}(\tau, d, \alpha) > 0,$$

genau dann, wenn die Ungleichung  $\tau < \frac{1}{R-1}$  erfüllt ist.

**Beweis von Lemma 2.18:**

Die erste Behauptung folgt direkt aus der Berechnung der partiellen Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{v}(\tau, d, \alpha) &= \frac{1}{2g(d)NR} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} K(d, \alpha, \tau)}_{<0} \underbrace{\left[ -1 + \frac{K(d, \alpha, \tau)}{\underbrace{\sqrt{K(d, \alpha, \tau)^2 + 4g(d)R\alpha\bar{x}N}}_{<1}} \right]}_{<0} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Die partielle Differentiation der Funktion  $\bar{v}$  nach  $\alpha$  liefert

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{v}(\tau, d, \alpha) = \frac{1}{2g(d)NR} \cdot \left[ -1 + \frac{K(d, \alpha, \tau) + 2N}{\sqrt{K(d, \alpha, \tau)^2 + 4g(d)R\alpha\bar{x}N}} \right].$$

Dieser Ausdruck ist genau dann positiv, wenn der Term in den eckigen Klammern positiv ist. Einige Umformungen liefern

$$\left[ -1 + \frac{K(d, \alpha, \tau) + 2N}{\sqrt{K(d, \alpha, \tau)^2 + 4g(d)R\alpha\bar{x}N}} \right] = \frac{N(1 - (R-1)\tau)}{\sqrt{K(d, \alpha, \tau)^2 + 4g(d)R\alpha\bar{x}N}}$$

und damit die zweite Behauptung.  $\square$

Nach Lemma 2.18 ist die Funktion des erwartungstreuen Parameters  $\bar{v}(\cdot, d, \alpha)$  streng monoton steigend im Parameter  $\tau$ . Mit zunehmendem Optimismus der Konsumenten (gemessen in einem Anstieg im Parameter  $\tau$ ) muss der Parameter  $v$  ebenfalls ansteigen, um die Bedingung der Erwartungstreue weiter zu erfüllen. Die Abbildung 2.6 zeigt Konturlinien eines erwartungstreuen Parameters  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$  in Abhängigkeit des Parameters  $\tau$  und der Risikoaversion  $\alpha$ .

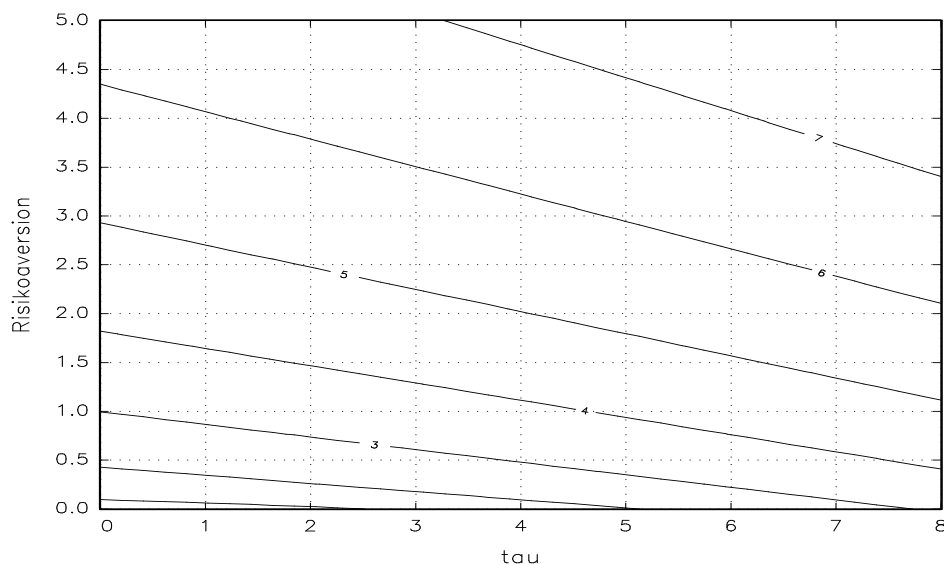


Abbildung 2.6: Konturlinien von  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$  für  $\tau < \frac{1}{R-1}$ .

Dabei sind die Höhe des Wertpapierangebots, die Anzahl der Konsumenten und die risikolose Rendite durch  $\bar{x} = 50$ ,  $N = 200$  und  $R = 1.01$  spezifiziert. Der Dividendenprozess ist auch hier als homogene diskrete Markov-Kette modelliert. Die Dividendenzahlungen lauten  $d_1 = 0.001$ ,  $d_2 = 0.025$  und  $d_3 = 0.05$ . Die aktuelle Dividendenzahlung beträgt 0.001, und für den bedingten Erwartungswert gilt  $g(0.001) = 0.02558$ . Wie analytisch bereits bestimmt, ist  $\bar{v}$  monoton steigend im Parameter  $\tau$ . Zusätzlich ist  $\bar{v}$  auch monoton steigend in der Risikoaversion. Dies ist der Fall, da die Bedingung  $\tau < \frac{1}{R-1} = 100$  aus Lemma 2.18 erfüllt ist. Im Anhang ist die Abbildung 6.1 für Parameter  $\tau > 100$  zu finden, in der die Konturlinien streng monoton fallend in der Risikoaversion sind.

Ein Anstieg des Wertpapierangebots für Parameter  $\tau < \frac{1}{R-1}$  führt zu einem Anstieg der Funktion  $\bar{v}$ . Die Funktion sinkt für Parameter  $\tau > \frac{1}{R-1}$ . Für festes  $d$  und  $\alpha$  gilt  $\bar{v}(0, d, \alpha) > 0$  und  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{v}(\tau, d, \alpha) = \infty$ . Mit einem Anstieg der Anzahl der Konsumenten in der Population ergibt sich  $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{v}(\tau, d, \alpha) = 0$  für alle  $\tau$ ,  $d$  und  $\alpha$ . Je mehr

Konsumenten zu der betrachteten Population gehören, desto kleiner wird das korrespondierende erwartungstreue  $\bar{v}$ . Damit steigen gleichzeitig der Erwartungswert und die Varianz der Gamma-Verteilung und ebenfalls der Erwartungswert des Wertpapierpreises. Weiter korrespondiert für festes  $\tau$ ,  $d$  und  $\alpha$  der Wert  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$  mit einem erwartungstreuen Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen generiert. Für identische Parameter  $\tau$  und  $v$  der Gamma-Verteilung, ist es möglich, dass kein erwartungstreuer Markov-Kern existiert.

**Lemma 2.19**

Sei  $\alpha > \frac{\tau}{Re}$ . Gilt  $\tau = v$ , so existiert genau dann ein erwartungstreuer Markov-Kern, falls  $1 > g(d) > 1 - \frac{1}{R}$ .

**Beweis von Lemma 2.19:**

Die Auflösung der Gleichung (2.19) für  $\tau = v$  liefert

$$\tau = \frac{R\alpha\bar{x}(1 - g(d))}{N(1 + R(g(d) - 1))}.$$

$\tau$  ist nur dann positiv, wenn  $1 > g(d)$  und  $g(d) > 1 - \frac{1}{R}$ . Das ist die Behauptung.  $\square$

Im Beispiel aus Abbildung 2.6 ist wegen  $1 > g(0.001) = 0.02558 > 0.009901 = 1 - \frac{1}{R}$  die Bedingung aus Lemma 2.19 erfüllt. Damit existieren auch für identische Parameter der Gamma-Verteilung erwartungstreue Prognosen.

**Risikozuschläge**

Sei  $\alpha > \frac{\tau}{Re}$ . Der risikobehaftete Wertpapierertrag in Periode  $t + 1$  ist analog zu Gleichung (2.15) für die hier vorliegende Spezifikationen der Nutzen- und Verteilungsfunktionen durch den Quotienten aus cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t + 1$  und dem ex dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  gegeben. Dann definiert

$$\frac{\tilde{S}(\tau, v, \alpha) + D_{t+1}}{\tilde{S}(\tau, v, \alpha)} - R = 1 - R + R \frac{\alpha\bar{x} + v}{\tau N} D_{t+1}.$$

den Risikozuschlag in Periode  $t + 1$ . Er wird negativ, falls für  $\omega \in \Omega$

$$D_{t+1}(\omega) < \frac{R - 1}{R} \cdot \frac{\tau N}{\alpha\bar{x} + vN}$$

gilt. Unter Annahme 2.16 definiert

$$MEP(d, \tau, v, \alpha) = 1 - R + R \frac{\alpha\bar{x} + vN}{N\tau} g(d)$$

den bedingten Erwartungswert des Risikozuschlags. Je optimistischer (gemessen in steigendem Parameter  $\tau$  oder in sinkendem Parameter  $v$ ) die Konsumenten sind, desto kleiner wird der erwartete Risikozuschlag. Die Höhe des Risikozuschlags bleibt dabei jedoch nach unten beschränkt. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} MEP(d, \tau, v, \alpha) &= 1 - R && \text{für alle } d, v, \alpha \quad \text{und} \\ \lim_{v \rightarrow 0} MEP(d, \tau, v, \alpha) &= 1 - R + R \frac{\alpha \bar{x}}{N\tau} g(d) && \text{für alle } d, \tau, \alpha.\end{aligned}$$

Für sinkenden Optimismus ist der erwartete Risikozuschlag unbeschränkt, denn es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} MEP(d, \tau, v, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, v, \alpha \quad \text{und} \\ \lim_{v \rightarrow \infty} MEP(d, \tau, v, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \tau, \alpha.\end{aligned}$$

Eine weitere bedeutende Einflussgröße ist die Risikoaversion. Steigt sie, so steigt auch der erwartete Risikozuschlag. Konsumenten mit größerer Risikoaversion werden also mit höheren Risikozuschlägen „belohnt“. Dabei gibt es für den Risikozuschlag nach oben keine Grenze, denn es gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} MEP(d, \tau, v, \alpha) = \infty \quad \text{für alle } d, \tau, v.$$

Für eine Risikoaversion von Null gilt für alle  $d, \tau, v$

$$MEP(d, \tau, v, \alpha) = 1 - R + R \frac{v}{\tau} g(d).$$

Diese untere Schranke bestimmt sich im Wesentlichen aus der risikolosen Rendite und dem inversen subjektiven Erwartungswert. Die untere Schranke des erwarteten Risikozuschlags wird umso kleiner, je höher die subjektiven Erwartungen der Konsumenten sind. Damit werden niedrige Risikozuschläge durch sehr großen Optimismus ermöglicht. Weiter führt ein hoher bedingter Erwartungswert des Dividendenprozesses zu einer hohen unteren Schranke des erwarteten Risikozuschlags. Die gleiche untere Schranke wird erreicht, wenn die Population beliebig groß wird, denn es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MEP(d, a, b, \alpha) = 1 - R + R \frac{v}{\tau} g(d) \quad \text{für alle } d, \tau, v, \alpha.$$

Einzig der Einfluss der risikolosen Rendite ist nicht eindeutig. Alle komparativstatischen Resultate, nicht nur für den erwarteten Risikozuschlag, sondern auch für dessen Varianz, finden sich in Tabelle 2.6. Eine nicht eindeutig positive oder negative partielle Ableitung ist durch ein Sternchen (\*) markiert.

$\partial$	$\alpha$	$\tau$	$v$	$N$	$\bar{x}$	$R$
$MEP(d, \tau, v, \alpha)$	+	-	+	-	+	*
$VEP(d, \tau, v, \alpha)$	+	-	+	-	+	+

Tabelle 2.6: Komparative Statik des Erwartungswertes und der Varianz des Risikozuschlags.

Ein Vergleich der Tabellen 2.5 und 2.6 zeigt, dass der Einfluss sämtlicher Parameter – ausgenommen der risikolosen Rendite – entweder positiv auf den erwarteten Wertpapierpreis und negativ auf den erwarteten Risikozuschlag oder negativ auf den Wertpapierpreis und positiv auf den Risikozuschlag ist. Nur die risikolose Rendite kann sowohl den Wertpapierpreis als auch den Risikozuschlag in die gleiche (negative) Richtung verändern. Dies ist der Fall, falls der abdiskontierte bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses kleiner als der ex dividend Wertpapierpreis ist, d. h.  $\frac{g(d)}{R} < \tilde{S}(d, \tau, v, \alpha)$ . Für  $\frac{g(d)}{R} > \tilde{S}(d, \tau, v, \alpha)$  ist die partielle Ableitung des erwarteten Risikozuschlags bzgl. der risikolosen Rendite positiv.

Unter Annahme 2.16 ist die Varianz des Risikozuschlags durch

$$VEP(d, \tau, v, \alpha) = R^2 \left[ \frac{\alpha \bar{x} + vN}{\tau N} \right]^2 h(d)$$

determiniert. Die Varianz des Risikozuschlags steigt mit zunehmender Risikoaversion, mit sinkendem Parameter  $v$ , mit zunehmendem Wertpapierangebot und mit zunehmender risikoloser Rendite. Werden die Konsumenten optimistischer (gemessen im Parameter  $\tau$ ) oder wächst die Population, nimmt die Varianz ab. Dabei kann beliebig großer Optimismus die Varianz beliebig klein machen, denn es gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} VEP(d, \tau, v, \alpha) = 0 \quad \text{für alle } d, v, \alpha.$$

Dieses Ergebnis unterstreicht den starken Einfluss des Optimismus messenden Parameters  $\tau$ . In der Modellspezifikation aus Abschnitt 2.5.1 senkt steigender Optimismus ebenfalls die Varianz des Risikozuschlags. Dennoch existiert eine positive untere Schranke. Wächst die Population, so bleibt die Varianz stets nach unten beschränkt, denn es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} VEP(d, \tau, v, \alpha) = \left[ R \frac{v}{\tau} \right]^2 h(d) \quad \text{für alle } d, \tau, v, \alpha.$$

Der gleiche Grenzwert wird erreicht, falls die Risikoaversion der Konsumenten der Null beliebig nahe kommt. Dieser Grenzwert bestimmt sich aus der bedingten Varianz des



Dividendenprozesses, der risikolosen Rendite und dem inversen subjektiven Erwartungswert. Je höher die subjektiven Erwartungen über zukünftige Wertpapiererträge sind, desto kleiner kann die Varianz des Risikozuschlags werden. Für abnehmenden Optimismus (sinkendes  $\tau$  bzw. steigendes  $v$ ) und steigende Risikoaversion ist die Varianz des Risikozuschlags unbeschränkt, denn es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0} VEP(d, \tau, v, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, v, \alpha, \\ \lim_{v \rightarrow \infty} VEP(d, \tau, v, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \tau, \alpha \quad \text{und} \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} VEP(d, \tau, v, \alpha) &= \infty && \text{für alle } d, \tau, v.\end{aligned}$$

Der Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Varianz des Risikozuschlags hat die gleichen Vorzeichen wie für den erwarteten Risikozuschlag. Damit folgt einem Anstieg des Risikozuschlags automatisch eine Erhöhung seiner Varianz. Das folgende Lemma zeigt, unter welchen Bedingungen der Betrag der Auswirkungen auf den Erwartungswert größer als auf die Varianz ist.

**Lemma 2.20**

Seien  $\alpha > \frac{a}{Re}$  und  $z \in \{\tau, v, \alpha, N, \bar{x}\}$ . Die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} MEP(d, \tau, v, \alpha) \right| > \left| \frac{\partial}{\partial z} VEP(d, \tau, v, \alpha) \right|$$

ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{h(d)}{g(d)} > \frac{1}{2} \tilde{S}(\tau, v, \alpha)$$

gilt.

**Beweis von Lemma 2.20:**

Sei  $z = \alpha$ . Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} MEP(d, \tau, v, \alpha) = R \frac{\bar{x}}{N\tau} g(d) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} VEP(d, \tau, v, \alpha) = 2R^2 \frac{(\alpha\bar{x} + vN)\bar{x}}{N^2\tau^2} h(d).$$

Durch Vereinfachung von

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} MEP(d, \tau, v, \alpha) > \frac{\partial}{\partial \alpha} VEP(d, \tau, v, \alpha) \iff R \frac{\bar{x}}{N\tau} g(d) > 2R^2 \frac{(\alpha\bar{x} + vN)\bar{x}}{N^2\tau^2} h(d)$$

und Benutzung der Gleichung (2.18) folgt die Behauptung für  $z = \alpha$ . Die Beweisführung für  $z \in \{\tau, v, N, \bar{x}\}$  erfolgt analog.  $\square$

Die entscheidende Größe für das Ergebnis in Lemma 2.20 ist der Quotient aus bedingter Varianz und bedingtem Erwartungswert des Dividendenprozesses. Ist dieser Quotient größer als die Hälfte des cum dividend Wertpapierpreises aus Gleichung (2.18), so ändert sich der erwartete Risikozuschlag nach einer beliebigen Parametervariation (betragsmäßig) stärker als die Varianz des Risikozuschlags. Das Gegenteil gilt, falls der Quotient aus Varianz und Erwartungswert des Dividendenprozesses kleiner als der halbe ex dividend Wertpapierpreis ist.

Seien nun  $d, \tau, v$  und  $\alpha$  beliebig. Die bedingte Fehlerfunktion lautet dann

$$e^{\mathbb{E}}(d, \tau, v, \alpha) = \frac{\tau N}{R(\alpha \bar{x} + vN)} + g(d) - \frac{\tau}{v}.$$

Für feste Dividenden beschreibt diese Fehlerfunktion die Differenz zwischen allen möglichen wahren und subjektiven Erwartungswerten des cum dividend Wertpapierpreises.  $e^{\mathbb{E}}$  ist streng monoton fallend im Parameter  $\tau$  und in der Risikoaversion  $\alpha$ , aber sie ist streng monoton steigend im Parameter  $v$ . Für rationale Erwartungen bzw. für erwartungstreue Vorhersagen muss die bedingte Fehlerfunktion den Wert Null annehmen. Für festes  $d$  und  $v$  erfüllt gerade  $\bar{\tau}(v, d, \alpha)$  aus Gleichung (2.20) diese Bedingung und für festes  $d$  und  $\tau$  wird sie von  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$  aus Gleichung (2.21) erfüllt. Es gibt also überabzählbar viele Paare  $(\tau, v) \in \mathbb{R}_+^2$ , die zu einem Markov-Kern mit rationalen Erwartungen korrespondieren. In Abbildung 2.7 sind für  $v = 5$  die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags und der Fehlerfunktion zu sehen. Die Konturlinien sind als Funktionen des Parameters  $\tau$  und der Risikoaversion  $\alpha$  dargestellt. Der Dividendenprozess ist als homogene diskrete Markov-Kette modelliert. Die Dividendenzahlungen lauten  $d_1 = 0.001$ ,  $d_2 = 0.025$ ,  $d_3 = 0.05$ . Weiter gilt  $R = 1.01$ ,  $N = 200$ ,  $\bar{x} = 50$ , die aktuelle Dividendenzahlung ist  $d_1$ . Die drei in Abbildung 2.7 von links oben nach rechts unten verlaufenden Kurven sind die Konturlinien der bedingten Fehlerfunktion. Sie sind streng monoton fallend im Parameter  $\tau$ . Die mittlere dieser drei Kurven ist die Null-Konturlinie, die obere korrespondiert zu einem Vorhersagefehler von  $-1\%$  und die untere zu einem Vorhersagefehler von  $+1\%$ . Die übrigen Kurven in Abbildung 2.7 sind die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags. Jede dieser Konturlinien ist linear und streng monoton steigend im Parameter  $\tau$ . Die Steigung beträgt  $\frac{N}{Rg(d)\bar{x}} (\overline{MEP} + R - 1)$ , wobei  $\overline{MEP}$  einen beliebigen, aber festen erwarteten Risikozuschlag bezeichnet. Die Steigung der Konturlinie ist somit unabhängig vom Parameter  $b$ . Allerdings führt ein Anstieg der Anzahl der Konsumenten zu steileren Konturlinien. Die Erhöhung der risikolosen Rendite, des bedingten Erwartungswertes des Dividendenprozesses oder die Erhöhung des Wertpapierangebots lassen die Konturlinien flacher verlaufen.

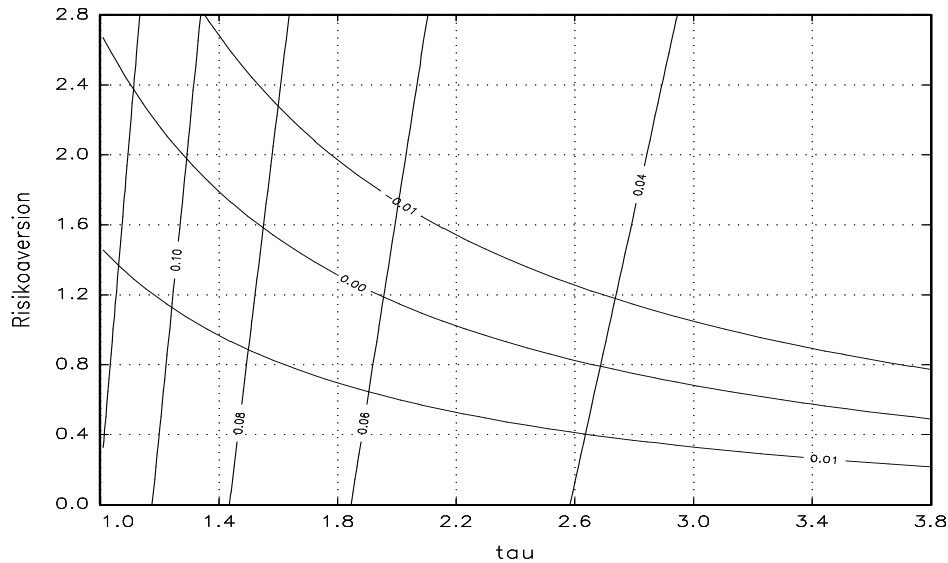


Abbildung 2.7: Konturlinien des mittleren Risikozuschlags und der bedingten Fehlerfunktion für  $v = 5$ .

Die erwarteten Risikozuschläge sinken mit zunehmendem Optimismus (d. h. mit steigendem Parameter  $\tau$ ). Dasselbe gilt für die Risikoaversion. Sehr hohe Risikoaversion korrespondiert mit hohen erwarteten Risikozuschlägen. Somit werden pessimistische oder risikoaverse Konsumenten im Mittel mit höheren Risikozuschlägen „belohnt“. Unter rationalen Erwartungen korrespondieren hohe erwartete Risikozuschläge mit hoher Risikoaversion. Dennoch zeigt Abbildung 2.7, dass unter rationalen Erwartungen Risikozuschläge von etwa 6% für Risikoaversionskoeffizienten von etwa 1.2 erreichbar sind. Um die Beziehung zwischen Risikozuschlag und Risikoaversion zu analysieren, wird der erwartete Risikozuschlag mit rationalen Erwartungen

$$\begin{aligned} MEP_{\bar{\tau}}^*(v, \alpha) &:= MEP(d, \bar{\tau}(v, d, \alpha), v, \alpha) = R \frac{\alpha \bar{x}}{vN} \quad \text{und} \\ MEP_{\bar{v}}^*(d, \tau, \alpha) &:= MEP(d, v, \bar{v}(\tau, d, \alpha), \alpha) \end{aligned}$$

betrachtet. Es ist überraschend, dass der Dividendenprozess keinerlei Auswirkungen auf die Funktion  $MEP_{\bar{\tau}}^*(v, \alpha)$  hat. Sei  $v$  beliebig, aber fest. Dann ist der erwartete Risikozuschlag für das zugehörige erwartungstreue  $\bar{\tau}$  konstant, positiv und unabhängig vom Erwartungswert des Dividendenprozesses. Eine steigende risikolose Rendite, steigende Risikoaversion oder die Erhöhung des Wertpapierangebots implizieren einen höheren Risikozuschlag. Ein Anstieg des Parameters  $v$  bzw. der Anzahl der Konsumenten senkt den Risikozuschlag. Dabei ist  $MEP_{\bar{\tau}}^*(v, \alpha)$  durch die Null und nicht wie  $MEP$  und  $MEP_{\bar{v}}^*$

durch  $1 - R$  beschränkt. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} MEP_{\bar{\tau}}^*(v, \alpha) &= 0 && \text{für alle } \alpha, v, \bar{x} \text{ und } R, \\ \lim_{v \rightarrow \infty} MEP_{\bar{\tau}}^*(v, \alpha) &= 0 && \text{für alle } \alpha, N, \bar{x} \text{ und } R, \\ \lim_{x \rightarrow 0} MEP_{\bar{\tau}}^*(v, \alpha) &= 0 && \text{für alle } \alpha, v, N \text{ und } R \quad \text{und} \\ MEP_{\bar{\tau}}^*(v, 0) &= 0. \end{aligned}$$

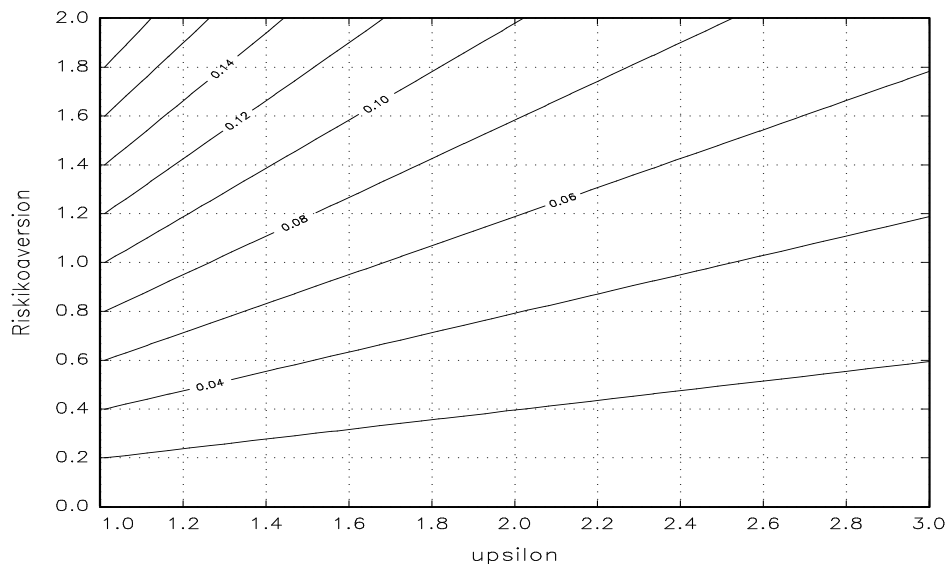


Abbildung 2.8: Konturlinien des mittleren Risikozuschlags mit erwartungstremem Parameter  $\bar{\tau}(v, d, \alpha)$ .

Die Abbildung 2.8 zeigt die Konturlinien von  $MEP_{\bar{\tau}}^*$  im Raum der Risikoaversion  $\alpha$  und des Parameters  $v$ . Dabei sind  $\bar{x} = 50$ ,  $N = 500$  und  $R = 1.01$ . Auf Grund der Unabhängigkeit des erwarteten Risikozuschlags  $MEP_{\bar{\tau}}^*$  vom bedingten Erwartungswert des Dividendenprozesses muss dieser nicht genau spezifiziert werden. Der erwartete Risikozuschlag unter rationalen Erwartungen steigt mit steigender Risikoaversion und sinkt mit steigendem Parameter  $v$ . Das letzte Resultat ist überraschend. Sowohl Risikoaversion als auch mangelnder Optimismus (gemessen in steigendem Parameter  $v$ ) haben einen negativen Einfluss sowohl auf den Wertpapierpreis als auch auf den Risikozuschlag mit nicht-rationalen Erwartungen. Durch Einsetzen des erwartungstreuen Parameter  $\bar{\tau}$  kehrt sich dieses Resultat für den Parameter  $v$  ins Gegenteil. Sein Einfluss auf den Risikozuschlag wird negativ.

Das von Mehra & Prescott (1985) entdeckte Equity Premium Puzzle bezeichnet die Schwierigkeit, den aus amerikanischen Daten der letzten 100 Jahre berechneten mittleren Risikozuschlag von 6% mithilfe der theoretischen Modelle zu imitieren. Nach Abbildung 2.8 ist ein Risikozuschlag dieser Höhe für Risikoaversionen zwischen 0.6 und 1.2 zu realisieren, wenn der subjektive Erwartungswert  $v$  nicht größer als 2.0 wird. Selbst für  $v$ , die größer als 2.0 sind, steigt der Wert der Risikoaversion nicht sofort steil an. Die Abbildung zeigt, dass durch passende, aber nicht unrealistische Auswahl der zur Verfügung stehenden Parameter ein mittlerer Risikozuschlag in Höhe von 6% realisiert werden kann.

Die Benutzung der Gamma-Verteilung als subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß liefert neben dem erwartungstreuen  $\bar{\tau}$  auch den erwartungstreuen Parameter  $\bar{v}$ . In Abbildung 2.9 ist der erwartete Risikozuschlag mit dem erwartungstreuen Parameter  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$  illustriert. Der Dividendenprozess ist mit dem für Abbildung 2.7 benutzten identisch. Zusätzlich gilt  $\bar{x} = 50$ ,  $N = 200$  und  $R = 1.01$ .

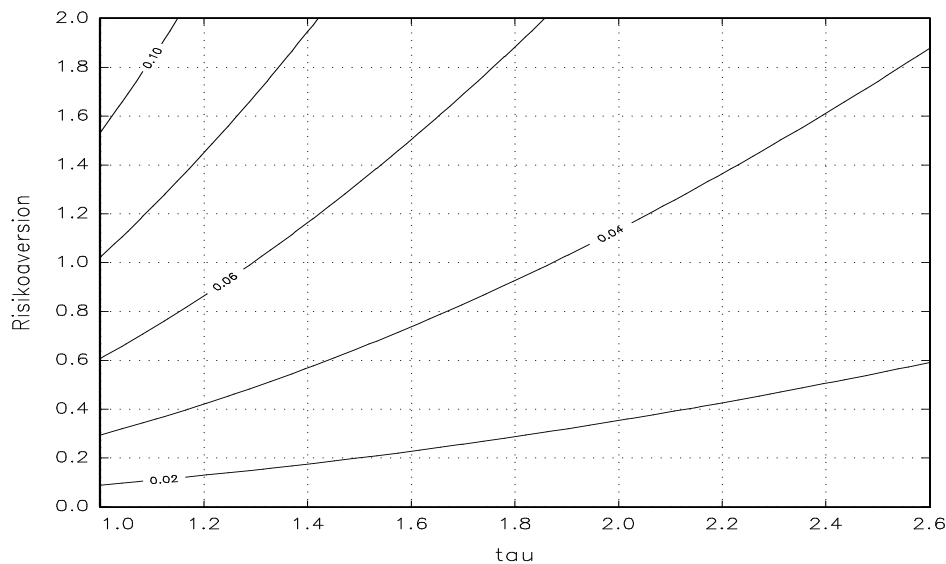


Abbildung 2.9: Konturlinien des mittleren Risikozuschlags mit erwartungstreuem Parameter  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$ .

Der erwartete Risikozuschlag  $MEP_v^*$  ist streng monoton steigend in der Risikoaversion  $\alpha$  und streng monoton fallend im Parameter  $\tau$ . Der positive Einfluss dieses Parameters auf den erwarteten Risikozuschlag  $MEP(d, \tau, v, \alpha)$  wird für  $MEP_v^*$  negativ. Wie Abbildung 2.9 zeigt, werden Risikozuschläge in Höhe von 6% auch schon für kleine

Risikoaversionen erreicht.

### Zusammenfassung

Der in diesem Kapitel vorgestellte Ansatz expliziter Modellierung liefert für die hier gewählte Modellspezifikation mit CARA–Nutzen und Gamma-Verteilung einen durch zwei subjektive Erwartungsparameter charakterisierten Wertpapierpreis. Die Auswirkungen von Risikoaversion, subjektiven Erwartungsparametern und Populationsgröße auf den Wertpapierpreis und den Risikozuschlag werden vollständig analysiert. Die Einflüsse der zwei Erwartungsparameter auf diese beiden Größen sind gegenläufig. Ist der Parameter  $\tau$  kleiner als der Parameter  $\nu$ , so hat  $\tau$  einen (betragsmäßig) größeren Einfluss auf den Wertpapierpreis als  $\nu$ . Es zeigt sich, dass wachsender Optimismus den Risikozuschlag senkt und letztlich negativ wird. Es existiert eine untere Schranke, die lediglich durch die risikolose Rendite bestimmt wird. Durch zunehmenden Pessimismus nimmt auch der Risikozuschlag zu und nähert sich einer oberen Schranke an. Diese hängt jedoch entscheidend von der Risikoaversion ab.

Rationale Erwartungen werden durch Markov–Kerne generiert. Da es in diesem Beispiel zwei Erwartungsparameter gibt, kann der Parameter  $\tau$  als Funktion des Parameters  $\nu$  und der Risikoaversion und der Parameter  $\nu$  als Funktion des Parameters  $\tau$  und der Risikoaversion erwartungstreu sein. Stimmen die beiden Parameter überein, existieren unter bestimmten Umständen keine rationalen Erwartungen.

Der Risikozuschlag mit erwartungstreuem Parameter  $\tau$  ist konstant und unabhängig vom Dividendenprozess. Für eine wachsende Population wird dieser Risikozuschlag immer kleiner und nähert sich der Null an. Für den Risikozuschlag mit erwartungstreuem Parameter  $\nu$  ist der Dividendenprozess von Bedeutung. Dennoch sinkt in diesem Fall der Risikozuschlag für eine wachsende Population und nähert sich der Null an. Sind beliebige Erwartungen zugelassen, haben sowohl die Höhe der Risikoaversion als auch der inverse subjektive Erwartungswert Einfluss auf die untere Schranke des Risikozuschlags.

## 2.6 Abschließende Bemerkungen

In diesem Kapitel wurde eine einfache, aber sehr allgemeine Möglichkeit der expliziten Modellierung zur Bestimmung von Wertpapierpreisen vorgestellt. Der resultierende endogene Wertpapierpreisprozess wird durch die Charakteristiken sämtlicher in der Ökonomie befindlichen Konsumenten bestimmt. Dazu zählen neben Präferenzen, Erstausstattung und Risikoaversion auch subjektive Erwartungen, die möglicherweise nicht–

rational sind. Der hier gewählte Modellansatz hat seinen Ursprung in der Arbeit Böhm, Deutscher & Wenzelburger (2000) und unterstreicht die Bedeutung der Mikrostruktur jedes einzelnen Portfeuillebesitzers für die Bestimmung des Preisprozesses. Die Ergebnisse der Abschnitte 2.5, 2.5.1 und 2.5.2 bestätigen dies für die Klasse der CARA-Nutzenfunktionen. Es zeigt sich, dass die CARA-Nutzenfunktionen zu monotonen Nachfragefunktionen führen. Mit steigender Risikoaversion sinkt jedoch die Wertpapiernachfrage. Dieses Resultat gilt unabhängig vom subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß. Durch Verwendung der Exponential- bzw. der Gamma-Verteilung lassen sich die Einflüsse der subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße auf den Wertpapierpreis und den Risikozuschlag quantitativ analysieren. Während die Exponential-Verteilung nur durch einen Parameter charakterisiert wird, besitzt die Gamma-Verteilung zwei. Solange der Optimismus noch nicht sehr groß ist, hat eine marginale Zunahme des Parameter  $\tau$  eine bedeutendere Auswirkung auf den Wertpapierpreis als eine Zunahme des Parameters  $v$ .

Hohe subjektive Erwartungswerte erhöhen den Wertpapierpreis und senken die Risikozuschläge. Dabei ist es gleich, ob die subjektiven Erwartungen rational sind. Auch falsche hohe Erwartungen treiben den Wertpapierpreis in die Höhe. Für die Exponential-Verteilung existiert für jede beliebige Risikoaversion eine erwartungstreue Prognose. Die Benutzung der Gamma-Verteilung liefert beliebig viele Parameterpaare, die zu erwartungstreuen Prognosen führen. Nur im Fall identischer Parameter kann es passieren, dass keine erwartungstreue Prognose existiert.

Durch die Analyse der Risikozuschläge zeigt sich, dass selbst für rationale Erwartungen empirisch beobachtbare Risikozuschläge auch für kleine Risikoaversionen zu imitieren sind. Die Ergebnisse dieser Arbeit werfen ein neues Licht auf das Equity Premium Puzzle. Nach Mehra & Prescott (1985) besagt es, dass empirisch beobachtbare Risikozuschläge nur in Verbindung mit hohen Risikoaversionen möglich sind. Allerdings unterstellen Mehra & Prescott (1985) einen unendlich lange lebenden Konsumenten mit einer CRRA-Nutzenfunktion. Damit sind die hier erzielten Ergebnisse nicht vollständig mit denen von Mehra & Prescott (1985) vergleichbar. Dennoch hat sich gezeigt, dass auch die Charakteristiken der Konsumenten für die Höhe der Risikozuschläge von großer Bedeutung sind.

Es gibt viele Möglichkeiten, das in diesem Kapitel vorgestellte Modell zu erweitern oder zu verändern. So berücksichtigen Böhm & Chiarella (2000) endlich viele risikobehaftete Wertpapiere. Das folgende Kapitel 3 legt den Schwerpunkt auf die Heterogenität der Population. Dabei gibt es endlich viele Konsumenten, die unterschiedliche Mittelwert-Varianz-Präferenzen besitzen. Auf Grund der Heterogenität der Konsumenten wird im

Allgemein nicht jeder am Wertpapiermarkt teilnehmen. Diese individuelle Entscheidung beruht auf den einzelnen Charakteristiken der Konsumenten und führt zu der endogenen Bestimmung der Höhe der Marktteilnahme. Im Fall identischer Konsumenten, wie z.B. in Abschnitt 2.5, ist die Marktteilnahme stets vollständig, d. h. alle Konsumenten nehmen am Wertpapiermarkt teil. Aussagen über die Marktteilnahme und ihr Wechselspiel mit individuellen Merkmalen der Konsumenten sind nicht möglich. Das Kapitel 3 basiert auf meiner Arbeit Deutscher (1999). In Kapitel 4 wird durch die Einführung eines Wertpapiere anbietenden Fond-Managers die Anzahl der Wertpapiere, die gehandelt werden, variabel. Somit wird die Analyse des Handelsvolumens in Abhängigkeit der individuellen Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers möglich.

Eine andere Erweiterung des Basismodells<sup>39</sup> führt Deutscher (2001) durch. Hier werden die Eigenschaften temporärer Gleichgewichte eines Wertpapiermarktes in einer Ökonomie überlappender Generationen studiert. In dieser Ökonomie gibt es eine Gruppe alter Konsumenten, die den jungen einen festen Anteil ihrer Wertpapiere vererbt. Die Konsumenten unterscheiden sich durch ihr Erbe, ihre subjektiven Erwartungen und ihre Risikoaversion. Es werden die Auswirkungen des Erbes und der subjektiven Erwartungen auf den Wertpapierpreis und -ertrag, die Anzahl der Wertpapierbesitzer und das Handelsvolumen untersucht. Es zeigt sich, dass Optimismus der Erben und der Nicht-Erben den Wertpapierpreis erhöht. Aber größerer Optimismus der Erben führt zu kleinerem Handelsvolumen, während größerer Optimismus der Nicht-Erben das Gegenteil erzielt. Zusätzlich können Erben im Gegensatz zu Nicht-Erben verschiedene Effekte auf den Risikozuschlag haben. Weiter ist das Handelsvolumen positiv mit dem Wertpapierpreis korreliert, falls höhere Dividenden wahrscheinlicher als kleine sind.

---

<sup>39</sup>Am 18. Mai 2001 habe ich über diese im Rahmen des Diplomanden- und Doktorandenseminars am Lehrstuhl Prof. Volker Böhm vorgetragen.



## Kapitel 3

# Finanzmarktgleichgewicht für heterogene Konsumentenmengen

Handel auf Wertpapiermärkten kann nur dann zustande kommen, wenn mindestens zwei Händler mit unterschiedlichen Interessen aufeinander treffen. Der eine möchte kaufen, der andere verkaufen. Üblicherweise unterscheiden sich selbst Konsumenten, die auf der gleichen Seite handeln. Im Allgemeinen besitzen sie unterschiedliche Einschätzungen über den Wertpapiermarkt und insbesondere über die Preis- und Dividendenentwicklungen. Bevor allerdings Handel auf einem Wertpapiermarkt stattfinden kann, entscheidet jeder Konsument, ob er auf diesem Markt handeln möchte. Diese individuelle Entscheidung basiert auf seinen persönlichen Motiven, die z.B. durch Präferenzen, Vermögen und subjektive Erwartungen über Preisentwicklungen gegeben sind, und führen dazu, dass einige Konsumenten am Wertpapiermarkt teilnehmen und andere wiederum nicht. Auf Grund der empirischen Evidenz, dass die meisten Konsumenten nur auf wenigen Wertpapiermärkten agieren<sup>1</sup>, ist die Analyse der Marktteilnahme von besonders großem Interesse.

In der Literatur werden häufig die Auswirkungen heterogener Populationen auf die Wertpapiermärkte ohne Berücksichtigung der Effekte auf die Marktteilnahme diskutiert (z.B. Constantinides (1982) und Krusell & Smith (1997)). Heaton & Lucas (1995) unterstreichen die Bedeutung subjektiver Erwartungen für die Erklärung von Wertpapierpreisen. Sie sind sich dabei mit Brock & Hommes (1998), DeLong, Shleifer, Summers & Waldmann (1990a), Arthur, Holland, LeBaron, Palmer & Tayler (1997), Cabrales &

---

<sup>1</sup>Nach Mankiw & Zeldes (1991) nehmen selbst Konsumenten mit größerem verfügbarem Vermögen nur an wenigen Wertpapiermärkten teil. Nach einer repräsentativen Studie (*Panel Study of Income Dynamics*) aus dem Jahre 1984 besitzen 72,4% aller Haushalte überhaupt keine Wertpapiere und nehmen somit auch an keinem Wertpapiermarkt teil.

Hoshi (1996) und Harris & Raviv (1993) einig. Dennoch vernachlässigen sie die Frage nach der Bedeutung subjektiver Erwartungen auf die Marktteilnahme.

Grundvoraussetzung für die Analyse der Marktteilnahme ist eine heterogene Population, die in der Literatur auf verschiedene Art und Weise erzeugt wird. Für die Wertpapiermarktteilnehmer in Orosel (1998), Cooley & Smith (1995), Allen & Gale (1994), Williamson (1986) und Hirshleifer (1988) entstehen unterschiedliche Kosten. Chatterjee & Corbae (1992) hingegen unterstellen heterogene Erstausrüstungen und Basak & Cuoco (1998) führen Informationskosten ein.

Orosel (1998) weist die Existenz einer endogenen Marktteilnahme nach und untersucht die Frage, unter welchen Bedingungen Konsumenten einem Trend nachjagen<sup>2</sup>. Steigen die Wertpapierpreise, so sinkt die Marktteilnahme in der nächsten Periode. Im Fall sinkender Preise nimmt die Marktteilnahme in der nächsten Periode wieder zu. Die Marktteilnahme ist positiv mit den Dividendenzahlungen korreliert. Die in Orosel (1998) durch Marktteilnahmekosten erzeugte Marktteilnahme fluktuiert und erhöht die Volatilität der Wertpapierpreise. Die Erwartungen der Konsumenten sind dabei stets rational. Auch in Chatterjee & Corbae (1992) ist die Marktteilnahme im Gleichgewicht endogen, und es zeigt sich, dass einige Konsumenten Geld halten, obwohl der Ertrag für Wertpapiere höher ist.

Die Aufgabe der vollständigen Marktteilnahme<sup>3</sup> ändert nach Allen & Gale (1994) die Eigenschaften eines Wertpapiermarktes auf dramatische Weise. Sie untersuchen in einem zwei-periodigen Modell die Auswirkungen der Marktteilnahme auf Wertpapierpreise und zeigen, dass eine beschränkte Marktteilnahme die Volatilität des Wertpapierpreises erhöht. Die Konsumenten haben zwei Investitionsmöglichkeiten. Dabei macht eine hohe Marktteilnahme am risikobehafteten Markt diese Anlage für die Konsumenten weniger risikoreich und insbesondere risikoaverse Konsumenten werden zur Marktteilnahme ermutigt. Allen & Gale (1994), wie auch Chatterjee (1988) und Pagano (1989a, 1989b) fokussieren ihre Untersuchungen auf die Determinanten der Marktteilnahme in Modellen, die Hindernisse zur Teilnahme an allen Märkten enthalten. Ein ähnliches Modell entwickelt Williamson (1994). Er untersucht in kompetitiven Wertpapiermärkten mit beschränkter Marktteilnahme die Höhe der Marktteilnahme, das Handelsvolumen und den Einfluss der Marktteilnahme auf die Liquidität.

---

<sup>2</sup>Orosel (1998) bezeichnet dieses Phänomen als *Trend Chasing*. DeLong, Shleifer, Summers & Waldmann (1990a) untersuchen die Auswirkungen bestimmter Strategien auf die Teilnahmeentscheidung der Konsumenten und identifizieren extrapolierte Erwartungen mit Trend Chasing.

<sup>3</sup>Allen & Gale (1994) führen Eintritts- bzw. Teilnahmekosten ein.

Basak & Cuoco (1998) argumentieren, dass Unvollständigkeit der Märkte<sup>4</sup> die Konsumenten von Investitionen in risikobehaftete Wertpapiere abhält. Zu geringer Optimismus führt dabei zu geringer Marktteilnahme. Die Analysen von Basak & Cuoco (1998) bestätigen weiter, dass bei geringer Marktteilnahme der Risikozuschlag steigt. Darüber hinaus lassen sich empirische Anomalien durch die Berücksichtigung beschränkter Marktteilnahme erklären. Basak & Cuoco (1998) benutzen ihr Modell zur Lösung des Equity Premium Puzzles nach Mehra & Prescott (1985) und bestätigen die Intuition<sup>5</sup> von Mankiw & Zeldes (1991), dass die Marktteilnahme für eine Lösung dieses Puzzles eine wichtige Rolle spielt. Der Wertpapierpreis in ihrem Modell bleibt durch beschränkte Marktteilnahme unbeeinträchtigt.

Das in diesem Kapitel folgende Modell wurde in erster Linie entwickelt, um den Einfluss subjektiver Erwartungen auf die Entscheidung zur Marktteilnahme und die gleichgewichtige Höhe der Marktteilnahme zu untersuchen. Erst in zweiter Linie werden in Abhängigkeit der entsprechenden Marktteilnahme die Wertpapiererträge und Risikozuschläge betrachtet und die Frage nach dem Einfluss der Heterogenität auf diese Größen gestellt. Die Grundlage sämtlicher Ergebnisse ist meine Arbeit Deutscher (1999). Das betrachtete Modell ist eine Erweiterung des in Kapitel 2 vorgestellten. Die Konsumenten besitzen Mittelwert–Varianz–Präferenzen, die durch quadratische Nutzenfunktionen gegeben sind. Damit ist der Nutzen eines beliebigen Konsumenten durch seine Risikoaversion und die ersten zwei Momente seiner persönlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Grund derer er seine Erwartungen bezüglich der Ertragsentwicklung bildet determiniert. Diese Art der Nutzenspezifikation ist nicht neu. Sie gründet auf das *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), dessen Idee die Annahme von in Erwartungswert und Varianz des zukünftigen Konsums parametrisierten Nutzenfunktionen ist. Dieses Modell basiert auf den Arbeiten von Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966) und wird häufig zur Beschreibung von Wertpapiermärkten verwendet. Duffie (1988) beschreibt<sup>6</sup> das CAPM als eine reiche Quelle der Intuitionen und als Basis vieler praktischer finanzieller Entscheidungen. Schon Williams (1977) bestätigt die wichtige Rolle des CAPM in der zeitgenössischen Kapitalmarkttheorie. Es ist empirisch handhabbar, generierte viele ausführliche empirische Tests und erfuhr theoretische Ausweitungen. Im ursprünglichen CAPM sind die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Zustände der Welt

---

<sup>4</sup>In dem Modell von Basak & Cuoco (1998) existieren Informationskosten und machen die Märkte unvollständig.

<sup>5</sup>Die Aussagen von Mankiw & Zeldes (1991) beziehen sich auch auf andere empirische Anomalien (vergleiche dazu Weil (1989)).

<sup>6</sup>Vergleiche Duffie (1988, Seite 93).

allen Konsumenten bekannt. Sie haben somit keine subjektiven Erwartungen über Preise bzw. Renditen. So entwickelt Williams (1977) ein modifiziertes CAPM in stetiger Zeit, in dem heterogene Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Konsumenten berücksichtigt werden. Merton (1987) untersucht ein modifiziertes CAPM, in dem ein beliebiger Investor nur an einer ihm zugeteilten Teilmenge aller Wertpapiermärkte teilnehmen kann. Diese Teilmenge ist exogen gegeben. Die Struktur der unvollständigen Information erzeugt die Heterogenität der Konsumenten. Merton (1987) diskutiert die Höhe der Marktteilnahme, ihre Auswirkungen auf Wertpapierpreise und untersucht, welche Effekte diese Modellmodifikationen auf das klassische CAPM haben. Er zeigt, dass begrenzte Teilnahme empirische Anomalien erklären können. Allerdings gibt es keine Eindeutigkeit des Gleichgewichtspreises. Brock & Hommes (1998) benutzen Mittelwert–Varianz–Präferenzen, die denen im CAPM sehr ähnlich sind, in ausgeweiteter Form. Allerdings ist eine Randeigenschaft nicht erfüllt. Ihre Analysen zeigen, dass häufige Änderungen der Vorhersagestrategie zu chaotischen Attraktoren führen kann.

Im Folgenden wird das Modell aus Kapitel 2 für heterogene Konsumenten mit Mittelwert–Varianz Präferenzen vorgestellt. Das Gleichgewicht des Wertpapiermarktes wird durch das Paar bestehend aus dem markträumenden Wertpapierpreis und der Höhe der Marktteilnahme beschrieben. Die Marktteilnahme wird durch die Summe endlich vieler Indikatorfunktionen determiniert, und die Wechselwirkungen zwischen subjektiven Merkmalen der Konsumenten und der Höhe der Marktteilnahme können explizit untersucht werden. Weiter ist die Existenz eines markträumenden Wertpapierpreises unter einer nicht sehr restriktiven Bedingung gegeben. Für beliebige Wertpapierpreise steigt die Marktteilnahme mit steigendem Optimismus der Konsumenten. Dieses Resultat dreht sich im Gleichgewicht allerdings um. Im Gegensatz zu Orosel (1998), der die Annahme rationaler Erwartungen benötigt, ist die Bestimmung der Höhe der Marktteilnahme für Konsumenten mit nicht–rationalen Erwartungen im Folgenden möglich. Sie ist ausschließlich durch die subjektiven Charakteristiken der Konsumenten determiniert. Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen subjektiven Erwartungen der Konsumenten und ihrer Entscheidung zur Teilnahme am Wertpapiermarkt sowie der Höhe der Marktteilnahme schließt sich an.

### 3.1 Mittelwert–Varianz–Präferenzen

Basis der folgenden Ausführungen ist das Modell aus Kapitel 2. Analog zu Abschnitt 2.1 definiert

$$c^i = Re^i + (q - Rp)x, \quad i \in \mathcal{I},$$

den Konsum von Konsument  $i$  in der zweiten Lebensperiode. Dabei bezeichnet  $q$  den Ertrag des risikobehafteten Wertpapiers und ist eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{R}_+$  und einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu^i$ . Dieses erfüllt die Bedingung (ii) aus Annahme 2.1. Der Konsum ist die Summe aus dem Ertrag der risikolosen Anlage  $Re^i$  und dem Ertrag der risikobehafteten Wertpapiere  $(q - Rp)x$ . Bezeichnen  $\mu^i > 0$  und  $\sigma^{i2} > 0$  die ersten beiden Momente dieser Zufallsvariablen, so lauten der subjektive Erwartungswert und die subjektive Varianz des Konsums

$$\mathbb{E}^i(c^i) := Re^i + (\mu^i - Rp)x \quad \text{und} \quad \mathbb{V}^i(c^i) := \sigma^{i2}x^2.$$

Die Idee, den Nutzen der Konsumenten als quadratisch zu unterstellen, entstammt dem CAPM. Die Nutzenfunktion wird dabei durch die Risikoaversion und die ersten beiden Momente des zukünftigen Konsums parametrisiert. Da dieses Modell sehr handhabbar ist und viel Intuition liefert, bietet es sich für die Analyse individueller Teilnahmeentscheidungen und der gesamten Marktteilnahme an. Sie ist für den  $i$ -ten Konsumenten durch die Funktion  $u^i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u^i(c) := \mathbb{E}^i(c) - \frac{\alpha^i}{2} \mathbb{V}^i(c) \quad (3.1)$$

definiert.  $\alpha^i > 0$  bezeichnet dabei den Koeffizienten der absoluten Risikoaversion von Konsument  $i \in \mathcal{I}$ . Die Funktion  $u^i$  ist streng konkav und beschränkt. Sie ist jedoch nicht streng monoton und erfüllt somit nicht alle in Annahme 2.1 (i) geforderten Bedingungen<sup>7</sup>.

Durch Einsetzen der Definitionen des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz des Konsums in die Mittelwert–Varianz–Nutzenfunktion (3.1) ergibt sich

$$U_p^i(x) := Re^i + (\mu^i - Rp)x - \frac{\alpha^i}{2} \sigma^{i2} x^2. \quad (3.2)$$

Konsument  $i$  sieht sich - analog zu (2.1) - dem Maximierungsproblem

$$\max \left\{ U_p^i(x) \mid x \in \left[ 0, \frac{e^i}{p} \right] \right\} \quad (3.3)$$

---

<sup>7</sup>Die Mittelwert–Varianz–Nutzenfunktion ist unter zusätzlichen Bedingungen kompatibel mit der Erwartungsnutzenmaximierung (vgl. Brennan (1989), Eichberger (1994) und Dumas & Allaz (1996)).

gegenüber. Die zugehörige Lösung liefert die Wertpapiernachfrage des  $i$ -ten Konsumenten  $\varphi^i(\cdot, \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2}) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit

$$\varphi^i(p, \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2}) := \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i2}}, \frac{e^i}{p} \right\} \right\}. \quad (3.4)$$

Abbildung 3.1 illustriert einen möglichen Verlauf der Wertpapiernachfragefunktion.

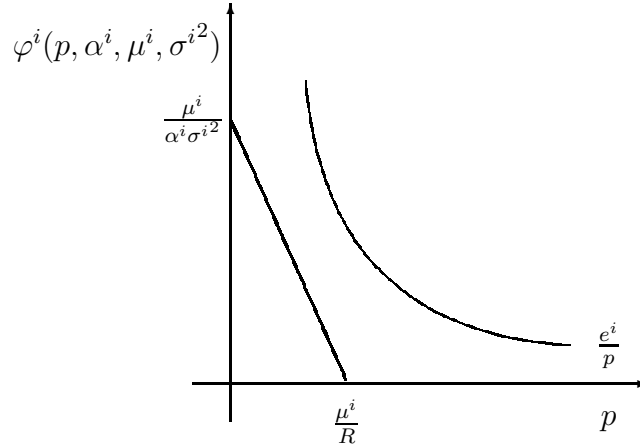


Abbildung 3.1: Die Wertpapiernachfrage von Konsument  $i$ , falls seine Erstausrüstung stets größer als die Kosten der nachgefragten Wertpapiere ist.

Dabei wird unterstellt, dass die Budgetrestriktion  $x \leq \frac{e^i}{p}$  nicht bindend ist. Für jeden möglichen Preis  $p$  kauft Konsument  $i$  niemals nur risikobehaftete Wertpapiere. Für Preise, die kleiner als der abdiskontierte subjektive Erwartungswert  $\frac{\mu^i}{R}$  sind, diversifiziert er stets sein Portfolio. Übersteigen die Preise diesen Wert, investiert er ausschließlich in die risikolose Anlage. Offensichtlich besitzt Konsument  $i$  einen Sättigungspunkt, d. h. selbst wenn Wertpapiere kostenlos abgegeben würden, fragte Konsument  $i$  lediglich  $\frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i2}}$  nach. Diese Sättigungspunkteigenschaft ist für die fortlaufenden Analysen keine große Einschränkung, denn grundsätzlich kann man von den meisten Gütern zu viel haben. Im Allgemeinen würden sich die Konsumenten aber niemals freiwillig aussuchen, von einem Gut mehr zu konsumieren als sie möchten. In der ökonomischen Welt ist somit der Bereich, in dem die Konsumenten weniger haben als sie möchten, der interessante. Die Randeigenschaft  $\lim_{p \rightarrow 0} \varphi^i(p, \nu^i) = \infty$  aus Satz 2.4 ist für den speziellen Fall mit Mittelwert–Varianz–Präferenzen nicht erfüllt. Stattdessen gilt für alle  $i \in \mathcal{I}$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \varphi^i(p, \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2}) = \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i2}} \quad \text{für alle } \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2}, i \in \mathcal{I}.$$

Die Nachfrage ist auf dem Intervall  $\left] 0, \frac{\mu^i}{R} \right[$  streng monoton fallend und für alle  $p \geq \frac{\mu^i}{R}$

ist die Gleichung

$$\varphi^i(p, \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2}) = 0$$

erfüllt. Die Tabelle 3.1 fasst die komparativ-statischen Eigenschaften der Wertpapiernachfrage zusammen.

$\partial$	$p$	$e^i$	$\alpha^i$	$\mu^i$	$\sigma^{i2}$	$R$
$\varphi^i(p, \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2})$	-	+	-	+	-	-

Tabelle 3.1: Komparative Statik der Wertpapiernachfrage.

Wie intuitiv erwartet, sinkt die Nachfrage mit steigendem Preis, steigender Risikoaversion, steigender subjektiver Varianz oder steigender risikoloser Rendite. Zunehmender Optimismus (gemessen im subjektiven Erwartungswert) erhöht die Nachfrage. Außerdem führt auch eine höhere Erstausrüstung zu einer höheren Wertpapiernachfrage. Die folgende Annahme ermöglicht eine vollständige Analyse von Portfeuilleentscheidung, Wertpapiernachfrage und Wertpapierpreis.

**Annahme 3.1**

*Das Vermögen eines beliebigen Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$  ist so groß, dass er nie nur risikobehaftete Wertpapiere kauft, d. h. es gilt für alle  $i \in \mathcal{I}$*

$$e^i > \frac{\mu^{i2}}{4R\alpha^i\sigma^{i2}}.$$

*Weiter sind die Konsumentenindizes nummeriert, d. h. o. B. d. A. gilt*

$$\mu^1 > \mu^2 > \dots > \mu^N.$$

Der erste Teil der Annahme 3.1 sichert den in Abbildung 3.1 illustrierten Verlauf einer jeden Wertpapiernachfragefunktion. Mit  $e^i > \frac{\mu^{i2}}{4R\alpha^i\sigma^{i2}}$  gilt stets

$$\varphi^i(p, \alpha^i, \mu^i, \sigma^{i2}) < \frac{e^i}{p}.$$

Somit verläuft die Budgetrestriktion immer oberhalb der individuellen Nachfragefunktion. Der zweite Teil der Annahme 3.1 nummeriert die Konsumenten in einer bestimmten Art und Weise. Der optimistischste Konsument der Population trägt den Index 1, der zweit-optimistischste Konsument hat den Index 2 usw. Der Konsument mit dem Index  $N$  ist der pessimistischste Konsument der Population, sein subjektiver Erwartungswert ist kleiner als die subjektiven Erwartungswerte aller anderen Konsumenten der Population. Zur Vereinfachung der Notation wird die folgende Vereinbarung getroffen.

**Notation 3.2** Die Vektoren der Risikoaversionskoeffizienten, der subjektiven Erwartungswerte und Varianzen aller Konsumenten seien durch

$$\xi_1 := \alpha := (\alpha^1, \dots, \alpha^N), \quad (3.5)$$

$$\xi_2 := \mu := (\mu^1, \dots, \mu^N), \quad (3.6)$$

$$\xi_3 := \sigma^2 := (\sigma^{1^2}, \dots, \sigma^{N^2}). \quad (3.7)$$

beschrieben. Mit (3.5) – (3.7) bezeichnet

$$\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^t$$

die Matrix aller individuellen Charakteristiken der Konsumenten. Für alle  $i \in \mathcal{I}$  definiert

$$\xi_{\cdot,i} = (\alpha^i, \mu^i, \sigma^{i^2})^t$$

den Vektor aller individuellen Merkmale des  $i$ -ten Konsumenten. Dieser Spaltenvektor  $\xi_{\cdot,i}$  geht in die folgenden Funktionen stets als Zeilenvektor ein und müsste mit dem Transponiertzeichen  $^t$  versehen werden. Um die Notation nicht unnötig zu verkomplizieren, wird darauf jedoch verzichtet.

Mit Notation 3.2 ist die Marktnachfragefunktion  $\Phi(\cdot, \xi) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  unter Annahme 3.1 durch

$$\begin{aligned} \Phi(p, \xi) &:= \sum_{i=1}^N \varphi^i(p, \xi_{\cdot,i}) = \sum_{i=1}^N \max \left\{ 0, \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \right\} \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i^2}} & : p \leq \frac{\mu^N}{R} \\ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i^2}} & : \frac{\mu^{N-2}}{R} < p \leq \frac{\mu^{N-1}}{R} \\ \vdots & : \vdots \\ \frac{\mu^1 - Rp}{\alpha_1 \sigma_1^2} & : \frac{\mu^2}{R} < p \leq \frac{\mu^1}{R} \\ 0 & : \frac{\mu^1}{R} \leq p \end{cases} \quad (3.8) \end{aligned}$$

definiert. Sie ist konvex, auf dem Intervall  $\left[0, \frac{\mu^1}{R}\right]$  streng monoton fallend und besitzt – wie jede individuelle Wertpapiernachfragefunktion – einen Sättigungspunkt. Dieser ist für alle  $\xi$  durch

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi(p, \xi) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \quad (3.9)$$



bestimmt. Dieser Grenzwert entspricht der Wertpapieranzahl, die die Population maximal nachfragt. Abbildung 3.2 illustriert den Verlauf der aggregierten Wertpapiernachfrage aus Gleichung (3.8) für eine Ökonomie mit drei Konsumenten.

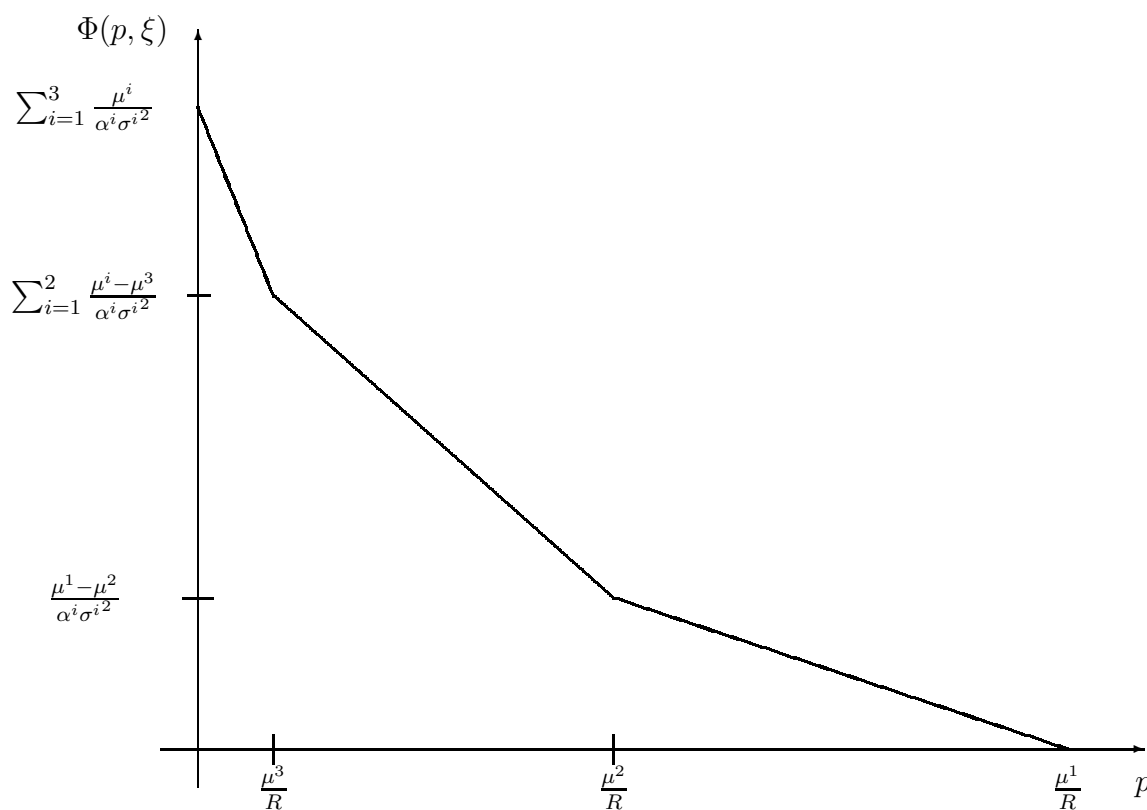


Abbildung 3.2: Die aggregierte Wertpapiernachfrage, falls Annahme 3.1 erfüllt ist.

Die aggregierte Wertpapiernachfrage ist stückweise linear und besitzt zwei „Knickstellen“ für  $p = \frac{\mu^3}{R}$  und  $p = \frac{\mu^2}{R}$ . Für Wertpapierpreise, die größer als  $\frac{\mu^1}{R}$  sind, gibt es keine positive Nachfrage.

## 3.2 Das Wertpapiermarktgleichgewicht

Auf Grund unterschiedlicher subjektiver Erwartungswerte und Varianzen der Konsumenten werden im Allgemeinen nicht alle Konsumenten am Wertpapiermarkt teilnehmen und Wertpapiere nachfragen. Es wird sich zeigen, dass die Marktteilnahme eines einzelnen Konsumenten entscheidend durch seinen subjektiven Erwartungswert bestimmt wird. Der sich einstellende markträumende Wertpapierpreis ist somit abhängig von der Anzahl der am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten. Das Paar, bestehend

aus Marktteilnahme und Wertpapierpreis, bezeichnet dann das Wertpapiermarktgleichgewicht (Definition 3.9 enthält die formale Schreibweise.).

### 3.2.1 Die Marktteilnahme

Die Marktteilnahme bzw. genauer die Höhe der Marktteilnahme bezeichnet die Anzahl der Konsumenten, die zu einem festgelegten Preis Wertpapiere nachfragen. Formal ist die Marktteilnahme eine Funktion des Wertpapierpreises, die sich als Summe endlich vieler Indikatorfunktionen darstellen lässt.

#### Definition 3.3

Die *Marktteilnahme* ist durch die Funktion

$$k^*(\cdot, \mu) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{0, 1, \dots, N\}, \quad p \longmapsto \sum_{i=1}^N 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}[}(p)$$

definiert.

Für einen beliebigen Wertpapierpreis  $p$  sind lediglich die riskolose Rendite und der subjektive Erwartungswert eines Konsumenten für die Entscheidung über dessen Marktteilnahme von Bedeutung. Solange sein abdiskontierter subjektiver Erwartungswert kleiner als der Wertpapierpreis ist, besitzt er eine positive Wertpapiernachfrage und nimmt am Wertpapiermarkt teil. In diesem Fall liefert die zugehörige Indikatorfunktion den Wert Eins. Die subjektive Varianz eines Konsumenten und seine Risikoaversion spielen für die Entscheidung der Marktteilnahme zu einem festgelegten Preis keine Rolle. Im Folgenden wird sich allerdings zeigen, dass der markträumende Wertpapierpreis auch von diesen beiden Merkmalen abhängt und somit im Gleichgewicht sowohl subjektiver Erwartungswert als auch subjektive Varianz und Risikoaversion eines Konsumenten für die Höhe der Marktteilnahme von Bedeutung sind. Die Risikoaversion und die subjektive Varianz beeinflussen die Entscheidung über die Marktteilnahme jedoch ausschließlich über den Wertpapierpreis. Mit steigendem Wertpapierpreis nimmt die Höhe der Marktteilnahme ab, denn je höher der Wertpapierpreis ist, desto weniger Konsumenten „glauben“, dass der cum dividend Wertpapierpreis größer als der heutige Wertpapierpreis ist und, dass es sich somit „lohnt“, risikobehaftete Wertpapiere zu kaufen. Daher gelten die Aussagen des folgenden Lemmas.

#### Lemma 3.4

*Annahme 3.1 sei erfüllt. Dann gelten für alle  $\mu^i$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , die Gleichungen*

$$\lim_{p \rightarrow 0} k^*(p, \mu) = N \quad \text{und} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} k^*(p, \mu) = 0.$$

**Beweis von Lemma 3.4:**

Nach der Definition der Marktteilnahme 3.3 gilt

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 0} k^*(p, \mu) &= \sum_{i=1}^N \lim_{p \rightarrow 0} 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(p) = \sum_{i=1}^N 1 = N, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} k^*(p, \mu) &= \sum_{i=1}^N \lim_{p \rightarrow \infty} 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(p) = \sum_{i=1}^N 0 = 0\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Konvergiert der Wertpapierpreis gegen Null, so nehmen nach Lemma 3.4 alle Konsumenten der Ökonomie am Wertpapiermarkt teil. Jeder beliebige Konsument  $i$  fragt in diesem Fall  $\frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^i}$  Wertpapiere nach. Diese Wertpapieranzahl korrespondiert zum Sättigungspunkt des Konsumenten  $i$ .

Nach Definition 3.3 der Marktteilnahme ändert sich die Anzahl der am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten, falls  $p = \frac{\mu^j}{R}$ ,  $j \in \mathcal{I}$ . Solange der Wertpapierpreis kleiner als  $\frac{\mu^j}{R}$  ist, „lohnt“ es sich für alle Konsumenten  $i$  mit  $i \leq j$  Wertpapiere zu kaufen. Kostet ein risikobehaftetes Wertpapier mehr als der abdiskontierte subjektive Erwartungswert eines Konsumenten  $i$ , so verlässt dieser Konsument den Wertpapiermarkt. Daher gilt also für alle  $j = 1, \dots, N$

$$k^*\left(\frac{\mu^j}{R}, \mu\right) = j - 1.$$

Alle Konsumenten, die optimistischer als dieser eine Konsument  $j$  sind, bleiben auf dem Wertpapiermarkt und haben eine positive Nachfrage, denn es gilt  $\varphi^i\left(\frac{\mu^i}{R}, \xi_{\cdot, i}\right) = 0$ . Konsument  $j$  scheidet aus. Das folgende Lemma analysiert die Höhe der Marktteilnahme in Abhängigkeit subjektiver Erwartungswerte.

**Lemma 3.5**

*Annahme 3.1 sei erfüllt.  $p > 0$  und  $\delta > 0$  seien beliebig, aber fest. Mit  $e^j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , wird der  $j$ -te Einheitsvektor bezeichnet. Dann gilt*

$$k^*(p, \mu) \leq k^*(p, \mu + \delta \cdot e^j).$$

**Beweis von Lemma 3.5:**

Für beliebiges  $p > 0$  gilt nach Definition der Marktteilnahme

$$k^*(p, \mu + \delta \cdot e^j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(p) + 1_{\left[0, \frac{\mu^j + \delta}{R}\right]}(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}]}(p) + 1_{[0, \frac{\mu^j}{R}]}(p) + 1_{[\frac{\mu^j}{R}, \frac{\mu^j + \delta}{R}]}(p) \\
&= \sum_{i=1}^N 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}]}(p) + 1_{[\frac{\mu^j}{R}, \frac{\mu^j + \delta}{R}]}(p) \\
&\geq k^*(p, \mu).
\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Lemma 3.5 zeigt, dass steigende subjektive Erwartungswerte die Wertpapiernachfrage erhöhen können. Eine Erhöhung der Marktteilnahme erfolgt, falls der Optimismuszuwachs groß genug ist.

### 3.2.2 Der Wertpapierpreis

Wie im Basismodell<sup>8</sup> bestimmt sich der markträumende ex dividend Wertpapierpreis als der höchste Preis, der die Gleichheit von Angebot und Nachfrage garantiert, d. h.

$$\tilde{S}(\xi) := \max\{p' \mid \Phi(p', \xi) = \bar{x}\}. \quad (3.10)$$

Die Menge auf der rechten Seite in Definition (3.10) ist entweder leer oder sie besteht aus einem Element. Dieser Umstand resultiert aus der strengen Monotonie der Marktnachfrage als Funktion des Wertpapierpreises auf dem Intervall  $[0, \frac{\mu^1}{R}]$  und der Sättigungseigenschaft (3.9). Daher ist der Maximumoperator nicht relevant. Der folgende Satz liefert notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines markträumenden Wertpapierpreises.

#### Satz 3.6

*Annahme 3.1 sei erfüllt. Es existiert genau dann ein markträumender Wertpapierpreis, wenn die Ungleichung*

$$0 < \bar{x} < \sum_{i=1}^N \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i2}} \quad (3.11)$$

*erfüllt ist.*

#### Beweis von Satz 3.6:

Die Sättigungseigenschaft (3.9) besagt, dass  $\sum_{i=1}^N \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i2}}$  die maximale Zahl nachgefragter

---

<sup>8</sup>Vergleiche (2.7) und (2.8).

Wertpapiere ist. Diese Tatsache, zusammen mit der Monotonie der aggregierten Wertpapiernachfrage, liefert die rechte Seite der Ungleichung. Die linke Seite ist als Annahme formuliert.  $\square$

Satz 3.6 zeigt, dass markträumende Wertpapierpreise insbesondere dann existieren, wenn die Konsumenten optimistisch sind. Selbst wenn nur ein Konsument einen sehr hohen subjektiven Erwartungswert besitzt, ist die Ungleichung (3.11) erfüllt und die Existenz eines markträumenden Wertpapierpreises gesichert. Für die Bestimmung dieses Preises ist der nächste Satz von Bedeutung.

### Satz 3.7

Annahme 3.1 und die Ungleichung aus Satz 3.6 seien erfüllt. Definiere  $\mu^{N+1} := 0$ . Dann existiert ein Index  $\bar{k} \in \mathcal{I}$  mit

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i - \mu^{\bar{k}+1}}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \geq \bar{x} > \sum_{i=1}^{\bar{k}-1} \frac{\mu^i - \mu^{\bar{k}}}{\alpha^i \sigma^{i^2}}.$$

### Beweis von Satz 3.7:

Nach Satz 3.6 gilt

$$0 < \bar{x} \leq \sum_{i=1}^N \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}.$$

Zusätzlich ist unter Annahme 3.1 die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^j \frac{\mu^i - \mu^{j+1}}{\alpha^i \sigma^{i^2}} > \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\mu^i - \mu^j}{\alpha^i \sigma^{i^2}}$$

für alle  $j \in \mathcal{I}$  erfüllt. Beides zusammen sichert die Existenz eines Indexes  $\bar{k} \in \mathcal{I}$  mit

$$\sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i - \mu^{\bar{k}+1}}{\alpha^i \sigma^{i^2}} > \bar{x} > \sum_{i=1}^{\bar{k}-1} \frac{\mu^i - \mu^{\bar{k}}}{\alpha^i \sigma^{i^2}}.$$

Das ist die Behauptung.  $\square$

Der in Satz 3.7 definierte Index  $\bar{k}$  ist eindeutig bestimmt. Im Folgenden stellt sich heraus, dass dieser Index  $\bar{k}$  gleichzeitig die Höhe der Marktteilnahme angibt. Wegen  $\varphi^i\left(\frac{\mu^j}{R}\right) = 0$  für alle  $j \in \mathcal{I}$  ist die aggregierte Wertpapiernachfrage stückweise linear. Die „Knickstellen“ sind die Punkte

$$\left(\frac{\mu^j}{R}, \Phi\left(\frac{\mu^j}{R}, \xi\right)\right) = \left(\frac{\mu^j}{R}, \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\mu^i - \mu^j}{\alpha^i \sigma^{i^2}}\right).$$

Somit gilt

$$\Phi(p, \xi) \in \left[ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\mu^i - \mu^j}{\alpha^i \sigma^{i^2}}, \sum_{i=1}^j \frac{\mu^i - \mu^{j+1}}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \right] \quad \text{für } p \in \left[ \frac{\mu^j}{R}, \frac{\mu^{j+1}}{R} \right].$$

Definiere  $\Phi_\xi(p) := \Phi(p, \xi)$ . Dann liefert die Aussage von Satz 3.7

$$\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) := \Phi_\xi^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{R} \left[ \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha \sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x} \right] \quad (3.12)$$

mit

$$\alpha \sigma(\bar{k}) := \left[ \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \right]^{-1} \quad \text{und} \quad \alpha \sigma(\bar{k}, i) := \frac{\alpha \sigma(\bar{k})}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \quad (3.13)$$

als markträumenden Wertpapierpreis. Es ist zu bemerken, dass  $\alpha \sigma(\bar{k}, i) > 0$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  und  $\sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) = 1$  gilt.

Nach Gleichung (3.12) ermittelt sich der markträumende Wertpapierpreis aus der risikolosen Rendite, dem Wertpapierangebot sowie der individuellen Charakteristiken aller Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$  mit  $i \leq \bar{k}$ . Nach Annahme 3.1 ist Konsument  $\bar{k}$  der pessimistischste von allen Konsumenten mit positiver Wertpapiernachfrage, der für die Bestimmung des Wertpapierpreises von Bedeutung ist. Satz 3.7 zeigt, dass der Index  $\bar{k}$  insbesondere von der Höhe des Wertpapierangebots abhängt. Wegen der Nummerierungseigenschaft aus Annahme 3.1 bezeichnet  $\bar{k}$  – wie der folgende Satz zeigt – gleichzeitig die Höhe der Marktteilnahme.

### Satz 3.8

*Annahme 3.1 und die Ungleichung aus Satz 3.6 seien erfüllt. Dann gilt*

$$\bar{k} = k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi), \mu \right).$$

#### Beweis von Satz 3.8:

Durch Einsetzen des Wertpapierpreises  $\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)$  in die Definition 3.3 der Marktteilnahme ergibt sich

$$k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi), \mu \right) = \sum_{i=1}^N 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]} \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) \right).$$

Nach Annahme 3.1 sind die subjektiven Erwartungswerte der Größe nach sortiert, und es reicht zu zeigen, dass

$$\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) < \frac{\mu^{\bar{k}}}{R}. \quad (3.14)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\sigma(\bar{k})}{R} \left[ \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}} - \bar{x} \right] < \frac{\mu^{\bar{k}}}{R} &\iff \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}} - \bar{x} < \frac{\mu^{\bar{k}}}{\alpha\sigma(\bar{k})} \\ &\iff \sum_{i=1}^{\bar{k}-1} \frac{\mu^i - \mu^{\bar{k}}}{\alpha^i \sigma^{i^2}} - \bar{x} < 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist auf Grund von Satz 3.7 erfüllt. Somit gilt die Ungleichung (3.14) und damit die Behauptung.  $\square$

Mit der Aussage von Satz 3.8 lässt sich die Definition des Marktgleichgewichts formulieren.

**Definition 3.9**

Das *Gleichgewicht des Wertpapiermarktes* besteht aus der in Satz 3.8 ermittelten Höhe der Wertpapiermarktteilnahme und dem markträumenden ex dividend Wertpapierpreis aus Gleichung (3.12), d. h.

$$(\bar{k}, \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)).$$

Unter Annahme 2.10 bezeichnet

$$(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) + D_t)_{t \in \mathbb{N}}$$

den stationären Markov-Prozess des cum dividend Wertpapierpreises. Die ersten beiden Momente sind mit  $\mu_t := \mathbb{E}_t(D_{t+1})$  und  $\sigma_t^2 := \mathbb{V}_t(D_{t+1})$  durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) + D_{t+1} \right) &= S_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) + \mu_t \\ &= \frac{1}{R} \left[ \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha\sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha\sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x} \right] + \mu_t, \\ \mathbb{V}_t \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) + D_{t+1} \right) &= \sigma_t^2. \end{aligned}$$

gegeben. Der erwartete cum dividend Wertpapierpreis ist abhängig von den subjektiven Charakteristiken aller am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten. Diejenigen Konsumenten, die keine Wertpapiere kaufen, beeinflussen auch den Wertpapierpreis nicht. Die in Tabelle 3.2 zusammengefassten komparativ-statischen Ergebnisse zeigen, dass der Wertpapierpreis intuitiv erwartete Eigenschaften besitzt. Er steigt mit steigendem Optimismus und sinkt mit steigender Risikoaversion, subjektiver Varianz,

risikoloser Rendite und steigendem Wertpapierangebot. Erhöht sich der subjektive Erwartungswert eines Konsumenten, der bereits am Wertpapiermarkt teilnimmt, so kann es passieren, dass die Höhe der Marktteilnahme abnimmt. Anders kann die Zunahme der Risikoaversion eines am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten zu einer Erhöhung der Marktteilnahme führen.

$\partial$	$\alpha^i$	$\mu^i$	$\sigma^{i^2}$	$R$	$\bar{x}$	$\mu_t$
$\mathbb{E}_t(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi))$	-	+	-	-	-	+

Tabelle 3.2: Komparative Statik des erwarteten Wertpapierpreises für  $i \leq \bar{k}$ .

### Satz 3.10

Es seien  $\delta, \epsilon, \eta > 0$ , und  $e^j$  bezeichne für  $j \in \mathcal{I}$  den  $j$ -ten Einheitsvektor. Dann erfüllt die Marktteilnahme unter Annahme 3.1 folgende Bedingungen

- (i)  $k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi), \mu \right) \leq k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha + \delta \cdot e^j, \mu, \sigma^2), \mu \right)$ ,
- (ii)  $k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi), \mu \right) \geq k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^2), \mu + \epsilon \cdot e^j \right)$ ,
- (iii)  $k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi), \mu \right) \leq k^* \left( \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha, \mu, \sigma^2 + \eta \cdot e^j), \mu \right)$ .

### Beweis von Satz 3.10:

**ad (i):** Zunächst gilt

$$\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) > \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha + \delta \cdot e^j, \mu, \sigma^2)$$

und damit für alle  $i \leq \bar{k}$

$$1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)) \leq 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha + \delta \cdot e^j, \mu, \sigma^2)).$$

Durch Aufsummieren der ersten  $\bar{k}$  Ungleichungen ergibt sich die Behauptung.

**ad (ii):** Für alle  $i \in \mathcal{I}$ ,  $i \neq 1$ , gelte o.B.d.A. die Ungleichung<sup>9</sup>

$$\frac{\mu^i + \epsilon}{R} < \frac{\mu^{i-1}}{R}.$$

<sup>9</sup>Gilt die Ungleichung nicht, so müssen die Individuen umsortiert werden, damit die Annahme 3.1 wieder erfüllt ist.



Es gilt

$$\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) < \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^2))$$

und damit für alle  $i \leq \bar{k}$ ,  $i \neq j$

$$1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)) \geq 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^2)) \quad (3.15)$$

Für  $i = j \leq \bar{k}$  ergibt sich wegen

$$\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) \leq \frac{\mu^{\bar{k}}}{R} < \frac{\mu^i}{R} < \frac{\mu^i + \epsilon}{R}$$

die Gleichheit

$$1_{\left[0, \frac{\mu^j}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)) = 1_{\left[0, \frac{\mu^j + \epsilon}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi))$$

und damit

$$1_{\left[0, \frac{\mu^j}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)) \geq 1_{\left[0, \frac{\mu^j + \epsilon}{R}\right]}(\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^2)) \quad (3.16)$$

Aufsummieren der Ungleichungen (3.15) für  $i = 1, \dots, \bar{k}$ ,  $i \neq j$  und der Ungleichung (3.16) liefert die Behauptung.

**ad (iii):** Analog zu ad (i). □

Abbildung 3.3 illustriert die Konturlinien der Marktteilnahme, falls sich der subjektive Erwartungswert bzw. die subjektive Varianz eines beliebigen, aber fest ausgewählten Konsumenten ändern.

Die dort zu Grunde gelegte Ökonomie besteht aus zwölf verschiedenen Konsumenten. Die Parameter eines Konsumenten variieren, die der übrigen elf lauten

$$\begin{aligned} \alpha &= (1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 1.0, 1.0), \\ \mu &= (8.0, 7.0, 6.5, 6.0, 5.6, 5.5, 5.1, 5.0, 4.8, 4.1, 4.0), \\ \sigma^2 &= (1.95, 1.90, 1.85, 1.85, 1.75, 1.70, 1.60, 1.40, 1.30, 1.20). \end{aligned}$$

Der zwölfte Konsument hat einen Risikoaversionskoeffizienten von zwei, sein subjektiver Erwartungswert liegt zwischen vier und zwölf, seine subjektive Varianz zwischen 0.01 und 0.22. Das Wertpapierangebot beträgt 20.

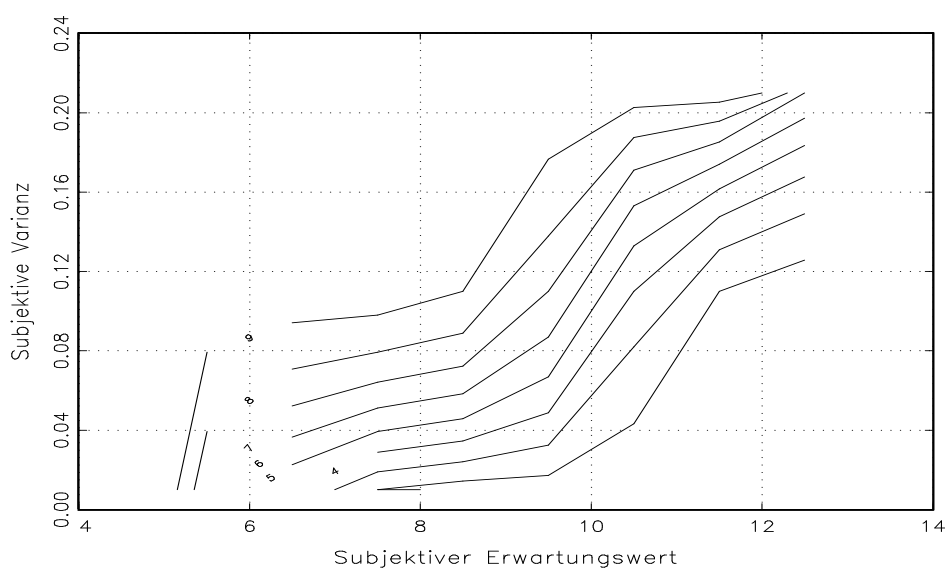


Abbildung 3.3: Konturlinien der Marktteilnahme in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten.

Die Abbildung 3.3 bestätigt die Ergebnisse aus Satz 3.10. Mit steigender subjektiver Varianz erhöht sich die Marktteilnahme, mit steigendem subjektiven Erwartungswert verringert sie sich. Die Konturlinien der Marktteilnahme sind stückweise linear, da eine Parameterveränderung erst ab einer ausreichenden Größe die Marktteilnahme erhöht bzw. senkt. Sind die subjektiven Erwartungswerte aller Konsumenten identisch, so nehmen zu einem gegebenen (nicht notwendig markträumenden) Wertpapierpreis alle Konsumenten oder keiner am Wertpapiermarkt teil.

**Satz 3.11**

Falls  $\mu := \mu^i$  für alle  $i \in \mathcal{I}$ , so gilt

$$k^*(p, \mu) = \begin{cases} N & : p \leq \frac{\mu}{R} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

**Beweis von Satz 3.11:** Sei  $p$  beliebig, aber fest. Dann gilt

$$k^*(p, \mu) := \sum_{i=1}^N 1_{[0, \frac{\mu}{R}]}(p) = N \cdot 1_{[0, \frac{\mu}{R}]}(p) = \begin{cases} N & : p \leq \frac{\mu}{R} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

□

Unter der Bedingung  $\bar{x} < \frac{N\mu}{\alpha\sigma(N)}$  lautet der markträumende Wertpapierpreis im Fall identischer Konsumenten

$$\tilde{S}(\bar{x}, \xi) = \frac{1}{R} [\mu - \alpha\sigma(N)\bar{x}]. \quad (3.17)$$

Wegen  $\tilde{S}(\bar{x}, \xi) \leq \frac{\mu}{R}$  nehmen alle Konsumenten am Wertpapiermarkt teil, und es gilt  $k^*(\tilde{S}(\bar{x}, \xi), \mu) = N$ . Eine Veränderung der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie führt zu einer Änderung der Marktteilnahme. Sie bleibt auf Grund der Identität sämtlicher subjektiver Erwartungswerte stets vollständig. Zusätzlich gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k^*(p, \mu) = \infty \quad \text{für alle } p \text{ und } \xi.$$

Der Wertpapierpreis steigt mit zunehmender Marktteilnahme, ist aber für alle  $p$  und  $\xi$  nach oben durch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}(\bar{x}, \xi) = \frac{\mu}{R}$$

beschränkt.

### 3.3 Erwartungs- und varianztreue Prognosen

Als erwartungstreue Prognosen werden diejenigen subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße bezeichnet, deren erste Momente mit dem objektiven Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises übereinstimmen. Durch die Heterogenität der Konsumenten ist es möglich, verschiedene Arten erwartungstreuer Prognosen zu unterscheiden. Zum einen kann die Erwartungstreue des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes eines beliebigen Konsumenten unabhängig von der Erwartungstreue der Wahrscheinlichkeitsmaße der übrigen Konsumenten untersucht werden. Dann heißt ein subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß von Konsument  $i$  erwartungstreu, falls bei gegebenen (möglicherweise nicht-erwartungstreuen) Wahrscheinlichkeitsmaßen aller übrigen Konsumenten sein subjektiver Erwartungswert mit dem objektiven Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises übereinstimmt. Eine zweite Möglichkeit, erwartungstreue Prognosen zu definieren, besteht in der Annahme identischer subjektiver Erwartungswerte. Damit besitzen entweder alle Konsumenten oder keiner erwartungstreue Prognosen. In der hier vorliegenden Arbeit wird die Erwartungstreue stets für alle Konsumenten gleichzeitig gefordert, damit die erzielten Resultate besser mit denen aus Modellen, die rationale Erwartungen der Konsumenten unterstellen, verglichen werden können. Grundsätzlich ist es jedoch möglich, die Erwartungstreue einer individuellen Prognose unter Berücksichtigung der gegebenenfalls falschen Erwartungen der übrigen Konsumenten zu formulieren.

Wenzelburger (2001) entwickelt z.B. ein Modell mit zwei Gruppen von Investoren, die unterschiedliche Erwartungen über zukünftige Preisentwicklungen besitzen. Die Qualität der Prognosen der einen Konsumentengruppe wird in dem Fall unabhängig von der Qualität der Prognosen der anderen Konsumentengruppe definiert und analysiert.

Für die folgenden Untersuchungen ist die Übereinstimmung aller subjektiven Erwartungswerte eine notwendige Bedingung für die Erwartungstreue von Markov-Kernen. Identische subjektive Erwartungswerte implizieren entweder die vollständige Marktteilnahme, oder es nimmt kein Konsument am Wertpapiermarkt teil (vergleiche Satz 3.11). Ist die Existenzbedingung aus Satz 3.6 erfüllt, so stellt sich stets ein markträumender Wertpapierpreis mit vollständiger Marktteilnahme ein.

Unter den Annahmen 2.10 und 2.16 lautet Gleichung (2.11) mit  $\mu^{id} := \mu^i$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  und der Notation (3.13)

$$\frac{1}{R} [\mu^{id} - \alpha\sigma(N)\bar{x}] + g(d) \stackrel{!}{=} \mu^{id}$$

und liefert

$$\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma) := \frac{1}{R-1} [g(d) - \alpha\sigma(N) \cdot \bar{x}] \quad (3.18)$$

als Lösung dieser Gleichung. Offensichtlich kann  $\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma)$  negativ werden. In diesem Fall existiert kein erwartungstreuer Markov-Kern. Das kann z.B. für sehr kleine bedingte Dividendenerwartungen passieren. Ist  $\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma)$  positiv, so korrespondiert dieser Wert zu einem erwartungstreuen Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen generiert. Mit steigender Risikoaversion eines beliebigen Konsumenten wird  $\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma)$  kleiner. Das gleiche passiert, wenn die subjektive Varianz eines beliebigen Konsumenten oder das Wertpapierangebot steigt. Wegen  $g(d) > \alpha\sigma(N) \cdot \bar{x}$  wächst  $\bar{\mu}(\bar{x}, \alpha, \sigma)$  mit steigender risikoloser Rendite.

Bisher wurden nur erwartungstreue Markov-Kerne berücksichtigt. Gerade die Mittelwert-Varianz Präferenzen ermöglichen auf sehr einfache Art und Weise die Untersuchung der folgenden – stärkeren – Forderung an die Güte von Prognosen. In Anlehnung an die Notation aus Abschnitt 2.4 sei die Funktion<sup>10</sup>  $S(\cdot)$  gegeben.

### Definition 3.12

Ein Markov-Kern  $\Psi$  heißt *varianztreu*, falls für alle  $t \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{V}_t(S(\Psi_{d_t}) + D_{t+1}) = \int_{\mathbb{R}_+} (q - \mu_t)^2 \Psi(d_t, dq) \quad \text{mit} \quad \mu_t := \int_{\mathbb{R}_+} q \Psi(d_t, dq) \quad (3.19)$$

gilt.

---

<sup>10</sup>Siehe Gleichung (2.8) auf Seite 2.8.

Mit  $\sigma_{id} := \sigma_i$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  und  $h(d) = \sigma_d^2$  liefert Gleichung (3.19)

$$\bar{\sigma}(d) := \sqrt{h(d)} > 0.$$

Die erwartungstreue Prognose  $\bar{\mu}$  ist zusätzlich varianztreu, falls  $\sigma_i = \bar{\sigma}(d)$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  gilt, d. h.

$$\bar{\mu}(d, \alpha) := \frac{1}{R-1} \left[ g(d) - \bar{x}h(d) \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i} \right)^{-1} \right].$$

$\bar{\mu}(d, \alpha)$  kann negativ werden. Dann existiert kein erwartungs- und varianztreuer Markov-Kern. Mit steigender Risikoaversion, steigender risikoloser Rendite oder einem steigenden Wertpapierangebot wird  $\bar{\mu}$  kleiner. Zu jedem positiven  $\bar{\mu}(d, \alpha)$  korrespondiert ein erwartungs- und varianztreuer Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen und Varianzen generiert.

### 3.4 Risikozuschläge

Der risikobehaftete Wertpapierertrag in Periode  $t+1$  ist analog zu Gleichung (2.15) für die hier vorliegenden Mittelwert-Varianz-Präferenzen durch den Quotienten aus cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t+1$  und dem ex dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  gegeben. Dann definiert

$$\frac{\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) + D_{t+1}}{\tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi)} - R = 1 - R + R \frac{D_{t+1}}{\sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha \sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x}}$$

den Risikozuschlag in Periode  $t+1$ . Er wird negativ, falls für  $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} D_{t+1}(\omega) &< \frac{R-1}{R} \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha \sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x} \right] \\ &= (R-1) \cdot \tilde{S}_{\bar{k}}(\bar{x}, \xi) \end{aligned}$$

gilt. Damit können nur dann positive Risikozuschläge erzielt werden, wenn die Dividendenzahlung größer als die Zinsen sind, die ein Konsument erhält, wenn er den Wert (=Preis) eines risikobehafteten Wertpapiers risikolos zum Zinssatz  $R-1$  anlegt. Dieser Zusammenhang ist intuitiv. Mit der Notation aus Annahme 2.16 definiert

$$MEP(d, \xi) := 1 - R + R \frac{g(d)}{\sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha \sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x}}$$

den bedingten Erwartungswert des Risikozuschlags als Funktion der Dividendenzahlungen, der Risikoaversionskoeffizienten, der subjektiven Erwartungswerte und der subjektiven Varianzen der ersten  $\bar{k}$  Konsumenten. Offensichtlich ist für

$$g(d) \geq \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha \sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x}$$

der erwartete Risikozuschlag größer als Eins und steigend in der risikolosen Rendite (vgl. Tabelle 3.3).

Die Varianz des Risikozuschlags lautet

$$VEP(d, \xi) := R^2 \frac{h(d)}{\left[ \sum_{i=1}^{\bar{k}} \alpha \sigma(\bar{k}, i) \cdot \mu^i - \alpha \sigma(\bar{k}) \cdot \bar{x} \right]^2}.$$

Die komparativ-statischen Ergebnisse des Erwartungswertes und der Varianz des Risikozuschlags sind in Tabelle 3.3 summiert. Das Sternchen (\*) besagt, dass die entsprechende partielle Ableitung weder streng monoton steigend noch streng monoton fallend ist.

$\partial$	$\alpha^i$	$\mu^i$	$\sigma^{i^2}$	$\bar{x}$	$R$
$MEP(d, \xi)$	+	-	+	+	*
$VEP(d, \xi)$	+	-	+	+	+

Tabelle 3.3: Komparative Statik des Erwartungswertes und der Varianz des Risikozuschlags.

Qualitativ stimmen die Ergebnisse aus Tabelle 3.3 mit denen aus Tabelle 2.4 und Tabelle 2.6 überein. Mit wachsender Risikoaversion und subjektiver Varianz sowie mit wachsendem Wertpapierangebot erhöhen sich der erwartete Risikozuschlag und die Varianz des Risikozuschlags. Nur steigender Optimismus führt zu sinkenden Risikozuschlägen, aber auch zu sinkender Varianz derselben. Falls die risikolose Rendite variiert, hängt das Vorzeichen ihres Einflusses auf den erwarteten Risikozuschlag von der Höhe des bedingten Erwartungswertes des Dividendenprozesses ab. Ist der abdiskontierte Erwartungswert des Dividendenprozesses größer als der ex dividend Wertpapierpreis, d. h.  $\frac{g(d)}{R} > \tilde{S}(\bar{x}, \xi)$ , so wächst der erwartete Risikozuschlag mit steigender risikoloser Rendite. Im anderen Fall, d. h.  $\frac{g(d)}{R} < \tilde{S}(\bar{x}, \xi)$ , sinkt der erwartete Risikozuschlag mit steigender risikoloser Rendite. Die Varianz des Risikozuschlags wächst, wenn die risikolose Rendite steigt.

Abbildung 3.4 illustriert den Verlauf des erwarteten Risikozuschlags und der Höhe der Marktteilnahme in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven

Varianz eines beliebigen Konsumenten. Der subjektive Erwartungswert dieses Konsumenten liegt zwischen vier und zwölf, seine subjektiven Varianzen zwischen 0.01 und 0.18. Die subjektiven Erwartungswerte und die subjektiven Varianzen der übrigen Konsumenten sind durch

$$\begin{aligned}\mu &:= (8.0, 7.0, 6.5, 6.0, 5.6, 5.5, 5.1, 5.0, 4.8, 4.1, 4.0) \quad \text{und} \\ \sigma^2 &:= (1.95, 1.90, 1.85, 1.85, 1.75, 1.70, 1.60, 1.50, 1.40, 1.30, 1.20)\end{aligned}$$

gegeben. Es werden 20 Wertpapiere angeboten.

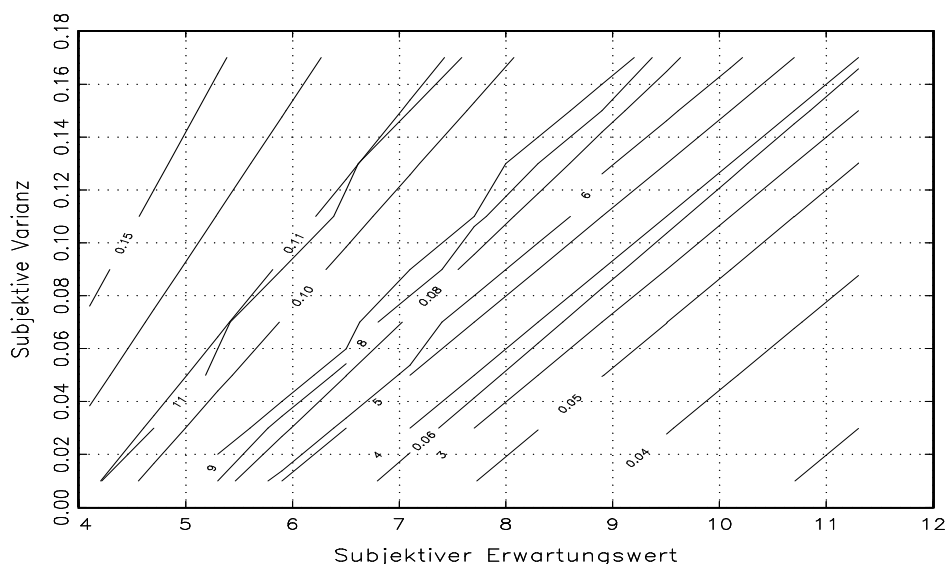


Abbildung 3.4: Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags und der Marktteilnahme in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten.

Abbildung 3.4 bestätigt, dass sowohl die Marktteilnahme als auch der erwartete Risikozuschlag monoton fallend im subjektiven Erwartungswert und monoton steigend in der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten sind. Bei einem erwarteten Risikozuschlag von etwas mehr als 6% nehmen vier Konsumenten am Wertpapiermarkt teil. Eine geringere Marktteilnahme von drei Konsumenten liefert auch einen geringeren erwarteten Risikozuschlag (etwas weniger als 6%). Die erwarteten Risikozuschläge sinken mit sinkender Marktteilnahme. Dieses Ergebnis erscheint auf den ersten Blick kontraintuitiv. Allerdings korrespondiert eine geringe Marktteilnahme mit einem hohen Wertpapierpreis, der wiederum mit einem geringeren erwarteten Risikozuschlag einhergeht. Weiter lässt sich der Abbildung 3.4 entnehmen, dass ein erwarteter Risikozuschlag

in Höhe von 6% mit steigendem subjektiven Erwartungswert eines beliebigen Konsumenten nur durch zusätzlich steigende subjektive Varianz desselben Konsumenten erreichen lässt. Die Heterogenität der Konsumenten und die Marktteilnahme haben bedeutenden Einfluss auf den erwarteten Risikozuschlag. Mehra & Prescott (1985) entdecken das Equity Premium Puzzle im Kontext eines Modells mit unendlich lange lebenden repräsentativen Konsumenten, in dem sich die Frage der Marktteilnahme nicht stellte. Zusätzlich unterstellten sie rationale Erwartungen.

Um die Relation zwischen Risikozuschlag und Risikoaversion der Konsumenten zu analysieren, wird der erwartete Risikozuschlag unter vollständiger Marktteilnahme mit erwartungs- und varianztreuen Markov-Kernen bestimmt. Die ersten beiden Momente des Risikozuschlags lauten

$$\begin{aligned}
MEP^*(d, \alpha) &:= MEP(d, \alpha, \bar{\mu}(d, \alpha), (\bar{\sigma}(d))^2) \\
&= 1 - R + R \frac{g(d) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i}}{\bar{\mu} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i} - \bar{\sigma}^2 \bar{x}} \\
&= 1 - R + R \frac{(R-1)g(d) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i}}{g(d) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i} - Rh(d)\bar{x}}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VEP^*(d, \alpha) &= R^2 \left[ \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i}}{\bar{\mu} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i} - \bar{\sigma}^2 \bar{x}} \right]^2 h(d) \\
&= R^2 \left[ \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i}}{g(d) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i} - Rh(d)\bar{x}} \right]^2 h(d). \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Sowohl der erwartete Risikozuschlag als auch die Varianz des Risikozuschlags mit erwartungs- und varianztreuen Markov-Kernen hängen maßgeblich von den ersten beiden Momenten des Dividendenprozesses ab. Sehr hohe bedingte Dividendenerwartungen führen zu kleinen erwarteten Risikozuschlägen. Auch hohe bedingte Varianzen des Dividendenprozesses führen zu hohen erwarteten Risikozuschlägen. Die Varianz des Risikozuschlags steigt mit der bedingten Varianz des Dividendenprozesses, aber sie sinkt mit steigender bedingter Dividendenerwartung. Die Existenz eines markträumenden Wertpapierpreises mit erwartungs- und varianztreuen Markov-Kern ist nur gesichert, wenn für alle  $d \in \mathcal{D}$  die Ungleichung

$$g(d) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha^i} > Rh(d)\bar{x}$$

erfüllt ist. Durch die passende Wahl der verschiedenen Parameter ist es möglich, dass die linke Seite nur unwesentlich größer als die rechte Seite ist. Somit ist der Nenner in



Gleichung (3.20) sehr nahe bei Null und der erwartete Risikozuschlag sehr groß. Dieselbe Argumentation ist auf die Varianz des Risikozuschlags übertragbar. Die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags sind für eine Ökonomie mit zwölf Konsumenten, die alle erwartungs- und varianztreue Markov-Kerne besitzen, in Abbildung 3.5 enthalten. Dabei unterscheiden sich die Konsumenten lediglich durch ihre Risikoaversionskoeffizienten, d. h. es gilt

$$\alpha := (2.0, 1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 1.0).$$

Der Koeffizient des zwölften Konsumenten variiert zwischen 0.4 und 2.0. Es werden zwanzig Wertpapiere angeboten. Der bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses beträgt 2.5, die bedingte Varianz 0.0325.

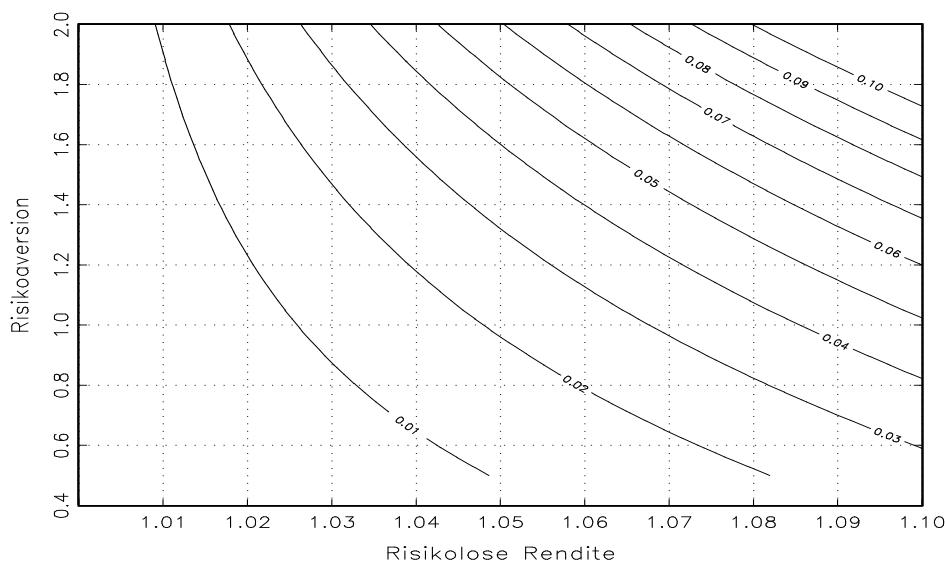


Abbildung 3.5: Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags unter erwartungs- und varianztreuen Markov-Kernen in Abhängigkeit der risikolosen Rendite und der Risikoaversion eines beliebigen Konsumenten.

Auf Grund dieser Parameterkonstellation steigt der erwartete Risikozuschlag mit steigender risikoloser Rendite<sup>11</sup>. Somit sind hohe Risikozuschläge entweder durch hohe Risikoaversionen oder durch hohe risikolose Renditen zu realisieren. Hier zeigt sich, dass die Unterstellung rationaler Erwartungen, die auch in der Varianz rational sind, eine sehr starke Forderung ist. Die erwarteten Risikozuschläge werden durch sie deutlich einge-

<sup>11</sup>Vergleiche die komparativ-statischen Ergebnisse aus Tabelle 3.3.

schränkt, denn empirisch nachgewiesene Zuschläge in Höhe von 6% sind für Risikoaversionen, die im Intervall  $[0.4; 2.0]$  liegen, nur durch hohe risikolose Renditen zwischen 1.05 und 1.1 zu imitieren. In der in Abbildung 3.5 benutzten Ökonomie zeigt sich, dass unter der starken Annahme erwartungs- und varianztreuer Markov-Kerne das von Mehra & Prescott (1985) entdeckte Equity Premium Puzzle auch hier nur eingeschränkt lösbar ist. Für eine realistische risikolose Rendite in Höhe von 1.01 sind Risikoaversionskoeffizienten  $\alpha > 4$  nötig, um Risikozuschläge in Höhe von 6% zu generieren.

### 3.5 Abschließende Bemerkungen

In diesem Kapitel wurde in Anlehnung an das Grundmodell aus Kapitel 2 eine Ökonomie überlappender Generationen mit einer heterogenen Population vorgestellt. Die Konsumenten besitzen Mittelwert-Varianz-Präferenzen und unterscheiden sich durch ihre Risikoaversionskoeffizienten, ihre subjektiven Erwartungswerte und Varianzen voneinander. Obwohl die gewählten Nutzenfunktionen nicht streng monoton sind und somit jeder Konsument einen Sättigungspunkt besitzt, lassen sich viele Resultate über Wertpapierpreise, Marktteilnahme, Risikozuschläge und erwartungstreue Markov-Kerne erzielen. Gerade die Mittelwert-Varianz-Präferenzen ermöglichen auf sehr einfache Art und Weise die Untersuchung der Marktteilnahme. So nehmen nur dann alle Konsumenten gleichzeitig am Wertpapiermarkt teil, wenn sie identische (möglicherweise nicht-rationale) subjektive Erwartungswerte besitzen. Die Höhe der Risikoaversion und der subjektiven Varianzen sind dabei nicht von Bedeutung. Haben die Konsumenten unterschiedliche subjektive Erwartungswerte, so korrespondieren kleine Wertpapierpreise mit einer vollständigen Marktteilnahme. Hohe Wertpapierpreise führen zu geringerer Marktteilnahme. Für jeden Konsumenten existiert ein „individueller“ Preis, bis zu dem er am Wertpapiermarkt teilnimmt. Dieser individuelle Preis ist der abdiskontierte subjektive Erwartungswert des jeweiligen Konsumenten. Damit erhalten die subjektiven Erwartungswerte eine exponierte Stellung, da für jeden abdiskontierten subjektiven Erwartungswert die aggregierte Wertpapiernachfrage einen „Knick“ macht und die Marktteilnahmefunktion unstetig ist.

Wie schon in Kapitel 2 erhöht sich die Wertpapiernachfrage mit zunehmendem Optimismus. Allerdings ist dort die Höhe der Marktteilnahme stets konstant. Durch die Wahl der Mittelwert-Varianz-Präferenzen kann Optimismus mit der Höhe der Marktteilnahme in Verbindung gebracht werden. Je größer der Optimismus (gemessen in subjektiven Erwartungswerten), desto höher ist die Marktteilnahme. Diese Aussage gilt für beliebige

– nicht notwendig markträumende – Wertpapierpreise.

Die Existenz eines markträumenden Wertpapierpreises ist an eine Ungleichung geknüpft. Nur wenn der Optimismus der Konsumenten im Vergleich zur Zahl angebotener Wertpapiere groß genug ist, existiert ein markträumender Wertpapierpreis. In Kapitel 2 liefern die Randeigenschaften der individuellen Nachfragefunktion zusammen mit der Stetigkeit die Existenz des markträumenden Wertpapierpreises. Die Annahme der Mittelwert–Varianz–Präferenzen ändert diese Randeigenschaften, da die Nutzenfunktionen der Konsumenten nicht mehr streng monoton sind. Jeder Konsument besitzt einen Sättigungspunkt. Somit liefert die Summe aller Sättigungspunkte eine obere Schranke für das Wertpapierangebot. Diese obere Schranke ist umso größer, je optimistischer die Konsumenten sind. Der resultierende ex dividend Wertpapierpreis ist konstant und abhängig von allen Konsumenten mit positiver Wertpapiernachfrage. Wie auch schon in Kapitel 2 ist das Wertpapierangebot ebenfalls von großer Bedeutung für den Wertpapierpreis. Der markträumende Wertpapierpreis wird sowohl durch die subjektiven Erwartungswerte als auch durch subjektive Varianzen und Risikoaversionen bestimmt. Die beiden letzten Parameter beeinflussen somit (indirekt) auch die Höhe der Marktteilnahme. Diese verringert sich für wachsende Risikoaversion und wachsende subjektive Varianzen.

In einer wachsenden Population mit Konsumenten, die identische subjektive Erwartungswerte haben, konvergiert der markträumende Wertpapierpreis gegen den abdiskontierten subjektiven Erwartungswert aller Konsumenten. Zu diesem markträumenden Wertpapierpreis sind alle Konsumenten indifferent zwischen der Investition in risikobehaftete Wertpapiere und der risikolosen Anlage.

Die Annahme von Mittelwert–Varianz–Präferenzen ermöglicht es, nicht nur erwartungstreue, sondern auch varianztreue Markov–Kerne zu ermitteln und zu untersuchen. Solche Markov–Kerne existieren nicht für alle Modellspezifikationen. So führen u. a. sehr kleine bedingte Dividendenerwartungen zur Nicht–Existenz erwartungstreuer Markov–Kerne. Das unterstreicht die Restriktivität der oftmals in der Literatur verwendeten Annahme rationaler Erwartungen.

Der Erwartungswert und die Varianz des Risikozuschlags sinken mit zunehmendem Optimismus der am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten. Beide wachsen mit steigender subjektiver Varianz, mit steigender Risikoaversion oder mit steigendem Wertpapierangebot. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ mit denjenigen aus Kapitel 2 überein. Im Modell mit Mittelwert–Varianz–Präferenzen sinken erwartete Risikozuschläge mit sinkender Marktteilnahme. Dies widerspricht den Ergebnissen aus Kapitel 2 insofern, als dass dort eine wachsende Population in einer Ökonomie identischer Konsumenten zu

sinkenden erwarteten Risikozuschlägen führt. Damit wird die Heterogenität zu einem wesentlichen Faktor für die Höhe von Risikozuschlägen.

Benutzen alle Konsumenten erwartungs- und varianztreue Markov-Kerne, so ist die Wahl des Dividendenprozesses für das Ausmaß der erwarteten Risikozuschläge (und auch ihrer Varianzen) von großer Bedeutung. Die Konsumenten beeinflussen diese Größen lediglich noch durch ihre Risikoaversionen und durch die Größe der Population. Es zeigt sich, dass die erwarteten Risikozuschläge mit steigender risikoloser Rendite wachsen können.

Zusammenfassend unterstreicht das vorliegende Modell die Wichtigkeit der Konsumentenheterogenität für Wertpapierpreise und Risikozuschläge. Es werden empirisch beobachtbare Phänomene mit diesem einfachen Modell heterogener Konsumenten beleuchtet und entscheidende Hinweise für die theoretische Aufklärung derselben gegeben. Das Equity Premium Puzzle nach Mehra & Prescott (1985) ist in dem hier vorliegenden Modell nicht zu beobachten. Es ist sowohl für rationale als auch für nicht-rationale Erwartungen möglich, einen mittleren Risikozuschlag von 6% zu generieren. Basak & Cuoco (1998) präsentieren die Lösung des Equity Premium Puzzles in einem Modell mit beschränkter Marktteilnahme und zeigen, dass diese von besonderer Bedeutung ist. In dem hier vorliegenden Kapitel wird ebenfalls ein Modell mit nicht notwendig vollständiger Marktteilnahme diskutiert. Allerdings werden für die Lösung des Equity Premium Puzzles rationale Erwartungen unterstellt, die zu einer vollständigen Marktteilnahme führen. Somit ist in dem hier vorliegenden Modell die Lösung des Puzzles nicht nur mit beschränkter Marktteilnahme möglich.

## Kapitel 4

# Finanzmarktgleichgewicht mit variablem Wertpapierangebot

In diesem Kapitel wird in einem Modell mit einem variablen Wertpapierangebot das Handelsvolumen in Abhängigkeit der subjektiven Charakteristiken sämtlicher in der Ökonomie befindlicher Individuen untersucht. Eine notwendige Voraussetzung zur Entstehung von Handelsvolumen ist Handel. Nur wenn die Individuen einer Ökonomie aktiv miteinander handeln, ist es möglich, das Volumen dieses Handels zu bestimmen. Individuen handeln, wenn sie sich unterscheiden. Die Mengen der Konsumenten in den Modellen aus Kapitel 2 und 3 sind heterogen. Es gibt junge Konsumenten, die Wertpapiere kaufen, und alte, die Wertpapiere verkaufen. Das Handelsvolumen ist in diesen Modellen stets exogen und konstant, da sämtliche Wertpapiere von den alten an die jungen Konsumenten verkauft werden (müssen). Ähnlich führt die Unterstellung eines zweiperiodigen Modells überlappender Generationen mit heterogener Population in Huberman (1984), Huffman (1985) und Huffman (1986) ebenfalls zu einem konstanten Handelsvolumen, da in jeder Periode alle Wertpapiere gehandelt werden. Ein konstantes Handelsvolumen ignoriert sämtliche Interaktionen zwischen Handelsvolumen, Wertpapierpreis und -rendite. Zur „Erzeugung“ eines endogenen Handelsvolumen wird im Folgenden ein zusätzliches Individuum, Fond-Manager genannt, ins Modell eingebaut. Dieser verkauft Wertpapiere. Seine Angebotsfunktion ist u.a. von seinen subjektiven Einschätzungen der zukünftigen Wertpapierpreisentwicklung abhängig.

Handelsvolumen wird in der Literatur in unterschiedlichster Weise berücksichtigt. In konventionellen Wertpapiermarktmodellen spielt das Handelsvolumen eine eher untergeordnete Rolle. So unterstellt Lucas (1978) in einer reinen Tauschökonomie identische Konsumenten. Merton (1973) untersucht die Wertpapierpreise und -renditen in einem

intertemporalen Modell. Die Investoren unterscheiden sich durch ihre Präferenzen, aber das Handelsvolumen wird nicht analysiert. Dagegen unterstellen z. B. Campbell, Grossman & Wang (1993), Dumas (1989) und Wang (1996) unterschiedliche Präferenzen, um Handelsvolumen untersuchen zu können. Weiter besitzen die Investoren in der Arbeit von Arrow (1953) unterschiedliche Anfangsausstattungen. Grossman (1981), Grossman & Stiglitz (1976, 1980), Blume, Easley & O'Hara (1994), Tirole (1982), Hellwig (1980), Diamond (1981) und Wang (1994) erzeugen die Heterogenität der Investoren durch Informationsasymmetrien. Harris & Raviv (1993), Biais & Bossaerts (1998), Kandel & Pearson (1995) und Michaely, Vila & Wang (1996) führen die Heterogenität der Konsumenten durch „Meinungsverschiedenheiten“ herbei, d. h. jeder Händler bekommt die gleichen Informationen, interpretiert sie aber unterschiedlich. Diese Arbeiten folgen im Allgemeinen dem Argument von Aumann (1976), dass zwei rational handelnde Investoren sich nicht darauf einigen können, sich nicht zu einigen. Die Investoren in den Arbeiten Pfleiderer (1984), Kyle (1985) oder Admati & Pfleiderer (1988) erhalten unabhängig voneinander unterschiedliche Signale von der gleichen, allen Investoren bekannten Verteilung.

Schon Ying (1966) zeigt die Bedeutung des Handelsvolumens für die Entwicklung der Finanzmärkte auf. Das Handelsvolumen beeinflusst zum einen direkt das Ausmaß ökonomischer Aktivitäten auf den Finanzmärkten und zum anderen die Entwicklung der Wertpapierpreise. Nach Karpoff (1987) liefert die Beziehung zwischen Wertpapierpreis und Handelsvolumen wichtige Einsichten in die Struktur der Finanzmärkte. Sie ist bedeutend für Studien, die Daten als Kombination von Preis und Volumen benötigen, und für die Diskussion über empirische Verteilungen spekulativer Preise. In diesem Sinne beschäftigen sich sowohl empirische (z. B. Jain & Joh (1988), Kandel & Pearson (1995) und Andersen (1996)) als auch theoretische (z. B. Harris & Raviv (1993), Shalen (1993) und Michaely & Vila (1995)) Arbeiten intensiv mit der Beziehung des Handelsvolumen zum Wertpapierpreis bzw. dessen Veränderung. Sie bescheinigen alle eine positive Korrelation der Wertpapierpreisänderungen zum Handelsvolumen. In der vorliegenden Arbeit wird das Handelsvolumen durch eine lineare Funktion des Wertpapierpreises beschrieben. Wertpapierpreis und Handelsvolumen sind positiv korreliert.

Ein Schwerpunkt der Literatur umfasst die Analyse der Frage, inwieweit der Grad der Heterogenität Einfluss auf das Handelsvolumen hat. So zeigt Wang (1994) in einem Modell mit Investoren, die sich durch ihre Informationen und ihre privaten Investitionsmöglichkeiten unterscheiden, dass ein unterschiedliches Ausmaß an Heterogenität immer zu unterschiedlichen Handelsvolumen führt. Zusätzlich erweist sich das Handels-

volumen als Träger wertvoller Informationen über die markträumenden Wertpapierpreise. Blume, Easley & O'Hara (1994) betonen ebenfalls die Bedeutung der Heterogenität<sup>1</sup> für die Höhe des Handelsvolumens. Dieses korrespondiert zu den markträumenden Wertpapierpreisen. Nach Campbell, Grossman & Wang (1993) korrespondiert es auch mit den Wertpapiererträgen und der Volatilität der Wertpapierpreise. Ebenso zeigt Huffman (1987) in einem dynamischen Wertpapiermarktmodell, welche Effekte eine heterogene Population und ein variables Handelsvolumen auf die Volatilität der Wertpapierpreise und das gesamte Verhalten des Wertpapiermarktes haben. Jones, Kaul & Lipson (1994) zeigen, unter welchen Bedingungen ein hohes Handelsvolumen Volatilität der Wertpapierpreise erzeugen kann. Einen weiteren Ansatz zur Erklärung dieser Beziehung liefert Shalen (1993) in ihrem zweiperiodigen Modell mit „rauschenden“ rationalen Erwartungen. Diese Streuung der Erwartungen (über den gewichteten Durchschnitt zukünftiger Preise) begründet hohes Handelsvolumen und volatile Wertpapierpreise.

Durch die Erweiterung des Basismodells aus Kapitel 2 um einen Fond-Manager, der Wertpapiere anbietet, wird die Bestimmung des endogenen Handelsvolumens ermöglicht. Die Struktur des Modells liefert den Wertpapierpreis, die Risikoprämie und das Handelsvolumen in geschlossener Form. Somit lassen sich die Abhängigkeiten der einzelnen Variablen von den Parametern und auch die Beziehungen zwischen den einzelnen Variablen bestimmen.

## 4.1 Die Konsumenten

Analog zu Abschnitt 2.1 definiert unter Annahme 2.1

$$\varphi^i(\cdot, \nu^i) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad p \longmapsto \arg \max_{x \in [0, \frac{e^i}{p}]} V_p^i(x)$$

die individuelle Wertpapiernachfrage des Konsumenten  $i \in \mathcal{I}$ . Zusätzlich gelte  $\nu^i(\{q \neq Rp\}) > 0$  für alle  $p \in \mathbb{R}_+$ . Die Summe aller individuellen Wertpapiernachfragen definiert die aggregierte Wertpapiernachfrage

$$\varphi(\cdot, \nu) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad p \longmapsto \sum_{i=1}^n \varphi^i(p, \nu^i) = \sum_{i=1}^n \arg \max_{x \in [0, \frac{e^i}{p}]} V_p^i(x), \quad (4.1)$$

wobei  $\nu := (\nu^i)_{i \in \mathcal{I}}$  den Vektor aller individuellen Wahrscheinlichkeitsmaße bezeichnet. Weiter ist nach Satz 2.4 die aggregierte Wertpapiernachfrage stetig und besitzt für alle  $\nu$

---

<sup>1</sup>Blume, Easley & O'Hara (1994) unterscheiden die Investoren durch die Qualität bzw. Genauigkeit ihrer Informationen.

die Randeigenschaften

$$\lim_{p \rightarrow 0} \varphi(\cdot, \nu) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(\cdot, \nu) = 0.$$

Die Nachfrage nach Wertpapieren ist für sehr kleine Preise nach oben unbeschränkt. Sind die Wertpapierpreise sehr hoch, so nimmt die Nachfrage ab und geht gegen Null.

## 4.2 Der Fond–Manager

Der Fond–Manager wird als gewinnmaximierendes Individuum modelliert. Somit übernimmt er die Steuerung des Wertpapieranteils, der in der Hand der Unternehmung bleibt. Der Fond–Manager kann auch mit einer Bank, die Wertpapiere anbietet, verglichen werden. Darüber hinaus kann durch die Auswahl der Angebotshöhe (indirekt) Einfluss auf den Wertpapierpreis genommen werden. Im Folgenden wird angenommen, dass der Fond–Manager beliebig viele Perioden lebt und in jeder Periode den erwarteten Gewinn der folgenden Periode maximiert. Dieser erwartete Gewinn ist die Differenz aus dem Ertrag des Wertpapierverkaufs und den durch den Verkauf entstehenden Kosten. Die stetige und zweimal differenzierbare Funktion  $K : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  bezeichnet diese Kosten. Weiter definiert  $\mu^f > 0$  den subjektiven Erwartungswert des Fond–Managers für den morgigen Wertpapierpreis.  $p > 0$  bezeichnet den aktuellen Wertpapierpreis. Der Gewinn des Fond–Managers aus dem Verkauf von  $x$  Wertpapieren in einer beliebigen Periode  $t$  lautet

$$\begin{aligned} \pi_t(x, p, \mu^f) &:= R(w_t(p) + px) + (p - \mu^f)x - K(x) \\ &= R w_t(p) - K(x) + [(R + 1)p - \mu^f] x. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Mit dem in Periode  $t - 1$  markträumenden Wertpapierpreis  $p_{t-1} > 0$  und der Anzahl in Periode  $t - 1$  gehandelter Wertpapiere  $x_{t-1} > 0$  definiert

$$w_t(p) := R w_{t-1}(p_{t-1}) - K(x_{t-1}) + [(R + 1)p_{t-1} - p] x_{t-1} \quad (4.3)$$

das Vermögen des Fond–Managers in Periode  $t$ . Dieses ist in jeder Periode vom Vermögen der Vorperiode abhängig. Auf Grund der Sukzessivität der Definition (4.3) ist das Vermögen einer beliebigen Periode stets durch die Vermögen sämtlicher Vorperioden – einschließlich dem Anfangsvermögen in Periode 0 – bestimmt. Weiter ist die Funktion  $w_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  aus Gleichung (4.3) streng monoton fallend im aktuellen Wertpapierpreis  $p$ . Je höher der Wertpapierpreis ist, desto höher sind die Rückzahlungen, die der



Fond-Manager machen muss und desto kleiner ist sein Vermögen. Somit gibt es Wertpapierpreise, zu denen ein negatives Vermögen korrespondiert.

Das folgende Lemma untersucht die in Gleichung (4.2) definierte Gewinnfunktion und zeigt, unter welchen Bedingungen diese monoton steigend ist.

**Lemma 4.1**

Die Kostenfunktion  $K(\cdot)$  sei zweimal stetig differenzierbar.  $p$ ,  $\mu^f$  und  $t \in \mathbb{N}$  seien beliebig, aber fest. Die Gewinnfunktion  $\pi_t(\cdot, p, \mu^f)$ ,  $x \mapsto \pi_t(x, p, \mu^f)$  ist genau dann streng monoton steigend, wenn

$$K'(x) < (R + 1)p - \mu^f. \quad (4.4)$$

**Beweis von Lemma 4.1:**

Die Behauptung folgt sofort aus der Differentiation der Funktion  $\pi_t(\cdot, p, \mu^f)$ . Die Ableitung lautet

$$\frac{\partial}{\partial x} \pi_t(x, p, \mu^f) = -K'(x) + (R + 1)p - \mu^f$$

und somit gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \pi_t(x, p, \mu^f) > 0,$$

genau dann, wenn die Ungleichung

$$K'(x) < (R + 1)p - \mu^f$$

erfüllt ist. □

Für negative Grenzkosten, d. h.  $K'(x) < 0$  gilt die Ungleichung (4.4) für alle Wertpapierpreise  $p > \frac{\mu^f}{R+1}$ . In diesem Fall „glaubt“ der Fond-Manager an einen positiven Ertrag von  $(R + 1)p - \mu^f$  für ein Wertpapier. Die Situation verschärft sich jedoch für positive Grenzkosten. Für Wertpapierpreise, die kleiner als der mit  $(R + 1)$  abdiskontierte subjektive Erwartungswert sind, ist die Gewinnfunktion niemals monoton steigend. Selbst für Preise, die oberhalb dieses Wertes liegen, kann bei sehr hohen Grenzkosten die Gewinnfunktion monoton fallend bleiben.

**Lemma 4.2**

Die Kostenfunktion  $K(\cdot)$  sei zweimal stetig differenzierbar<sup>2</sup> und streng monoton steigend.

---

<sup>2</sup>Die zweifache stetige Differenzierbarkeit der Kostenfunktion wird in diesem Lemma der Einfachheit halber unterstellt. Die Aussage des Lemmas gilt auch für nicht zweimal stetig differenzierbare Funktionen, die die Annahmen des Lemmas erfüllen. Der Beweis nutzt dann die Argumente trennender Hyperebenen anstatt zweiter Ableitungen.

Weiter seien  $p, \mu^f$  und  $t \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest. Dann ist die Gewinnfunktion  $\pi_t(x, p, \mu^f)$  genau dann streng konvex (streng konkav), wenn die Kostenfunktion  $K(\cdot)$  streng konkav (streng konvex) ist.

**Beweis von Lemma 4.2:**

Die strenge Konvexität der Gewinnfunktion  $\pi_t(\cdot, p, \mu^f)$  ist äquivalent zur Positivität ihrer zweiten Ableitung. Diese lautet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \pi_t(x, p, \mu^f) = -K''(x).$$

$-K''(x)$  ist genau dann positiv, wenn  $K''(x)$  negativ bzw.  $K(\cdot)$  streng konvex ist. Das ist die Behauptung.

Der Beweis der in Klammern geschriebenen Behauptung erfolgt analog.  $\square$

Für die folgenden Analysen werden drei Bedingungen an eine Kostenfunktion gestellt.

**Annahme 4.3**

Die Kostenfunktion des Fond-Managers  $K : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  sei

- (i) zweimal stetig differenzierbar,
- (ii) streng monoton wachsend,
- (iii) streng konvex.

Zusätzlich gelte  $K(0) = 0$ .

Diese Annahme dient in erster Linie der Vereinfachung vieler der folgenden Analysen und vermeidet die Betrachtung unrelevanter Spezialfälle. So ist z. B. die Forderung einer zweimal stetig differenzierbaren Kostenfunktion nicht notwendig, denn sämtliche Beweise der folgenden Aussagen könnten auch etwas umständlicher über das Argument trennender Hyperebenen geführt werden. Die letzte Bedingung  $K(0) = 0$  unterstellt, dass es keine positiven Fixkosten gibt.

Zu Beginn einer beliebigen Periode  $t \in \mathbb{N}$  maximiert der Fond-Manager seinen erwarteten Gewinn am Ende dieser Periode. Sein Maximierungsproblem lautet

$$\arg \max_{\underline{x} \leq x \leq \bar{x}} \pi_t(x, p, \mu^f). \quad (4.5)$$

Dabei unterliegt der Fond-Manager zwei Einschränkungen. Er muss zu jedem Wertpapierpreis mindestens  $\underline{x}$ , darf aber höchstens  $\bar{x}$  Wertpapiere anbieten. Gerade letzteres

kann zu einem negativen Endvermögen (in einer beliebigen Periode) führen<sup>3</sup>. Der folgende Satz liefert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer inneren Lösung

**Satz 4.4**

$p, \mu^f$  und  $t \in \mathbb{N}$  seien beliebig, aber fest. Weiter sei die Annahme 4.3 erfüllt.  $x^* \in (\underline{x}, \bar{x})$  ist genau dann die einzige innere Lösung des Maximierungsproblems (4.5), wenn die Ungleichungen

$$K'(\underline{x}) < (R+1)p - \mu^f < K'(\bar{x}) \quad (4.6)$$

erfüllt ist.

**Beweis von Satz 4.4:**

Nach Lemma 4.2 ist die Funktion  $\Pi_t^{f,p}(x) := \pi_t(x, p, \mu^f)$  streng konkav, d. h.  $(\Pi_t^{f,p})'' < 0$ . Daraus folgt, dass  $(\Pi_t^{f,p})'$  streng monoton fallend und  $x^*$  eine eindeutige Lösung des Maximierungsproblems (4.5) ist. Sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen  $x^* \in (\underline{x}, \bar{x})$  und  $(\Pi_t^{f,p})'(x) = 0$  erfüllt, so ist  $x^*$  eine innere Lösung. Das ist genau dann der Fall, wenn die Ungleichungen  $(\Pi_t^{f,p})'(\underline{x}) > 0$  und  $(\Pi_t^{f,p})'(\bar{x}) < 0$  erfüllt sind. Nun gelten weiter

$$(\Pi_t^{f,p})'(\underline{x}) = (R+1)p - \mu^f - K'(\underline{x}) \quad \text{und} \quad (\Pi_t^{f,p})'(\bar{x}) = (R+1)p - \mu^f - K'(\bar{x}).$$

Wegen der strengen Konvexität der Kostenfunktion sind die Grenzkosten streng monoton steigend. Damit ist  $x^*$  genau dann eine innere Lösung, wenn die Ungleichung (4.6) erfüllt ist.  $\square$

Während die Gewinnfunktion von der jeweils betrachteten Periode abhängig ist, spielt die Periode in Ungleichung (4.6) keine Rolle. Diese Tatsache spiegelt die Intuition wider, dass die Höhe des Vermögens für die Entscheidung über die Höhe des Wertpapierangebots unbedeutend ist. Nach Annahme 4.3 ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend. Damit sind die Grenzkosten positiv. Notwendig zur Erfüllung der Ungleichung (4.6) sind Wertpapierpreise, die größer als der mit  $R+1$  abdiskontierte subjektive Erwartungswert des Fond-Mangers sind. Für Wertpapierpreise die kleiner als dieser Wert sind, d. h.  $p < \frac{\mu^f}{R+1}$ , besitzt ein Wertpapier einen negativen Ertrag. Zusätzlich entstehen für die Ausschüttung eines jeden Wertpapiers Kosten. In diesem Fall bietet der Fond-Manager nicht mehr Wertpapiere als nötig, d.h.  $\underline{x}$ , an. Sein Angebot bleibt

<sup>3</sup>In Abschnitt 4.8.1 wird die Höhe des Vermögens in Abhängigkeit des sich einstellenden markträumenden Wertpapierpreises diskutiert.

minimal, solange seine „(abdiskontierten) subjektiven Grenzkosten“  $\frac{K'(x)+\mu^f}{R+1}$  größer als der aktuelle Wertpapierpreis sind.

Der Gewinn des Fond-Managers  $\pi_t(x, p, \mu^f)$  ist nach Definition (4.2) von der betrachteten Periode  $t$  abhängig. Dasselbe gilt für das Maximierungsproblem aus Gleichung (4.5). Dennoch ist – wie der folgende Satz zeigt – der Maximierer selbst unabhängig von der jeweiligen Periode  $t$ . Die resultierende Wertpapierangebotsfunktion verändert sich nicht über die Zeit.

**Satz 4.5**

*Unter Annahme 4.3 ist die Angebotsfunktion*

$$\psi(\cdot, \mu^f) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad p \longmapsto \psi(p, \mu^f) := \arg \max_{\underline{x} \leq x \leq \bar{x}} \pi_t(x, p, \mu^f)$$

*stetig und monoton steigend. Weiter gilt*

$$\psi(p, \mu^f) = \begin{cases} \underline{x} & : p \leq \frac{\mu^f}{R+1} \\ \min \{ \max \{ \underline{x}; (K')^{-1}((R+1)p - \mu^f) \}; \bar{x} \} & : p > \frac{\mu^f}{R+1} \end{cases}. \quad (4.7)$$

**Beweis von Satz 4.5:**

Wegen der strengen Konkavität der Gewinnfunktion (vgl. Lemma 4.2) liefert  $\psi(\cdot, \mu^f)$  die Lösung des Maximierungsproblems (4.5). Die Korrespondenz  $p \longmapsto [\underline{x}, \bar{x}]$  ist insbesondere stetig, konvex- und kompaktwertig. Damit ist die Angebotsfunktion  $\psi(\cdot, \mu^f)$  stetig.

Die Monotonie der Angebotsfunktion leitet sich mithilfe der Bedingung erster Ordnung ab. Dazu definiere

$$F(x, p) := -K'(x) + (R+1)p - \mu^f.$$

Für die partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, p) = -K''(x) < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial p} F(x, p) = R+1 > 0.$$

Daraus folgt mithilfe des Satzes über implizite Funktionen

$$\frac{dx(p)}{dp} = -\frac{\partial}{\partial x} F(x, p) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial p} F(x, p) \right)^{-1} > 0.$$

Dieses Ergebnis zusammen mit der Stetigkeit der Angebotsfunktion impliziert, dass  $\psi(\cdot, \mu^f)$  monoton steigt.

Sei  $p > \frac{\mu^f}{R+1}$ . Wegen der strengen Monotonie ist die Kostenfunktion  $K(\cdot)$  invertierbar. Die Bedingung erster Ordnung liefert

$$K'(x) \stackrel{!}{=} (R+1)p - \mu^f \iff x = (K')^{-1}((R+1)p - \mu^f).$$

Unter Berücksichtigung der beiden Nebenbedingungen gilt für  $p > \frac{\mu^f}{R+1}$  die Gleichung

$$\psi(p, \mu^f) = \min \left\{ \max \left\{ \underline{x}; (K')^{-1}((R+1)p - \mu^f) \right\}; \bar{x} \right\}.$$

Für  $p \leq \frac{\mu^f}{R+1}$  gibt es keine innere Lösung. Wegen  $K' > 0$  beträgt das Wertpapierangebot in diesem Fall  $\underline{x}$ . □

Satz 4.4 liefert notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer inneren Lösung des Maximierungsproblems (4.5) des Fond-Managers für festen Wertpapierpreis  $p$ . Die dort aufgestellte Ungleichung (4.6) lässt sich umformen und als

$$\frac{K'(\underline{x}) + \mu^f}{R+1} < p < \frac{K'(\bar{x}) + \mu^f}{R+1}$$

schreiben. Definiere

$$p_- := \frac{K'(\underline{x}) + \mu^f}{R+1} \quad \text{und} \quad p_+ := \frac{K'(\bar{x}) + \mu^f}{R+1}.$$

Es existieren sowohl für  $p \geq p_+$  als auch für  $p \leq p_-$  keine inneren Lösungen des Maximierungsproblems (4.5). Für  $p \leq p_-$  gilt  $(\Pi_t^{f,p})'(\underline{x}) > 0$ . Zusammen mit der strengen Konkavität der Gewinnfunktion liefert das die Randlösung  $\psi(p, \mu^f) = \underline{x}$  für alle  $p \leq p_-$ . Für  $p \geq p_+$  ist die Ableitung der Gewinnfunktion an der Stelle  $\bar{x}$  negativ, d. h. die rechte Ungleichung aus (4.6) ist verletzt. Damit gilt auf Grund der strengen Konkavität von  $\pi_t(\cdot, p, \mu^f)$  für alle  $p \geq p_+$   $\psi(p, \mu^f) = \bar{x}$ . Zusammenfassend lässt sich die Angebotsfunktion unter den Bedingungen aus Annahme 4.3 als

$$\psi(p, \mu^f) = \begin{cases} \underline{x} & : 0 < p \leq p_- \\ (K')^{-1}((R+1)p - \mu^f) & : p_- < p \leq p_+ \\ \bar{x} & : p \geq p_+ \end{cases} \quad (4.8)$$

formulieren.

### 4.3 Kostenfunktionen

Das Maximierungsproblem (4.5) und somit die Angebotsfunktion (4.8) des Fond-Managers bestimmen sich maßgeblich in Abhängigkeit der jeweiligen Kostenfunktion.

In diesem Abschnitt werden verschiedene Kostenfunktionen diskutiert. Diese Funktionen besitzen lediglich Beispielcharakter, denn nicht alle erfüllen die Bedingungen aus Annahme 4.3.

### 4.3.1 Logarithmische Kostenfunktionen

Die logarithmische Kostenfunktion  $K_{log} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \log x$  ist zweimal stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und streng konkav. Somit ist die Bedingungen (iii) aus Annahme 4.3 verletzt. Für  $t \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest, liefert das Maximierungsproblem aus Gleichung (4.5) für die logarithmische Kostenfunktion

$$\psi_{log}(p, \mu^f) := \min \left\{ \max \left\{ \underline{x}; \frac{1}{(R+1)p - \mu^f} \right\}; \bar{x} \right\} \quad (4.9)$$

als Wertpapierangebotsfunktion. Die Funktion  $\psi_{log}(\cdot, \mu^f)$  ist für  $p = \frac{\mu^f}{R+1}$  unstetig und für  $p > \frac{\mu^f}{R+1}$  monoton fallend. Bis zum Wertpapierpreis in Höhe seines mit  $R+1$  abdiskontierten subjektiven Erwartungswertes bietet der Fond-Manager nicht mehr Wertpapiere als nötig an. Dann springt er für ein kleines Preisintervall auf das maximale Wertpapierangebot von  $\bar{x}$ . Mit weiter steigendem Wertpapierpreis nimmt das Wertpapierangebot – auf Grund der steigenden Kosten – bis es das minimale Angebot von  $\underline{x}$  erreicht, wieder ab. Die Abbildung 4.1 zeigt Wertpapierangebotsfunktionen für die logarithmische, die quadratische und die lineare Kostenfunktion.

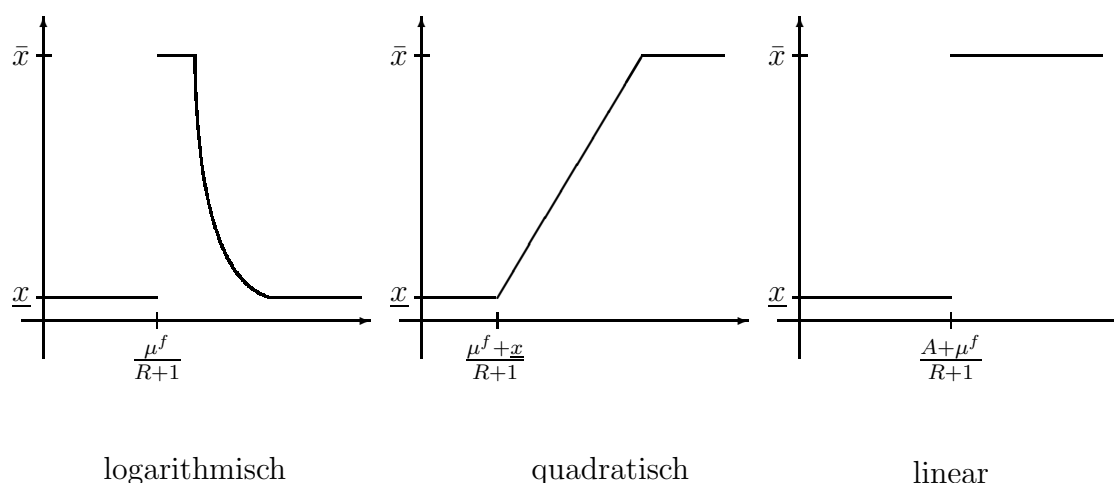


Abbildung 4.1: Wertpapierangebotsfunktionen für die logarithmische, quadratische und lineare Kostenfunktion.

### 4.3.2 Quadratische Kostenfunktionen

Mit der quadratischen Kostenfunktion  $K_{qua} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$  lautet die Wertpapierangebotsfunktion des Fond-Managers

$$\psi_{qua}(p, \mu^f) := \begin{cases} \underline{x} & : p \leq \frac{\mu^f}{R+1} \\ \min \{ \max \{ \underline{x}; (R+1)p - \mu^f \}; \bar{x} \} & : p > \frac{\mu^f}{R+1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \underline{x} & : 0 < p \leq \frac{\underline{x} + \mu^f}{R+1} \\ (R+1)p - \mu^f & : \frac{\underline{x} + \mu^f}{R+1} < p \leq \frac{\bar{x} + \mu^f}{R+1} \\ \bar{x} & : p \geq \frac{\bar{x} + \mu^f}{R+1} \end{cases}.$$

Sie ist stetig und monoton steigend im Wertpapierpreis  $p$  (vergleiche Abbildung 4.1). Dieser Verlauf ist intuitiv, da ein steigender Wertpapierpreis ein steigendes Wertpapierangebot nach sich zieht. Das Wertpapierangebot liegt über dem minimalen Angebot von  $\underline{x}$ , wenn der aktuelle Wertpapierpreis größer als der mit  $R+1$  abdiskontierte subjektive Erwartungswert des Fond-Managers ist. Ist dieser subjektive Erwartungswert sehr hoch, so führen nur sehr hohe aktuelle Wertpapierpreise zu einem Wertpapierangebot, das größer als  $\underline{x}$  ist.

Die quadratische Kostenfunktion ist zweimal stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und streng konvex. Damit erfüllt sie alle Eigenschaften aus Annahme 4.3. Die in Abschnitt 4.2 erzielten Ergebnisse gelten somit insbesondere für die quadratische Kostenfunktion.

### 4.3.3 Lineare Kostenfunktionen

Im Fall linearer Kosten mit  $K_{lin} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto Ax + B$ ,  $A, B > 0$  liefert die Bedingung erster Ordnung des Maximierungsproblems (4.5) für den Wertpapierpreis  $p = \frac{A + \mu^f}{R+1}$  die Indifferenz des Fond-Managers zwischen allen möglichen Mengen anzubietender Wertpapiere zwischen  $\underline{x}$  und  $\bar{x}$ . Dieser Umstand ergibt die unstetige Wertpa-

pierangebotsfunktion (vergleiche Abbildung 4.1)

$$\psi_{lin}(p, \mu^f) := \begin{cases} \underline{x} & : p \leq \frac{A + \mu^f}{R + 1} \\ \bar{x} & : p > \frac{A + \mu^f}{R + 1} \end{cases}. \quad (4.10)$$

Die lineare Kostenfunktion erfüllt lediglich die Bedingungen der strengen Monotonie aus Annahme 4.3.

## 4.4 Der Wertpapierpreis

Der markträumende Wertpapierpreis einer beliebigen Periode bestimmt sich als der höchste Preis, der die Gleichheit von Nachfrage (4.1) und Angebot (4.8) garantiert. Die Definition des Wertpapierpreises in Periode  $t \in \mathbb{N}$  lautet somit

$$p_t := \max \left\{ p \in \mathbb{R}_+ \mid \varphi(p, \nu) = \psi(p, \mu^f) \right\}. \quad (4.11)$$

Definition (4.11) ist analog zu der Wertpapierpreisdefinition für konstantes Wertpapierangebot aus Kapitel 2 (Definition (2.7)) und Kapitel 3 (Definition (3.10)). Das konstante Wertpapierangebot wird durch die Angebotsfunktion des Fond-Managers ersetzt. Der folgende Satz liefert Bedingungen, unter denen ein markträumender Wertpapierpreis existiert.

### Satz 4.6

*Die Annahme<sup>4</sup> 2.1 sei erfüllt und es gelte  $\nu^i(\{q \neq Rp\}) > 0$  für alle  $p \in \mathbb{R}_+$ . Weiter erfülle die Kostenfunktion  $K(\cdot)$  alle in Annahme 4.3 geforderten Eigenschaften. Dann existiert ein markträumender Wertpapierpreis.*

### Beweis von Satz 4.6:

Die Surjektivität der aggregierten Wertpapiernachfrage auf  $\mathbb{R}_+$  (vergleiche Satz 2.4) sowie die Stetigkeit und Monotonie der Wertpapierangebotsfunktion sichern, dass die Menge  $\{p \in \mathbb{R}_+ \mid \varphi(p, \nu) = \psi(p, \mu^f)\}$  nicht leer ist. Das liefert nach Definition (4.11) die Existenz eines Wertpapierpreises.  $\square$

### Korollar 4.7

*Die Annahmen 2.1 und 4.3 seien erfüllt. Weiter gelte  $\nu^i(\{q \neq Rp\}) > 0$  für alle  $p \in \mathbb{R}_+$ .*

<sup>4</sup> $u^i$  ist für alle  $i \in \mathcal{I}$  zweimal stetig differenzierbar, streng monoton wachsend, streng konkav und beschränkt. Das subjektive Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu^i$ ,  $i \in \mathcal{I}$  ist ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}_+$  (siehe Seite 16).



Ist die aggregierte Wertpapiernachfragefunktion streng monoton fallend, so besteht die Menge  $\{p \in \mathbb{R}_+ | \varphi(p, \nu) = \psi(p, \mu^f)\}$  aus genau einem Element.

Unter den Bedingungen aus Korollar 4.7 ist die Menge in Definition (4.11) einelementig. In diesem Fall ist der markträumende Wertpapierpreis durch die Nullstelle der Funktion

$$\zeta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto \phi(p, \nu) - \psi(p, \mu^f),$$

gegeben. Es gilt  $p_t = \zeta^{-1}(0)$ .

Nach Gleichung (4.11) ist der Wertpapierpreis eine Funktion sämtlicher subjektiver Wahrscheinlichkeitsmaße und des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers. Diese ist für stetige Angebotsfunktionen und unter den Bedingungen von Satz 2.4 wohldefiniert und lässt sich wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} S : (\mathbb{P}(\mathbb{R}))^n \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\nu, \mu^f) &\longmapsto S(\nu, \mu^f) = \max \{p \in \mathbb{R}_+ | \varphi(p, \nu) = \psi(p, \mu^f)\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Definiere  $\nu_t$  als den Vektor aller subjektiver Wahrscheinlichkeitsmaße der Konsumenten zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$ . Weiter bezeichne  $\mu^{f,t}$  den subjektiven Erwartungswert des Fond-Managers zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{N}$ . Dann ist – analog zu den Ausführungen in Abschnitt 2.3 – der ex dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  durch  $q_t = S(\nu_t, \mu^{f,t})$  determiniert. Der cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  lautet  $q_t = S(\nu_t, \mu^{f,t}) + d_t$ . Dabei bezeichnet  $d_t$  die Dividendenzahlung in Periode  $t$ . Der ex und der cum dividend Wertpapierpreis sind nach Böhm & Wenzelburger (1999, 2002) ökonomische Gesetze. Diese beschreiben die Entwicklung der Zustände einer Ökonomie unter Berücksichtigung der Interaktionen von Erwartungen und Dividendenzahlungen. Wie in Abschnitt 2.3 ist der Wertpapierpreis eine deterministische Funktion individueller Merkmale. Insbesondere spielen die subjektiven Erwartungen sowohl der Konsumenten als auch des Fond-Managers eine bedeutende Rolle. Der cum dividend Wertpapierpreis ist nur dann stochastisch, wenn die Dividendenzahlungen stochastisch sind. Durch eine Spezifikation des Dividendenprozesses ist die Entwicklung des Wertpapierpreises vollständig durch die in (4.12) definierte Funktion determiniert. Für feste und beliebige subjektive Wahrscheinlichkeitsmaße  $\nu_t$  und einen festen subjektiven Erwartungswert  $\mu^{f,t}$  ist der Prozess des cum dividend Wertpapierpreises unter der Annahme<sup>5</sup> 2.10

$$S(\nu_t, \mu^{f,t}) + D_t(\cdot) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{N},$$

<sup>5</sup>Die Dividendenzahlungen werden durch einen stationären Markov-Prozess beschrieben (siehe Seite 24).

ein stationärer Markov-Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Die Konsumenten und der Fond-Manager bilden in einer beliebigen Periode  $t$  ihre Erwartungen über den Wertpapierpreis bzw. die Wertpapierrendite in Periode  $t+1$ , bevor der aktuelle Wertpapierpreis in Periode  $t$  realisiert wird. Daher basieren die Erwartungen der Konsumenten und des Fond-Managers lediglich auf den Informationen, die zum Zeitpunkt  $t-1$  erhältlich sind. Erwartungswert und Varianz des cum dividend Wertpapierpreises in Periode  $t$  lauten

$$\mathbb{E}_{t-1}(q_t) = S(\nu_t, \mu^{f,t}) + \mathbb{E}_{t-1}(D_t) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}_{t-1}(q_t) = \mathbb{V}_{t-1}(D_t).$$

Sowohl die subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße der Konsumenten als auch der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers beeinflussen den Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises. Die Varianz hingegen ist unabhängig von subjektiven Größen und ausschließlich durch die Varianz des Dividendenprozesses bestimmt. Benutzen alle Generationen das gleiche Wahrscheinlichkeitsmaß zur Bestimmung subjektiver Preiserwartungen, d. h.  $\nu_t = \nu_{t+1}$  für alle  $t \in \mathbb{N}$ , und verändert auch der Fond-Manager seine subjektiven Einschätzungen nicht, so ist der cum dividend Wertpapierpreisprozess lediglich eine Verschiebung des Dividendenprozesses um  $S(\nu_t, \mu^{f,t})$ .

Die hier vorgenommene Erweiterung des Basismodells um einen Fond-Manager, der aktiv über das Wertpapierangebot entscheidet, verändert nicht die *Cobweb*-Eigenschaft der Wertpapierpreisfunktion<sup>6</sup>. Es ist eine Funktion auf dem Kreuzprodukt der subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße der Konsumenten und dem  $\mathbb{R}_+$ . Somit hängt die Determinierung des Wertpapierpreises nur von den Erwartungen über den Wertpapierpreis (Wertpapierrendite) und nicht vom Wertpapierpreis selbst ab. Weiter hat die Wertpapierpreisfunktion einen *expectational lead*<sup>7</sup>, d. h. in einer beliebigen Periode  $t$  werden mithilfe der Maße  $\nu_t$  Erwartungen für Preise in Periode  $t+1$  gebildet. Der Fond-Manager hat ebenfalls in Periode  $t$  subjektive Erwartungen für den Wertpapierpreis der nächsten Periode.

Da der cum dividend Wertpapierpreis durch die Summe aus einer deterministischen und einer stochastischen Komponente beschrieben wird, gehen sämtliche Eigenschaften des Dividendenprozesses auf den Wertpapierpreisprozess über.

---

<sup>6</sup>Siehe auch die Erläuterungen auf Seite 24ff.

<sup>7</sup>Diese Bezeichnung ist der Arbeit von Böhm & Wenzelburger (1997) entnommen.

## 4.5 Das Handelsvolumen

Durch die Einführung eines Fond-Managers, der in jeder Periode neu über die Höhe des Wertpapierangebots entscheidet, bleibt die Anzahl gehandelter Wertpapiere nicht länger exogen und konstant. Das Handelsvolumen – die Anzahl der in einer beliebigen Periode gehandelten Wertpapiere – ist eine endogene Größe, die u.a. von den individuellen Merkmalen der Konsumenten und des Fond-Managers determiniert wird.

### Definition 4.8

$t \in \mathbb{N}$ ,  $\nu^t$  und  $\mu^{f,t}$  seien beliebig, aber fest. Das *Handelsvolumen* bezeichnet die Anzahl der zum Gleichgewichtspreis  $S(\nu^t, \mu^{f,t})$  gehandelten risikobehafteten Wertpapiere. Es wird durch die Funktion

$$vol : (\mathbb{P}(\mathbb{R}))^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (\nu_t, \mu^{f,t}) \longmapsto \psi(S(\nu_t, \mu^{f,t}), \mu^{f,t}) \quad (4.13)$$

bestimmt.

Mit Gleichung (4.8),  $p_- := \frac{\underline{x} + \mu^f}{R+1}$  und  $p_+ := \frac{\bar{x} + \mu^f}{R+1}$  gilt für das Handelsvolumen (4.13)

$$vol(\nu_t, \mu^{f,t}) = \begin{cases} \underline{x} & : 0 < S(\nu_t, \mu^{f,t}) \leq p_- \\ (K')^{-1}((R+1)S(\nu_t, \mu^{f,t}) - \mu^f) & : p_- < S(\nu_t, \mu^{f,t}) \leq p_+ \\ \bar{x} & : S(\nu_t, \mu^{f,t}) > p_+ \end{cases} \quad (4.14)$$

Diese Schreibweise verdeutlicht, dass das Handelsvolumen einer beliebigen Periode deterministisch ist. Es hängt insbesondere von den subjektiven Erwartungen der Konsumenten und des Fond-Managers in der betrachteten Periode ab. Gilt  $\nu := \nu_t$  und  $\mu^f := \mu^{f,t}$  für alle  $t \in \mathbb{N}$ , so ist das Handelsvolumen unabhängig von der jeweils betrachteten Periode. Weiter ist der ex dividend Wertpapierpreis für das Handelsvolumen (4.14) von Bedeutung. Die Dividendenzahlungen haben jedoch keinerlei Einfluss auf die Anzahl gehandelter Wertpapiere. Die Bedingung der Markträumung liefert

$$vol(\nu_t, \mu^{f,t}) = \varphi(S(\nu_t, \mu^f), \nu_t).$$

Das (gleichgewichtige) Handelsvolumen entspricht somit der aggregierten Wertpapiernachfrage zum markträumenden Wertpapierpreis  $S(\nu_t, \mu^f)$ .

## 4.6 Das Vermögen des Fond-Managers

Durch die Annahme über die Zeit unveränderlicher Konsumentencharakteristiken und eines konstanten subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers sind der markt-räumende Wertpapierpreis und das Handelsvolumen ebenfalls Größen, die perioden-unabhängig sind und über die Zeit konstant bleiben. Für das Vermögen des Fond-Managers<sup>8</sup> gilt das jedoch nicht. Definiere  $w_0(p) := \omega \geq 0$  für alle  $p > 0$ . Weiter wird der markträumende Wertpapierpreis in Periode  $t$  für  $t \in \mathbb{N}$  mit  $p_t$  bezeichnet. Das Handelsvolumen in der Periode  $t$  wird durch  $x_t$  beschrieben. Zusätzlich gelte  $p_0 := 0$  und  $x_0 := 0$ . Nach Definition des Vermögens (4.3) gilt unter Annahme 4.3

$$\begin{aligned}
w_1(p) &= R w_0(p) - K(x_0) + [(R+1)p_0 - p] x_0 = R\omega, \\
w_2(p) &= R^2 \omega - K(x_1) + [(R+1)p_1 - p] x_1, \\
w_3(p) &= R^3 \omega - R K(x_1) + R [(R+1)p_1 - p] x_1 - K(x_2) + [(R+1)p_2 - p] x_2, \\
&\vdots \\
w_t(p) &= R^t \omega - R^{t-2} K(x_1) + R^{t-2} [(R+1)p_1 - p] x_1 \\
&\quad - R^{t-3} K(x_2) + R^{t-3} [(R+1)p_2 - p] x_2 \\
&\quad - \dots - K(x_{t-1}) + [(R+1)p_{t-1} - p] x_{t-1} \\
&= R^t \omega + \sum_{i=2}^t R^{t-i} [-K(x_{i-1}) + [(R+1)p_{i-1} - p] x_{i-1}]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Gleichung (4.15) beschreibt das Vermögen des Fond-Managers in Periode  $t$  als Funktion des Wertpapierpreises  $p$ . Diese ist monoton fallend. Der „Vermögenszuwachs“ in Periode  $t$  ist positiv, wenn die Kosten  $K(x_{t-1})$  in Periode  $t-1$  für die Wertpapierausschüttung kleiner als der Ertrag aus dem Wertpapierverkauf  $[(R+1)p_{t-1} - p] x_{t-1}$  sind. Ist dieser Ertrag kleiner als Null, d. h. der heutige Wertpapierpreis ist größer als  $(R+1)p_{t-1}$ , so ist der Vermögenszuwachs für jede beliebige Kostenfunktion, die den Bedingungen aus Annahme 4.3 genügt, negativ.

Bleiben die subjektiven Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers über die Zeit konstant, so lässt sich die Schreibweise des Vermögens mithilfe der Summenformel für die geometrische Reihe weiter vereinfachen. Es gilt

$$\begin{aligned}
w_t(S(\nu, \mu^f)) &= R^t \omega + [RS(\nu, \mu^f) \text{vol}(\nu, \mu^f) - K(\text{vol}(\nu, \mu^f))] \\
&\quad \cdot (1 + R + R^2 + R^3 + \dots + R^t) \\
&= R^t \omega + [RS(\nu, \mu^f) \text{vol}(\nu, \mu^f) - K(\text{vol}(\nu, \mu^f))] \frac{R^{t+1} - 1}{R - 1}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Vergleiche Definition 4.3 auf Seite 87.

Für konstante Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers ist das Vermögen in allen Perioden entweder stets positiv oder negativ. Es gibt für den Fond-Manager keine Möglichkeit ein negatives Vermögen zu konsolidieren. Für  $\omega \geq 0$  und  $K(\text{vol}(\nu, \mu^f)) < R \cdot S(\nu, \mu^f) \text{vol}(\nu, \mu^f)$  ist das Vermögen des Fond-Managers im Zeitverlauf stets positiv, streng monoton wachsend und unbeschränkt. Das Vermögen des Fond-Managers kann aber auch Null sein. Dies ist für  $\omega = 0$  genau dann erfüllt, wenn der Wertpapierpreis gerade den mit  $R$  abdiskontierten „Stückkosten des Handelsvolumens“ entspricht, d. h. es gilt

$$S(\nu, \mu^f) = \frac{1}{R} \cdot \frac{K(\text{vol}(\nu, \mu^f))}{\text{vol}(\nu, \mu^f)}.$$

## 4.7 Erwartungstreue Prognosen

Wie in Abschnitt 2.4 dargelegt, ist die tatsächliche Verteilung des cum dividend Wertpapierpreises im Allgemeinen nicht identisch mit der, die die Konsumenten zur Bildung ihrer subjektiven Erwartungen benutzen. Die Erweiterung des Modells aus Kapitel 2 um einen Fond-Manager macht die Anpassung der Definition 2.11 der erwartungstreuen Markov-Kerne nötig. Dazu definiere  $\Psi|\mathcal{D} \implies \mathbb{R}_+$  den Markov-Kern, den die Konsumenten zur Bestimmung ihrer Prognosen zukünftiger cum dividend Wertpapierpreise benutzen. Dann ist  $\nu_t^i = \psi_{d_t}$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  die subjektive Verteilung für den zukünftigen cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t + 1$ .

### Definition 4.9

Der subjektive Erwartungswert  $\mu^f > 0$  sei beliebig, aber fest. Weiter sei die Funktion  $S$  aus Gleichung (4.12) gegeben. Dann heißt ein Markov-Kern  $\Psi|\mathcal{D} \implies \mathbb{R}_+$   $\mu^f$ -erwartungstreu, falls für alle  $d_t \in \mathcal{D}$  und  $t \in \mathbb{N}$

$$S(\psi_{d_t}, \mu^f) + \mathbb{E}_t(D_{t+1}) = \int_{\mathbb{R}_+} q\Psi(d_t, dq) \quad (4.17)$$

*gilt.*

Nach Definition 4.9 erzeugen  $\mu^f$ -erwartungstreue Markov-Kerne gerade solche subjektiven Erwartungswerte, die mit den objektiven Erwartungswertes entlang aller Orbits des Preisprozesses übereinstimmen. Diese Überlegungen setzen einen beliebigen, aber festen Erwartungswert des Fond-Managers über den ex dividend Wertpapierpreis der nächsten Periode voraus. Dieser subjektive Erwartungswert des Fond-Managers wird im Allgemeinen nicht mit dem objektiven des Wertpapierpreises übereinstimmen.

**Definition 4.10**

Die Funktion  $S$  aus Gleichung (4.12) sei gegeben. Dann heißt ein Markov-Kern  $\Psi|\mathcal{D} \implies \mathbb{R}_+$  erwartungstreu, falls für alle  $d_t \in \mathcal{D}$  und  $t \in \mathbb{N}$  die Gleichungen

$$S(\Psi_{d_t}, \mu^f) + \mathbb{E}_t(D_{t+1}) = \int_{\mathbb{R}_+} q \Psi(d_t, dq) \quad \text{und} \quad S(\Psi_{d_t}, \mu^f) = \mu^f \quad (4.18)$$

erfüllt sind.

Definition 4.10 fordert die Rationalität der Erwartungen der Konsumenten und der des Fond-Managers. Die Benutzung des erwartungstreuen Markov-Kerns liefert entlang aller Orbits des Systems rationale Erwartungen.

## 4.8 Identische Konsumenten

Dieser Abschnitt widmet sich der Analyse einer speziellen Klasse von Nutzen- und Kostenfunktionen. Die Ökonomie besteht aus  $N > 0$  identischen Konsumenten mit Mittelwert-Varianz-Präferenzen und einem Fond-Manager, der eine quadratische Kostenfunktion besitzt. Die Homogenität der Konsumenten impliziert die vollständige Marktteilnahme, falls ein markträumender Wertpapierpreis existiert. Somit handeln entweder alle Konsumenten oder niemand auf dem Wertpapiermarkt. Das Handelsvolumen wird durch die Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers bestimmt.

### 4.8.1 Der Wertpapierpreis

In Anlehnung an die Schreibweise aus Kapitel 3 sei der subjektive Erwartungswert aller  $N$  Konsumenten mit  $\mu > 0$  und die subjektive Varianz mit  $\sigma^2 > 0$  gegeben. Die Erstaustattung wird mit  $e > 0$  und der Koeffizient der absoluten Risikoaversion mit  $\alpha > 0$  bezeichnet. Dann determiniert

$$\tilde{\varphi}(p, \alpha, \mu, \sigma^2) := N \cdot \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\mu - Rp}{\alpha \sigma^2}, \frac{e}{p} \right\} \right\}. \quad (4.19)$$

die aggregierte Wertpapiernachfrage  $\tilde{\varphi}(\cdot, \alpha, \mu, \sigma^2) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ . Diese Definition erfolgt analog zu Gleichung (3.4). Unter Annahme 3.1 über die Höhe des Vermögens gilt für die Wertpapiernachfrage aus Gleichung (4.19)

$$\tilde{\varphi}(p, \alpha, \mu, \sigma^2) = \begin{cases} N \cdot \frac{\mu - Rp}{\alpha \sigma^2} & : 0 < p < \frac{\mu}{R} \\ 0 & : p \geq \frac{\mu}{R} \end{cases}.$$

Die Kostenfunktion des Fond-Managers  $K : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  sei quadratisch und durch  $K(x) := \frac{1}{2}x^2$  definiert. Diese Funktion erfüllt alle Bedingungen aus Annahme 4.3. Dann liefert das Maximierungsproblem (4.5) die Angebotsfunktion<sup>9</sup>

$$\psi(p, \mu^f) = \begin{cases} \underline{x} & : 0 < p \leq \frac{\underline{x} + \mu^f}{R+1} \\ (R+1)p - \mu^f & : \frac{\underline{x} + \mu^f}{R+1} < p \leq \frac{\bar{x} + \mu^f}{R+1} \\ \bar{x} & : p \geq \frac{\bar{x} + \mu^f}{R+1} \end{cases} . \quad (4.20)$$

Mit  $p_- := \frac{\underline{x} + \mu^f}{R+1}$  und  $p_+ := \frac{\bar{x} + \mu^f}{R+1}$  ist diese Funktion auf dem Intervall  $]p_-, p_+]$  streng monoton steigend im Wertpapierpreis  $p$ . Für sehr hohe Wertpapierpreise bietet der Fond-Manager die Höchstzahl vorhandener Wertpapiere an. Sehr kleine Preise korrespondieren zum Mindestangebot an Wertpapieren. Ein steigender subjektiver Erwartungswert des Fond-Managers verringert sein Angebot. Steigt die risikolose Rendite, so erhöht sich auch sein Wertpapierangebot.

Für festes  $\alpha$ ,  $\mu$  und  $\sigma^2$  bezeichne  $\bar{\varphi}(p) := \varphi(p, \alpha, \mu, \sigma^2)$  die Wertpapiernachfrage. Dann definiert

$$\bar{S}(\mu^f) := \tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \begin{cases} \frac{1}{R} \left( \mu - \frac{\alpha\sigma^2}{N} \underline{x} \right) & : \bar{\varphi}(p_-) \leq \underline{x} \\ \frac{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + NR} & : \bar{\varphi}(p_-) > \underline{x} \wedge \bar{\varphi}(p_+) < \bar{x} \\ \frac{1}{R} \left( \mu - \frac{\alpha\sigma^2}{N} \bar{x} \right) & : \bar{\varphi}(p_+) \geq \bar{x} \end{cases} . \quad (4.21)$$

den markträumenden Wertpapierpreis. Dieser stimmt für  $\bar{\varphi}(p_-) \leq \underline{x}$  bzw. für  $\bar{\varphi}(p_+) \geq \bar{x}$  qualitativ mit dem aus Gleichung (3.17) in Abschnitt 3.2.2. Der markträumende Wertpapierpreis ist nur dann eine „innere“ Lösung, d. h. das Wertpapierangebot des Fond-Manager und die Wertpapiernachfrage der Konsumenten sind keine Randlösungen der betreffenden Maximierungsprobleme, wenn

$$\varphi(p_-, \alpha, \mu, \sigma^2) > \underline{x} \quad \text{und} \quad \varphi(p_+, \alpha, \mu, \sigma^2) < \bar{x} \quad (4.22)$$

gilt. Auf Grund dieser Ungleichungen ist der markträumende Wertpapierpreis aus Gleichung

<sup>9</sup>Die allgemeine Lösung des Maximierungsproblem ist in Gleichung (4.8) auf Seite 92 beschrieben.

chung (4.21) zu

$$\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \begin{cases} \frac{1}{R} \left( \mu - \frac{\alpha \sigma^2}{N} \underline{x} \right) & : \underline{x} \geq x^* \\ \frac{N\mu + \alpha \sigma^2 \mu^f}{\alpha \sigma^2 (R+1) + RN} & : \underline{x} < x^* < \bar{x} \\ \frac{1}{R} \left( \mu - \frac{\alpha \sigma^2}{N} \bar{x} \right) & : x^* \geq \bar{x} \end{cases} \quad (4.23)$$

äquivalent, wobei die Definition

$$x^* := N \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{(R+1)\alpha \sigma^2 + RN}. \quad (4.24)$$

gilt. Für  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  wird sich zeigen, dass die Höhe des (markträumenden) Handelsvolumens mit  $x^*$  übereinstimmt. In Tabelle 4.1 sind die komparativ-statischen Ergebnisse des markträumenden Wertpapierpreises zusammengefasst.

Fall	$\partial$	$\alpha$	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu^f$	$R$	$N$	$\underline{x}$	$\bar{x}$
$\underline{x} \geq x^*$	$\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	-	+	-	0	-	+	-	0
$x^* \geq \bar{x}$	$\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	-	+	-	0	-	+	0	-
$\bar{x} < x^* \leq \underline{x}$	$\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	-	+	-	+	-	+	0	0

Tabelle 4.1: Komparative Statik des markträumenden Wertpapierpreises.

Es zeigt sich, dass größerer Optimismus des Konsumenten ebenso wie höhere Preiserwartungen des Fond-Managers zu höheren Wertpapierpreisen führen. Steigende Risikoaversion bzw. steigende subjektive Varianzen senken den Wertpapierpreis. Dieses Ergebnis ist identisch mit dem im Fall eines konstanten Wertpapierangebots<sup>10</sup>. Der Einfluss der risikolosen Rendite ist negativ. Ein Anwachsen der Population führt in allen drei Fällen zu einem höheren Wertpapierpreis. Mit wachsender Population nimmt der Einfluss der Konsumenten auf den Wertpapierpreis über ihre Risikoaversion und ihre subjektiven Varianzen ab. Der subjektive Erwartungswert gewinnt jedoch an Bedeutung. Der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers wird mit zunehmender Population immer unbedeutender. Wegen<sup>11</sup>

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \frac{\mu}{R} \quad \text{für alle } \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f \text{ und } \underline{x} < \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{R} < \bar{x}$$

<sup>10</sup>Vergleiche Abschnitt 3.2.2.

<sup>11</sup>Ist die Ungleichung  $\underline{x} < \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{R} < \bar{x}$  verletzt, so existiert ein  $N' > 0$  für das die Ungleichung  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  nicht mehr erfüllt ist. Der Grenzwert des Wertpapierpreises für  $\underline{x} \geq x^*$  bzw.  $x^* \geq \bar{x}$  ist



determinieren ausschließlich der subjektive Erwartungswert der Konsumenten und die risikolose Rendite den Grenzwert des Wertpapierpreises für eine beliebig große Population identischer Konsumenten. Der Wertpapierpreis bleibt nach oben beschränkt. Der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers spielt jedoch keine Rolle. Je optimistischer die Konsumenten sind, desto mehr kostet ein Wertpapier. Dabei ist es unbedeutend, wie hoch die Risikoaversion oder die subjektive Varianz ist. Je mehr Konsumenten auf den Markt strömen, desto geringer wird der Einfluss der Konsumenten über die Risikoaversion und die subjektive Varianz auf den markträumenden Wertpapierpreis.

Abbildung 4.2 zeigt eine mögliche aggregierte Wertpapiernachfrage- und eine Wertpapierangebotsfunktion. Dabei bezeichnen  $\hat{p}$  den markträumenden Wertpapierpreis und  $\hat{x}$  das zu diesem Preis korrespondierende Wertpapierangebot. Die Ungleichungen (4.22) sind hier erfüllt.

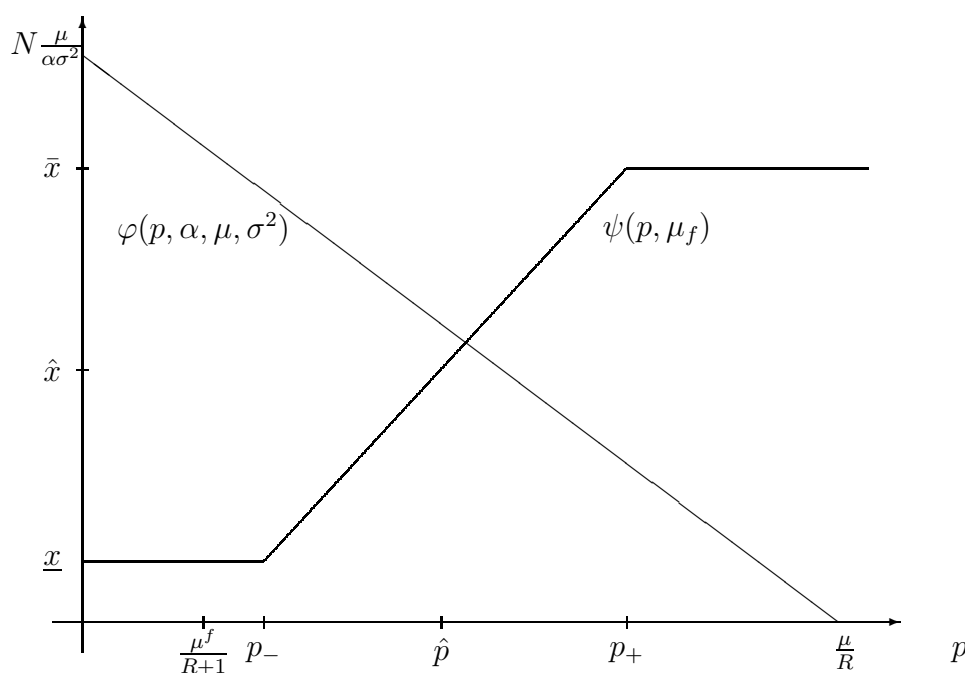


Abbildung 4.2: Aggregierte Wertpapiernachfrage und Wertpapierangebot.

Die Wertpapiernachfrage ist Null, wenn der Wertpapierpreis größer als  $\frac{\mu}{R}$  ist. Für Wertpapierpreise mit  $p < \frac{\mu^f}{R+1}$  entspricht das Wertpapierangebot lediglich dem Minimalan-

offensichtlich. Für  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu + \frac{\alpha \sigma^2 \mu^f}{N}}{\frac{\alpha \sigma^2 (R+1)}{N} + R} = \frac{\mu}{R}.$$

gebot von  $\underline{x}$ , denn in diesem Fall verkauft der Fond-Manager die Wertpapiere zu einem geringeren Preis als denjenigen, den er für die nächste Periode erwartet. Träfen seine Erwartungen ein, so machte er Verluste. Erst für Preise, die größer als  $\frac{\mu^f}{R+1}$  sind, verkauft der Fond-Manager seine Wertpapiere teurer als er sie in der folgenden Periode zu kaufen erwartet. Allerdings muss er zusätzlich die Kosten für den Verkauf tragen. Erst für Preise, die größer als  $p_-$  sind, ist der erwartete Ertrag des Wertpapierverkaufs positiv. Die folgende Annahme schließt die Existenz von Wertpapierpreisen aus, zu denen die Konsumenten nichts mehr nachfragen und der Fond-Manager „glaubt“, dass der morgige Wertpapierpreis höher als der aktuelle ist.

**Annahme 4.11**

Für die subjektiven Erwartungswerte der Konsumenten und des Fond-Managers gelte

$$\frac{\mu}{R} > \frac{\mu^f}{R+1}.$$

Die Annahme 4.11 ist in Abbildung 4.2 erfüllt. Außerdem gilt unter Annahme 4.11 stets  $x^* > 0$ . Das folgende Resultat zeigt, unter welchen Bedingungen der markträumende Wertpapierpreis immer größer als der abdiskontierte subjektive Erwartungswert des Fond-Managers ist.

**Lemma 4.12**

Seien  $\mu$ ,  $\mu^f$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma^2$ ,  $\underline{x}$  und  $\bar{x}$  beliebig, aber fest. Weiter sei die Ungleichung

$$\underline{x} < N \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{(R+1)\alpha\sigma^2 + NR} < \bar{x} \quad (4.25)$$

erfüllt. Dann gilt unter Annahme 4.11

$$\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) > \frac{\mu^f}{R+1}.$$

**Beweis von Lemma 4.12:**

Ist die Ungleichung (4.25) erfüllt, so ist der markträumende Wertpapierpreis durch

$$\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \frac{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + NR}$$

gegeben. Zu zeigen ist nun

$$\frac{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + NR} > \frac{\mu^f}{R+1}.$$

Diese Ungleichung ist jedoch äquivalent zu der Ungleichung

$$\frac{\mu}{R} > \frac{\mu^f}{R+1}.$$

Das ist aber die Bedingung aus Annahme 4.11. □

Der Wert aus Lemma 4.12, der größer als  $\underline{x}$  und kleiner als  $\bar{x}$  sein muss, stimmt mit dem in Gleichung (4.24) definiertem  $x^*$  überein.

### 4.8.2 Das Handelsvolumen

Das Handelsvolumen ist laut Definition 4.8 für identische Mittelwert–Varianz–Präferenzen und einer quadratische Kostenfunktion des Fond–Managers durch

$$\begin{aligned}
 vol(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) &= \psi \left( \tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f), \mu^f \right) \\
 &= \begin{cases} \underline{x} & : \underline{x} \geq x^* \\ N \cdot \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + NR} & : \underline{x} < x^* \leq \bar{x} \\ \bar{x} & : x^* > \bar{x} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \underline{x} & : \underline{x} \geq x^* \\ x^* & : \underline{x} < x^* \leq \bar{x} \\ \bar{x} & : x^* > \bar{x} \end{cases} \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

definiert<sup>12</sup>. In Tabelle 4.2 sind die komparativ–statischen Ergebnisse des Handelsvolumens für den Fall  $\underline{x} < x^* \leq \bar{x}$  zusammengefasst.

$\partial$		$\alpha$	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu^f$	$R$	$N$
$vol(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$		–	+	–	–	–	+

Tabelle 4.2: Komparative Statik des Handelsvolumens.

Es zeigt sich, dass das Handelsvolumen mit steigender Risikoaversion und steigender subjektiver Varianz der Konsumenten sinkt. Optimismus (gemessen in subjektiven Erwartungswerten der Konsumenten) erhöht das Handelsvolumen. Der subjektive Erwartungswert des Fond–Managers geht negativ in das Handelsvolumen ein. Ein höherer Wert des subjektiven Erwartungswertes ist gleichbedeutend mit einer pessimistischeren Einschätzung des Fond–Managers in Bezug auf seine „Ertragsaussichten“ in der kommenden Periode. Je „schwärzer“ er diese Aussichten einschätzt, desto geringer wird sein

<sup>12</sup>Für die Definition von  $x^*$  siehe auch Gleichung (4.24) auf Seite 103.

Wertpapierangebot und letztlich das Handelsvolumen ausfallen. Ein Anstieg der risikolosen Rendite führt zu einer erhöhten Investition in die risikolose Anlage und senkt damit das Handelsvolumen der risikobehafteten Wertpapiere. Mit wachsender Population nimmt das Handelsvolumen zu. Dieses Resultat trägt der Intuition Rechnung, dass viele identische Konsumenten mehr Wertpapiere als wenige identische Konsumenten nachfragen. Im Fall unterschiedlicher Konsumenten wird das im Allgemeinen nicht stimmen<sup>13</sup>. Wird die Population beliebig groß, verschwindet der Einfluss der Konsumenten durch ihre Risikoaversion und ihre subjektiven Varianzen auf das Handelsvolumen. Das Handelsvolumen bestimmt sich dann im wesentlichen aus der Differenz der subjektiven Erwartungswerte von Konsumenten und Fond-Manager.

**Lemma 4.13**

*Annahme 4.11 sei erfüllt. Weiter gelte*

$$\underline{x} < \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{R} < \bar{x}. \quad (4.27)$$

*Dann gilt für das Handelsvolumen*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} vol(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \frac{R+1}{R}\mu - \mu^f \quad \text{für alle } \alpha, \mu, \sigma^2 \text{ und } \mu^f.$$

**Beweis von Lemma 4.13:**

Es gilt unter Bedingung (4.27) für alle  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\sigma^2$  und  $\mu^f$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} vol(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N [(R+1)\mu - R\mu^f]}{N \left[ \frac{\alpha\sigma^2}{N}(R+1) + R \right]} \\ &= \frac{(R+1)\mu - R\mu^f}{R}. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Der Einfluss der Risikoaversion und der subjektiven Varianz nimmt – wie Lemma 4.13 zeigt – mit Anwachsen der Population ab und wird unbedeutend. Ein ähnliches Ergebnis gilt auch für den markträumenden Wertpapierpreis. Das Ergebnis aus Gleichung (4.25) bestätigt, dass sowohl die Risikoaversion als auch die subjektive Varianz ihre Bedeutung für den Wertpapierpreis mit Anwachsen der Ökonomie verlieren.

Die Abbildung 4.3 enthält sowohl die Konturlinien des Wertpapierpreises als auch die des Handelsvolumens. Dabei wird die Risikoaversion und die subjektive Varianz der Konsumenten auf Eins gesetzt, d. h. es gilt  $\alpha = \sigma^2 = 1$ . Weiter gilt für die risikolose

<sup>13</sup>Vergleiche die Ergebnisse aus Abschnitt 4.9, in dem  $N$  Konsumenten mit verschiedenen Mittelwert-Varianz-Präferenzen vorgestellt wird.

Rendite  $R = 1.02$  und für die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie  $N = 1$ . Die von links oben nach rechts unten verlaufenden Konturlinien korrespondieren zum Wertpapierpreis und die von links unten nach rechts oben verlaufenden zum Handelsvolumen. Beide Typen von Konturlinien werden in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes der Konsumenten und des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers dargestellt. Ihr Verlauf bestätigt die komparativ-statischen Ergebnisse aus Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2. Sowohl der Wertpapierpreis als auch das Handelsvolumen steigen mit zunehmendem Optimismus der Konsumenten. Sinkender Optimismus des Fond-Managers hingegen führt zu einem höheren Wertpapierpreis, aber gleichzeitig sinkt das Handelsvolumen.

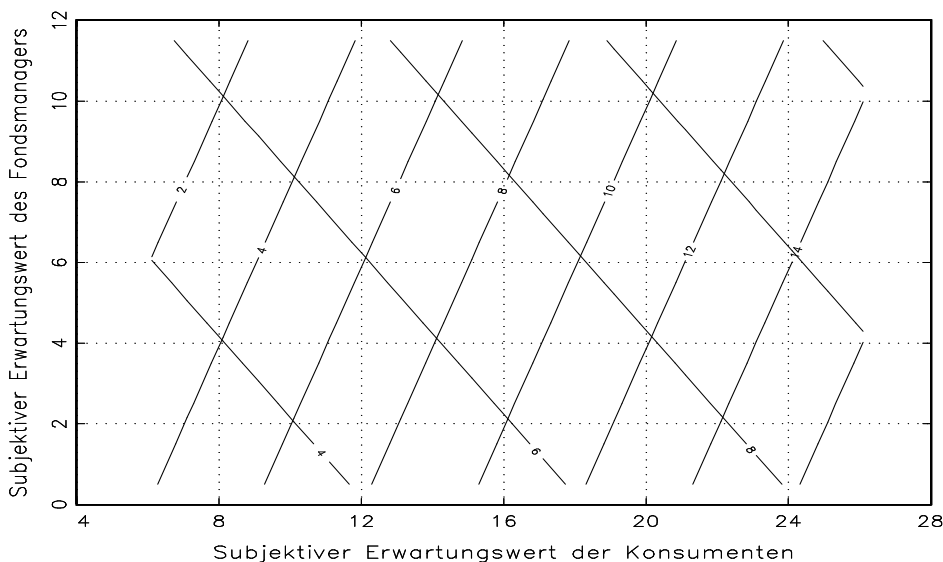


Abbildung 4.3: Konturlinien des Wertpapierpreises und des Handelsvolumens für eine Ökonomie mit einem Konsumenten.

Sei  $\overline{vol} > \underline{x}$  ein beliebiges, aber festes Handelsvolumen. Dann bezeichnet die Funktion

$$\mu^f(\mu) := \frac{R+1}{R}\mu - \overline{vol} \left[ \frac{R+1}{R} \frac{\alpha\sigma^2}{N} - 1 \right]$$

die Konturlinie zum Niveau  $\overline{vol}$ . Ihre Steigung beträgt  $\frac{R+1}{R}$  und ist somit ausschließlich durch die risikolose Rendite bestimmt. Insbesondere ist die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie für die Steigung der Konturlinien unbedeutend. Dieses Resultat verdeutlicht sich in dem Vergleich der Abbildung 4.3 mit Abbildung 6.2, 6.3, 6.4 und 6.5 im Anhang. Es zeigt sich, dass sich die Anzahl der gehandelten Wertpapiere erhöht, wenn die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie wächst. Die Steigung der Konturlinien

hingegen bleibt unverändert. Anders ist das für die Konturlinien des Wertpapierpreises. Die Funktion  $\mu^f(\mu)$  besitzt – für festes Preisniveau – die Steigung  $-\frac{N}{\alpha\sigma^2}$ . Diese hängt maßgeblich von der Populationsgröße ab und wird (betragsmäßig) für unendlich große Populationen unendlich groß. Das wird auch in den Abbildungen 6.2 – 6.5 deutlich. Bereits für  $N = 50$  ist der Betrag der negativen Steigung der Konturlinien des Wertpapierpreises sehr groß, und die Konturlinien sind nahezu senkrecht. Mit wachsender Population wird der Einfluss des Fond-Managers auf den Wertpapierpreis immer unbedeutender, und es spielt fast keine Rolle, welchen subjektiven Erwartungswert er besitzt.

### 4.8.3 Das Vermögen des Fond-Managers

Das Vermögen des Fond-Managers in einer beliebigen, aber festen Periode  $t \in \mathbb{N}$  berechnet sich nach Gleichung (4.15) als

$$\omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = R^t \omega + \frac{R^{t-1} - 1}{R - 1} \begin{cases} \underline{x} \left[ \mu - \underline{x} \left( \frac{\alpha\sigma^2}{N} + \frac{1}{2} \right) \right] & : \underline{x} \geq x^* \\ W(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) & : \underline{x} < x^* < \bar{x} \quad , \quad (4.28) \\ \bar{x} \left[ \mu - \bar{x} \left( \frac{\alpha\sigma^2}{N} + \frac{1}{2} \right) \right] & : x^* \geq \bar{x} \end{cases}$$

wobei die Definition

$$W(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) := \frac{N(\mu(R+1) - R\mu^f)}{2(\alpha\sigma^2(R+1) + NR)^2} \cdot [N(\mu(R-1) + R\mu^f) + 2R\alpha\sigma^2\mu^f]$$

benutzt wird. Für  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  und unter Annahme 4.11 ist das Vermögen in jeder Periode  $t$  positiv. Wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \infty$  wird für einen unendlichen Zeit-horizont das Vermögen des Fond-Managers beliebig groß. Für  $\underline{x} \geq x^*$  und  $x^* \geq \bar{x}$  hängt das Vorzeichen des Grenzwertes vom Optimismus der Konsumenten ab. Offensichtlich gilt für  $\underline{x} \geq x^*$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \begin{cases} -\infty & : \mu < \underline{x} \left( \frac{\alpha\sigma^2}{N} + \frac{1}{2} \right) \\ \infty & : \mu \geq \underline{x} \left( \frac{\alpha\sigma^2}{N} + \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

und für  $x^* \geq \bar{x}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \begin{cases} -\infty & : \mu < \bar{x} \left( \frac{\alpha\sigma^2}{N} + \frac{1}{2} \right) \\ \infty & : \mu \geq \bar{x} \left( \frac{\alpha\sigma^2}{N} + \frac{1}{2} \right) \end{cases} .$$

Somit ist für konstante subjektive Erwartungen das Vermögen des Fond-Managers entweder in jeder Periode positiv und im Zeitablauf wachsend, oder es ist über die Zeit monoton fallend und in jeder Periode negativ. Der Fond-Manager hat – solange seine subjektiven Erwartungen konstant und unveränderlich sind – keine Möglichkeit, ein positives Vermögen zu „erwirtschaften“, wenn es in der ersten Periode negativ ist. Somit gibt es keine Probe- oder Lernzeit für den Fond-Manager, um sich im Zeitablauf an seine Aufgabe zu gewöhnen und immer besser zu agieren. Selbst bei einem maximalen Wertpapierangebot von  $\bar{x}$  kann das Vermögen des Fond-Managers bei großem Optimismus der Konsumenten dauerhaft negativ sein. Für  $\underline{x} \geq x^*$  und  $x^* \geq \bar{x}$  besitzt der Fond-Manager keinen Einfluss auf den markträumenden Wertpapierpreis, da dessen Bestimmung unabhängig von seinem subjektiven Erwartungswert erfolgt. Die Tabelle 4.3 enthält die komparativ-statischen Ergebnisse des Vermögens für die drei Fälle  $\underline{x} \geq x^*$ ,  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  und  $x^* \geq \bar{x}$ . Die Sternchen (\*) in der Tabelle bedeuten, dass das Vorzeichen der partiellen Ableitung nicht eindeutig ist.

Fall	$\partial$	$\alpha$	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu^f$	$R$	$N$	$\underline{x}$	$\bar{x}$
$\underline{x} \geq x^*$	$\omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	-	+	-	0	*	+	*	0
$\underline{x} < x^* < \bar{x}$	$\omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	-	+	-	+	*	+	0	0
$x^* \geq \bar{x}$	$\omega_t(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	-	+	-	0	*	+	0	*

Tabelle 4.3: Komparative Statik des Vermögens.

Alle in Tabelle 4.3 betrachteten Fälle zeigen, dass der subjektive Erwartungswert der Konsumenten stets einen nicht unbedeutenden Einfluss auf das Vermögen des Fond-Managers hat. Sein eigener subjektiver Erwartungswert allerdings spielt für sein Vermögen nur dann eine Rolle, wenn das Handelsvolumen im Intervall  $(\underline{x}, \bar{x})$  liegt. In diesem Fall führt sinkender Optimismus des Fond-Managers zu einer Vermögenssteigerung.

**Lemma 4.14**

Die Annahme 4.11 sei erfüllt und es gelte  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$ . Dann ist die partielle Ableitung des Vermögen nach dem subjektiven Erwartungswert des Fond-Managers positiv.

**Beweis von Lemma 4.14:**

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \mu^f} W(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = NR \frac{N\mu - 2R\alpha\sigma^2 - NR\mu^f + \alpha\sigma^2 R\mu}{((R + 1)\alpha\sigma^2 + NR)^2}$$

ist positiv, wenn die Ungleichung

$$\mu [N + \alpha\sigma^2(R + 1)] > R\mu^f (2\alpha\sigma^2 + N)$$

gilt. Diese ist äquivalent zu

$$\frac{\mu}{R} > \underbrace{\mu^f \frac{2\alpha\sigma^2 + N}{N + \alpha\sigma^2(R + 1)}}_{<1}$$

und ist auf Grund der Annahme 4.11 erfüllt. Das liefert die Behauptung.  $\square$

Tabelle 4.3 unterstreicht den bedeutenden Einfluss der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie auf das Vermögen des Fond-Managers. Dieses wächst mit steigender Konsumentenzahl, ist aber nach oben beschränkt. Es gilt für alle  $\xi := (\alpha, \mu, \sigma^2)$  und  $\mu^f$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \omega_t(\xi, \mu^f) = R^t \omega + \frac{R^{t-1} - 1}{R - 1} \begin{cases} \underline{x} \left[ \mu - \frac{\underline{x}}{2} \right] & : \quad \underline{x} \geq \frac{R+1}{R} \mu - \mu^f \\ \frac{\mu^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu - R\mu^f}{R} \right]^2 & : \quad \underline{x} < \frac{R+1}{R} \mu - \mu^f < \bar{x} \\ \bar{x} \left[ \mu - \frac{\bar{x}}{2} \right] & : \quad \frac{R+1}{R} \mu - \mu^f \geq \bar{x} \end{cases} \quad (4.29)$$

Die obere Schranke des Vermögens des Fond-Managers bestimmt sich im Fall einer inneren Handelslösung aus den subjektiven Erwartungswerten der Konsumenten und des Fond-Managers sowie aus der risikolosen Rendite. Bietet der Fond-Manager konstant  $\underline{x}$  oder  $\bar{x}$  Wertpapiere an, so hängt die obere Schranke seines Vermögens nicht mehr von seinem subjektiven Erwartungswert ab. Weiter kann das Vermögen des Fond-Managers in allen drei betrachteten Fällen negativ werden. Dieses ist insbesondere für sehr großen Optimismus der Konsumenten möglich.

#### 4.8.4 Erwartungstreue Prognosen

Nach Abschnitt 4.7 werden diejenigen subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße als  $\mu^f$ -erwartungstreu bzw. erwartungstreu bezeichnet, deren erste Momente mit dem objektiven Erwartungswert des cum dividend Wertpapierpreises übereinstimmen. Der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers  $\mu^f > 0$  sei beliebig, aber fest, und es gelte  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$ . Dann schreibt sich unter den Annahmen 2.10 und 2.16 Gleichung (4.17) als

$$\frac{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R + 1) + RN} + g(d) \stackrel{!}{=} \mu.$$

und liefert

$$\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f) := \frac{g(d) [\alpha\sigma^2(R + 1) + RN] + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R + 1) + (R - 1)N} \quad (4.30)$$



als Lösung. Offensichtlich ist  $\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f)$  für alle  $d, \alpha, \sigma^2$  und  $\mu^f$  stets positiv und korrespondiert zu einem  $\mu^f$ -erwartungstreuen Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen generiert. Mit steigender Risikoaversion bzw. steigender subjektiver Varianz der Konsumenten wird  $\bar{\mu}$  kleiner. Ebenso führt ein Anstieg der risikolosen Rendite zu einem kleinerem  $\bar{\mu}$ . Nur, wenn entweder die Anzahl der Konsumenten oder der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers ansteigen, wird auch der „erwartungstreue Erwartungswert“ der Konsumenten größer. Somit korrespondiert ein erwartungstreuer Markov-Kern der Konsumenten für zunehmenden Pessimismus des Fond-Managers immer mit Optimismus der Konsumenten. Die Tabelle 4.4 fasst die Ergebnisse der komparativ-statischen Analysen zusammen.

$\partial$	$\alpha$	$\sigma^2$	$\mu^f$	$R$	$N$
$\bar{\mu}(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f)$	–	–	+	–	+
$\tilde{\mu}(d, \alpha, \sigma^2)$	–	–	0	–	+
$\tilde{\mu}^f(d, \alpha, \sigma^2)$	–	–	0	–	+

Tabelle 4.4: Komparative Statik der erwartungstreuen Prognose.

Die Berechnung der in Definition 4.10 determinierten erwartungstreuen Markov-Kerne verläuft analog zu der der  $\mu^f$ -erwartungstreuen. Für  $d > 0$  und  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  lautet das Gleichungssystem (4.18)

$$\frac{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + RN} + g(d) \stackrel{!}{=} \mu \quad \text{und} \quad \frac{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + RN} \stackrel{!}{=} \mu^f$$

und liefert

$$\tilde{\mu}(d, \alpha, \sigma^2) := g(d) \frac{\alpha\sigma^2 + N}{\alpha\sigma^2 R + (R-1)N} \tag{4.31}$$

$$\tilde{\mu}^f(d, \alpha, \sigma^2) := g(d) \frac{N}{\alpha\sigma^2 R + (R-1)N} \tag{4.32}$$

als Lösung. Beide Werte sind für alle  $d, \alpha$  und  $\sigma^2$  stets positiv.  $\tilde{\mu}(d, \alpha, \sigma^2)$  korrespondiert zu einem erwartungstreuen Markov-Kern, der Orbits mit rationalen Erwartungen generiert. Zusätzlich hat auch der Fond-Manager rationale Erwartungen. Die Tabelle 4.4 enthält auch die Ergebnisse der komparativ-statischen Analysen für die erwartungstreuen Prognosen. Beide Funktionen  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\mu}^f$  steigen mit zunehmender Risikoaversion, subjektiver Varianz und risikoloser Rendite. Ein Anstieg der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie erhöht  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\mu}^f$ . Benutzen die Konsumenten  $\tilde{\mu}$  und der Fond-Manager

$\tilde{\mu}^f$  als Erwartungswerte, so werden

$$\frac{NR}{\alpha\sigma^2R + N(R-1)}g(d)$$

Wertpapiere gehandelt. Mit steigender Anzahl an Konsumenten in der Ökonomie nimmt das Handelsvolumen unter rationalen Erwartungen zu. Für zunehmende Risikoaversion, subjektive Varianz und risikolose Rendite wird das Handelsvolumen jedoch geringer.

#### 4.8.5 Risikozuschläge

Der Quotient aus cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t+1$  und ex dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  beschreibt den risikobehafteten Wertpapierertrag in Periode  $t+1$ . Damit definiert

$$\frac{S(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) + D_{t+1}}{S(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)} - R = 1 - R + D_{t+1} \cdot \begin{cases} \frac{RN}{N\mu - \alpha\sigma^2\underline{x}} & : \underline{x} \geq x^* \\ \frac{\alpha\sigma^2(R+1) + RN}{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f} & : \underline{x} < x^* < \bar{x} \\ \frac{RN}{N\mu - \alpha\sigma^2\bar{x}} & : x^* \geq \bar{x} \end{cases}$$

den Risikozuschlag in Periode  $t+1$ . Er wird negativ, falls für  $\omega \in \Omega$ ,

$$D_{t+1}(\omega) < \begin{cases} \frac{R-1}{RN}(N\mu - \alpha\sigma^2\underline{x}) & : \underline{x} \geq x^* \\ \frac{(R-1)N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}{\alpha\sigma^2(R+1) + RN} & : \underline{x} < x^* < \bar{x} \\ \frac{R-1}{RN}(N\mu - \alpha\sigma^2\bar{x}) & : x^* \geq \bar{x} \end{cases}$$

gilt. Damit können nur dann positive Risikozuschläge erzielt werden, wenn die Dividendenzahlung größer als die Zinsen sind, die ein Konsument erhält, wenn er den Wert eines risikobehaftetes Wertpapierses risikolos zum Zinssatz  $R-1$  anlegt, d. h. es muss  $D_{t+1}(\omega) < (R-1)S(\alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$  gelten. Unter den Annahmen 2.10 und 2.16 definiert

$$MEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) := 1 - R + g(d) \cdot \begin{cases} \frac{RN}{N\mu - \alpha\sigma^2\underline{x}} & : \underline{x} \geq x^* \\ \frac{\alpha\sigma^2(R+1) + RN}{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f} & : \underline{x} < x^* < \bar{x} \\ \frac{RN}{N\mu - \alpha\sigma^2\bar{x}} & : x^* \geq \bar{x} \end{cases} .$$

den bedingten Erwartungswert des Risikozuschlags als Funktion der Dividendenzahlungen, der Risikoaversion, des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz aller Konsumenten und des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers. Mit Zunahme der Risikoaversion der Konsumenten nimmt der erwartete Risikozuschlag ebenfalls zu. Auch ein Anstieg der subjektiven Varianz führt zu einem höheren erwarteten Risikozuschlag. Dieser sinkt, falls die Konsumenten optimistischer werden. Der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers spielt nur im Fall einer „inneren“ Lösung, d. h. für  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$ , eine Rolle. Ein Anstieg dieses Erwartungswertes impliziert einen sinkenden erwarteten Risikozuschlag. Ein positiver Einfluss des Anstiegs der risikolosen Rendite erfolgt, falls zusätzliche Bedingungen erfüllt sind. Diese werden in dem folgenden Lemma hergeleitet.

**Lemma 4.15**

*Es gelte  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$ . Dann ist der Einfluss der risikolosen Rendite auf den erwarteten Risikozuschlag positiv, falls für alle  $d \in \mathcal{D}$  die Ungleichungen*

$$g(d) > \mu \quad \text{und} \quad g(d) > \mu^f$$

*erfüllt sind.*

**Beweis von Lemma 4.15:**

Die partielle Ableitung des erwarteten Risikozuschlags lautet

$$\frac{\partial}{\partial R} MEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \frac{N(g(d) - \mu) + \alpha\sigma^2(g(d) - \mu^f)}{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f}.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

**Lemma 4.16**

*Das Angebot an Wertpapieren sei entweder gleich  $\underline{x}$  oder gleich  $\bar{x}$ . Dann ist der Einfluss der risikolosen Rendite auf den erwarteten Risikozuschlag positiv, falls für alle  $d \in \mathcal{D}$  die Ungleichung*

$$g(d) > \mu$$

*erfüllt ist.*

**Beweis von Lemma 4.16:**

Die partielle Ableitung des erwarteten Risikozuschlags lautet

$$\frac{\partial}{\partial R} MEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) = \frac{N(g(d) - \mu) + \alpha\sigma^2x}{N\mu - \alpha\sigma^2x}.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

Die Ergebnisse der komparativ-statischen Analysen sowohl des erwarteten Risikozuschlags als auch seiner Varianz sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst. Das Sternchen (\*) bedeutet, dass das Vorzeichen der partiellen Ableitung nicht eindeutig determiniert ist (vergleiche Lemma 4.15 und Lemma 4.16).

Fall	$\partial$	$\alpha$	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu^f$	$R$	$N$	$\underline{x}$	$\bar{x}$
$\underline{x} \geq x^*$	$MEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	+	-	+	0	*	-	+	0
	$VEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	+	-	+	0	+	-	+	0
$\underline{x} < x^* < \bar{x}$	$MEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	+	-	+	-	*	-	0	0
	$VEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	+	-	+	-	+	-	0	0
$x^* \geq \bar{x}$	$MEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	+	-	+	0	*	-	0	+
	$VEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f)$	+	-	+	0	+	-	0	+

Tabelle 4.5: Komparative Statik des Erwartungswertes und der Varianz des Risikozuschlags.

Die Varianz des Risikozuschlags lautet

$$VEP(d, \alpha, \mu, \sigma^2, \mu^f) := h(d) \cdot \begin{cases} \left[ \frac{RN}{N\mu - \alpha\sigma^2\underline{x}} \right]^2 & : \underline{x} \geq x^* \\ \left[ \frac{\alpha\sigma^2(R+1) + RN}{N\mu + \alpha\sigma^2\mu^f} \right]^2 & : \underline{x} < x^* < \bar{x} , \\ \left[ \frac{RN}{N\mu - \alpha\sigma^2\bar{x}} \right]^2 & : x^* \geq \bar{x} \end{cases}$$

Die Ergebnisse der komparativ-statischen Analysen der Varianz des Risikozuschlags sind in Tabelle 4.5 summiert. Sie zeigen, dass ein Anstieg der Risikoaversion, der subjektiven Varianz und die Zunahme der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie zu einer Erhöhung der Varianz des Risikozuschlags führt. Weiter erhöht sich die Varianz auch durch einen Anstieg der risikolosen Rendite. Je höher die Rendite der risikolosen Anlage ist, desto „unsicherer“ wird die Rendite der risikobehafteten Anlage.

Qualitativ stimmen sämtliche Ergebnisse aus Tabelle 4.5 mit denen aus Tabelle 2.4, Tabelle 2.6, Tabelle 2.2 und Tabelle 3.3 überein. Somit ändert die Einführung eines Fond-Managers, der Wertpapiere anbietet, nichts an den Vorzeichen der partiellen Ableitungen im Vergleich zu einem konstanten Wertpapierangebot.

Um die Beziehung zwischen erwartetem Risikozuschlag und der Risikoaversion genauer analysieren zu können, werden im Folgenden Konsumenten mit  $\mu^f$ -erwartungstreuen

Markov-Kernen unterstellt. Die Ungleichung<sup>14</sup>  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  sei erfüllt. Dann gilt für den erwarteten Risikozuschlag

$$\begin{aligned} MEP^*(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f) &:= MEP(d, \alpha, \bar{\mu}(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f), \sigma^2, \mu^f) \\ &= \alpha\sigma^2 \frac{(R+1)g(d) - \mu^f(R-1)}{g(d)N + \alpha\sigma^2\mu^f}. \end{aligned}$$

Mit steigendem subjektiven Erwartungswert des Fond-Managers nimmt der erwartete Risikozuschlag ab. Der Einfluss der übrigen Parameter auf den erwarteten Risikozuschlag mit  $\mu^f$ -erwartungstreuem Markov-Kern wird durch die Höhe des bedingten Erwartungswertes des Dividendenprozesses bestimmt. Ist dieser größer als der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers, so steigt der erwartete Risikozuschlag mit steigender Risikoaversion, mit steigender subjektiver Varianz, mit steigender risikoloser Rendite und mit sinkender Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie. Diese Ergebnisse kehren sich ins Gegenteil, wenn der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers größer als der bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses ist. In Tabelle 4.6 sind sämtliche Ergebnisse zusammengefasst.

Fall	$\partial$	$\alpha$	$\sigma^2$	$\mu^f$	$N$	$R$
$g(d) > \mu^f$	$MEP^*(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f)$	+	+	-	-	+
$g(d) < \mu^f$	$MEP^*(d, \alpha, \sigma^2, \mu^f)$	-	-	-	+	-

Tabelle 4.6: Komparative Statik des erwarteten Risikozuschlags mit  $\mu^f$ -erwartungstreuem Markov-Kern.

Durch die Verwendung des  $\mu^f$ -erwartungstreuen Markov-Kernes ändern sich die komparativ-statischen Ergebnisse des erwarteten Risikozuschlags. Nicht nur das Vorzeichen des Einflusses der risikolosen Rendite ist an eine zusätzlich Bedingung geknüpft. Auch die Vorzeichen der partiellen Ableitungen nach der Risikoaversion, der subjektiven Varianz und der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie sind für alle  $d \in \mathcal{D}$  durch die Ungleichung  $g(d) > \mu^f$  bestimmt. Ist diese Ungleichung erfüllt, so stimmt – mit Ausnahme für die risikolose Rendite – die Tabelle 4.5 mit Tabelle 4.6 überein. Für

<sup>14</sup>Die Analysen des erwarteten Risikozuschlags beziehen sich unter Annahme der Ungleichung  $\underline{x} < x^* < \bar{x}$  immer auf Situationen, in denen das Wertpapierangebot und somit das Handelsvolumen nicht mit dem Minimal- bzw. Maximalangebot des Fond-Managers übereinstimmen. Werden entweder  $\underline{x}$  oder  $\bar{x}$  Wertpapiere gehandelt, spielt der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers für die Bestimmung des erwarteten Risikozuschlags keine Rolle mehr. Dieser Fall stimmt qualitativ mit dem aus Abschnitt 3.4 überein.

$g(d) < \mu^f$  drehen sich alle Vorzeichen um. Der Einfluss des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers ist in jedem Fall negativ.

Die Abbildung 4.4 zeigt die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags mit  $\mu^f$ -erwartungstreuen Markov-Kernen der Konsumenten in Abhängigkeit der Risikoaversion und der risikolosen Rendite. Dabei gilt  $g(d) = 1.5$ ,  $\sigma^2 = 1.9$ ,  $\mu^f = 0.5$ ,  $N = 80$ , und die Ungleichung  $\mu^f < g(d)$  ist erfüllt<sup>15</sup>.

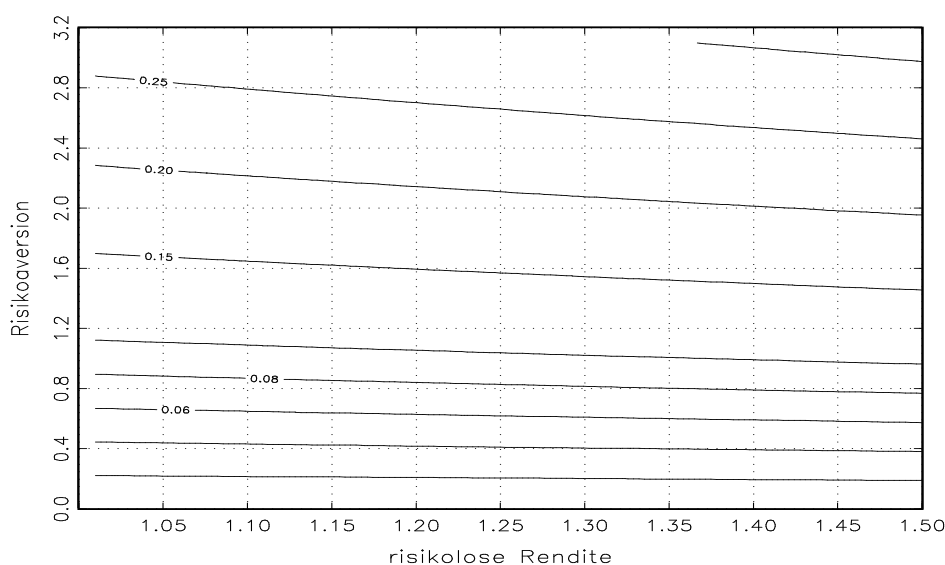


Abbildung 4.4: Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags mit  $\mu^f$ -erwartungstreuen Markov-Kernen der Konsumenten.

Die Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags sind monoton fallend in der risikolosen Rendite und monoton steigend in der Risikoaversion der Konsumenten. Je risikoaverser die Konsumenten sind, desto höher wird der erwartete Risikozuschlag. Dennoch wird ein erwarteter Risikozuschlag von etwa 6% bei einer risikolosen Rendite von 1.01 auch für kleinere Risikoaversionskoeffizienten von ca. 0.7 erzielt. Der mittlere Risikozuschlag der letzten 100 Jahre betrug etwa 6% und bezeichnet die Differenz risikobehafteter und risikoloser Rendite dieses Zeitraums. Mehra & Prescott (1985) stellen fest, dass dieser Wert in ihrem Standardmodell theoretischer Finanzmärkte nur mit extrem hohen Werten der Risikoaversion zu imitieren ist. Sie bezeichnen dieses Phänomen als Equity Premium Puzzle. Mehra & Prescott (1985) unterstellen in ihrem Modell einen repräsentativen Konsumenten, der unendlich lange lebt und als Stellvertreter einer Bevölkerung

<sup>15</sup>Der umgekehrte Fall ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Mit  $g(d) = 0.5$  und  $\mu^f = 1.5$  gilt dort  $\mu^f > g(d)$ .

charakterisiert wird. Bisher wurden in dem hier vorliegenden Modell lediglich Bedingungen an die Rationalität der Erwartungen der Konsumenten und nicht an die des Fond-Managers gestellt. Im Folgenden wird nun der erwartete Risikozuschlag im Fall erwartungstreuer Markov-Kerne der Konsumenten unter rationalen Erwartungen des Fond-Managers determiniert. Der erwartete Risikozuschlag mit  $\tilde{\mu}$  und  $\tilde{\mu}^f$  lautet

$$\begin{aligned} MEP^{**}(\alpha, \sigma^2) &:= MEP(d, \alpha, \tilde{\mu}(d, \alpha, \sigma^2), \sigma^2, \tilde{\mu}^f(d, \alpha, \sigma^2)) \\ &= 1 - R + \frac{[\alpha\sigma^2(R+1) + RN]^2}{\alpha\sigma^2(N+1) + N^2}. \end{aligned}$$

Der erwartete Risikozuschlag mit rationalen Erwartungen der Konsumenten und des Fond-Managers ist unabhängig vom Dividendenprozess. Weiter ist er sogar stets größer als Eins.

**Lemma 4.17** *Der in Gleichung (4.33) definierte erwartete Risikozuschlag unter erwartungstreuem Markov-Kern der Konsumenten und rationalen Erwartungen des Fond-Managers ist stets größer als Eins.*

**Beweis von Lemma 4.17:**

Es ist die Ungleichung

$$1 - R + \frac{(\alpha\sigma^2(R+1) + RN)^2}{\alpha\sigma^2(N+1) + N^2} > 1$$

zu zeigen. Diese ist aber äquivalent zu

$$(\alpha\sigma^2)^2 (R+1)^2 + 2\alpha\sigma^2 R^2 NR + \alpha\sigma^2 R(N-1) + RN(R-1) > 0.$$

Diese Ungleichung ist erfüllt und liefert die Behauptung.  $\square$

Für steigende Risikoaversion und subjektive Varianz nimmt der erwartete Risikozuschlag aus Gleichung (4.33) zu. Ein Anstieg der Anzahl der Konsumenten führt zu einem geringeren erwarteten Risikozuschlag. Dennoch bleibt er wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MEP^{**}(\alpha, \sigma^2) = 1 \quad \text{für alle } \alpha, \sigma^2 \text{ und } R$$

nach unten beschränkt. Der Einfluss der risikolosen Rendite ist nicht eindeutig. Auf Grund der unteren Schranke von Eins für den erwarteten Risikozuschlag mit erwartungstreuem Markov-Kern der Konsumenten und rationalen Erwartungen des Fond-Managers ist es nicht möglich, einen empirisch beobachteten Risikozuschlag in Höhe von 6% zu imitieren. Das von Mehra & Prescott (1985) entdeckte Equity Premium Puzzle ist in dem hier vorliegenden Modell auch nicht lösbar. Vielmehr ist es selbst durch die

Annahme sehr hoher Risikoaversionen der Konsumenten nicht möglich, Risikozuschläge von 6% zu generieren. Der hier gezeigte Spezialfall zeigt, welche starke Einschränkung sich hinter der Annahme rationaler Erwartungen sämtlicher Individuen einer Ökonomie verbirgt.

#### 4.8.6 Zusammenfassung

In dem hier vorliegenden Fall einer Ökonomie mit identischen Konsumenten und einem Fond-Manager werden die Wechselwirkungen der individuellen Merkmale der Konsumenten und des Fond-Managers mit dem Wertpapierpreis, der Risikoprämie und des Handelsvolumens diskutiert. Der Umstand identischer Konsumenten führt zur vollständigen Marktteilnahme. Somit handeln stets alle Konsumenten mit dem Fond-Manager. Der gleichgewichtige Wertpapierpreis ist für pessimistische subjektive Erwartungen des Fond-Managers, d. h. der Fond-Manager erwartet für morgen einen hohen Wertpapierpreis, höher als für optimistische Erwartungen des Fond-Managers. Der Einfluss identischer Konsumenten auf den Wertpapierpreis bleibt im Vergleich zur Ökonomie ohne Fond-Manager (vergleiche Kapitel 2 und Kapitel 3) eindeutig.

Das Handelsvolumen ist eine durch  $\underline{x}$  und  $\bar{x}$  beschränkte Funktion, die vom subjektiven Erwartungswert, der subjektiven Varianz und der Risikoaversion der Konsumenten, sowie vom subjektiven Erwartungswert des Fond-Managers abhängt. Ein Anstieg der Risikoaversion, der subjektiven Varianz, der risikolosen Rendite oder des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers lässt das Handelsvolumen sinken. Optimismus der Konsumenten hat einen positiven Effekt auf das Handelsvolumen. Zudem korrespondiert mit einer großen Anzahl von Konsumenten, die am Wertpapiermarkt teilnehmen<sup>16</sup>, ein hohes Handelsvolumen. Die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie hat noch eine andere Bedeutung. Je mehr Konsumenten in der Ökonomie am Wertpapiermarkt teilnehmen, desto weniger Einfluss haben die Risikoaversion und die subjektive Varianz der Konsumenten auf den Wertpapierpreis und auch das Handelsvolumen. Im Grenzwert sind lediglich die risikolose Rendite und der subjektive Erwartungswert der Konsumenten und der des Fond-Managers von Bedeutung.

Das Vermögen des Fond-Managers ist in diesem speziellen Fall identischer Konsumenten mit unveränderlichen individuellen Merkmalen entweder stets negativ oder stets positiv. Ein Wechsel des Vorzeichens im Zeitablauf ist unmöglich. Das Vorzeichen selber wird im wesentlichen durch den subjektiven Erwartungswert der Konsumenten determiniert.

---

<sup>16</sup>Im Fall identischer Konsumenten stimmt die Anzahl der Konsumenten mit der Höhe der Marktteilnahme überein.



Sind die Konsumenten sehr optimistisch, so ist auch das Vermögen des Fond-Managers positiv und nach oben unbeschränkt. Mit Anwachsen der Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie nimmt der Einfluss der Konsumenten auf das Vermögen des Fond-Managers über ihre Risikoaversion und die subjektive Varianz ab. Im Grenzwert spielen beide Parameter keine Rolle für die Höhe bzw. das Vorzeichen des Vermögens. Die subjektiven Erwartungen sowohl der Konsumenten als auch des Fond-Managers haben auch in Grenzwertbetrachtungen Einfluss auf den Wertpapierpreis und das Handelsvolumen. Die übrigen individuellen Merkmale der Konsumenten spielen dabei oftmals keine Rolle mehr.

Es existiert zu jedem subjektiven Erwartungswert des Fond-Managers ein  $\mu^f$ -erwartungstreuer Markov-Kern. Dieser generiert zu beliebigen, aber festen subjektiven Erwartungswerten des Fond-Managers, Orbits mit rationalen Erwartungen der Konsumenten. Steigt nun der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers, so muss auch der subjektive Erwartungswert der Konsumenten steigen, um erwartungstreu zu bleiben. Hohe Risikoaversion, hohe subjektive Varianz der Konsumenten oder eine hohe risikolose Rendite korrespondiert zu einer betragsmäßig kleinen erwartungstreuen Prognosen. Steigt hingegen die Anzahl der Konsumenten in der Ökonomie, wird die erwartungstreue Prognose betragsmäßig größer.

In Analogie zu Kapitel 2 wird die Höhe des erwarteten Risikozuschlags und seiner Varianz untersucht. Der Einfluss der risikolosen Rendite auf den Risikozuschlag ist an die Höhe der subjektiven Erwartungen der Konsumenten und des Fond-Managers gekoppelt. Nur wenn der bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses größer als der subjektive Erwartungswert sowohl der Konsumenten als auch des Fond-Managers ist, steigt der erwartete Risikozuschlag mit einem Anstieg der risikolosen Rendite. Bietet der Fond-Manager entweder sein Minimalangebot von  $\underline{x}$  bzw. sein Maximalangebot von  $\bar{x}$  Wertpapieren an, so fällt die Bedingung, dass sein subjektiver Erwartungswert kleiner als der bedingte Erwartungswert des Dividendenprozesses sein muss, weg.

Insgesamt wird der qualitative Einfluss der Konsumenten auf z. B. den Wertpapierpreis oder den Risikozuschlag durch die Erweiterung des Modells um einen Fond-Manager nicht verändert. Es zeigt sich vielmehr, dass der Einfluss des Fond-Managers nur dann vorhanden ist, wenn sein Wertpapierangebot durch eine „innere“ Lösung seines Maximierungsproblems charakterisiert wird. Sobald seine Angebotsentscheidung eine Randlösung ist, sind seine individuellen Merkmale wie sein subjektiver Erwartungswert oder seine Kostenfunktion für den Wertpapiermarkt und damit für den markträumenden Wertpapierpreis unbedeutend. Das Basismodell aus Kapitel 2 ist ein Spezialfall des in

diesem Kapitel entwickelten Modells einer Ökonomie mit Konsumenten, die Wertpapiere nachfragen, und einem Fond-Manager, der Wertpapiere anbietet.

## 4.9 Heterogene Konsumenten

In diesem Abschnitt erfolgt die Analyse eines Finanzmarktmodells mit einem variablen Wertpapierangebot und endlich vielen heterogenen Konsumenten mit Mittelwert-Varianz-Präferenzen. Damit erhält das Modell aus Abschnitt 4.8 die zusätzliche Komponente der Heterogenität. Das Wertpapiermarktgleichgewicht besteht aus dem markträumenden Wertpapierpreis und der Marktteilnahme. Die Charakterisierung dieses Gleichgewichts verläuft analog zu den Ausführungen in Kapitel 3, wengleich an dieser Stelle das variable Angebot des Fond-Managers berücksichtigt wird. Sowohl der Wertpapierpreis als auch die Höhe der Marktteilnahme sind maßgeblich durch die Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers bestimmt. Auf Grund der Heterogenität der Konsumenten ist es wie in Kapitel 3 nötig, die Konsumenten zu reihen. Es wird demzufolge auch in diesem Kapitel die Annahme 3.1 unterstellt<sup>17</sup>.

### 4.9.1 Das Wertpapiermarktgleichgewicht

Der zum Wertpapiermarktgleichgewicht korrespondierende Wertpapierpreis bestimmt sich als maximaler Preis, der die Gleichheit von Angebot und Nachfrage garantiert. Mit der Notation 3.2 und unter Annahme 3.1 ist die aggregierte Wertpapiernachfrage – analog zu Gleichung (3.8) – durch

$$\Phi(p, \xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^N \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i2}} & : p \leq \frac{\mu^N}{R} \\ \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i2}} & : \frac{\mu^{N-2}}{R} < p \leq \frac{\mu^{N-1}}{R} \\ \vdots & : \vdots \\ \frac{\mu^1 - Rp}{\alpha_1 \sigma_1^2} & : \frac{\mu^2}{R} < p \leq \frac{\mu^1}{R} \\ 0 & : \frac{\mu^1}{R} \leq p \end{array} \right. \quad (4.33)$$

---

<sup>17</sup>Vergleiche Seite 62.

determiniert. Die Wertpapierangebotsfunktion

$$\psi(p, \mu^f) = \begin{cases} \underline{x} & : 0 < p \leq p_- \\ (R+1)p - \mu^f & : p_- < p \leq p_+ \\ \bar{x} & : p \geq p_+ \end{cases} \quad (4.34)$$

ist identisch zu der aus Gleichung (4.8). Sie unterstellt eine quadratische Kostenfunktion. Aus der Gleichsetzung von Nachfrage und Angebot resultiert die Wertpapierpreisfunktion

$$\tilde{S} : \mathbb{R}^{3N+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \mu^f) \longmapsto \max\{p' \mid \Phi(p', \xi) = \psi(p, \mu^f)\}. \quad (4.35)$$

In Abbildung 4.5 sind die aggregierte Wertpapiernachfrage und das Wertpapierangebot illustriert. Der markträumende Wertpapierpreis  $\hat{p}$  korrespondiert zum Handelsvolumen  $\hat{x}$ .

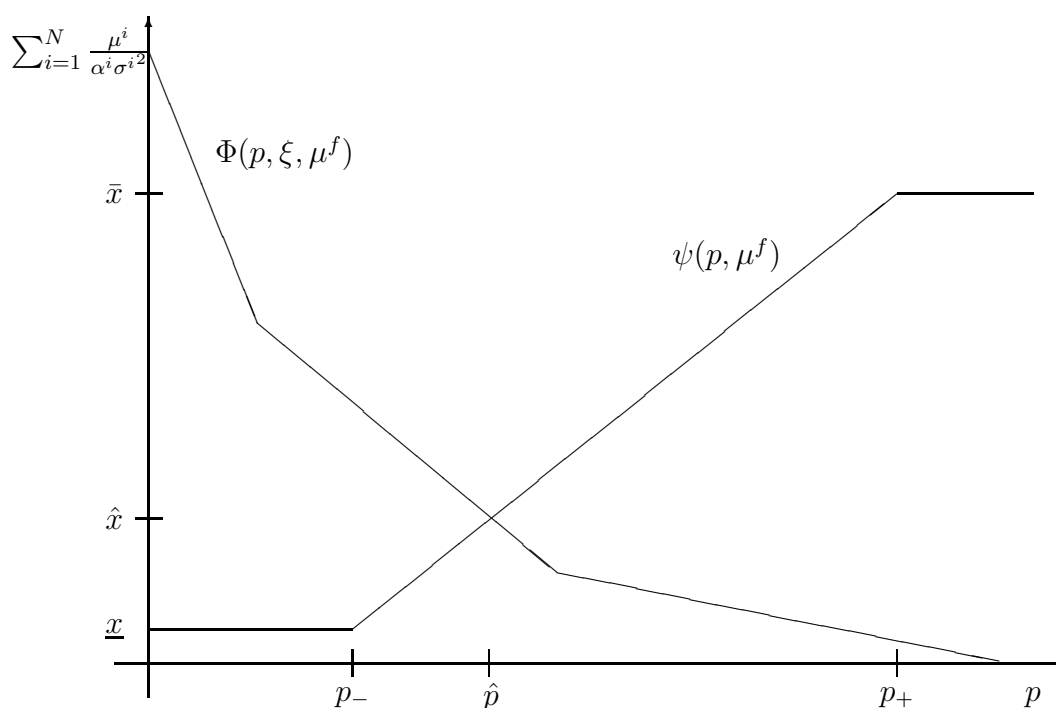


Abbildung 4.5: Aggregierte Wertpapiernachfrage und Angebot des Fond-Managers.

Die aggregierte Wertpapiernachfrage ist stückweise linear, konvex und monoton fallend. Die Angebotsfunktion des Fond-Managers ist monoton wachsend. In dem in der Abbildung 4.5 dargestellten Fall ist der Wertpapierpreis  $\hat{p} := \tilde{S}(\xi, \mu^f)$  gleichgewichtig. Zu

diesem Preis werden  $\hat{x}$  Wertpapiere gehandelt. Der Handel findet zwischen zwei Konsumenten und dem Fond-Manager statt.

Die Existenz eines markträumenden Wertpapierpreises ist genau dann gesichert, wenn der Sättigungspunkt der Konsumenten größer als das minimale Wertpapierangebot des Fond-Managers ist, d. h. die Existenz ist äquivalent zu der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \geq \underline{x}. \quad (4.36)$$

Die Bedingung (4.36) ist in Abbildung 4.5 erfüllt. Die Angebotsfunktion des Fond-Managers ist für Preise, die kleiner als  $p_-$  bzw. größer als  $p_+$  sind, konstant. Stellt sich ein markträumender Wertpapierpreis ein, der zu einem konstanten Wertpapierangebot korrespondiert, so stimmt dieser qualitativ mit denen aus Kapitel 2 und 3 überein. Dort wurde das Wertpapierangebot exogen als konstant festgesetzt. Im Folgenden soll jedoch der Fall eines konstanten Angebots ausgeschlossen werden, da nur die Preisbildung bei „echter“ Angebotsfunktion von Interesse ist. Diese Forderung erfüllen die Bedingungen der folgenden Annahme.

**Annahme 4.18** *Es gelte*

$$\Phi(p_-, \xi, \mu^f) > \underline{x} \quad \text{und} \quad \Phi(p_+, \xi, \mu^f) < \bar{x}.$$

Die erste Ungleichung aus Annahme 4.18 fordert, dass die Konsumenten zum Preis  $p_-$  mehr nachfragen als (konstant) angeboten wird. Darüber hinaus impliziert diese Ungleichung die Existenzbedingung (4.36). Durch die zweite Ungleichung aus Annahme 4.18 wird sichergestellt, dass die Konsumenten zum Preis  $p_+$  weniger nachfragen als angeboten wird. Somit sind unter Annahme 4.18 nur „innere Lösungen“ markträumender Wertpapierpreise möglich.

Die Differenz zwischen aggregierter Nachfrage und Angebot bezeichnet die *Überschussnachfrage*

$$Z : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto Z(p) := \Phi(p, \xi) - \psi(p, \mu^f).$$

Die Überschussnachfrage  $Z(\cdot)$  ist ebenso wie die aggregierte Nachfragefunktion stückweise linear. Ihre „Knickstellen“ sind für  $j \in \mathcal{I}$  die Punkte

$$\left( \frac{\mu^j}{R}, Z\left(\frac{\mu^j}{R}\right) \right) = \left( \frac{\mu^j}{R}, \mu^f + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\mu^i - \mu^j}{\alpha^i \sigma^{i^2}} - \frac{R+1}{R} \mu^j \right).$$

Diese Knickstellen existieren, da alle Konsumenten verschieden sind und nach Annahme 3.1 wenigstens unterschiedliche subjektive Erwartungswerte besitzen. Somit gilt  $Z(p) \in [\mu^f + z_{j+1}, \mu^f + z_j[$  für alle  $p \in \left[\frac{\mu^{j+1}}{R}, \frac{\mu^j}{R}\right[$ . Dabei ist

$$z_j := \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\mu^i - \mu^j}{\alpha^i \sigma^{i2}} - \frac{R+1}{R} \mu^j \quad \text{für } j \in \mathcal{I}.$$

Der folgende Satz charakterisiert diese Knickstellen und zeigt, für welche Indizes  $j \in \mathcal{I}$  sie größer und für welche sie kleiner als Null sind.

**Satz 4.19**

Die Ungleichung (4.36) sei erfüllt. Dann existiert unter Annahme 3.1 und Annahme 4.18 genau ein Index  $\bar{k} \in \mathcal{I}$  mit

$$\mu^f + z_{\bar{k}+1} > 0 > \mu^f + z_{\bar{k}}.$$

**Beweis von Satz 4.19:**

Nach Annahme 4.18 gilt

$$\Phi(p, \xi) > \underline{x} \quad \text{für alle } p \leq p_-.$$

Wegen  $\frac{\mu^f}{R+1} < p_-$  gilt somit auch

$$\Phi\left(\frac{\mu^f}{R+1}, \xi\right) > \underline{x}.$$

Weiter ist die Gleichung

$$\Phi\left(\frac{\mu^1}{R}, \xi\right) = 0$$

erfüllt. Dies zusammen mit der Monotonie der aggregierten Wertpapiernachfrage liefert  $\frac{\mu^f}{R+1} < \frac{\mu^1}{R}$ . Somit ist  $\mu^f + z_1 = \mu^f - \frac{R+1}{R} \mu^1 < 0$ .

Zusätzlich gilt für  $p < p_-$

$$Z(p) = \Phi(p, \xi) - \Psi(p, \mu^f) > \underline{x} - \Psi(p, \mu^f) > \underline{x} - \underline{x} = 0.$$

Also existiert ein  $k' > 1$  mit  $\mu^f + z_{k'} > 0 > \mu^f + z_1$ . Wegen  $z_{k+1} > z_k$  für  $k = 1, \dots, N-1$  gilt  $\mu^f + z_{k+1} > \mu^f + z_k$  für alle  $k = 1, \dots, N-1$ . Beide Aussagen implizieren die Behauptung.  $\square$

Nach Satz 4.19 kann die aggregierte Wertpapiernachfrage aus Gleichung (4.33) als

$$\Phi(p, \xi) = \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i2}}$$

geschrieben werden. Unter Berücksichtigung der Definition des Wertpapierangebots aus Gleichung (4.34) lautet die Überschussnachfrage

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i - Rp}{\alpha^i \sigma^{i^2}} - [(R + 1)p - \mu^f]$$

und besitzt als Umkehrfunktion die Wertpapierpreisfunktion

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) = \frac{\mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}}{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} + R + 1}, \tag{4.37}$$

die den markträumenden Wertpapierpreis determiniert. Dieser bestimmt sich aus den subjektiven Charakteristiken des Fond-Managers und der Konsumenten  $i$  mit  $i \leq \bar{k}$ . Dabei ist nach der Nummerierungseigenschaft aus Annahme 3.1 der Konsument  $\bar{k}$  der pessimistischste aller Konsumenten, die in ihrer Gesamtheit den Wertpapierpreis durch ihre individuellen Merkmale wie Risikoaversion, subjektive Erwartungen und subjektive Varianzen, beeinflussen. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass diese  $\bar{k}$  Konsumenten auf dem Wertpapiermarkt teilnehmen. Der Wertpapierpreis aus Gleichung (4.37) steigt mit zunehmendem Optimismus eines Konsumenten  $i$  mit  $i \leq \bar{k}$ . Ein Anstieg des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers hat ebenfalls einen Anstieg des Wertpapierpreises zur Folge. Erwartet der Fond-Manager einen hohen morgigen Wertpapierpreis, so erwartet er gleichzeitig hohe Kosten, die ihm durch den Rückkauf der heute verkauften Wertpapiere entstehen. Diese Erwartungen haben Einfluss auf die Höhe seines Wertpapierangebots. Es wird sinken und somit den Wertpapierpreis erhöhen. Durch zunehmende Risikoaversion eines Konsumenten  $i$  mit  $i \leq \bar{k}$  sinkt der markträumende Wertpapierpreis. Das gleiche Resultat wird erzielt, falls die subjektive Varianz dieses Konsumenten steigt. Mit steigender risikoloser Rendite sinkt der markträumende Wertpapierpreis. Dieses Ergebnis ist intuitiv, denn eine hohe risikolose Rendite erhöht die Attraktivität der riskolosen Anlage und nur ein kleiner Wertpapierpreis führt zum Kauf der risikobehafteten Wertpapiere. Die Tabelle 4.7 enthält sämtliche Ergebnisse komparativ-statischer Analysen.

$\partial$	$\alpha^i$	$\mu^i$	$\sigma^{i^2}$	$\mu^f$	$R$	$\bar{k}$
$\tilde{S}(\xi, \mu^f)$	-	+	-	+	-	-

Tabelle 4.7: Komparative Statik des Wertpapierpreises.

Die Ergebnisse aus Tabelle 4.7 stimmen qualitativ mit denen aus Kapitel 2 und Kapitel 3 überein. Offensichtlich bleibt – trotz der Einführung eines Wertpapiere anbietenden

Fond-Manager – das Vorzeichen des Einflusses eines einzelnen Konsumenten auf den Wertpapierpreis eindeutig bestimmt.

Zur Vervollständigung des Wertpapiermarktgleichgewichts bleibt die Bestimmung der Höhe der Marktteilnahme. Diese zählt diejenigen Konsumenten, die zu einem festgelegten Wertpapierpreis eine positive Wertpapiernachfrage besitzen. Nach Definition 3.3 ist sie durch die Summe endlich vieler Indikatorfunktionen<sup>18</sup>

$$p \mapsto k^*(p, \mu) = \sum_{i=1}^N 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}]}(p).$$

definiert. Diese Definition ist in Kapitel 3 ursprünglich für einen Wertpapiermarkt mit konstantem Angebot entwickelt worden. In dem in diesem Kapitel vorliegendem Modell gibt es einen Fond-Manager, der zu jedem Wertpapierpreis auf dem Wertpapiermarkt agiert und Wertpapiere anbietet. Somit müsste zu  $k^*$  stets Eins addiert werden. Der Fond-Manager ist jedoch in jedem Fall auf dem Wertpapiermarkt aktiv, so dass im Folgenden Marktteilnahme immer nur die Konsumenten zählt, die Wertpapiere nachfragen. Diese Konvention ermöglicht Vergleiche zu den Ergebnissen aus Kapitel 3. Der folgende Satz bestimmt die Höhe der Marktteilnahme (entspricht der Anzahl am Markt teilnehmender Konsumenten) für den markträumenden Wertpapierpreis aus Gleichung (4.37).

**Satz 4.20**

Die Annahmen 3.1 und 4.18 seien erfüllt. Dann gilt

$$\bar{k} = k^*(\tilde{S}(\xi, \mu^f), \mu).$$

**Beweis von Satz 4.20:**

Durch Einsetzen des Wertpapierpreises in die Definition der Marktteilnahme ergibt sich

$$k^*(\tilde{S}(\xi, \mu^f), \mu) = \sum_{i=1}^N 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}]}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)).$$

Wegen der Nummerierungseigenschaft aus Annahme 3.1 reicht es,

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) < \frac{\mu^{\bar{k}}}{R}$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i2}}}{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i2}} + R + 1} - \frac{\mu^{\bar{k}}}{R} &= \mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i2}} - \mu^{\bar{k}} \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i2}} - \frac{R + 1}{R} \mu^{\bar{k}} \\ &= \mu^f + z_{\bar{k}}. \end{aligned}$$

---

<sup>18</sup>Die Marktteilnahme ist eine Funktion  $k^*$ , die für jeden möglichen positiven Wertpapierpreis definiert ist. Es wird sich im Verlauf der Analyse zeigen, unter welchen Umständen  $k^*$  den Wert  $\bar{k}$  annimmt.

Nach Satz 4.19 gilt  $\mu^f + z_{\bar{k}} < 0$ . □

Satz 4.20 unterstreicht die große Bedeutung der individuellen Charakteristiken der Konsumenten und des Erwartungswertes des Fond-Managers für die Höhe der Marktteilnahme. Durch die Variation der subjektiven Charakteristiken kann sich somit auch die Höhe der Marktteilnahme verändern.

**Lemma 4.21**

Die Annahmen 3.1 und 4.18 seien erfüllt. Weiter seien  $\delta, \epsilon, \eta, \kappa > 0$ . Dann gilt mit  $e^j$  als  $j$ -ten Einheitsvektor,  $j = 1, \dots, N$ ,

- (i)  $k^* \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f), \mu \right) \geq k^* \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f + \delta), \mu \right)$
- (ii)  $k^* \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f), \mu \right) \geq k^* \left( \tilde{S}(\alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^2, \mu^f), \mu + \epsilon \cdot e^j \right)$
- (iii)  $k^* \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f), \mu \right) \leq k^* \left( \tilde{S}(\alpha + \eta \cdot e^j, \mu, \sigma^2, \mu^f), \mu \right)$
- (iv)  $k^* \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f), \mu \right) \leq k^* \left( \tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2 + \kappa \cdot e^j, \mu^f), \mu \right)$

**Beweis von Lemma 4.21:**

ad (i): Wegen

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) \leq \tilde{S}(\xi, \mu^f + \delta)$$

gilt für alle  $i = 1, \dots, \bar{k}$

$$1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]} \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f) \right) \geq 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]} \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f + \delta) \right).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich die Behauptung (i).

ad (ii): Für alle  $i \in \mathcal{I}$ ,  $i \neq 1$  gelte o.B.d.A. die Ungleichung<sup>19</sup>

$$\frac{\mu^i + \epsilon}{R} < \frac{\mu^{i-1}}{R}.$$

Es gilt

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) \leq \tilde{S}(\alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^2, \mu^f)$$

und somit für alle  $i \leq \bar{k}$ ,  $i \neq j$

$$1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]} \left( \tilde{S}(\xi, \mu^f) \right) \geq 1_{\left[0, \frac{\mu^i}{R}\right]} \left( \tilde{S}(\alpha, \mu + \epsilon \cdot e^j, \sigma^{j^2}, \mu^f) \right). \quad (4.38)$$

---

<sup>19</sup>Stimmt die Ungleichung nicht, so müssen die Konsumenten neu sortiert werden, damit die Annahme 3.1 wieder erfüllt ist.



Für  $i = j \leq \bar{k}$  ergibt sich wegen

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) \leq \frac{\mu^{\bar{k}}}{R} < \frac{\mu^i}{R} < \frac{\mu^i + \epsilon}{R}$$

die Gleichheit

$$1_{[0, \frac{\mu^j}{R}[}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)) = 1_{[0, \frac{\mu^j + \epsilon}{R}[}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)).$$

Daraus folgt

$$1_{[0, \frac{\mu^j}{R}[}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)) \geq 1_{[0, \frac{\mu^j + \epsilon}{R}[}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)). \quad (4.39)$$

Aufsummieren der Ungleichungen (4.38) und der Ungleichung (4.39) liefert die Behauptung (ii).

**ad (iii):** Wegen

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) \geq \tilde{S}(\alpha + \eta \cdot e^j, \mu, \sigma^2, \mu^f)$$

gilt für alle  $i = 1, \dots, \bar{k}$

$$1_{[0, \frac{\mu^i}{R}[}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)) \leq 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}[}(\tilde{S}(\alpha + \eta \cdot e^j, \mu, \sigma^2, \mu^f)).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich die Behauptung (iii).

**ad (iv):** Wegen

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) \geq \tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2 + \kappa \cdot e^j, \mu^f)$$

gilt für alle  $i = 1, \dots, \bar{k}$

$$1_{[0, \frac{\mu^i}{R}[}(\tilde{S}(\xi, \mu^f)) \leq 1_{[0, \frac{\mu^i}{R}[}(\tilde{S}(\alpha, \mu, \sigma^2 + \kappa \cdot e^j, \mu^f)).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich die Behauptung (iv). □

Lemma 4.21 zeigt, inwieweit die Konsumenten und der Fond-Manager zur Veränderung der Marktteilnahme beitragen können. Optimismus der Konsumenten kann die Marktteilnahme senken, da zunehmender Optimismus zu höheren Wertpapierpreisen führt und diese mit einer geringeren Nachfrage korrespondieren. Steigt der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers, nimmt also sein Pessimismus zu, so erhöht sich ebenfalls der Wertpapierpreis und gleichzeitig sinkt, bei ausreichendem Anstieg, die Marktteilnahme.

Weiter führen sowohl eine zunehmende Risikoaversion als auch eine zunehmende subjektive Varianz – die mit einem sinkendem Wertpapierpreis korrespondiert – zu einer möglichen Erhöhung der Marktteilnahme.

Abbildung 4.6 zeigt die Konturlinien der Marktteilnahme in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten. Die Risikoaversion dieses Konsumenten beträgt 2. Die Charakteristiken der übrigen Konsumenten ist mit

$$\begin{aligned}\alpha &= (1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 1.0, 1.0), \\ \mu &= (11.0, 8.0, 7.0, 6.5, 6.0, 5.6, 5.5, 5.1, 5.0, 4.8, 4.1, 4.0)\end{aligned}$$

und weiter mit  $\sigma^{i^2} = 1$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  festgesetzt. Der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers ist mit  $\mu^f = 0.1$  und die risikolose Rendite mit  $R = 1.02$  bestimmt.

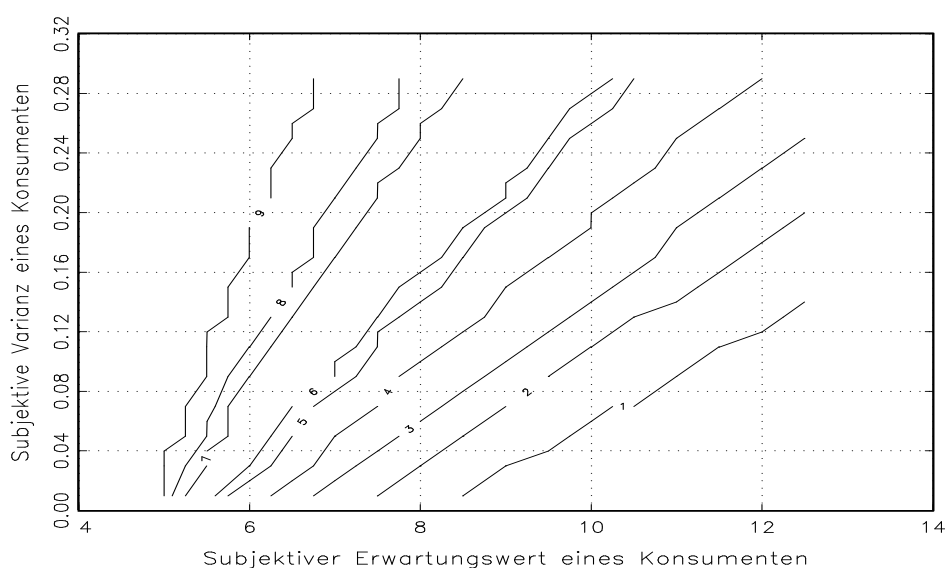


Abbildung 4.6: Konturlinien der Marktteilnahme in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten.

Dabei führt in dem vorliegenden Fall ein Anstieg des subjektiven Erwartungswertes bzw. ein Abfall der subjektiven Varianz zu einer Senkung der Marktteilnahme. Steigender Optimismus des betrachteten Konsumenten bringt nach und nach die weniger optimistischen Konsumenten dazu, den Markt zu verlassen und reduziert somit die Marktteilnahme. Steigt der subjektive Erwartungswert immer weiter, so nimmt irgendwann nur noch dieser Konsument am Wertpapiermarkt teil. Die Ergebnisse aus Abbildung 4.6

stimmen qualitativ mit denen aus Abbildung 3.3 im Fall eines konstanten Wertpapierangebots überein. Somit zeigt sich, daß die Erweiterung des Modells um einen Wertpapiere anbietenden Fond-Manager keine wesentliche qualitative Änderung in Bezug auf die Interaktion zwischen Konsumentencharakteristiken, Wertpapierpreis und Marktteilnahme nach sich zieht.

### 4.9.2 Das Handelsvolumen

Analog zu Abschnitt 4.8.2 und unter den Annahmen 3.1 und 4.18 zählt das Handelsvolumen die Anzahl der Wertpapiere, die zu einem bestimmten Zeitpunkt ihren Besitzer wechseln, wenn das Angebot des Fond-Managers zwischen seinem Minimal- und seinem Maximalangebot liegt. Nach Gleichung (4.13) aus Definition 4.8 gilt somit<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} vol(\xi, \mu^f) &= (R + 1)\tilde{S}(\xi, \mu^f) - \mu^f \\ &= \frac{(R + 1) \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}} - R\mu^f \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}}}{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} + R + 1}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Sämtliche subjektiven Charakteristiken von Konsumenten und Fond-Manager sowie die risikolose Rendite sind für die Höhe des Handelsvolumens von Bedeutung. Tabelle 4.8 enthält die Ergebnisse der komparativ-statischen Analyse für  $i \leq \bar{k}$ .

$\partial$	$\alpha^i$	$\mu^i$	$\sigma^{i^2}$	$\mu^f$	$R$	$\bar{k}$
$vol(\xi, \mu^f)$	-	+	-	-	-	-

Tabelle 4.8: Komparative Statik des Handelsvolumens.

Diese belegen die Korrespondenz höherer subjektiver Erwartungswerte des Fond-Managers mit geringerem Handelsvolumen. Weiter führen höhere subjektive Erwartungswerte der Konsumenten zu höherem Handelsvolumen. Eine höhere Risikoaversion und höhere subjektive Varianz eines am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten korrespondieren – wie intuitiv erwartet – mit einem geringerem Handelsvolumen. Eine

<sup>20</sup>Die hier mit  $vol(\cdot, \cdot)$  bezeichnete Funktion beschreibt das Handelsvolumen in Abhängigkeit der Risikoaversion, des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines jeden Konsumenten und des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers. In Abschnitt 4.8.2 wird das Handelsvolumen ebenfalls mit  $vol$  bezeichnet. Die Funktionen sind jedoch unterschiedlich und besitzen verschiedene Definitionsräume.

geringere Anzahl an Marktteilnehmern führt zu höherem Handelsvolumen. Dieses Ergebnis begründet sich in der Tatsache, dass eine hohe Marktteilnahme zu einem kleinen Wertpapierpreis und damit zu einem geringem Handelsvolumen führt. Ein Anstieg der risikolosen Rendite senkt das Handelsvolumen. Sehr hohe Renditen für die risikolose Anlage machen den Kauf risikobehafteter Wertpapiere weniger attraktiv. Somit werden weniger Wertpapiere gehandelt.

In Abbildung 4.7 werden die Konturlinien des Handelsvolumens in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten gezeigt. Die Risikoaversion dieses Konsumenten beträgt 2. Die übrigen Konsumenten sind durch die Parameter

$$\alpha = (2.0, 1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 1.0, 1.0) \quad \text{und}$$

$$\mu = (11.0, 8.0, 7.0, 6.5, 6.0, 5.6, 5.5, 5.1, 5.0, 4.8, 4.1, 4.0)$$

sowie  $\sigma^{i^2} = 1$  für alle  $i \in \mathcal{I}$  charakterisiert. Weiter gilt  $\mu^f = 0.51$  und  $R = 1.02$ .

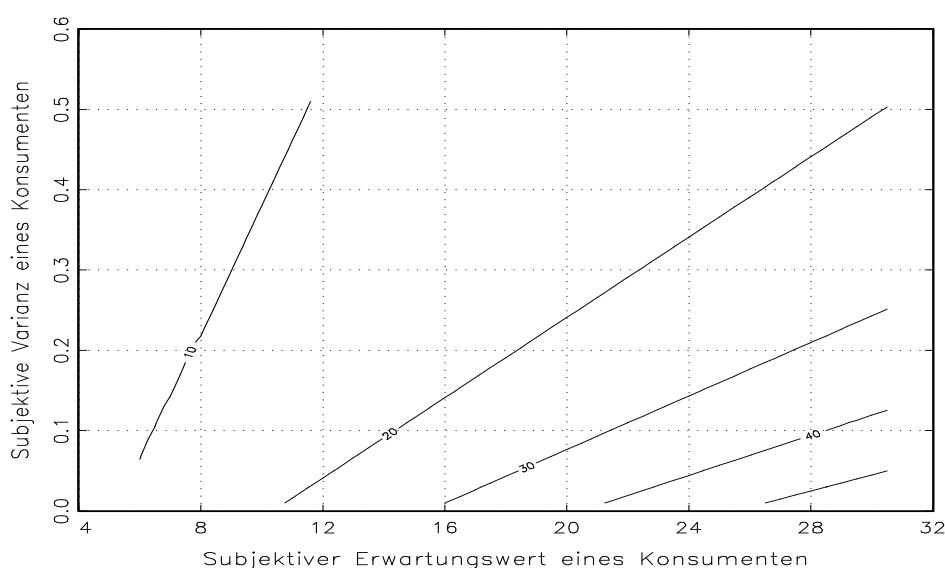


Abbildung 4.7: Konturlinien der Handelsvolumens in Abhängigkeit des subjektiven Erwartungswertes und der subjektiven Varianz eines beliebigen Konsumenten.

Die Abbildung zeigt, dass das Handelsvolumen mit zunehmendem Optimismus des betrachteten Konsumenten steigt. Ebenso steigt es mit sinkender Varianz. Diese Abbildung bestätigt die Resultate aus Tabelle 4.8. Die Zusammenlegung der Abbildung 4.6 und der Abbildung 4.7 impliziert, dass ein hohes Handelsvolumen nur mit einer geringen Marktteilnahme erzielt werden kann.

### 4.9.3 Vermögen des Fond-Managers

Das Vermögen des Fond-Managers ist – im Gegensatz zum Wertpapierpreis oder dem Handelsvolumen – eine von der betrachteten Periode  $t$  abhängige Größe. Dies gilt auch, wenn die Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers in jeder Periode identisch sind. Dann bezeichnet

$$\begin{aligned}
 w_t(\xi, \mu^f) &= R^t \omega + \text{vol}(\xi, \mu^f) \left[ R\tilde{S}(\xi, \mu^f) - \frac{\text{vol}(\xi, \mu^f)}{2} \right] \frac{R^{t+1} - 1}{R - 1} \\
 &= R^t \omega + \frac{(R + 1)\Upsilon_{\bar{k}} - R\mu^f \Lambda_{\bar{k}}}{2(R\Lambda_{\bar{k}} + R + 1)^2} \\
 &\quad \cdot [R\mu^f (2 + \Lambda_{\bar{k}} + \Upsilon_{\bar{k}}(R - 1))] \frac{R^{t+1} - 1}{R - 1}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

das Vermögen des Fond-Managers in der Periode  $t$ . Dabei definiert

$$\Lambda_{\bar{k}} := \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} \quad \text{und} \quad \Upsilon_{\bar{k}} := \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}.$$

$\alpha^i$  und  $\sigma^{i^2}$  können als „Parameter der Unsicherheit“ eines beliebigen Konsumenten  $i$  bezeichnet werden und somit beschreibt  $\Lambda_{\bar{k}}$  die Summe der inversen Unsicherheitsparameter aller Konsumenten, die am Wertpapiermarkt teilnehmen.  $\Upsilon_{\bar{k}}$  summiert die Quotienten aus subjektiven Erwartungswert und dem Produkt der Unsicherheitsparameter aller am Markt teilnehmenden Konsumenten auf. Diese Quotienten messen das Verhältnis aus Optimismus und Unsicherheit.

Das Vermögen des Fond-Managers aus Gleichung (4.41) ist in jeder beliebigen Periode  $t$  positiv, und es gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t(\xi, \mu^f) = \infty$ . Dieses Ergebnis basiert auf der Tatsache, dass sowohl der Wertpapierpreis als auch das Handelsvolumen zeitunabhängig sind. Unter Annahme 4.18 macht der Fond-Manager keine Verluste. Im Laufe der Zeit mehrt sich sein Vermögen und ist nach oben unbeschränkt.

Die komparativ-statische Analyse des Vermögens aus Gleichung (4.41) liefert ein eindeutiges Ergebnis. Lediglich der Anstieg des subjektiven Erwartungswertes eines am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten erhöht das Vermögen des Fond-Managers. Somit macht Optimismus der Konsumenten den Fond-Manager „reich“. Die Veränderung der übrigen Parameter kann sowohl zu einer Erhöhung als auch zu einer Senkung des Vermögens führen. Die Betrachtung des Vermögens als Funktion des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers mit beliebigen, aber festen Charakteristiken der Konsumenten liefert eine quadratische Funktion des subjektiven Erwartungswertes  $\mu^f$  mit absolutem Minimum für  $\mu^f = \frac{(R+1)\Upsilon_{\bar{k}}}{2R\Lambda_{\bar{k}}}$ . Für subjektive Erwartungswerte, die kleiner als dieser Wert sind, fällt das Vermögen des Fond-Managers. Überschreiten seine

Erwartungen diesen Wert, steigt sein Vermögen mit zunehmendem subjektiven Erwartungswert. Das Vermögen ist für jeden Wert  $\mu^f > 0$  positiv. Das folgende Lemma fasst diese Überlegungen zusammen.

**Lemma 4.22**

Die Annahmen 3.1 und 4.18 seien erfüllt. Ein steigender subjektiver Erwartungswert des Fond-Managers erhöht genau dann sein Vermögen, wenn die Ungleichung

$$\mu^f < \frac{R+1}{2R} \frac{\Upsilon_{\bar{k}}}{\Lambda_{\bar{k}}}$$

erfüllt ist.

**Beweis von Lemma 4.22:**

Es gilt mit  $C := 2 + \Lambda_{\bar{k}} + \Upsilon_{\bar{k}}(R-1)$

$$\frac{\partial}{\partial \mu^f} w_t(\xi, \mu^f) = \frac{R^{t+1} - 1}{R-1} \frac{RC}{2(R\Lambda_{\bar{k}} + R + 1)^2} [(R+1)\Upsilon_{\bar{k}} - R\mu^f \Lambda_{\bar{k}}].$$

Diese partielle Ableitung ist genau dann positiv, wenn die Ungleichung

$$\mu^f < \frac{R+1}{2R} \frac{\Upsilon_{\bar{k}}}{\Lambda_{\bar{k}}}.$$

Das ist die Behauptung. □

Gilt in der Ungleichung aus Lemma 4.22 „>“, so sinkt das Vermögen des Fond-Managers, wenn sein subjektiver Erwartungswert sehr groß ist. Große subjektive Erwartungswerte des Fond-Managers symbolisieren seinen großen Pessimismus, denn er erwartet für die nächste Periode hohe Kosten, die ihm durch die Rückzahlungen an die Konsumenten entstehen. Dieses Ergebnis erscheint intuitiv.

Im Folgenden werden die Korrelationen des Wertpapierpreises, des Handelsvolumens und des Vermögens analysiert.

**Lemma 4.23**

Annahmen 3.1 und 4.18 seien erfüllt. Dann ist das Vermögen des Fond-Managers positiv mit dem Wertpapierpreis und dem Handelsvolumen korreliert.

**Beweis von Lemma 4.23:**

Mit Definition (4.40)

$$vol(\xi, \mu^f) = (R+1)\tilde{S}(\xi, \mu^f) - \mu^f$$

gilt nach Gleichung (4.41) für das Vermögen des Fond-Managers

$$w_t(\xi, \mu^f) = \frac{1}{2} \left[ (R^2 - 1) \tilde{S}(\xi, \mu^f) + 2\mu^f \tilde{S}(\xi, \mu^f) - \mu^{f^2} \right].$$

Das liefert die positive Korrelation zwischen Vermögen des Fond-Managers und dem Wertpapierpreis.

Für den zweiten Teil der Behauptung lässt sich die Definition des Handelsvolumens (4.40) zu

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) = \frac{1}{R+1} [\text{vol}(\xi, \mu^f) + \mu^f]$$

umschreiben. Damit ergibt sich für das Vermögen

$$w_t(\xi, \mu^f) = R^t \omega + \frac{1}{2(R+1)} \text{vol}((\xi)_i, \mu^f) [(R-1) \text{vol}((\xi)_i, \mu^f) + 2R\mu^f] \frac{R^{t+1} - 1}{R-1}.$$

Das liefert die positive Korrelation zwischen Vermögen und Handelsvolumen.  $\square$

Lemma 4.23 zeigt die positive Korreliertheit des Vermögens des Fond-Managers sowohl mit dem Handelsvolumen als auch mit dem Wertpapierpreis. Somit machen „reger“ Handel mit einer „großen“ Anzahl „teurer“ Wertpapiere den Fond-Manager „reich“. Dieses Ergebnis stimmt mit der intuitiven Erwartung überein.

#### 4.9.4 Risikozuschläge

Der Quotient aus cum dividend Wertpapierpreis in Periode  $t+1$  und dem ex dividend Wertpapierpreis in Periode  $t$  beschreibt den risikobehafteten Wertpapierertrag in Periode  $t+1$ . Unter Annahme 3.1 und Annahme 4.18 wird – analog zu den Betrachtungen der Risikozuschläge in den Kapiteln 2 und 3 – der Risikozuschlag in Periode  $t+1$  durch

$$\frac{\tilde{S}(\xi, \mu^f) + D_{t+1}}{\tilde{S}(\xi, \mu^f)} - R = 1 - R + \frac{D_{t+1}}{\tilde{S}(\xi, \mu^f)} \quad (4.42)$$

$$= 1 - R + D_{t+1} \frac{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} + R + 1}{\mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}}. \quad (4.43)$$

definiert. Er wird negativ, falls für  $\omega \in \Omega$

$$D_{t+1}(\omega) < (R-1) \frac{\mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}}{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} + R + 1} = (R-1) \tilde{S}(\xi, \mu^f).$$

gilt. Der Risikozuschlag in Periode  $t+1$  ist somit positiv, falls die Verzinsung des Wertpapierpreises eines Wertpapiers mit  $R-1$  kleiner als die Dividendenzahlung in Periode  $t+1$  ist.

Unter den Annahmen 2.10 und 2.16 definiert

$$MEP(d, \xi, \mu^f) := 1 - R + g(d) \cdot \frac{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} + R + 1}{\mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}}$$

den bedingten Erwartungswert des Risikozuschlags als Funktion der Dividendenzahlungen, der Risikoaversion, der subjektiven Erwartungswerte und der subjektiven Varianzen aller Konsumenten sowie des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers. Der erwartete Risikozuschlag steigt mit steigender Risikoaversion, mit steigender subjektiver Varianz oder mit steigender Anzahl der am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten. Weiter führen hohe subjektive Erwartungswerte sowohl der Konsumenten als auch des Fond-Managers zu kleineren erwarteten Risikozuschlägen. Das Vorzeichen des Einflusses der risikolosen Rendite auf den erwarteten Risikozuschlag wird durch die Höhe der bedingten Erwartung des Dividendenprozesses bestimmt. Für sehr hohe bedingte Dividendenerwartungen führt ein Anstieg der risikolosen Rendite zu höheren erwarteten Risikozuschlägen. Für sehr kleine Dividendenerwartungen kehrt sich – wie das folgende Lemma zeigt – das Ergebnis um.

**Lemma 4.24**

*Die Annahmen 3.1 und 4.18 seien erfüllt. Dann ist die partielle Ableitung des erwarteten Risikozuschlags nach der risikolosen Rendite genau dann positiv, wenn die Ungleichung*

$$g(d) > \frac{\mu^f + \Upsilon_{\bar{k}}}{\Lambda_{\bar{k}} + 1}$$

*erfüllt ist.*

**Beweis von Lemma 4.24:**

Die partielle Ableitung des erwarteten Risikozuschlags lautet

$$\frac{\partial}{\partial R} MEP(d, \xi, \mu^f) = -1 + g(d) \cdot \frac{\Lambda_{\bar{k}} + 1}{\mu^f + \Upsilon_{\bar{k}}}.$$

Diese ist genau dann positiv, wenn

$$g(d) > \frac{\mu^f + \Upsilon_{\bar{k}}}{\Lambda_{\bar{k}} + 1}.$$

Das ist die Behauptung. □

Die Varianz des Risikozuschlags lautet

$$VEP(d, \xi, \mu^f) := h(d) \cdot \left[ \frac{R \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{1}{\alpha^i \sigma^{i^2}} + R + 1}{\mu^f + \sum_{i=1}^{\bar{k}} \frac{\mu^i}{\alpha^i \sigma^{i^2}}} \right]^2.$$



Die Ergebnisse der komparativ-statischen Analyse für den erwarteten Risikozuschlag und dessen Varianz sind in Tabelle 4.9 summiert. Das Sternchen (\*) bedeutet, dass der Einfluss des betreffenden Parameters nicht eindeutig ist (vergleiche in diesem Fall Lemma 4.24).

$\partial$	$\alpha^i$	$\mu^i$	$\sigma^{i^2}$	$\mu^f$	$R$	$\bar{k}$
$MEP(d, \xi, \mu^f)$	+	-	+	-	*	+
$VEP(d, \xi, \mu^f)$	+	-	+	-	+	+

Tabelle 4.9: Komparative Statik des Erwartungswertes und der Varianz des Risikozuschlags.

Steigender Optimismus eines beliebigen am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten führt zu sinkenden Varianzen des Risikozuschlags. In diesem Fall sinken gleichzeitig die erwarteten Risikozuschläge. Somit korrespondieren geringere Varianzen mit geringeren Risikozuschlägen. Höhere erwartete Risikozuschläge mit höheren Varianzen werden durch höhere Risikoaversion bzw. höhere subjektive Varianzen impliziert. Ein Anstieg der risikolosen Rendite führt zu einer höheren Varianz des Risikozuschlags.

Qualitativ stimmen die Ergebnisse aus Tabelle 4.9 mit denen aus Tabellen 2.2, 2.4, 2.6, 3.3 und 4.5 überein. Die Einführung heterogener Konsumenten bzw. die Modellierung eines Wertpapiere anbietenden Fond-Managers ändern nichts an den qualitativen Merkmalen der ersten zwei Momente des Risikozuschlags. In allen Fällen führt steigender Optimismus der Konsumenten zu sinkenden erwarteten Risikozuschlägen und zu sinkenden Varianzen derselben. Weiter erhöhen hohe Risikoaversion und hohe subjektive Varianzen beide Momente der Risikozuschläge. Auch der uneindeutige Einfluss der risikolosen Rendite auf den Risikozuschlag ist in allen Szenarien gleich.

Die Ergebnisse der obigen komparativ-statischen Analysen führen zu der intuitiven Vermutung, dass der Risikozuschlag mit dem Wertpapierpreis negativ korreliert ist. Das folgende Lemma bestätigt diese Vermutung und zeigt, dass ein ähnlicher Zusammenhang auch für das Handelsvolumen gilt.

**Lemma 4.25**

*Die Annahmen 3.1 und 4.18 seien erfüllt. Dann ist der Risikozuschlag sowohl mit dem Wertpapierpreis als auch mit dem Handelsvolumen negativ korreliert.*

**Beweis von Lemma 4.25:**

Aus der Schreibweise des Risikozuschlags in Gleichung (4.43) folgt sofort die negative Korreliertheit von Wertpapierpreis und Risikozuschlag.

Für den zweiten Teil der Behauptung lässt sich die Definition des Handelsvolumens (4.40) zu

$$\tilde{S}(\xi, \mu^f) = \frac{1}{R+1} [\text{vol}(\xi, \mu^f) + \mu^f]$$

umschreiben. Damit ergibt sich für den Risikozuschlag

$$1 - R + \frac{D_{t+1}}{\tilde{S}(\xi, \mu^f)} = 1 - R + D_{t+1} \frac{R+1}{\text{vol}(\xi, \mu^f) + \mu^f}.$$

Somit sind Risikozuschlag und Handelsvolumen negativ korreliert.  $\square$

Haben die Konsumenten – analog zu Abschnitt 4.7 –  $\mu^f$ -erwartungstreue Markov-Kerne, so unterscheiden sie sich nicht mehr durch ihre subjektiven Erwartungswerte. Die Identität dieser Erwartungswerte führt zu einer vollständigen Marktteilnahme. Dieses Szenario – allerdings mit identischen subjektiven Varianzen und identischer Risikoaversion – wurde in Abschnitt 4.8 diskutiert. Die Ergebnisse dieses Abschnittes ändern sich durch die Berücksichtigung unterschiedlicher subjektiver Varianzen und Risikoaversionen nicht.

#### 4.9.5 Zusammenfassung

Durch die Erweiterung des Modells aus Abschnitt 4.8 um die Heterogenität der Konsumenten wird die Diskussion der Marktteilnahme möglich. Das Paar, bestehend aus markträumenden Wertpapierpreis und der Höhe der Marktteilnahme, beschreibt das Wertpapiermarktgleichgewicht. Während die Angebotsfunktion des Fond-Managers erhalten bleibt, ist die aggregierte Nachfragefunktion komplexer als die im Fall identischer Konsumenten. Sie ist stückweise linear. Die Tatsache einer heterogenen Population ändert den qualitativen Einfluss eines Konsumenten auf den Wertpapierpreis (im Vergleich zu identischen Konsumenten) nicht. Allerdings determinieren nur die individuellen Merkmale der am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten den Wertpapierpreis. Konsumenten, die den Wertpapiermarkt verlassen, verlieren jeglichen Einfluss. Vielmehr zeigt sich, dass der Wertpapierpreis steigt, je weniger Konsumenten auf dem Wertpapiermarkt handeln. Die Höhe der Marktteilnahme zählt sämtliche Konsumenten, die zum markträumenden Preis eine positive Wertpapiernachfrage haben. Die Marktteilnahme ist maßgeblich von den individuellen Charaktersitiken der Konsumenten abhängig. Mit zunehmendem Optimismus der Konsumenten sinkt die Marktteilnahme, während ein Anstieg der Risikoaversion oder der subjektiven Varianz zu einer höheren Marktteilnahme führt. Auch der Fond-Manager hat über seinen subjektiven Erwartungswert Einfluss

auf die Höhe der Marktteilnahme. Je pessimistischer er ist, d. h. je höher sein subjektiver Erwartungswert ist, desto weniger Konsumenten nehmen am Wertpapiermarkt teil.

Durch die Heterogenität der Konsumenten bestimmen die individuellen Charakteristiken der Konsumenten, die am Wertpapiermarkt teilnehmen, das Handelsvolumen. Qualitativ unterscheiden sich ihre Einflussmöglichkeiten nicht sehr von denen der identischen Konsumenten. Dennoch gilt auch hier, dass nur derjenige Konsument Einfluss besitzt, der auch am Wertpapiermarkt teilnimmt. Im Fall identischer Konsumenten erhöht eine Vergrößerung der Anzahl der Konsumenten auch die Höhe des Handelsvolumens. Im Fall heterogener Konsumenten führt ein Anstieg der Marktteilnahme zu einem geringeren Handelsvolumen. Die riskolose Rendite hat einen negativen Einfluss auf das Handelsvolumen. Je höher sie ist, desto mehr Konsumenten legen ihr Vermögen risikolos an und kaufen weniger riskobehaftete Wertpapiere.

Die einzige zeitabhängige Variable ist das Vermögen des Fond-Managers, es ändert sich von Periode zu Periode, auch wenn die individuellen Charakteristiken sämtlicher Konsumenten und des Fond-Managers – und damit der ex dividend Wertpapierpreis und das Handelsvolumen – über die Zeit konstant sind. In der hier diskutierten Klasse von Nutzen- und Kostenfunktionen erhöht sich das Vermögen des Fond-Managers durch einen Anstieg des subjektiven Erwartungswertes eines am Wertpapiermarkt teilnehmenden Konsumenten. Optimismus der Konsumenten macht also den Fond-Manager reich. Die Darstellung des Vermögens des Fond-Managers als Funktion seines subjektiven Erwartungswertes liefert eine quadratische Funktion mit einem absolutem Minimum. Ist der Fond-Manager nicht zu pessimistisch, wächst sein Vermögen. Zunehmender Pessimismus verringert sein Vermögen. Es besteht eine positive Korrelation seines Vermögens sowohl mit dem Wertpapierpreis als auch mit dem Handelsvolumen. Reger Handel mit vielen Wertpapieren, die möglichst viel kosten, lassen den Fond-Manager reicher werden. Ob der Anstieg der risikolosen Rendite einen positiven oder negativen Effekt auf den erwarteten Risikozuschlag besitzt, hängt von der Höhe der bedingten Dividendenerwartung ab. Pessimismus des Fond-Managers begünstigt dabei einen möglichen positiven Einfluss. Hohe erwartete Risikozuschläge und ihre Varianzen werden von einer hohen Marktteilnahme begleitet. Steigen die subjektiven Erwartungswerte der Konsumenten oder des Fond-Managers, so sinken der erwartete Risikozuschlag und seine Varianz. Der erwartete Risikozuschlag ist negativ mit dem Wertpapierpreis und negativ mit dem Handelsvolumen korreliert.

## 4.10 Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen

Die entscheidende „neue“ Komponente dieses Kapitels besteht aus der Berücksichtigung eines Fond-Managers. Ihm ist es möglich, Wertpapiere zu verkaufen. Allerdings muss er diese eine Periode später – unabhängig von der Wertpapiernachfrage der jungen Konsumenten – wieder zurückkaufen. Der Fond-Manager besitzt eine durch seine Kostenfunktion und seinen subjektiven Erwartungswert determinierte Wertpapierangebotsfunktion. Sie ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt. Dadurch ist der Handel des Fond-Managers mit den Konsumenten gesichert. Das Ausmaß dieses Handels ist endogen und in erster Linie von den subjektiven Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers abhängig. Die aktuellen Dividendenzahlungen haben keinen direkten Einfluss auf die Höhe des Handelsvolumens. Ändern die Konsumenten oder der Fond-Manager ihre individuellen Merkmale nicht im Laufe der Zeit, so ist das Handelsvolumen in jeder Periode identisch. Dasselbe gilt für den ex dividend Wertpapierpreis. Anders verhält es sich für das Vermögen des Fond-Managers. Selbst bei Konstanz sämtlicher individueller Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers ist dessen Vermögen eine zeitabhängige Variable. Diese ist – nach Konstruktion – maßgeblich durch die Wahl der Kostenfunktion determiniert. Das Vermögen des Fond-Managers ist abhängig von seinen subjektiven Erwartungen über den zukünftigen Wertpapierpreis. Stellen sich seine persönlichen Einschätzungen als zu positiv heraus, kann sein Vermögen negativ werden. Für stets konstante Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers ist dessen Vermögen entweder stets positiv oder stets negativ. Im Allgemeinen führt bereits ein von Periode zu Periode variierender subjektiver Erwartungswert des Fond-Managers zu einem nicht-monotonen Vermögen des Fond-Managers. Dieses kann im Zeitablauf sowohl positiv als auch negativ sein. Unter bestimmten Bedingungen an die Grenzkosten ist seine Angebotsentscheidung eine „innere“ Lösung seines Entscheidungsproblems. Die Höhe seines Vermögens ist allerdings unbedeutend für diese Entscheidung über die Höhe des Wertpapierangebots.

Die Modellierung eines Fond-Managers ermöglicht die Bestimmung eines markträumenden Wertpapierpreises, der sich aus der Gleichsetzung von Nachfrage und einem nicht-konstanten Angebot ergibt. Die Existenz einer eindeutigen inneren Lösung, d. h. weder Konsumenten noch Fond-Manager sind in ihren Entscheidungen an Nebenbedingungen gebunden, ist durch die aus Kapitel 3 bekannten Bedingungen und einer zusätzlichen Forderung an die Grenzkosten gesichert. Der ex dividend Wertpapierpreis wird durch

die subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaße der Konsumenten und dem subjektiven Erwartungswert des Konsumenten bestimmt. Für den cum dividend Wertpapierpreis hingegen sind auch noch die Spezifikationen der Dividendenzahlungen von Bedeutung. Nur wenn die Dividendenzahlungen durch einen stochastischen Prozess beschrieben sind, ist auch der cum dividend Wertpapierpreis stochastisch. In Kapitel 2 und Kapitel 3 besitzen die gleichgewichtigen Wertpapierpreise stets die *Cobweb*-Eigenschaft. Diese wird durch die Erweiterung des Modells um einen Fond-Manager nicht zerstört. Ziel dieser Erweiterung ist die Erzeugung eines nicht-konstanten Wertpapierangebots und somit eines nicht-konstanten Handelsvolumens. Dieses wird durch eine Funktion des Preises und der subjektiven Erwartung des Fond-Managers beschrieben. Das Handelsvolumen ist deterministisch und unabhängig vom Vermögen. Da das Handelsvolumen nicht vom Vermögen des Fond-Managers beeinflusst wird, ist es, solange sich die Konsumentencharakteristiken und die individuellen Merkmale des Fond-Managers über die Zeit nicht ändern, ebenfalls zeitunabhängig.

Die Berücksichtigung eines Fond-Managers eröffnet die Möglichkeit verschiedene Arten der „guten“ Prognosen zu betrachten. So fordert z. B. die Verwendung  $\mu^f$ -erwartungstreuer Markov-Kerne, dass sämtliche subjektiven Erwartungswerte der Konsumenten mit dem objektiven des cum dividend Wertpapierpreises übereinstimmen. Der subjektive Erwartungswert des Fond-Managers kann dabei beliebig sein. In diesem Fall können erwartete Risikozuschläge in Höhe von 6% (empirisch ermittelt) ohne die Annahme hoher Risikoaversionen generiert werden. Durch die zusätzliche Forderung nach rationalen Erwartungen des Fond-Managers gelingt das allerdings nicht mehr.

Das hier vorgestellte Modell kann problemlos um zeitabhängige Charakteristiken der Konsumenten oder des Fond-Managers erweitert werden. Dadurch wird die Analyse von Zeitreihen des Wertpapierpreises, des Handelsvolumens, der Risikozuschläge, etc. möglich. Ein erster Schritt kann die Endogenisierung des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers beinhalten. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten. Entweder bildet der Fond-Manager ein arithmetisches Mittel aus vergangenen Wertpapierpreisen oder er besitzt eine andere Funktionsvorschrift, die seinen subjektiven Erwartungswert in einer beliebigen Periode stimmt. Eine einfache Möglichkeit ist die Einführung einer stochastischen Komponente, sodass der subjektive Erwartungswert aus der Summe eines deterministischen und eines stochastischen Terms gebildet wird. Die Zeitreihe in Abbildung 4.8 illustriert eine mögliche Vermögensentwicklung für den Fond-Manager. Offensichtlich ist dieses weder stets positiv oder negativ. Die Entwicklung besitzt keine Regelmäßigkeit, sondern wird im Wesentlichen durch die stochastische Komponente be-

stimmt. Allein diese kleine stochastische Abänderung des subjektiven Erwartungswertes macht das Vermögen des Fond-Managers unkalkulierbar.

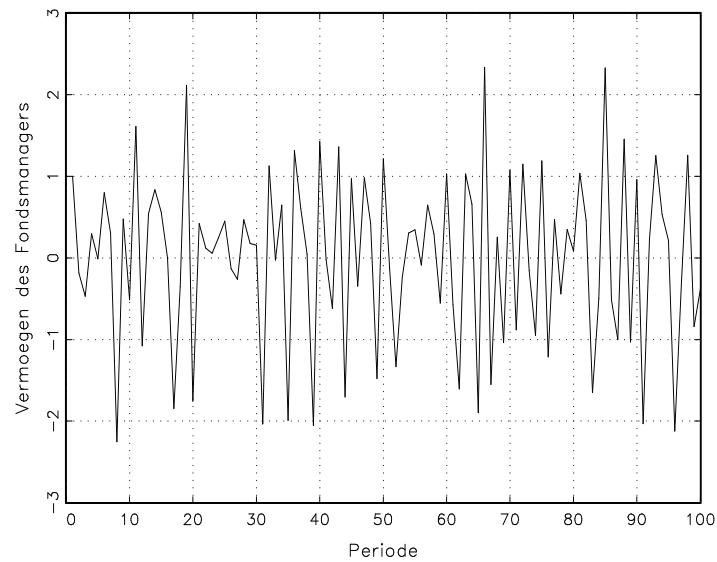


Abbildung 4.8: Zeitreihe des Vermögens des Fond-Managers.

Die Implementierung eines oder verschiedener Lernmechanismen kann sich anschließen. Das vorliegende Modell ist auf Grund seiner expliziten Modellierung geeignet, die Güte solcher Mechanismen mithilfe von Simulationen zu „testen“.

# Kapitel 5

## Schlussbemerkungen

Es wurde ein Wertpapiermarktmodell entwickelt, in dem Preise explizit in Abhängigkeit der Konsumentenspezifikationen determiniert sind. Die Struktur der überlappenden Generationen diente der Erzeugung von Handel zwischen jungen und alten Konsumenten. Dabei spielte es keine Rolle, ob die Konsumenten einer Generation identisch waren. Sämtliche Analysen wurden ohne die Annahme rationaler Erwartungen durchgeführt. Somit konnte der Einfluss nicht-rationaler Erwartungen der Konsumenten auf den Wertpapiermarkt und insbesondere auf den Wertpapierpreis und den Risikozuschlag untersucht werden. Die hier genutzte Art der Modellierung eines Marktmechanismus mit sequentieller Zeitstruktur führt zu einer endogenen Bestimmung aktueller Preise als Funktion von Präferenzen, Erstausstattungen und subjektiven Erwartungen. Dieser Zusammenhang unterstreicht die Bedeutung einer mikrotheoretischen Fundierung von Konsumenten als entscheidende Determinante für (stochastische) Wertpapierpreisprozesse. Die Nachfrage nach Wertpapieren hängt essentiell von den subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Konsumenten über zukünftige Erträge ab. Die Interaktion zwischen diesen Konsumentenspezifikationen und der Preisbildung sind der Schlüssel zum Verständnis des Wertpapierpreisprozesses.

In allen Kapiteln wurden unterschiedlich parametrisierte Klassen analytisch handhabbarer Ökonomien z. B. mit CARA-Nutzenfunktionen und Exponential-Verteilungen oder Mittelwert-Varianz-Präferenzen untersucht. Diese Spezifikationen ermöglichten eine umfassende Analyse über die Rolle der Risikoaversion, der subjektiven Erwartungen und der Anzahl der Konsumenten für den Wertpapierpreis und den Risikozuschlag. Es zeigte sich, dass die einzelnen Konsumenten großen Einfluss auf die Variablen des Modells haben. So hatten z. B. pessimistische Erwartungen einen negativen Effekt auf den Wertpapierpreis, aber einen positiven auf den erwarteten Risikozuschlag. Auch die An-

zahl der Konsumenten in der Ökonomie war von Bedeutung. Mit zunehmender Anzahl der Konsumenten wurde der Einfluss der Risikoaversion auf den erwarteten Risikozuschlag immer kleiner, bis er im Grenzwert verschwand. Der große Einfluss der subjektiven Erwartungswerte der Konsumenten blieb jedoch bestehen. Unter rationalen Erwartungen wurde der erwartete Risikozuschlag negativ, falls die Population eine bestimmte Größe erreichte. Auch die Berücksichtigung eines Fond-Managers in der Ökonomie ermöglichte die Berechnung des erwarteten Risikozuschlags und zeigte, dass subjektive Erwartungen des Fond-Managers für die Berechnung wichtig sind. Somit boten sämtliche Untersuchungen des erwarteten Risikozuschlags neue Einsichten in das von Mehra & Prescott (1985) entdeckte Equity Premium Puzzle. Allerdings wurden in den vorliegenden Analysen stets andere Nutzenspezifikationen als in Mehra & Prescott (1985) verwendet. Es wäre somit interessant, die von ihnen benutzte CRRA-Nutzenfunktion zu implementieren und die Ergebnisse mit den hier vorliegenden zu vergleichen. Diese Implementierung kann auf Grund der Komplexität des Modells bei Annahme einer CRRA-Nutzenfunktion nur numerisch erfolgen.

Ein weiterer Schwerpunkt der Untersuchungen betraf den Einfluss der Heterogenität von Konsumenten auf den Wertpapiermarkt und insbesondere auf den Wertpapierpreis und -ertrag. Durch die mikrofundierte Modellierung war die Untersuchung der individuellen Entscheidung über die Wertpapiermarktteilnahme möglich. Es zeigte sich, dass nur Konsumenten mit hinreichend viel Optimismus am Wertpapiermarkt teilnehmen. Die Höhe der Risikoaversion ist dabei unbedeutend. Die Höhe der Marktteilnahme wurde durch eine Funktion sämtlicher individueller Charakteristiken der Konsumenten beschrieben. Es nahmen genau dann alle Konsumenten am Wertpapiermarkt teil, wenn sie identische (möglicherweise nicht-rationale) Erwartungen besaßen. Hatten die Konsumenten unterschiedliche subjektive Erwartungswerte, so korrespondierten kleine Wertpapierpreise zu einer vollständigen Marktteilnahme und hohe Wertpapierpreise zu einer geringen.

Ziel der Implementierung eines Fond-Managers war die Erzeugung eines nicht-konstanten Wertpapierangebotes, die eine Analyse des Handelsvolumens ermöglichte. Eine Funktion des Wertpapierpreises und der subjektiven Erwartung des Fond-Managers beschrieb das Handelsvolumen. Es war deterministisch und unabhängig vom Vermögen, die aktuellen Dividendenzahlungen besaßen keinen Einfluss. Solange die Konsumentencharakteristiken und die individuellen Merkmale des Fond-Managers über die Zeit unverändert blieben, war das Handelsvolumen ebenfalls zeitunabhängig. Das Vermögen des Fond-Managers war selbst bei Konstanz sämtlicher individueller Charakteristiken der Konsumenten und des Fond-Managers eine zeitabhängige Variable. Diese wurde



maßgeblich durch die Wahl der Kostenfunktion determiniert. Das Vermögen des Fond-Managers beschrieb eine Funktion seiner subjektiven Erwartungen über den zukünftigen Wertpapierpreis. Stellten sich seine persönlichen Einschätzungen als zu positiv heraus, konnte sein Vermögen negativ werden. Überraschend war, dass ein Anstieg des subjektiven Erwartungswertes des Fond-Managers zu einem höheren markträumenden Wertpapierpreis führte, sich der erwartete Risikozuschlag jedoch durch einen Anstieg verringerte. Je mehr Konsumenten am Wertpapiermarkt teilnahmen, desto geringer wurde der Einfluss des Fond-Managers auf den Wertpapierpreis und den Risikozuschlag.

Das Modell bietet Ansatzpunkte für weitere Forschungsarbeiten. Eine Möglichkeit der Erweiterung betrifft die Modellierung der Erwartungsbildung. Bisher wurde stets unterstellt, dass die Konsumenten und auch der Fond-Manager exogen gegebene und über die Zeit unveränderliche subjektiven Erwartungen besitzen. Ein nächster Schritt könnte somit die Implementierung einfacher Erwartungsbildung bis hin zur Modellierung von Lernverhalten sein. Die Modellkomplexität erfordert es, diese Modelle elektronisch zu implementieren. Die Simulationsergebnisse geben Aufschluss über das langfristigen Verhalten.

Die Analyse parametrischer Spezifikationen explizit gegebener Prozesse macht empirische Hypothesentests erst möglich, da die Systeme numerisch simuliert werden können. Auf Grund des strukturellen Zusammenhangs zwischen den individuellen Merkmalen der Konsumenten und dem erwarteten Risikozuschlag können Vermutungen z. B. über die Risikoaversion numerisch überprüft werden. Dieser Umstand ist ein großer Vorteil der hier vorgestellten expliziten Modellierung von ökonomischen Variablen gegenüber dem traditionellen impliziten Gleichgewichtsansatz.

Das vorliegende Modell expliziter Wertpapierpreis-, Risikozuschlags- und Handelsvolumensprozesse ermöglicht die Implementierung verschiedenster Erwartungsbildungen. Da sämtliche Analysen mit unspezifizierten und exogen gegebenen subjektiven Erwartungen bzw. Verteilungen durchgeführt wurden, können diese leicht um eine konkrete Vorschrift der Erwartungsbildung erweitert werden. So können auch Lernmechanismen auf ihre Güte hin überprüft werden. Ergibt sich ein von der betrachteten Periode abhängiger Wertpapierpreis, wird die Definition der Erwartungstreue eine von der betrachteten Periode abhängige Größe.

# Kapitel 6

## Abbildungen

Dieses Kapitel enthält einige Abbildungen, auf die in den vorangegangenen Kapiteln Bezug genommen wird.

### 6.1 Modell mit überlappenden Generationen

Die folgende Abbildung enthält Konturlinien für CARA-Nutzenfunktionen und die Gamma-Verteilung. Auf sie wird in Abschnitt 2.5.2 verwiesen.

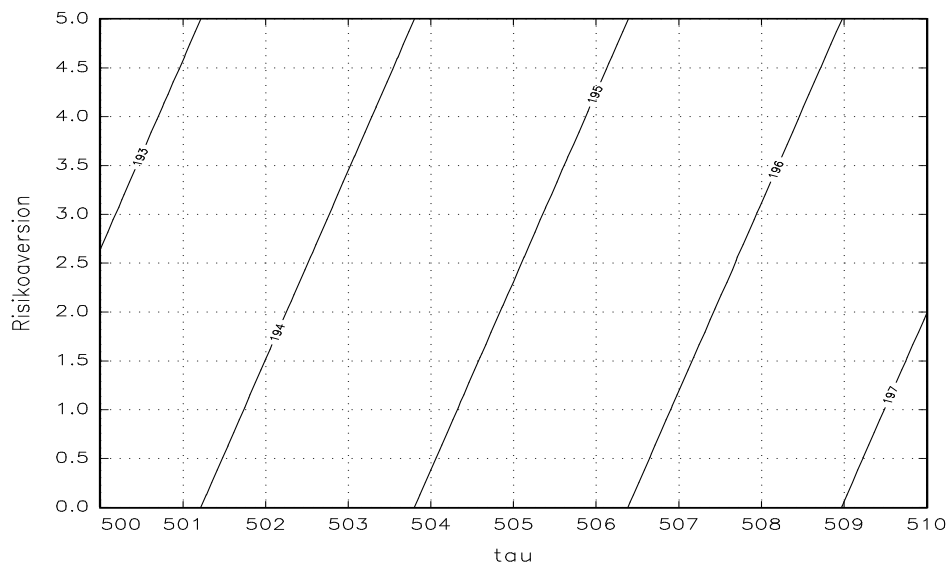


Abbildung 6.1: Konturlinien von  $\bar{v}(\tau, d, \alpha)$  für  $\tau > \frac{1}{R-1}$ .

## 6.2 Variables Wertpapierangebot

Die folgenden vier Abbildungen zeigen Konturlinien des Wertpapierpreises und des Handelsvolumens. Dabei wird in allen Abbildungen  $\sigma^2 = 1$ ,  $\alpha = 1$  und  $R = 1.02$  unterstellt. Lediglich die Größe der Population variiert. Auf die Abbildungen 6.2 – 6.5 wird in Abschnitt 4.8.2 verwiesen.

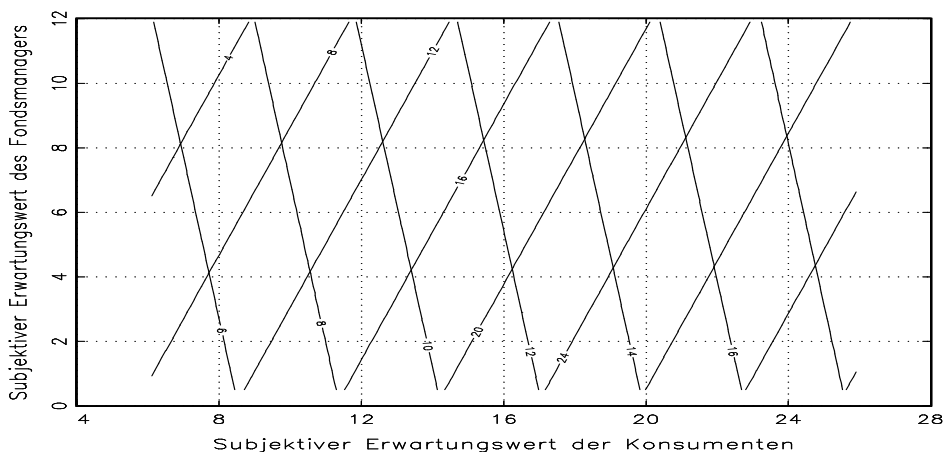


Abbildung 6.2: Konturlinien des Wertpapierpreises und des Handelsvolumens für 5 identische Konsumenten.

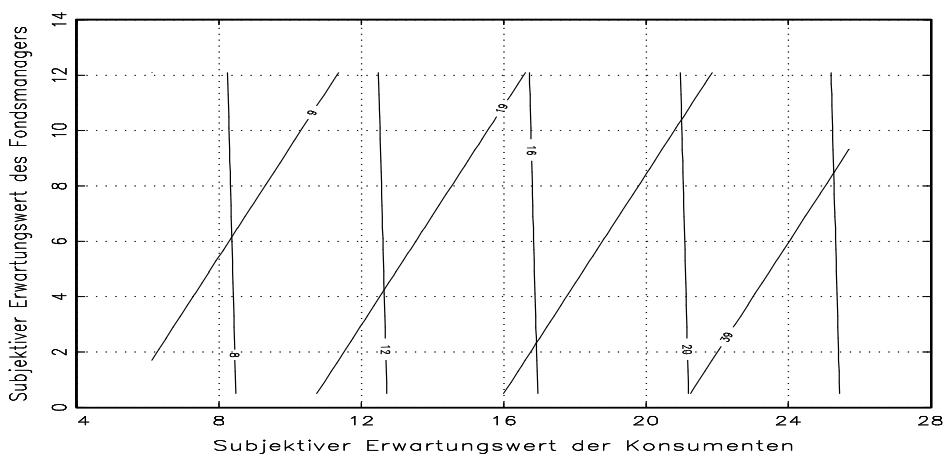


Abbildung 6.3: Konturlinien des Wertpapierpreises und des Handelsvolumens für 50 identische Konsumenten.

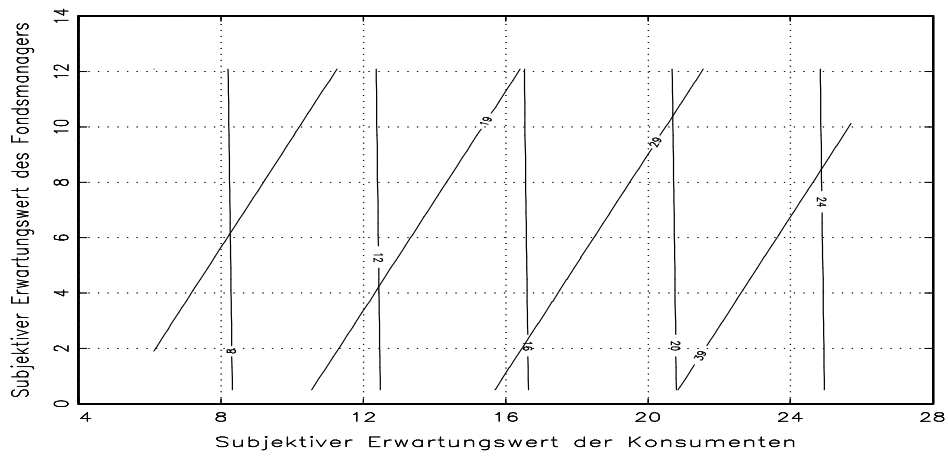


Abbildung 6.4: Konturlinien des Wertpapierpreises und des Handelsvolumens für 100 identische Konsumenten.

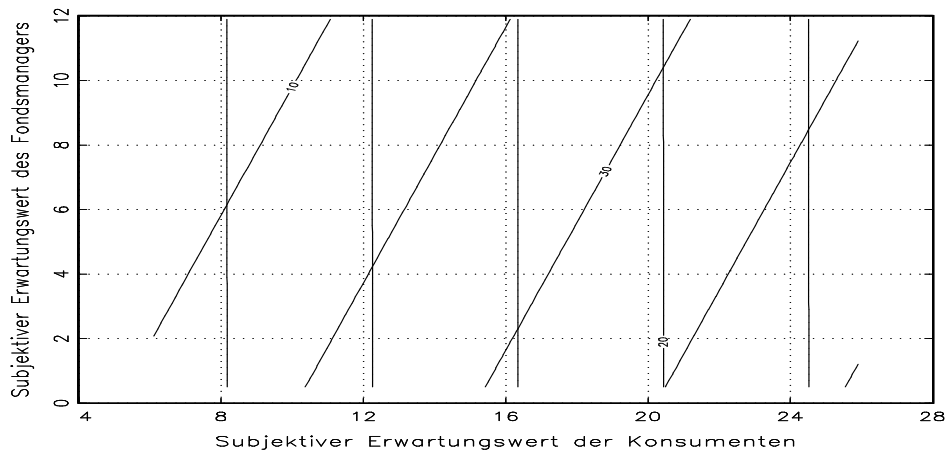


Abbildung 6.5: Konturlinien des Wertpapierpreises und des Handelsvolumens für 1000 identische Konsumenten.

In Abschnitt 4.8.5 wird auf die Abbildung 6.6 der Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags verwiesen.

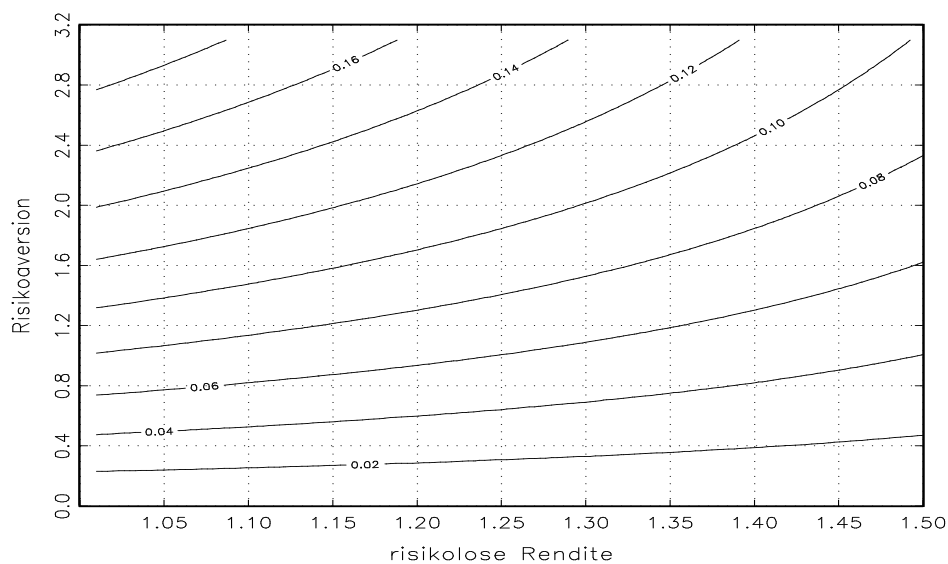


Abbildung 6.6: Konturlinien des erwarteten Risikozuschlags mit  $\mu^f$ -erwartungstreuen Markov-Kernen der Konsumenten mit  $g(d) = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 1.9$ ,  $\mu^f = 1.5$ ,  $N = 80$ .

# Literaturverzeichnis

- ABEL, A. B. (1990): “Asset Prices Under Habit Formations and Catching up with the Joneses”, *American Economic Review*, 80, 38–42.
- (1999): “Risk Premia and Term Premia in General Equilibrium”, *Journal of Monetary Economics*, 43, 3–33.
- ADMATI, A. R. & P. PFLEIDERER (1988): “A Theory of Intraday Patterns: Volume and Price Variability”, *Review of Financial Studies*, 1(1), 3–40.
- ALLEN, F. & D. GALE (1994): “Limited Market Participation and Volatility of Asset Prices”, *American Economic Review*, 84(4), 933–955.
- ANDERSEN, T. G. (1996): “Return Volatility and Trading Volume: An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility”, *The Journal of Finance*, 51(1), 169–204.
- ARNOLD, L. (1998): *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin.
- ARROW, K. J. (1953): “Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques”, *Econométrie*, 40, 41–47.
- (1971): *Essays in the Theory of Risk Bearing*. North-Holland, Amsterdam.
- ARTHUR, W. B., J. H. HOLLAND, B. LEBARON, R. PALMER & P. TAYLER (1997): “Asset Pricing under Endogeneous Expectations in an Artificial Stock Market”, *Economic Notes*, 26(2), 297–329.
- AUMANN, R. J. (1976): “Agreeing to Disagree”, *Annual Statistics*, 4, 1236–1239.
- BASAK, S. & D. CUOCO (1998): “An Equilibrium Model with Restricted Stock Market Participation”, *The Review of Financial Studies*, 11(2), 309–341.
- BAUER, H. (1992): *Maß- und Integrationstheorie, 2. Auflage*. De Gruyter, Berlin.

- BIAIS, B. & P. BOSSAERTS (1998): “Asset Prices and Trading Volume in a Beauty Contest”, *Review of Economic Studies*, 65(2), 307ff.
- BLUME, L., D. EASLEY & M. O’HARA (1994): “Market Statistics and Technical Analysis: The Role of Volume”, *The Journal of Finance*, 49(1), 153–181.
- BÖHM, V. & C. CHIARELLA (2000): “Mean Variance Preferences, Expectations Formation, and the Dynamics of Random Asset Prices”, Discussion Paper 448, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- BÖHM, V., N. DEUTSCHER & J. WENZELBURGER (2000): “Endogenous Random Asset Prices in Overlapping Generations Economies”, *Mathematical Finance*, 10(1), 23–38.
- BÖHM, V. & J. WENZELBURGER (1997): “Expectational Leads in Economic Dynamical Systems, Revised Version”, Discussion Paper 356, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- (1999): “Expectations, Forecasting, and Perfect Foresight - A Dynamical Systems Approach -”, *Macroeconomic Dynamics*, 3(2), 167–186.
- (2002): “Perfect Predictions in Economic Dynamical Systems with Random Perturbations”, *Macroeconomic Dynamics*, 6(5), 687–712.
- BREEDEN, D. T. & R. LITZENBERGER (1978): “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices”, *Journal of Business*, 51, 621–651.
- BRENNAN, M. (1989): “Capital Asset Pricing Model”, in *The New Palgrave Dictionary of Finance*. Macmillan Press, London.
- BROCK, W. A. & C. H. HOMMES (1998): “Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 1235–1274.
- BRONSTEIN, I. (1996): *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- CABRALES, A. & T. HOSHI (1996): “Heterogeneous Beliefs, Wealth Accumulation, and Asset Price Dynamics”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20, 1073–1100.
- CALI, J. (1994): “Keeping Up with the Joneses: Consumption, Externalities, Portfolio Choice, and Asset Prices”, *Journal of Money Credit and Banking*, 26(1), 1–8.

- CAMPBELL, J. Y., S. J. GROSSMAN & J. WANG (1993): "Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns", *The Quarterly Journal of Economics*, 108(4), 905–939.
- CHATTERJEE, S. (1988): "Participation Externality as a Source of Coordination Failure in a Competitive Model with Centralized Markets", mimeo, University of Iowa, Iowa City.
- CHATTERJEE, S. & D. CORBAE (1992): "Endogeneous Market Participation and the General Equilibrium Value of Money", *Journal of Political Economy*, 100(3), 615–646.
- CONSTANTINIDES, G. M. (1982): "Intertemporal Asset Pricing with Heterogeneous Consumers and without Demand Aggregation", *Journal of Business*, 55(2), 253–267.
- (1990): "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle", *Journal of Political Economy*, 98(3), 519–543.
- COOLEY, T. & B. SMITH (1995): "Indivisible Assets, Equilibrium, and the Value of Intermediation", *Journal of Financial Intermediation*, 4(1), 48–76.
- COX, J., J. INGERSOLL, JR. & S. ROSS (1985a): "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53, 363–384.
- (1985b): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 385–407.
- DELONG, J. B., A. SHLEIFER, L. H. SUMMERS & R. J. WALDMANN (1990a): "Positive Feedback Investment Strategies and Destabilizing Rational Speculation", *The Journal of Finance*, 45, 379–395.
- (1990b): "Noise Trader Risk in Financial Markets", *Journal of Political Economy*, 98(4), 703–738.
- DEUTSCHER, N. (1998): "Endogenous Random Asset Prices in Overlapping Generations Economies with Fluctuating Asset Supply", mimeo, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- (1999): "Stock Market Equilibrium in OLG-Economies with Heterogeneous Consumers", Discussion Paper 440, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.



- (2001): “Stock Market Equilibrium in Overlapping Generations Economies with Bequest of Shares”, mimeo, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- DIAMOND, P. A. (1965): “National Debt in a Neoclassical Growth–Model”, *American Economic Review*, 55, 1026–1050.
- DIAMOND, D.W. AND VERRECCHIA, R. (1981): “Information Aggregation in a Noisy Rational Expectations Economy”, *Journal of Financial Economics*, 9, 231–235.
- DUESENBERY, J. S. (1949): *Income, Saving, and the Theory of Consumer Behavior*. MA: Harvard U. Press, Cambridge.
- DUFFIE, D. (1988): *Security Markets: Stochastic Models*. Academic Press, San Diego.
- (1996): *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, 2nd edition, Princeton.
- DUMAS, B. (1989): “Two–person Dynamic Equilibrium in the Capital Market”, *The Review of Financial Studies*, 2(2), 157–188.
- DUMAS, B. & B. ALLAZ (1996): *Financial Securities, Market Equilibrium and Pricing Methods*. Chapman and Hall, London a.o.
- EICHBERGER, J. AND HARPER, I. (1994): *Financial Economics*. Oxford University Press, Oxford a.o.
- EPSTEIN, L. G. & T. WANG (1994): “Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty”, *Econometrica*, 62(2), 283–322.
- EPSTEIN, L. G. & S. E. ZIN (1989): “Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework”, *Econometrica*, 57, 937–969.
- (1990): “First Order Risk Aversion and the Equity Premium Puzzle”, *Journal of Monetary Economics*, 26(3), 387–407.
- (1991): “Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis”, *Journal of Political Economy*, 99, 263–286.

- FRIEND, I. & M. BLUME (1975): "The Demand for Risky Assets", *American Economic Review*, 65, 900–922.
- GIOVANNI, A. & P. LABADIE (1991): "Asset Prices and Interest Rates in cash-in-advance Models", *Journal of Political Economy*, 99(6), 1215–1251.
- GRANDMONT, J.-M. (1982): "Temporary General Equilibrium Theory", in *Handbook of Mathematical Economics*, ed. by K. Arrow & M. Intrilligator. North-Holland Publishing Company, Amsterdam a.o.
- GROSSMAN, S. (1981): "An Introduction to the Theory of Rational Expectations under Asymmetric Information", *Review of Economic Studies*, 48, 541–559.
- GROSSMAN, S. & J. STIGLITZ (1976): "Information and Competitive Price System", *American Economic Review*, 66, 246–253.
- (1980): "Stockholder Unanimity in Making Production and Financial Decisions", *Quarterly Journal of Economics*, 94(3), 543–566.
- HARRIS, M. & A. RAVIV (1993): "Differences of Opinion Makes a Horse Race", *The Review of Financial Studies*, 6(3), 473–506.
- HEATON, J. (1995): "An Empirical Investigation of Asset Pricing with Temporally Dependent Preferences", *Econometrica*, 63(3), 681–717.
- HEATON, J. & D. LUCAS (1995): "The Importance of Investor Heterogeneity and Financial Market Imperfections for the Behavior of Asset Prices", in *Carnegie–Rochester Conference Series on Public Policy*, 42, pp. 1–32. North-Holland Publishing Company, Amsterdam a.o.
- HELLWIG, M. (1980): "On the Aggregation of Information in Competitive Markets", *Journal of Economic Theory*, 22, 477–498.
- HIRSHLEIFER, D. (1988): "Residual Risk, Trading Costs, and Commodity Future Risk Premia", *Review of Financial Studies*, 1, 173–193.
- HUANG, C.-H. & R. LITZENBERGER (1988): *Foundations for Financial Economics*. North-Holland Publishing Group, Amsterdam a.o.
- HUBERMAN, G. (1984): "Capital Asset Pricing in an Overlapping Generations Model", *Journal of Economic Theory*, 33, 232–248.

- HUFFMAN, G. (1985): "Adjustment Costs and Capital Asset Pricing", *The Journal of Finance*, 40(3), 692–705.
- (1986): "Capital Asset Pricing with Capital Accumulation", *International Economic Review*, 27(3), 565–582.
- HUFFMAN, G. W. (1987): "A Dynamic Equilibrium Model of Asset Prices and Transaction Volume", *Journal of Political Economy*, 95(1), 138–159.
- INGERSOLL, J. E. (1987): *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield studies in financial economics. Rowman & Littlefield, Totowa, N.J., 1. [dr.] edn.
- JAIN, P. C. & G.-H. JOH (1988): "The Dependence between Hourly Prices and Trading Volume", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(2), 269–283.
- JARROW, R. (1980): "Heterogeneous Expectations, Restrictions on Short Sales, and Equilibrium Asset Prices", *Journal of Finance*, 35, 1105–1113.
- JONES, C. M., G. KAUL & M. L. LIPSON (1994): "Transactions, Volume, and Volatility", *The Review of Financial Studies*, 7(4), 631–651.
- KANDEL, E. & N. D. PEARSON (1995): "Differential Interpretation of Public Signals and Trade in Speculative Markets", *Journal of Political Economy*, 103(4), 831–872.
- KANDEL, S. & R. F. STAMBAUGH (1990): "Expectations and Volatility of Consumption and Asset Return", *The Review of Financial Studies*, 3(2), 207–232.
- (1991): "Asset Returns and Intertemporal Preferences", *Journal of Monetary Economics*, 27(1), 39–71.
- KARPOFF, J. M. (1987): "The Relation between Price Changes and Trading Volume: A Survey", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(1), 109–126.
- KÖHLER, N. (1998a): "An Example with the Gamma-distribution", mimeo, Department of Economics, University of Bielefeld, Bielefeld.
- KOCHERLAKOTA, N. (1990): "Disentangling the Coefficient of Relative Risk Aversion from the Elasticity of Intertemporal Substitution: An irrelevance result", *Journal of Finance*, 45, 175–190.
- (1996): "The Equity Premium: It's still a Puzzle", *Journal of Economic Literature*, 34(2), 42–71.

- KRUSELL, P. & A. J. SMITH (1997): "Income and Wealth Heterogeneity, Portfolio Choice, and Equilibrium Asset Returns", *Macroeconomic Dynamics*, 1, 387–422.
- KURZ, M. (1994): "On the Structure and Diversity of Rational Beliefs", *Economic Theory*, 4(6), 877–900.
- (1997): *Endogenous Economic Fluctuations*, Series Studies in Economic Theory. Springer-Verlag, Berlin a.o.
- KYDLAND, F. & E. C. PRESCOTT (1982): "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50, 1345–1370.
- KYLE, A. S. (1985): "Continuous Auctions and Insider Trading", *Econometrica*, 56, 1315–1335.
- LABADIE, P. (1986): "Comparative Dynamics and Risk Premia in an Overlapping Generations Model", *Review of Economic Studies*, 53, 139–152.
- (1989): "Stochastic Inflation and the Equity Premium", *Journal of Monetary Economics*, 24(3), 277–298.
- LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risky Assets and Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47, 13–37.
- (1969): "The Aggregation of Investors' Diverse Judgements and Preferences in Purely Competitive Markets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4, 347–400.
- LUCAS, D. J. (1994): "Asset Pricing with Undiversifiable Income Risk and Short Sales Constraints: Deepening the Equity Premium Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, 34(3), 325–341.
- LUCAS, R. (1978): "Asset Prices in an Exchange Economy", *Econometrica*, 46(6), 1429–1445.
- MANKIW, N. G. & S. P. ZELDES (1991): "The Consumption of Stockholders and Nonstockholders", *Journal of Financial Economics*, 29, 97–112.
- MAYSHAR, J. (1983): "On Divergence of Opinion and Imperfections in Capital Markets", *American Economic Review*, 73, 114–128.

- MEHRA, R. & E. C. PRESCOTT (1985): "The Equity Premium: A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, 15(2), 145–161.
- MERTON, R. (1973): "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, 41(5), 867–887.
- (1987): "A Simple Model of Capital Market Equilibrium with Incomplete Information", *The Journal of Finance*, 42(3), 483–510.
- MICHAELY, R. & J.-L. VILA (1995): "Investors' Heterogeneity, Prices, and Volume around the Ex-Dividend Day", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30(2), 171–198.
- MICHAELY, R., J.-L. VILA & J. WANG (1996): "A Model of Trading Volume with Tax-Induced Heterogeneous Valuation and Transaction Costs", *Journal of Financial Intermediation*, 5(4), 340–371.
- MILLER, E. M. (1977): "Risk, Uncertainty, and Divergence of Opinion", *Journal of Finance*, 32, 1151–1168.
- MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, 22, 265–290.
- MUTH, J. (1961): "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", *Econometrica*, 29, 315–335.
- OHLSON, J. A. (1987): *The Theory of Financial Markets an Information*. Elsevier Science Publishing, North-Holland, New York, Amsterdam, London.
- OROSEL, G. O. (1998): "Participation Costs, Trend Chasing, and Volatility of Stock Prices", *The Review of Financial Studies*, 11(3), 521–557.
- PAGANO, M. (1989a): "Trading Volume and Asset Liquidity", *Quarterly Journal of Economics*, 104, 255–274.
- (1989b): "Endogenous Market Thinness and Stock Price Volatility", *Review of Economic Studies*, 56(2), 269–287.
- PFLEIDERER, P. (1984): "The Volume of Trade and the Variability of Prices: A Framework for Analysis in Noisy Rational Expectations Equilibria", Manuscript, Stanford University.

- PRATT, J. (1964): "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, 32, 122–136.
- RUBINSTEIN, M. (1976): "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Option", *Bell Journal of Economics*, 7, 407–425.
- SAMUELSON, P. (1958): "An Exact Consumption–Loan Model of Interest with or without the Contrivance of Money", *Journal of Political Economy*, 66, 467–482.
- SHALEN, C. (1993): "Volume, Volatility and the Dispersion of Beliefs", *Review of Financial Studies*, 6(2), 405–434.
- SHARPE, W. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *The Journal of Finance*, 19, 425–442.
- TIROLE, J. (1982): "On the Possibility of Speculation under Rational Expectations", *Econometrica*, 50, 1163–1181.
- USZCZAPOWSKI, I. (1995): *Optionen und Futures verstehen, Grundlagen und neuere Entwicklungen*, vol. 3. Auflage. Verlag C.H. Beck, München.
- VARIAN, H. R. (1985): "Divergence of Opinion in Complete Markets: A Note", *The Journal of Finance*, 40, 309–317.
- VAYANOS, D. (1998): "Transaction Costs and Asset Prices: A Dynamic Equilibrium Model", *Review of Financial Studies*, 11, 1–58.
- WANG, J. (1994): "A Model of Competitive Stock Trading Volume", *Journal of Political Economy*, 102(1), 127–168.
- (1996): "The Term Structure of Interest Rates in a pure Exchange Economy with Heterogeneous Investors", *Journal of Financial Economics*, 41, 75–110.
- WEIL, P. (1989): "The Equity Premium Puzzle and the Risk–Free Rate Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, 24(2), 401–421.
- (1992): "Equilibrium Asset Prices with Undiversifiable Labor Income Risk", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16(3/4), 769–796.
- WENZELBURGER, J. (1999): "Conditional Error Functions and Expectational Leads", mimeo, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.

- WENZELBURGER, J. (2001): “Learning to Predict Rationally when Beliefs are Heterogeneous”, Discussion Paper 477, University of Bielefeld, Department of Economics, Bielefeld.
- WILLIAMS, J. T. (1977): “Capital Asset Prices with Heterogeneous Beliefs”, *Journal of Financial Economics*, 5, 219–239.
- WILLIAMSON, S. D. (1986): “Increasing Returns to Scale in Financial Intermediation and the Non-Neutrality of Government Policy”, *Review of Economic Studies*, 53, 863–875.
- (1994): “Liquidity and Market Participation”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 629–670.
- YING, C. C. (1966): “Stock Market Prices and Volumes of Sales”, *Econometrica*, 34(3), 676–685.