# Benchmarkorientierte Portfolio-Strategien

Thomas Braun, Universität Bielefeld
Ariane Reiß, RWE Trading GmbH, Essen
tbraun@wiwi.uni-bielefeld.de
ariane.reiss@rwetrading.com

Diskussionspapier Nr. 467, Universität Bielefeld
29.5.2001

Zusammenfassung

Häufig wird die Performance von Portfoliomanagern anhand von Benchmarks gemessen. Wird lediglich das Übertreffen der Benchmark honoriert, so werden die Manager eine Strategie verfolgen, bei der die Wahrscheinlichkeit maximiert wird, die Benchmark zu schlagen. Wird hingegen auch das Ausmaß der Unterschreitung berücksichtigt, so werden sie entweder den Erwartungswert oder die Varianz bei Benchmark-Unterschreitung minimieren. Im vorliegenden Beitrag werden für alle drei Portfolio-Strategien im zeitkontinuierlichen Rahmen analytische Lösungen ermittelt. Zu diesem Zweck wird eine Methode der statistischen Testtheorie verwendet, die auf den aus der Dualitätstheorie bekannten Satz vom komplemtenären Schlupf zurückgeführt wird. Es zeigt sich, dass sich das optimale Portfolio bei jedem der drei Strategien aus einer Investion in die Benchmark und einer Investition in das sogenannte Growth Optimum Portfolio (GOP) zusammensetzt, wobei das GOP mitunter sogar die dominierende Rolle spielt. Das Growth-Optimum Portfolio hat die gleiche Struktur wie das $\mu - \sigma -$effizienten Tangential-Portfolio. Zudem wird dargestellt, welche Auswirkungen die Wahl der Benchmark auf das Investitions-Verhalten hat. Je volatiler die Benchmark ist, desto wahrscheinlicher ist es, diese zu übertreffen. Je weniger stark die Benchmark mit dem $\mu - \sigma -$ effizienten Tangentalportfolio korreliert ist, desto geringer ist sowohl die Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens als auch die Varianz und der Erwartungswert beim Unterschreiten.

Schlüsselwörter: Portfolio-Optimierung, Portfolio-Strategie, Shortfall-Wahrscheinlichkeit, Lower Partial Moments, Growth Optimum Portfolio, Options-Bewertung, lineare Programmierung

Abstract

Performance is often measured relative to a benchmark. Managers whose payment depends on whether they beat the benchmark or not should invest according to a strategy that maximizes the probability of beating the benchmark. If a manager is judged by the extent to which a prespecified target is missed, then he should either minimize the expected shortfall or the variance of the shortfall. In this paper, an analytical solution for all three goals is developped within a continuous dynamic framework. A method from statistical test theory is adapted and explained using linear programming. It is shown that the optimal policy for all three goals is to invest a fraction of wealth in the benchmark and a fraction or multiple in the growth optimum portfolio. The latter portfolio has the same structure as the mean-variance efficient tangent portfolio. The impact of different benchmarks on the investment policy is presented. The more volatile the benchmark the more likely managers beat the benchmark. If the correlation between the benchmark and the mean-variance efficient tangent portfolio is low then the probability of beating the benchmark is high and also the expected shortfall and shortfall variance is low.

Keywords: Portfolio optimization; Portfolio strategies, Shortfall probability; Lower partial moments, Growth optimum portfolio, Option pricing, linear programming

# 1 Einleitung

Dank ihrer Transparenz ist die benchmarkorientierte Beurteilung von Portfolio-Managern in der Praxis nahezu Standard. Dieser Sachverhalt zwingt die Portfolio-Manager förmlich dazu benchmarkorientierte Portfolio-Strategien anzuwenden. Der vorliegende Beitrag befasst sich mit drei benchmarkorientierten Portfolio-Strategien, die sich als Risikominimierungsansätze begreifen lassen, wobei als Risikomaß die *Lower Partial Moments* (LPM) null-ter bis zweiter Ordnung zugrundegelegt werden. Im Falle des LPM null-ter Ordnung wird die Wahrscheinlichkeit minimiert, eine bestimmte Benchmark *nicht* um $x\%$ übertreffen zu können (Shortfall-Wahrscheinlichkeit);[1] im Falle des LPM erster Ordnung (Shortfall-Erwartung) wird der Erwartungswert der Zielunterschreitung und im Falle des LPM zweiter Ordnung (Shortfall-Varianz) die Varianz der Zielunterschreitung minimiert.

Um ihre Ziele zu erreichen,

- investieren die Portfolio-Manager niemals ausschließlich in die Benchmark, solange sie ihr Performance-Ziel noch nicht erreicht haben. Neben der Benchmark ist stets auch das *Growth-Optimum-Portfolio* (GOP) - mitunter sogar dominierender - Bestandteil des Fonds-Portfolios. Das GOP ist dasjenige Portfolio, das die erwartete Rendite maximiert und damit gleichzeitig den erwarteten Zeitraum bis zum Erreichen eines bestimmten Vermögensziels minimiert.[2] Bemerkenswert erscheint ferner, dass das GOP die gleiche Struktur wie das Tangentialportefeuille besitzt.

- arbeiten die Portfolio-Manager unter plausiblen Annahmen an die Verteilungsparameter mit zusätzlichem Fremdkapital.

- entscheiden sich solche Portfolio-Manager, denen es ausschließlich darum geht, mit größtmöglicher Wahrscheinlichkeit auf einem der ersten Plätze in den sehr häufig benchmarkorientierten Performance-Hitlisten zu landen, für extrem volatile und gleichzeitig möglichst wenig mit dem Tangentialportfolio korrelierte Benchmarks. Dies könnte z.B. eine Erklärung für die Popularität des NEMAX als Benchmark sein.

- wählen Portfolio-Manager, die den Shortfall-Erwartungswert bzw. die Shortfall-Varianz minimieren und somit durchaus auch die finanziellen Konsequenzen ihres Scheiterns am selbstgesteckten Performanceziel in ihr Kalkül miteinbeziehen, ebenfalls eine möglichst wenig mit dem Tangentialportfolio korrelierte Benchmark. Allerdings hegen solche Portfolio-Manager keine Vorliebe für extrem volatile Benchmarks.

Diese Erkenntnisse legen den Schluss nahe, dass die Transparenz einer benchmarkorientierten Performancemessung von den Anlegern letztlich damit bezahlt wird, dass sie zuviel diversifizierbares Risiko übernehmen.

Die Bestimmung der optimalen dynamischen Handelsstrategien für die drei Zielvorschriften ist grundsätzlich auf verschiedenen Wegen möglich. Der direkte von Browne[3] beschrittene Weg besteht in der Lösung partieller Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichungen, der jedoch die Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung erfordert. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, zunächst das optimale Endvermögen und dann die dieses Endvermögen generierende Handelstrategie zu bestimmen.[4] Der hier beschrittene dritte Weg stammt aus der statistischen Testtheorie und wurde zuerst von Föllmer und Leukert[5] auf Probleme der Optimierung nicht perfekter Hedging-Strategien angewendet. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Ansatz auf den aus der Dualitätstheorie[6] bekannten Satz vom komplementären Schlupf zurückgeführt. Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens ist eine ganz bestimmte Struktur der Problemformulierung. Mit dieser Struktur und der Lösung des Problems der Minimierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit für ein konstantes Vermögensziel im Kontext eines Ein-Perioden-Modells mit diskretem Zustandsraum werden sich die Vorüberlegungen zum ersten Abschnitt befassen. Im

[1] vgl. [3] zu den Eigenschaften dieses Investment-Ansatzes.
[2] vgl. [9], 169-172.
[3] vgl. hierzu [2] und [4].
[4] vgl. [10], 37-40. Diese Methode verwenden auch [11] um die Zahlungscharakteristik derivativer Finanztitel mit größtmöglicher Wahrscheinlichkeit zu duplizieren.
[5] vgl. [5] und [6].
[6] vgl. z.B. [7], 35-45.

Anschluss daran wird die Lösung in den Kontext des von MERTON[7] entwickelten zeitstetigen Standard-Modellrahmens zur Analyse von dynamischen Portfolio-Optimierungsproblemen verpflanzt. In den Abschnitten zwei und drei wird die im ersten Abschnitt entwickelte Methodik mit entsprechenden Erweiterungen auf die Zielvorschriften Minimierung der Shortfall-Erwartung und Minimierung der Shortfall-Varianz angewendet.

# 2 Minimierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit für ein konstantes Vermögensziel

## 2.1 Vorüberlegungen

Im folgenden wird zunächst an dem vergleichsweise einfachen Fall einer konstanten Benchmark gezeigt, wie man ein spezifisch formuliertes Problem mit Hilfe einer dualen Problemformulierung löst.

### 2.1.1 Problem

Sei $B_t$ der Rücknahmepreis eines sich mit dem sicheren Periodenzinssatz $r$ verzinsenden Geldmarktfonds im Zeitpunkt $t$, $x_0$ das Anlagevermögen im Betrachtungs-Zeitpunkt $t = 0$, $\underline{x}_T$ ein bestimmtes für den Planungshorizont $T$ angestrebtes Vermögensziel, welches wegen $B_T^{-1}\underline{x}_T > B_0^{-1}x_0$ nicht durch eine Anlage in Geldmarktfonds erreicht werden kann,[8] $\pi_j$ der zum Zeitpunkt $t = 0$ geltende Preis für ein elementares Wertpapier, das eine Geldeinheit in $T$ einbringt, falls dann der Zustand $j$ eintritt, und $p_j$ die subjektive Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Zustand $j$ im Zeitpunkt $t = T$. Bei gegebenem Vermögensziel $\underline{x}_T$ lassen sich die Quotienten

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv \frac{x_0}{\underline{x}_T} \\ z_{Tj} &\equiv \frac{x_{Tj}}{\underline{x}_T} \end{aligned}$$

als Grad der Zielerreichung zu Beginn und am Ende des Planungshorizonts interpretieren.

Das Entscheidungsproblem eines Fondsmanagers, der die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_T \geq \underline{x}_T)$ maximieren möchte, lässt sich i.V.m. der Indikatorfunktion

$$f(z_{Tj}) = 1_{\{z_{Tj} \geq 1\}} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad z_{Tj} \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

wie folgt formulieren:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(z_{Tj}) \rightarrow \max_{z_{Tj}} \tag{2}$$

u.d.B.

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j z_{Tj} \leq x_0 \quad . \tag{3}$$

[7] vgl. [8] und [9].

[8] Zum besseren Verständnis: $B_T^{-1}\underline{x}_T$ ist die Anzahl von Geldmarktfonds, die man in $T$ benötigt, um eine Auszahlung in Höhe von $\underline{x}_T$ bestreiten zu können; $B_0^{-1}x_0$ ist die Anzahl von Geldmarktfonds, die man sich in $t = 0$ leisten kann.

### 2.1.2 Lösungsansatz

Es ist offensichtlich, dass ein Fondsmanager, dem es einzig auf die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_T \geq \underline{x}_T)$ ankommt, niemals Geld ausgeben würde, um in irgendeinem Zustand ein höheres Endvermögen als $\underline{x}_T$ zu erreichen. Daher kann man die Budgetbedingung (3) auch wie folgt darstellen:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j \underline{x}_T f(z_{Tj}) \leq x_0 \tag{4}$$

bzw.

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j f(z_{Tj}) \leq z_0 \quad . \tag{5}$$

Da es sich bei $f(z_{Tj})$ um eine Binärvariable handelt, kann man das Problem (2), (5) offensichtlich auch als ein Problem der ganzzahligen Programmierung auffassen. Die nicht ganzzahlige Relaxation dieses Problems lautet:

$$\sum_j p_j z_{Tj} \to \max_{z_{Tj}} \tag{6}$$

u.d.B.

$$\begin{aligned} \sum_j \pi_j z_{Tj} &\leq z_0 \\ z_{Tj} &\leq 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \\ z_{Tj} &\geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \quad . \end{aligned}$$

Das hierzu duale Problem lautet

$$z_0 u_1 + \sum_{k=2}^{n+1} u_k \to \min_{u_i}$$

u.d.B.

$$\begin{aligned} \pi_j u_1 + u_{j+1} &\geq p_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ u_i &\geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n+1) \quad . \end{aligned}$$

In Normalform stellen sich die beiden Probleme wie folgt dar:

$$\sum_j p_j z_{Tj} \to \max_{z_{Tj}}$$

u.d.B.

$$\begin{aligned} \sum_j \pi_j z_{Tj} + \hat{z}_1 &= z \\ z_{Tj} + \hat{z}_{j+1} &= 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \\ \hat{z}_i, z_{Tj} &\geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n+1; \quad j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

bzw.

$$z_0 u_1 + \sum_{k=2}^{n+1} u_k \to \min_{u_i}$$

u.d.B.

$$\begin{aligned} \pi_j u_1 + u_{j+1} - \hat{u}_j &= p_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ u_i, \hat{u}_j &\geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n+1; \quad j = 1, \ldots, n) \quad . \end{aligned}$$

Eine optimale Lösung muss nach dem Satz vom komplementären Schlupf die Bedingungen

$$\begin{aligned} \hat{z}_i^* u_i^* &= 0 \quad (i = 1, \ldots, n+1) \\ \hat{u}_j^* z_{Tj}^* &= 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

erfüllen. Hieraus lassen sich die folgenden Konstellationen ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{p_j}{\pi_j} &< u_1^* \Leftrightarrow \pi_{Tj} u_1^* > p_j \Rightarrow \hat{u}_j^* > 0 \Rightarrow z_{Tj}^* = 0 \\ \frac{p_j}{\pi_j} &> u_1^* \Leftrightarrow \pi_{Tj} u_1^* < p_j \Rightarrow u_{j+1}^* > 0 \Rightarrow \hat{z}_{j+1}^* = 0 \Rightarrow z_{Tj}^* = 1 \\ \frac{p_j}{\pi_j} &= u_1^* \Rightarrow u_1^* > 0 \Rightarrow \hat{z}_1^* = 0 \Rightarrow z_{Tj}^* = \gamma \text{ mit } \gamma \equiv \pi_j^{-1} \left( z_0 - \sum\nolimits_{k: \frac{p_k}{\pi_k} > u_1^*} \pi_k \right) < 1 \quad . \end{aligned}$$

Folglich existiert ein $u_1^* > 0$, mit dessen Hilfe die optimale Lösung der nicht ganzzahligen Relaxation wie folgt charakterisiert werden kann:

$$z_{Tj}^* = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{p_j}{\pi_j} > u_1^* \\ \gamma < 1 & \text{falls } \frac{p_j}{\pi_j} = u_1^* \\ 0 & \text{falls } \frac{p_j}{\pi_j} < u_1^* \end{cases} \quad . \tag{7}$$

Sofern diese Lösung ganzzahlig ist, handelt es sich dabei gleichzeitig um die Lösung des Ausgangsproblems (2), (5). Daher wird im folgenden untersucht, unter welchen Bedingungen die Ganzzahligkeit gewährleistet ist. Hierfür ist es sinnvoll, sich die Vorgehensweise zur Bestimmung der optimalen Lösung einmal kurz vor Augen zu halten: Man ordnet die Ereignisse $j$ nach Maßgabe der Quotienten $\frac{p_j}{\pi_j}$ in absteigender Reihenfolge

$$\frac{p_{1,n}}{\pi_{1,n}} \geq \frac{p_{2,n}}{\pi_{2,n}} \geq \ldots \geq \frac{p_{n,n}}{\pi_{n,n}}$$

(der Index $i, n$ gibt bspw. an, dass es sich um das $i$-te Element in einer Reihe von insgesamt $n$ Elementen handelt) und kauft solange je ein elementares Wertpapier zum Preis $\pi_{i,n}$ bis das dann noch vorhandene Rest-Budget $z_0 - \sum_{j=1,n}^{i,n} \pi_j$ kleiner ist als $\pi_{i+1,n}$, so dass von dem nächsten an der Reihe befindlichen elementaren Wertpapier nur noch der Bruchteil

$$z_{i+1,n} = \frac{z_0 - \sum_{j=1,n}^{i,n} \pi_j}{\pi_{i+1,n}} < 1$$

gekauft werden kann. Dieses Nicht-Ganzzahligkeits-Problem wird mit wachsender Größe des Zustandsraums immer unbedeutender. Unter der Annahme, dass die Anzahl der Zustände unendlich groß ist, ist die optimale Lösung des Ausgangsproblems (2), (5) somit durch die Funktion

$$f^* = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{p_j}{\pi_j} > u_1^* \\ 0 & \text{falls } \frac{p_j}{\pi_j} \leq u_1^* \end{cases}$$

beschrieben. Die Diskriminierung von lohnenswerten und nicht lohnenswerten Zuständen mit Hilfe des Quotienten $\frac{p_j}{\pi_j}$ ist zwar anschaulich aber nicht operational, weil das

Konstrukt des elementaren Wertpapiers rein theoretischer Natur ist und daher die Preise $\pi_j$ nicht beobachtet werden können. Glücklicherweise existiert eine eineindeutige Beziehung zwischen $\frac{p_j}{\pi_j}$ und beobachtbaren Marktpreisen. Es handelt sich dabei um die Preise des Growth-Optimum-Portfolio (GOP). Das GOP ist das Portfolio, das die erwartete Wachstumsrate des angelegten Vermögens maximiert.[9] Im folgenden soll dieser Zusammenhang im Rahmen eines einperiodigen diskreten Entscheidungsproblems kurz aufgezeigt werden: Das Problem eines Fondsmanagers, der die erwartete Wachstumsrate des Fondsvermögens maximieren möchte, lautet in diesem Kontext

$$\sum_j p_j \ln\left(\frac{x_{Tj}}{x_0}\right) \rightarrow \max_{x_{Tj}} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

u.d.B.

$$\sum_j \pi_j x_{Tj} \leq x_0 \quad .$$

Der LAGRANGE-Ansatz für die Lösung dieses Entscheidungsproblems lautet:

$$\sum_j p_j \ln(x_{Tj}) - \lambda \sum_j \pi_j x_{Tj} \rightarrow \max_{x_{Tj}} \quad .$$

Einsetzen der notwendigen Bedingungen für die Lösung dieses Entscheidungsproblems (der hochgestellte Index *go* steht für *growth optimum)*

$$x_{Tj}^{go} = \lambda^{-1} \frac{p_j}{\pi_j} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

in die im Optimum strikt erfüllte Nebenbedingung

$$\sum_j \pi_j x_{Tj}^{go} = x_0$$

führt auf

$$\lambda^{-1} \sum_j p_j = x_0 \Leftrightarrow \lambda = x_0^{-1} \quad ,$$

so dass sich die notwendigen Bedingungen auch wie folgt darstellen lassen

$$\frac{p_j}{\pi_j} = \frac{x_{Tj}^{go}}{x_0} \quad .$$

Mithin existiert im Falle eines stetigen Zustandsraums eine Konstante $c$, so dass man die Lösung des Ausgangsproblems (2), (5) wie folgt schreiben kann

$$f^* = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x_{Tj}^{go} > c \\ 0 & \text{falls} \quad x_{Tj}^{go} \leq c \end{cases} \quad . \tag{8}$$

Die Konstante $c$ ist implizit durch die im Optimum strikt erfüllte Nebenbedingung (5)

$$\sum_{j=1}^{n} f^* \pi_j = z_0 \tag{9}$$

[9] vgl. hierzu [9], 169-172.

bestimmt. Aus (9) erhält man i.V.m.[10]

$$\begin{aligned} q_j &\equiv \frac{\pi_j}{\sum_j \pi_j} \\ &= \frac{\pi_j}{B_0 B_T^{-1}} \end{aligned}$$

die modifizierte Budgetbedingung

$$\sum_{j=1}^{n} B_0 B_T^{-1} \underline{x}_T f^* q_j = x_0 \quad . \tag{10}$$

Da die normierten Preise einer Geldeinheit $q_j$ in bestimmten Zeit-Zustandskombination $(T, j)$ auch als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden können, impliziert (10) dass sich der Marktwert der optimalen Strategie $f^*$ auch wie folgt schreiben lässt

$$\begin{aligned} x_0^* &= E_{\mathbb{Q}}\left(B_0 B_T^{-1} \underline{x}_T f^*\right) \\ &= B_0 B_T^{-1} \underline{x}_T E_{\mathbb{Q}}\left(f^*\right) \quad . \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Erkenntnis liefert den Ansatz für die Lösung eines entsprechenden dynamischen Optimierungsproblems. Dies soll im folgenden näher analysiert werden.

## 2.2 Das dynamische Modell

Es existieren $n$ korrelierte riskante Wertpapiere, deren Kurse $S_i$ unter dem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ einer geometrischen BROWNschen Bewegung folgen und ein risikoloser Titel mit konstanter Momentanverzinsung $r$. Seien die $W_j$ $(j = 1, .., n)$ voneinander unabhängige standardisierte BROWNsche Bewegungen und $\mu_i$ und $\sigma_{ij}$ Konstante, dann gilt

$$dS_i = S_i \mu_i dt + S_i \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_j \quad (i, j = 1, .., n) \quad .$$

Eine Portfolio-Strategie ist durch den Spaltenvektor der Portfolio-Gewichte $(\mathbf{w}_t \equiv (w_{1t}, ..., w_{nt})', t \geq 0)$ beschrieben, ist nicht antizipierend und muss selbstfinanzierend sein. Sei $X_t$ das Vermögen eines Investors zum Zeitpunkt $t$. Das riskant investierte Vermögen entspricht $\mathbf{w}'\mathbf{1}X_t$ mit $\mathbf{1} \equiv (1, .., 1)'$. Für die Wertveränderung des Vermögens gilt

$$dX_t = X_t \sum_{i=1}^{n} w_{it} \frac{dS_i}{S_i} + X_t (1 - \sum_{i=1}^{n} w_{it}) \frac{dB}{B} \tag{12a}$$

$$\phantom{dX_t} = X_t \left(\mathbf{w}_t' \left(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}\right) + r\right) dt + X_t \mathbf{w}_t' \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W} \tag{12b}$$

bzw.

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mathbf{w}' \left(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}\right) + r - \frac{1}{2}\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}\right) t + \mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}_t\right) \tag{13}$$

mit den Parametern $\boldsymbol{\mu} \equiv (\mu_1, ..., \mu_n)'$ und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma)_{ij}$ und dem Vektor $\mathbf{W} \equiv (W_1, \ldots, W_n)'$. Ferner sei $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'$ die nicht singuläre zeitinvariante Varianz-Kovarianz-Matrix.

[10] Die Beziehung $\sum_j \pi_j = B_0 B_T^{-1}$ erklärt sich damit, dass man in $t = 0$ genau $B_T^{-1}$ Geldmarkfondsanteile zum Stück-Preis $B_0$ kaufen muss, um in $T$ mit Sicherheit über eine Geldeinheit verfügen zu können.

### 2.2.1 Das Growth-Optimum-Portfolio

Aus (13) geht unmittelbar hervor, dass die Maximierung der erwarteten Wachstumsrate des Vermögens auf

$$\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1} = \Sigma \mathbf{w}^{go} \tag{14}$$

führt. Nun gilt:

$$\mathbf{w}^{go} = \frac{\mu_{ta}-r}{\sigma_{ta}^2}\mathbf{w}^{ta} \quad , \tag{15}$$

wobei $\mu_{ta}$ die erwartete Rendite des aus der statischen Portfolio-Theorie bekannten $\mu-\sigma$-effizienten Tangential-Portfolios und $\sigma_{ta}^2$ die Varianz des Tangential-Portfolios ist. Die Gewichte

$$\mathbf{w}^{ta} = \frac{\sigma_{ta}^2}{\mu_{ta}-r}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1}\right) \tag{16}$$

sind die Gewichte der riskanten Positionen des Tangential-Portfolios. Ausweislich (15) ist das GOP bis auf einen Faktor mit dem Tangential-Portfolio identisch. Das Volumen des GOP rechnet sich wegen $\mathbf{1}'\mathbf{w}^{ta} \equiv 1$ zu

$$\mathbf{1}'\mathbf{w}^{go} = \frac{\mu_{ta}-r}{\sigma_{ta}^2} \quad .$$

Einsetzen von (14) in (13) führt i. V. m. der Definition

$$\sigma_{go}^2 \equiv \mathbf{w}^{go\prime}\Sigma\mathbf{w}^{go}$$

auf

$$X_t^{go} = X_0^{go}\exp\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{go}^2 + r\right)t + \mathbf{w}^{go\prime}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}_t\right)$$

bzw.

$$B_t^{-1}X_t^{go} = B_0^{-1}X_0^{go}\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{go}^2 t + \mathbf{w}^{go\prime}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}_t\right) \quad .$$

Demnach ist $\ln B_t^{-1}X_t^{go}$ normalverteilt mit Erwartungswert $\ln B_0^{-1}X_0^{go} + \frac{1}{2}\sigma_{go}^2 t$ und Varianz $\sigma_{go}^2 t$.

Für das Folgende ist neben der empirischen Verteilung $\mathbb{P}$ die Verteilung unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$, welches durch die Transformation

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\mathbf{w}^{go\prime}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}_t - \frac{1}{2}\sigma_{go}^2 t)$$

aus dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ hervorgeht, von Interesse. Das Cameron-Martin-Girsanov-Theorem[11] besagt, dass der Prozess

$$\hat{\mathbf{W}}_t = \mathbf{W}_t + \boldsymbol{\sigma}'\mathbf{w}^{go}t$$

unter $\mathbb{Q}$ eine Brownsche Bewegung ist. Ausweislich

$$B_t^{-1}X_t^{go} = B_0^{-1}X_0^{go}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{go}^2 t + \mathbf{w}^{go\prime}\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{W}}_t\right)$$

ist $\ln B_t^{-1}X_t^{go}$ unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ somit normalverteilt mit Erwartungswert $\ln B_0^{-1}X_0^{go} - \frac{1}{2}\sigma_{go}^2 t$ und Varianz $\sigma_{go}^2 t$.

[11] vgl. hierzu z.B. [1], S. 73-76.

### 2.2.2 Die optimale Strategie

Aufgrund der Selbstfinanzierungs-Eigenschaft der Portfolio-Strategie gilt (11) für alle $t \in [0, T]$. Unter den getroffenen Verteilungsannahmen erhält man mithin

$$
\begin{aligned}
X_t^* &= B_t B_T^{-1} \underline{x}_T E_{\mathbb{Q}}\left(f^* \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= B_t B_T^{-1} \underline{x}_T \Pr\left(X_T^{go} > c\right) \\
&= B_t B_T^{-1} \underline{x}_T N(d_2) \quad ,
\end{aligned} \tag{17}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
d_2 &\equiv -\frac{\ln c - \left(\ln\left(B_t^{-1} X_t^{go}\right) - \frac{1}{2}\sigma_{go}^2 (T-t)\right)}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}} \\
&= \frac{\ln\left(B_t^{-1} X_t^{go}\right) - \ln c - \frac{1}{2}\sigma_{go}^2 (T-t)}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

und $N(x)$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist. Zur Ermittlung der optimalen Portfolio-Gewichte muss nun diejenige Portefolio-Strategie gefunden werden, die die Entwicklung von $X_t^*$ repliziert. Es gilt für $X$ bei deterministischer Zinsentwicklung

$$
dX = \mathbf{X}_{\mathbf{S}}' \mathbf{dS} + \left(X_t + \frac{1}{2}\mathbf{S}' \Sigma \mathbf{S}\right) dt \tag{18}
$$

mit $\mathbf{X}_{\mathbf{S}}' = \left(\frac{\partial X}{\partial S_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial S_n}\right)$. Aus dem Vergleich von (12a) und (18) folgt

$$
\frac{\partial X}{\partial S_i} = \frac{w_i X}{S_i} \quad . \tag{19}
$$

Zur Replikation der optimalen Strategie werden mithin

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_t^*}{\partial S_{it}} &= B_t B_T^{-1} \underline{x}_T n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_{it}} \\
&= B_t B_T^{-1} \underline{x}_T n(d_2) \frac{\frac{\partial X_t^{go}}{\partial S_{it}} \frac{1}{X_t^{go}}}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}} \\
&= \frac{n(d_2)}{N(d_2)} \frac{w_i^{go}}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}} \frac{X_t^*}{S_{it}}
\end{aligned}
$$

Stücke der Aktien $i = 1, \ldots, n$ benötigt. Hieraus erhält man i.V.m. der Definition für den Zielerreichungsgrad

$$
z_t^* \equiv \frac{B_t^{-1} X_t^*}{B_T^{-1} \underline{x}_T}
$$

und den durch (17) implizierten Beziehungen

$$
N(d_2) = z_t^* \Leftrightarrow d_2 = N^{-1}(z_t^*)
$$

$$
\begin{aligned}
w_{it}^* &= \frac{\partial X_t^*}{\partial S_{it}} \frac{S_{it}}{X_t^*} \\
&= \frac{n\left(N^{-1}(z_t^*)\right)}{N\left(N^{-1}(z_t^*)\right)} \frac{w_i^{go}}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

bzw.

$$\mathbf{w}_t^* = \alpha \mathbf{w}^{go}$$

mit

$$\alpha \equiv \alpha\left(\sigma_{go}, t, z_t^*\right) = \frac{n\left(N^{-1}\left(z_t^*\right)\right)}{N\left(N^{-1}\left(z_t^*\right)\right)} \frac{1}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}} \quad \left(0 < z_t^* \leq 1\right) \quad . \tag{20}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_{go}} &< 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} &> 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z_t^*} &< 0 \quad . \end{aligned}$$

Demnach ist das optimale Anlagevolumen c.p. um so größer, je kleiner die Volatilität des GOP, je näher der Planungshorizont und je kleiner $z_t^*$ ist, d.h. je größer die Diskrepanz zwischen der aktuell vorhandenen und der geforderten Anzahl von Geldmarktfonds ist. Aus

$$\lim_{z \uparrow 1} \frac{n\left(N^{-1}(z)\right)}{N\left(N^{-1}(z)\right)} = \lim_{y \uparrow \infty} \frac{n(y)}{N(y)} = 0$$

und (aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung)

$$\begin{aligned} \lim_{z \downarrow 0} \frac{n\left(N^{-1}(z)\right)}{N\left(N^{-1}(z)\right)} &= \lim_{y \downarrow -\infty} \frac{n(y)}{N(y)} \\ &= \lim_{y \uparrow \infty} \frac{n(y)}{1 - N(y)} \\ &= \lim_{y \uparrow \infty} \frac{-yn(y)}{-n(y)} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

wird ersichtlich, dass das Volumen der risikobehafteten Position mit wachsender Diskrepanz zwischen dem aktuell vorhandenen und dem angestrebten Vermögen grenzenlos wächst.

### 2.2.3 Bestimmung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit

Für die Shortfall-Wahrscheinlichkeit gilt i.V.m. $N(d_2) = z_t^* \Leftrightarrow -d_2 = N^{-1}\left(1 - z_t^*\right)$

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left(1 - f^* \middle| \mathcal{F}_t\right) &= N\left(-d_2 - \sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \\ &= N\left(N^{-1}\left(1 - z_t^*\right) - \sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \quad . \end{aligned} \tag{21}$$

Als Shortfall-Erwartungswert erhält man

$$E_{\mathbb{P}}\left(\underline{x}_T\left(1 - f^*\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) = \underline{x}_T N\left(N^{-1}\left(1 - z_t^*\right) - \sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \tag{22}$$

und als Shortfall-Varianz erhält man

$$E_{\mathbb{P}}\left(\left(\underline{x}_T\left(1 - f^*\right)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right) = \underline{x}_T^2 N\left(N^{-1}\left(1 - z_t^*\right) - \sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \quad . \tag{23}$$

# 3 Minimierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit für eine stochastische Benchmark

Im folgenden wird das Entscheidungsproblem eines Fondsmanagers untersucht, der mit einem gegebenen Fondsvermögen $X_0$ im Planungshorizont $T$ mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit wenigstens das $1+\Delta$-fache eines zukünftigen Indexstandes erreichen möchte. Hierbei wird ausgiebig von der strukturellen Identität dieses Problems mit dem zuvor behandelten Gebrauch gemacht.

## 3.1 Bestimmung der optimalen Strategie im statischen Kontext

Nunmehr ist der Grad der Zielerreichung zu Beginn und am Ende des Planungshorizontes der Quotient aus dem tatsächlich vorhandenen Vermögen $x_0$ bzw. $x_{Tj}$ und dem angestrebten Vielfachen des Index-Standes $(1+\Delta)\,i_0$ bzw. $(1+\Delta)\,i_{Tj}$ in der Zeit-Zustandskombination $(T,j)$, d.h.

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv \frac{x_0}{(1+\Delta)\,i_0} \\ z_{Tj} &\equiv \frac{x_{Tj}}{(1+\Delta)\,i_{Tj}} \quad . \end{aligned}$$

Da ein Fondsmanager bei dieser Zielsetzung niemals ein über $(1+\Delta)\,i_{Tj}$ hinausgehendes Vermögen anstrebt, kann das hier zu analysierende Entscheidungsproblem i.V.m. der bereits eingeführten Definition (1) für die Indikatorfunktion $f(z_{Tj})$ wie folgt formuliert werden:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(z_{Tj}) \rightarrow \max_{z_{Tj}}$$

u.d.B.

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j (1+\Delta)\, i_{Tj} f(z_{Tj}) \leq x_0 \quad .$$

Sei

$$\tilde{q}_j \equiv \pi_j \frac{i_{Tj}}{i_0} \quad ,$$

dann ist das Entscheidungsproblem äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n} p_j f(z_{Tj}) \rightarrow \max_{z_{Tj}}$$

u.d.B.

$$\sum_{j=1}^{n} (1+\Delta)\, i_0 f(z_{Tj})\, \tilde{q}_j \leq x_0 \quad .$$

Nun gilt

$$\frac{p_j}{\tilde{q}_j} = \frac{p_j}{\pi_j} \left(\frac{i_{Tj}}{i_0}\right)^{-1} = \frac{x_{Tj}^{go}}{x_0} \left(\frac{i_{Tj}}{i_0}\right)^{-1} \quad .$$

Somit kann man die optimale Strategie $f^*$ i.V.m. der Definition

$$z_{Tj}^{go} \equiv \frac{x_{Tj}^{go}}{(1+\Delta)\, i_{Tj}}$$

auch wie folgt darstellen

$$f^* = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad z_{Tj}^{go} > c \\ 0 & \text{falls} \quad z_{Tj}^{go} \leq c \end{cases} \quad .$$

Die Übergang von der Lösung des statischen Problems mit diskretem Zustandsraum auf die Lösung des dynamischen Modells mit stetigem Zustandsraum erfolgt analog zu dem Fall mit konstanter Benchmark.

## 3.2 Bestimmung der optimalen Strategie im dynamischen Kontext

Zur Berechnung der aus $\sum_{j=1}^{n} (1+\Delta)\, i_0 f(z_{Tj})\, \tilde{q}_j \leq x_0$ abgeleiteten Beziehung

$$X_t^* = (1+\Delta)\, I_t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f^* \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

für das Fonds-Vermögen unter der hier diskutierten Anlage-Strategie benötigt man die Verteilung von $Z_T^{go}$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{Q}}$. Dazu wird im folgenden zunächst einmal die Verteilung des Quotienten

$$Z_T^{go} \equiv \frac{X_T^{go}}{(1+\Delta)\, I_T}$$

unter dem empirischen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ bestimmt. Für den Index $I$ gilt

$$\begin{aligned} dI_t &= I_t \sum_{i=1}^{n} w_i^i \frac{dS_i}{S_i} \\ &= I_t \left(\mathbf{w}^{i\prime}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) + r\right) dt + I_t \mathbf{w}^{i\prime} \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W} \end{aligned}$$

und mithin

$$B_t^{-1} I_t = B_0^{-1} I_0 \exp\left(\left(\mathbf{w}^{i\prime}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) - \frac{1}{2}\mathbf{w}^{i\prime}\Sigma\mathbf{w}^i\right) t + \mathbf{w}^{i\prime}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}_t\right) \quad .$$

In Verbindung mit

$$\mathbf{w}^{i\prime}(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) = \mathbf{w}^{i\prime}\Sigma\mathbf{w}^{go}$$

ergibt sich somit

$$Z_t^{go} = \frac{X_0}{(1+\Delta)\, I_0} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right)' \Sigma \left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right) t + \left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right)' \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}_t\right) \quad . \tag{25}$$

Nun muss nur noch der Wechsel auf das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{Q}}$ berücksichtigt werden. Aus

$$\sum_j \tilde{q}_j \equiv \sum_j \pi_j \frac{i_{Tj}}{i_0} = \sum_j \frac{B_T^{-1} i_{Tj}}{B_0^{-1} i_0} q_j$$

lässt sich ersehen, dass bei stetigem Zustandsraum

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \frac{B_T^{-1} I_T}{B_t^{-1} I_t}$$

gelten muss. Da $B_T^{-1} I_T$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ein Martingal ist, gilt

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \exp(\mathbf{w}^{i\prime}\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{W}}_T - \frac{1}{2}\mathbf{w}^{i\prime}\Sigma\mathbf{w}^i T) \quad .$$

Bereits bekannt ist, wie sich der Prozess $Z_t^{go}$ unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ verhält. Nun findet die Maßtransformation

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

ihre Entsprechung in der Drift-Korrektur

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{W}}_t &= \hat{\mathbf{W}}_t - \boldsymbol{\sigma}'\mathbf{w}^i t \\ &= \mathbf{W}_t + \boldsymbol{\sigma}'\left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right) t\end{aligned}$$

Einsetzen von $\mathbf{W}_t = \tilde{\mathbf{W}}_t - \boldsymbol{\sigma}'\left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right) t$ in (25) führt i.V.m. der Definition

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &\equiv \left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right)'\Sigma\left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right) \\ &\equiv \sigma_{go}^2 - 2\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go} + \sigma_i^2\end{aligned} \tag{26}$$

auf

$$Z_t^{go} = \frac{X_0}{(1+\Delta)\, I_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_z^2 t + \left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right)'\boldsymbol{\sigma}\tilde{\mathbf{W}}_t\right) \quad .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}X_t^* &= (1+\Delta)\, I_t E_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(f^* \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= (1+\Delta)\, I_t N(d_2)\end{aligned}$$

mit

$$d_2 \equiv -\frac{\ln c - \left(\ln Z_t^{go} - \frac{1}{2}\sigma_z^2\,(T-t)\right)}{\sigma_z\sqrt{T-t}} \quad .$$

Für die Replikation sind in diesem Fall

$$\frac{\partial X_t^*}{\partial S_{it}} = (1+\Delta)\frac{w^i I_t}{S_{it}} N\left(d_2\right) + (1+\Delta)\, I_t n\left(d_2\right)\frac{\frac{\partial Z_t^{go}}{\partial S_{it}}\frac{1}{Z_t^{go}}}{\sigma_z\sqrt{T-t}}$$

Aktien der Gattungen $i = 1, \ldots, n$ erforderlich. Hieraus erhält man i.V.m. der Definition für den Zielerreichungsgrad

$$z_t^* \equiv \frac{X_t^*}{(1+\Delta)\, I_t} \quad ,$$

die Anlage-Strategie

$$\begin{aligned}w_{it} &= w_i^i + \frac{n\left(d_2\right)}{z_t^*}\frac{\frac{\partial X_t^{go}}{\partial S_{it}}\frac{S_{it}}{X_t^{go}} - \frac{\partial I_t}{\partial S_{it}}\frac{S_{it}}{I_t}}{\sigma_z\sqrt{T-t}} \\ &= w_i^i + \frac{n\left(N^{-1}\left(z_t^*\right)\right)}{N\left(N^{-1}\left(z_t^*\right)\right)}\frac{w_i^{go} - w_i^i}{\sigma_z\sqrt{T-t}} \quad .\end{aligned}$$

In Vektor-Matrix Schreibweise erhält man

$$\mathbf{w}_t = (1-\beta)\,\mathbf{w}^i + \beta\mathbf{w}^{go} \tag{27}$$

mit

$$\beta \equiv \beta(\sigma_Z, t, z) \equiv \frac{n\left(N^{-1}(z_t^*)\right)}{N\left(N^{-1}(z_t^*)\right)} \frac{1}{\sigma_z\sqrt{T-t}} \quad .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_z} &< 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} &> 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} &< 0 \quad . \end{aligned}$$

Offensichtlich fällt der GOP-Komponente hier die gleiche Rolle zu wie im Hinblick auf die Maximierung der Wahrscheinlichkeit des Erreichens einer deterministischen Benchmark. Daher hat sie ein um so größeres Gewicht, je kleiner c.p. die Volatilität der relativen Über- oder Unter-Performance des GOP, je näher c.p. der Planungshorizont rückt und je weiter der Entscheider von seiner Zielvorgabe entfernt ist.

Aus $\mathbf{w}_t = (1-\beta)\,\mathbf{w}^i + \beta\mathbf{w}^{go}$ läßt sich außerdem i.V.m. $\mathbf{1}'\mathbf{w}^i \equiv 1$ unmittelbar ablesen, dass sich ein benchmarkorientierter Portfolio-Manager, der die Shortfall-Wahrscheinlichkeit minimiert, genau dann verschuldet, wenn sich ein GOP-Investor mit identischen Erwartungen auch verschulden würde. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\mu_{ta} - r > \sigma_{ta}^2$ gilt. Hieraus könnte sich ein Konflikt mit § 9(4) des Gesetzes über Kapitalanlagegesellschaften (KAGG) ergeben, der die Verschuldung auf maximal 10% des Sondervermögens begrenzt.

## 3.3 Shortfall-Wahrscheinlichkeit, Shortfall-Erwartungswert und Shortfall-Varianz der optimalen Portfolio-Strategie

Analog zu (21) erhält man

$$E_{\mathbb{P}}\left(1 - f^* | \mathcal{F}_t\right) = N\left(N^{-1}(1 - z_t^*) - \sigma_z\sqrt{T-t}\right) \quad .$$

Hieraus lässt sich i.V.m. (26) ablesen, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Portfolio-Managers c.p. um so größer ist,

- je volatiler die Benchmark

und

- je kleiner die Kovarianz zwischen Benchmark und GOP bzw. Tangential-Portfolio

ist.

Portfolio-Manager, die nach schnellem Ruhm streben, werden daher solche Benchmarks bevorzugen, die möglichst volatil sind und gleichzeitig möglichst wenig mit dem Tangential-Porfolio korrelieren. Die hohe Volatilität macht es bei dem Manager bei geringer Korrelation mit dem Tangential-Portfolio leichter, die Benchmark mit Hilfe einer Konvexkombination aus GOP und Benchmark um das $\Delta$-fache zu schlagen. Man beachte dabei, dass die erwartete Rendite-Differenz zwischen GOP und Benchmark

$$\left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right)'(\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}) = \left(\mathbf{w}^{go} - \mathbf{w}^i\right)'\Sigma\mathbf{w}^{go} = \sigma_{go}^2 - \rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}$$

mit c.p. abnehmender Korrelation zunimmt.

Im folgenden sollen die Auswirkungen der Anreize zu einer hohen Volatilität für den Anleger - gemessen am Einfluss auf den Shortfall-Erwartungswert und die Shortfall-Varianz - untersucht werden. Seien

$$\begin{aligned} V &= \exp(v) \\ W &= \exp(w) \end{aligned}$$

logarithmisch normalverteilte Zufallsvariablen, dann gilt[12]

$$E\left(V \cdot f(W)\right) = E\left(V\right) \cdot E\left(f\left(W \exp(\operatorname{cov}\left(v, w\right)\right)\right) \quad .$$

Der Shortfall-Erwartungswert für die Strategie, die die Shortfall-Wahrscheinlichkeit minimiert, beläuft sich mithin unter Berücksichtigung von $\operatorname{cov}(\ln I_T, \ln Z_T^{go} \left| \mathcal{F}_t \right.) = \left(\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go} - \sigma_i^2\right)(T-t)$ auf

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}}\left(\left.(1+\Delta)I_T\left(1-f^*\right)\right| \mathcal{F}_t\right) \\ = \; & (1+\Delta)E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right| \mathcal{F}_t\right) \Pr\left(\ln Z_T^{go} + \left(\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go} - \sigma_i^2\right)(T-t) \leq \ln c\right) \\ = \; & (1+\Delta)E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right| \mathcal{F}_t\right) N\left(N^{-1}\left(1-z_t^*\right) - \frac{1-\rho_{i,go}\frac{\sigma_i}{\sigma_{go}}}{\sqrt{1-2\rho_{i,go}\frac{\sigma_i}{\sigma_{go}}+\frac{\sigma_i^2}{\sigma_{go}^2}}}\sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \quad , \end{aligned}$$

die entsprechende Shortfall-Varianz beläuft sich auf

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}}\left(\left.\left((1+\Delta)I_T\left(1-f^*\right)\right)^2\right| \mathcal{F}_t\right) \\ = \; & (1+\Delta)^2E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T^2\right| \mathcal{F}_t\right) \Pr\left(\ln Z_T^{go} + 2\left(\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go} - \sigma_i^2\right)(T-t) \leq \ln c\right) \\ = \; & (1+\Delta)^2E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T^2\right| \mathcal{F}_t\right) N\left(N^{-1}\left(1-z_t^*\right) - \frac{1-\frac{\sigma_i^2}{\sigma_{go}^2}}{\sqrt{1-2\rho_{i,go}\frac{\sigma_i}{\sigma_{go}}+\frac{\sigma_i^2}{\sigma_{go}^2}}}\sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right| \mathcal{F}_t\right) = B_t^{-1}B_TI_t \exp\left(\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}\left(T-t\right)\right)$$

und

$$E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T^2\right| \mathcal{F}_t\right) = E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right| \mathcal{F}_t\right)^2 \exp\left(\sigma_i^2\left(T-t\right)\right) \quad .$$

gilt. Es kann gezeigt werden, dass

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{go}} > \rho_{i,go}^{-1} > 1$$

eine hinreichende Bedingungen dafür ist, dass der Shortfall-Erwartungswert und

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_{go}} > 1$$

eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Shortfall-Varianz mit wachsender Volatilität des Index größer wird. Im folgenden soll daher untersucht werden, ob die Präferenz für volatile Benchmarks unter Umständen dadurch vermieden werden kann, dass die Performance am erwarteten Shortfall gemessen wird.

[12] vgl. [12], 489f.

# 4 Minimierung des erwarteten Shortfalls

Als nächste benchmarkorientierte Stratgie wird in diesem Beitrag die Minimierung der erwarteten Abweichung des Endvermögens von der Benchmark (Shortfall-Erwartungswert) behandelt.

## 4.1 Bestimmung der optimalen Strategie im statischen Kontext

Seien

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv \frac{x_0}{(1+\Delta)\, i_0} \\ z_{Tj} &\equiv \frac{x_{Tj}}{(1+\Delta)\, i_{Tj}} \end{aligned}$$

und

$$f(z_{Tj}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad z_{Tj} \geq 1 \\ z_{Tj} & \text{falls} \quad 0 \leq z_{Tj} < 1 \end{cases} \quad ,$$

dann kann das Problem der Minimierung des erwarteten Shortfalls

$$\sum_j p_j (1+\Delta)\, i_{Tj} (1 - f(z_{Tj})) \to \min_{z_{Tj}}$$

u.d.B.

$$\sum_j \pi_j (1+\Delta)\, i_{Tj} f(z_{Tj}) \leq x_0$$

i.V.m. den Definitionen

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j &\equiv p_j (1+\Delta)\, i_{Tj} \\ \tilde{q}_j &\equiv \pi_j \frac{i_{Tj}}{i_0} \end{aligned}$$

als Standard-Problem formuliert werden:

$$\sum_j \tilde{p}_j f(z_{Tj}) \to \max$$

u.d.B.

$$\sum_j \tilde{q}_j f(z_{Tj}) \leq z_0 \quad .$$

Wegen

$$\frac{\tilde{p}_j}{\tilde{q}_j} = \frac{p_j}{\pi_j} (1+\Delta)\, i_0 = \frac{x_{Tj}^{go}}{x_0} (1+\Delta)\, i_0$$

kann die Lösung dargestellt werden als

$$f^* = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x_{Tj}^{go} > c \\ 0 & \text{falls} \quad x_{Tj}^{go} \leq c \end{cases} \quad . \tag{28}$$

## 4.2 Bestimmung der optimalen Strategie im dynamischen Kontext

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} B_t^{-1}X_t^{go} &= B_0^{-1}X_0^{go}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{go}^2 t + \mathbf{w}^{go\prime}\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{W}}_t\right) \\ &= B_0^{-1}X_0^{go}\exp\left(\left(-\frac{1}{2}\sigma_{go}^2 + \rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}\right)t + \mathbf{w}^{go\prime}\boldsymbol{\sigma}\tilde{\mathbf{W}}_t\right) \end{aligned}$$

erhält man aus (28) analog zur Maximierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit

$$X_t^* = (1+\Delta)\, I_t N(d_2)$$

mit

$$d_2 \equiv -\frac{\ln\left(B_T^{-1}c\right) - \left(\ln\left(B_t^{-1}X_t^{go}\right) + \left(-\frac{1}{2}\sigma_{go}^2 + \rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}\right)(T-t)\right)}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}}$$

und gelangt zu dem Resultat, dass der Portfolio-Manager im Zeitpunkt $t$ den Bruchteil

$$w_{it} = w_i^i + \gamma w_i^{go}$$

mit

$$\gamma \equiv \gamma\left(\sigma_{go}, t, z_t^*\right) \equiv \frac{n\left(N^{-1}\left(z_t^*\right)\right)}{N\left(N^{-1}\left(z_t^*\right)\right)}\frac{1}{\sigma_{go}\sqrt{T-t}} \tag{29}$$

$$z_t^* \equiv \frac{X_t^*}{(1+\Delta)\, I_t} \tag{30}$$

des Fonds-Vermögens in Aktie $i$ investieren muss. Aus dem Vergleich von (29) mit (20) lässt sich ablesen, dass sich die hier diskutierte Strategie als Investition in die Benchmark zuzüglich einer fremdfinanzierten Position, die die Shortfall-*Wahrscheinlichkeit* für das Vermögensziel

$$\underline{x}_T = \frac{B_t^{-1}X_t^*}{B_T^{-1}z_t^*} = B_t^{-1}B_T(1+\Delta)\, I_t$$

minimiert, erklären lässt. Aus der Bestimmungsgleichungen für den Shortfall-Erwartungswert

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}}\left(\left.(1+\Delta)I_T(1-f^*)\right|\mathcal{F}_t\right) \\ =\ & (1+\Delta)E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right|\mathcal{F}_t\right)\Pr\left(\ln X_T^{go} + \rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}(T-t) \le \ln c\right) \\ =\ & (1+\Delta)E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right|\mathcal{F}_t\right)N\left(N^{-1}\left(1-z_t^*\right) - \sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \end{aligned}$$

kann man i.V.m.

$$E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T\right|\mathcal{F}_t\right) = B_t^{-1}B_T I_t \exp\left(\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}(T-t)\right)$$

ablesen, dass der Anreiz, möglichst volatile Indizes als Benchmark zu wählen, verschwindet. Der Anreiz, eine mit dem Tangentialportfolio möglichst wenig korrelierte Benchmark zu wählen, bleibt allerdings bestehen.

Als Shortfall-Varianz ergibt sich

$$\begin{aligned} & E_{\mathbb{P}}\left(\left.\left((1+\Delta)I_T(1-f^*)\right)^2\right|\mathcal{F}_t\right) \\ =\ & (1+\Delta)^2 E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T^2\right|\mathcal{F}_t\right)\Pr\left(\ln X_T^{go} + 2\rho_{go,i}\sigma_i\sigma_{go}(T-t) \le \ln c\right) \\ =\ & (1+\Delta)^2 E_{\mathbb{P}}\left(\left.I_T^2\right|\mathcal{F}_t\right)N\left(N^{-1}\left(1-z_t^*\right) - \left(1+\rho_{i,go}\frac{\sigma_i}{\sigma_{go}}\right)\sigma_{go}\sqrt{T-t}\right) \quad . \end{aligned}$$

Bemerkenswert erscheint ferner, dass sich das unbeobachtbare Anspruchsniveau $\Delta$ bei gegebenem Zeithorizont $T$ mit Hilfe einer Obergrenze für die Verschuldung nach oben begrenzen lässt: Das folgt nach Einsetzen von

$$\mathbf{1}'\mathbf{w}^i \equiv 1 \quad ,$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{w}^{go} = \frac{\mu_{ta} - r}{\sigma_{ta}^2}$$

und

$$\sigma_{go} = \frac{\mu_{ta} - r}{\sigma_{ta}^2} \sigma_{ta}$$

in $\mathbf{1}'\mathbf{w} - \mathbf{1}'\mathbf{w}^i = \gamma \mathbf{1}'\mathbf{w}^{go}$ aus der Tatsache, dass die rechte Seite von

$$\mathbf{1}'\mathbf{w} - 1 = \frac{n\left(N^{-1}\left(\frac{X_t^*}{(1+\Delta)I_t}\right)\right)}{N\left(N^{-1}\left(\frac{X_t^*}{(1+\Delta)I_t}\right)\right)} \frac{1}{\sigma_{ta}\sqrt{T-t}}$$

ein monton wachsende Funktion von $\Delta$ ist.

# 5 Minimierung der Shortfall-Varianz

Als letzte benchmarkorientierte Stratgie wird in diesem Beitrag die Minimierung der quadrierten Abweichung des Endvermögens von der Benchmark (Shortfall-Varianz) behandelt.

## 5.1 Bestimmung der optimalen Strategie im statischen Kontext

Seien weiterhin

$$\begin{aligned} z_0 &\equiv \frac{x_0}{(1+\Delta)\, i_0} \\ z_{Tj} &\equiv \frac{x_{Tj}}{(1+\Delta)\, i_{Tj}} \end{aligned}$$

und

$$f(z_{Tj}) \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad z_{Tj} \geq 1 \\ z_{Tj} & \text{falls} \quad 0 \leq z_{Tj} < 1 \end{cases} \quad ,$$

dann kann man das Problem der Minimierung der Shortfall-Varianz wie folgt schreiben:

$$\sum_j p_j \left(i_{Tj}(1+\Delta)(1-f)\right)^2 \to \min_{z_{Tj}}$$

u.d.B.

$$\sum_j \pi_j (1+\Delta)\, i_{Tj} f \leq x_0 \quad .$$

Um dieses Problem auf dem oben beschrittenen Wege lösen zu können, sind 3 Schritte erforderlich:

1. Jede zulässige Strategie $f$ läßt sich als Konvexkombination

$$f(\varepsilon) \equiv \varepsilon\phi + (1-\varepsilon) f^*$$

aus einer zulässigen Strategie $\phi$ und der optimalen Strategie $f^*$ auffassen. Sei $F$ die Zielfunktion, dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial f}\frac{df}{d\varepsilon} = -2(1+\Delta)^2 \sum_j p_j i_{Tj}^2 (1 - f(\varepsilon))(\phi - f^*) \quad .$$

2. Im Optimum muss $\varepsilon = 0$ gelten. Da es sich um ein Minimum handelt, darf die rechtsseitige Ableitung an der Stelle $0^+$ nicht negativ sein, somit gilt also

$$-\sum_j p_j i_{Tj}^2 (1-f^*)(\phi - f^*) \geq 0$$

bzw.

$$\sum_j p_j i_{Tj}^2 (1-f^*)\phi \leq \sum_j p_j i_{Tj}^2 (1-f^*) f^* \quad .$$

3. Da $\sum_j p_j i_{Tj}^2 (1-f^*)\phi$ nach oben durch $\sum_j p_j i_{Tj}^2 (1-f^*) f^*$ begrenzt wird, findet man $f^*$ auch mit Hilfe der Zielfunktion $\sum_j p_j i_{Tj}^2 (1-f^*)\phi \to \max$. Damit lässt sich das Problem der Minimierung der Shortfall-Varianz i.V.m. den Definitionen

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j &\equiv p_j i_{Tj}^2 (1-f^*) \\ \tilde{q}_j &\equiv \pi_j \frac{i_{Tj}}{i_0} \end{aligned}$$

einmal mehr in die Standardform bringen:

$$\sum_j \tilde{p}_j f(z_{Tj}) \to \max$$

u.d.B.

$$\sum_j \tilde{q}_j f(z_{Tj}) \leq z_0 \quad .$$

Nun gilt

$$\frac{\tilde{p}_j}{\tilde{q}_j} = \frac{p_j}{\pi_j} i_0 (1-f^*) i_{Tj} = \frac{x_{Tj}^{go} i_{Tj}}{(1+\Delta) z_0}(1-f^*) \quad ,$$

so dass die optimale Lösung analog zu der Lösung der nicht ganzzahligen Relaxation des Problems der Minimierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit (7) wie folgt charakterisiert ist:

$$f^* = \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{x_{Tj}^{go} i_{Tj}}{(1+\Delta)z_0}(1-f^*) > u_1^* \quad \Leftrightarrow \quad u_1^* > 0 \\ \gamma < 1 & \text{falls } \frac{x_{Tj}^{go} i_{Tj}}{(1+\Delta)z_0}(1-f^*) = u_1^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{(1+\Delta)z_0}{x_{Tj}^{go} i_{Tj}} u_1^* = \gamma \\ 0 & \text{falls } \frac{x_{Tj}^{go} i_{Tj}}{(1+\Delta)z_0}(1-f^*) < u_1^* \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{(1+\Delta)z_0}{x_{Tj}^{go} i_{Tj}} u_1^* < 0 \end{cases} \quad .$$

Die Lösung $f^* = 1$ scheidet aus, weil sie im Widerspruch zu $u_1^* \geq 0$. steht. Somit bleibt

$$f^* = (\gamma)^+$$

mit

$$\gamma = 1 - \frac{c}{x_{Tj}^{go} i_{Tj}} \quad .$$

Die Budgetbedingung lautet

$$B_0 B_T^{-1} (1+\Delta) \sum_j q_j \left( i_{Tj} - \frac{c}{x_{Tj}^{go}} \right)^+ = x_0 \quad .$$

## 5.2 Bestimmung der optimalen Strategie im dynamischen Kontext

Allgemein gilt für unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable

$$\begin{aligned} V &= \exp(v) \\ W &= \exp(w) \end{aligned}$$

$$E_{\mathbb{P}} \left( v - \frac{c}{W} \right)^+ = E_{\mathbb{P}}(V) N(d) - E_{\mathbb{P}} \left( \frac{c}{W} \right) N(d - \sigma_{v+w})$$

mit

$$\begin{aligned} d &\equiv \frac{\frac{E_{\mathbb{P}}(V)}{E_{\mathbb{P}}\left(\frac{c}{W}\right)} + \frac{1}{2}\sigma_{v+w}^2}{\sigma_{v+w}} \\ \sigma_{v+w} &\equiv \sqrt{\sigma_v^2 + 2\rho_{v,w}\sigma_v\sigma_w + \sigma_w^2} \quad . \end{aligned}$$

Als Marktpreis für die Shortfall-Varianz minimierende Strategie erhält man somit

$$\begin{aligned} X_t^* &= (1+\Delta) B_t B_T^{-1} \left[ E_{\mathbb{Q}}(I_T) N(d_1) - kN(d_2) \right] \\ &= (1+\Delta) \left[ I_t N(d_1) - B_t B_T^{-1} k N(d_2) \right] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv \frac{\ln\left(\frac{E_{\mathbb{Q}}(I_T)}{k}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{i+go}^2 (T-t)}{\sigma_{i+go}\sqrt{T-t}} \\ d_2 &\equiv d_1 - \sigma_{i+go}\sqrt{T-t} \\ k &\equiv cE_{\mathbb{Q}}\left(X_T^{go-1}\right) = c\left(B_t^{-1} B_T X_t^{go}\right)^{-1} \exp\left(\sigma_{go}^2 (T-t)\right) \quad . \end{aligned}$$

Mithin gilt

$$\begin{aligned} w_{it} &= \frac{\partial X_t^*}{\partial S_{it}} \frac{S_{it}}{X_t^*} \\ &= (1+\Delta) \left[ \frac{w_i^i I_t}{S_{it}} N(d_1) + B_t B_T^{-1} k \frac{w_i^{go}}{S_{it}} N(d_2) \right] \frac{S_{it}}{X_t} \\ &= w_i^i + \left(w_i^{go} + w_i^i\right) \frac{B_t B_T^{-1} k N(d_2)}{I_t N(d_1) - B_t B_T^{-1} k N(d_2)} \\ &= w_i^i + \left(w_i^{go} + w_i^i\right) \frac{N(d_1) - z_t^*}{z_t^*} \\ &= w_i^i \frac{N(d_1)}{z_t^*} + w_i^{go} \left( \frac{N(d_1)}{z_t^*} - 1 \right) \quad , \end{aligned}$$

woran sich i.V.m.

$$z_t^* = N(d_1) - \frac{B_t B_T^{-1} k}{I_t} N(d_2) < N(d_1)$$

ablesen lässt, dass die Minimierung der Shortfall-Varianz ebenfalls erfordert, dass sich der Entscheider verschuldet. Während das GOP im Falle der Minimierung der Shortfall-Wahr-scheinlichkeit dominiert und unter Umständen sogar mit einem Leerverkauf der Benchmark einhergeht, spielt das GOP hier nur noch die Rolle einer fremdfinanzierten Depotbeimischung.

Als Shortfall-Erwartungswert errechnet sich

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left(\left(1+\Delta\right) I_T \left(1-f^*\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) &= \left(1+\Delta\right)\left(E_{\mathbb{P}}\left(I_T\right) - E_{\mathbb{P}}\left(I_T f^*\right)\right) \\ &= \left(1+\Delta\right)\left(E_{\mathbb{P}}\left(I_T\right) - E_{\mathbb{P}}\left(\max\left(I_T - cX_T^{go-1}, 0\right) |\mathcal{F}_t\right)\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left(\max\left(I_T - cX_T^{go-1}, 0\right)|\mathcal{F}_t\right) &= E_{\mathbb{P}}\left(I_T |\mathcal{F}_t\right) N(d_3) - cE_{\mathbb{P}}\left(X_T^{go-1} |\mathcal{F}_t\right) N(d_4) \\ E_{\mathbb{P}}\left(I_T |\mathcal{F}_t\right) &= B_t^{-1} B_T I_t \exp\left(\rho_{i,go}\sigma_{go}\sigma_i (T-t)\right) \\ E_{\mathbb{P}}\left(X_T^{go-1} |\mathcal{F}_t\right) &= \left(B_t^{-1} B_T X_t^{go}\right)^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_3 &\equiv \frac{\ln\left(\frac{E_{\mathbb{P}}(I_T)}{cE_{\mathbb{P}}\left(X_T^{go-1}\right)}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{i+go}^2 (T-t)}{\sigma_{i+go}\sqrt{T-t}} \\ &= d_1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{go}^2 - \sigma_i^2}{\sigma_{i+go}}\right)\sigma_{i+go}\sqrt{T-t} \\ d_4 &= d_2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma_{go}^2 - \sigma_i^2}{\sigma_{i+go}}\right)\sigma_{i+go}\sqrt{T-t} \quad . \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} I_T^2 \left(1-f^*\right)^2 &= I_T^2 \left(1 - \max\left(1 - \frac{c}{X_T^{go} I_T}, 0\right)\right)^2 \\ &= I_T^2 \left(1 + \min\left(\frac{c}{X_T^{go} I_T} - 1, 0\right)\right)^2 \\ &= \min\left(c^2 X_T^{go-2}, I_T^2\right) \\ &= I_T^2 - \max\left(I_T^2 - c^2 X_T^{go-2}, 0\right) \end{aligned}$$

sowie der Tatsache, dass $X^2$ und $Y^2$ lognormalverteilt sind, falls $X$ und $Y$ lognormalverteilt sind, erhält man für die Shortfall-Varianz

$$\begin{aligned} SV &\equiv E_{\mathbb{P}}\left(\left(\left(1+\Delta\right) I_T \left(1-f^*\right)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= \left(1+\Delta\right)^2 \left(E_{\mathbb{P}}\left(I_T^2\right) - E_{\mathbb{P}}\left(\max\left(I_T^2 - c^2 X_T^{go-2}, 0\right)\right)\right) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left(\max\left(I_T^2 - c^2 X_T^{go-2}, 0\right)\right) &= E_{\mathbb{P}}\left(I_T^2\right) N(d_5) - c^2 E_{\mathbb{P}}\left(X_T^{go-2}\right) N(d_6) \\ d_5 &= d_1 + \sigma_{i+go}\sqrt{T-t} \\ d_6 &= d_1 - \sigma_{i+go}\sqrt{T-t} = d_2 \quad . \end{aligned}$$

Im folgenden soll untersucht werden, ob die Portfolio-Manager ihre Präferenz für eine möglichst geringe Korrelation $\rho$ zwischen Benchmark und Tangential-Portfolio verlieren, wenn man sie an der Shortfall-Varianz mißt. Sei

$$C \equiv E_{\mathbb{P}}\left(\max\left(I_T^2 - c^2 X_T^{go-2}, 0\right)\right) \quad ,$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+\Delta)^2}\frac{\partial SV}{\partial \rho} \\
= & \left(1 - \frac{\partial C}{\partial E_{\mathbb{P}}\left(I_T^2\right)}\right)\frac{\partial E_{\mathbb{P}}\left(I_T^2\right)}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma_{i+go}} + \frac{\partial C}{\partial c}\frac{dc}{d\sigma_{i+go}}\right)\frac{d\sigma_{i+go}}{d\rho} \\
= & \frac{\partial E_{\mathbb{P}}\left(I_T^2\right)}{\partial \rho} N\left(-d_5\right) - E_{\mathbb{P}}\left(X_T^{go-2}\right)\left(2c^2 n\left(d_2\right) - 2cN\left(d_2\right)\frac{dc}{d\sigma_{i+go}}\right)\frac{d\sigma_{i+go}}{d\rho} \\
= & 2\sigma_i\sigma_{go}E_{\mathbb{P}}\left(I_T^2\right)N\left(-d_5\right) > 0
\end{aligned}$$

wegen

$$\frac{dc}{d\sigma_{i+go}} = -\frac{\frac{\partial X_t^*}{\partial \sigma_{i+go}}}{\frac{\partial X_t^*}{\partial c}} = \frac{cE_{\mathbb{Q}}\left(X_T^{go-1}\right)n\left(d_2\right)}{E_{\mathbb{Q}}\left(X_T^{go-1}\right)N\left(d_2\right)} = c\frac{cn\left(d_2\right)}{N\left(d_2\right)} \quad .$$

Damit ist gezeigt, dass Portfolio-Manager ihre Präferenz für eine möglichst geringe Korrelation zwischen Benchmark und Tangential-Portfolio auch dann nicht verlieren, wenn man ihre Performance an der Shortfall-Varianz misst. Diese Präferenz ist also offensichtlich nicht für ein bestimmtes Performance-Maß sondern für die Benchmark-Orientierung an sich charakteristisch. Sie wurzelt in der Tatsache, dass das als „Portfolio-Beimischung" zum Einsatz kommende GOP seinen relativen Performance-Vorsprung mit abnehmender Korrelation ausbaut und damit die Chance verbessert, den Index mit Hilfe dieser Portfolio-Beimischung zu schlagen.

# 6 Fazit

Der vorliegende Beitrag legt die teilweise verborgenen Risiken benchmarkorientierter Portfolio-Strategien offen. Im Einzelnen befasst er sich mit drei benchmarkorientierten Portfolio-Strategien, die sich als Risiko-Minimierungs-Ansätze begreifen lassen, wobei als Risikomaße die Shortfall-Wahrscheinlichkeit, die Shortfall-Erwartung und die Shortfall-Varianz dienen. In allen drei Fällen ist das sog. Growth-Optimum-Portfolio (GOP) Bestandteil der optimalen Strategie.

Für *Portfolio-Manager* ist der vorliegende Beitrag schon deshalb interessant, weil für alle hier behandelten dynamischen Optimierungsprobleme analytische Lösungen präsentiert werden.

Für *Anleger* ist der vorliegende Beitrag insofern interessant, als er deutlich macht, dass die Minimierung der Shortfall-Wahrscheinlichkeit für die Portfolio-Manager mit dem Anreiz gekoppelt ist, sich an möglichst volatilen Benchmarks messen zu lassen, und dass alle hier behandelten benchmarkorientierten Risikomaße für die Portfolio-Manager mit dem Anreiz gekoppelt sind, sich an möglichst wenig mit dem Tangentialportfolio korrelierten Benchmarks messen zu lassen.

Für *Finanzmarkt-Regulierer* ist der vorliegende Beitrag insofern interessant, als er deutlich macht, dass auch dann, wenn man benchmarkorientierte Portfolio-Manager dazu bringen möchte, die finanziellen Konsequenzen einer erfolglosen Anlagepolitik nicht aus dem Auge zu verlieren, ein gewisses Maß an Verschuldung notwendig ist.

# Literatur


[1] BAXTER, M.W.; RENNIE, A.J.: *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] BROWNE, S.: *Beating a Moving Target: Optimal Portfolio Strategies for Outperforming a Stochastic Benchmark.* Finance and Stochastics, 3:275–294, 1999.

[3] BROWNE, S.: *The Risk and Rewards of Minimizing Shortfall Probability.* Journal of Portfolio Management, 25:76–85, 1999.

[4] BROWNE, S.: *Risk Constrained Dynamic Active Portfolio Management.* Management Science, 46:1188–1199, 2000.

[5] FÖLLMER, H.; LEUKERT, P.: *Quantile Hedging.* Finance and Stochastics, 3:251–273, 1999.

[6] FÖLLMER, H.; LEUKERT, P.: *Efficient Hedges: Cost versus Shortfall Risk.* Finance and Stochastics, 4:117–146, 2000.

[7] KISTNER, K. P.: *Optimierungsmethoden: Einführung in die Unternehmensforschung für Wirtschaftswissenschaftler.* Physica-Verlag, Heidelberg, 2. Aufl., 1993.

[8] MERTON, R.: *Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model.* Journal of Economic Theory, 3:373–413, 1971.

[9] MERTON, R. C.: *Continuous-Time Finance.* Blackwell, 1992.

[10] PLISKA, ST.: *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.* Blackwell Publishers, Malden MA, Oxford, 1997.

[11] SPIVAK, G.; CVITANIC, J.: *Maximizing the Probability of a Perfect Hedge.* Annals of Applied Probability, 9:1303–1328, 1999.

[12] WILHELM, J.: *Erwartungsstruktur und bestandsökonomische Darstellung aus kapitalmarkttheoretischer Sicht, in: Bankpolitik, finanzielle Unternehmensführung und die Theorie der Finanzmärkte - Festschrift für Hans-Jacob Krümmel*, 475–500. Duncker u. Humblot, 1988.