

Phasenübergänge in der QCD mit fundamentalen
und adjungierten Quarks

Dissertation

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Martin Lütgemeier

24. November 1998

Vorwort

Mit dieser Dissertationsschrift beschlieÙe ich eine vierjähriqe Promotion und ein insgesamt neunjähriqes Studium an der Universität Bielefeld in der Fakultät Physik. Sie stellt damit sicherlich einen bedeutenden Punkt in meinem bisherigen Leben dar und ich hoffe, daÙ dieses Werk auch dem AnlaÙ gerecht geworden ist. Es kann allerdings keinesfalls vermitteln, was ich in der vergangenen Zeit alles gelernt habe oder wie ich mich fachlich und auch persönlich weiterentwickelt habe. Es war mir leider aus Zeit- und Platzmangel auch nicht möglich, das Thema für QCD-unerfahrene oder Nicht-Physiker verständlich zu behandeln. Dafür bitte ich um Entschuldigung.

Da ich vor hatte, die Ergebnisse meines Promotionsprojektes ausführlich darzustellen, und da ein so langes Werk auch nicht in einer Fachzeitschrift zu veröffentlichen ist, konnte ich es in deutscher Sprache verfassen. Das hat die Vollendung der Arbeit sicherlich beschleunigt, da ich im Gegensatz zur englischen die deutsche Grammatik und (alte !) Rechtschreibung etwas sicherer beherrsche. Da die meisten der durchweg englischen Fachbegriffe aber meines Erachtens unübersetzbar sind, befinden sich im Text recht viele Anglizismen, bei denen ich mit der Groß- oder Kleinschreibung ziemlich freizügig und sicher nicht immer konsequent war. Auch das bitte ich mir nachzusehen.

In Bezug auf den Inhalt möchte ich noch anmerken, daÙ ich mich gerade im Theorieteil darauf beschränkt habe, bekannte Dinge nur kurz zusammenzufassen und bei Neuem nur die Veränderungen hervorzuheben. Ich hoffe, daÙ dadurch der Blick auf die wesentlichen Aspekte meiner Forschung freigeblieden ist. Auch der Anhang, der wohl etwa die Hälfte des Gesamtvolumens ausmacht, ist deshalb so umfangreich, damit dem Leser in Zweifelsfällen genaue Zahlen und detaillierte Graphiken zum Nachschlagen zur Verfügung stehen.

Zu Beginn des nächsten Jahres werde ich mit meinem Berufseintritt die wissenschaftliche Laufbahn beenden. Daher benutze ich diese Gelegenheit, um all denen zu danken, die mir im Laufe meines Studiums zur Seite gestanden haben. Mein besonderer Dank gilt Professor Dr. Frithjof Karsch, der mich wie schon zu Zeiten meiner Diplomarbeit auch bei der Promotion ausgezeichnet betreut hat, immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatte und auch all die vielen Anträge geschrieben hat, die die wirtschaftlichen Voraussetzungen für die Dauer meiner Promotion schufen. Seine Fähigkeit, mir zwischen all den vielen Zahlen und Formeln die wesentlichen physikalischen Aspekte zu erklären, hat mir sehr geholfen. Auch für die vielen interessanten Konferenzteilnahmen in aller Welt, die ich keineswegs als selbstverständlich betrachte, und das damit in mich gesetzte Vertrauen bedanke ich mich ausdrücklich. Mein Dank gilt auch allen

übrigen Dozenten von E6, die mir im Laufe der Zeit durch Diskussionen, Vorlesungen oder Vorträgen auf die Sprünge geholfen haben, besonders aber PD Dr. Edwin Laermann, der für mich von Anfang an immer ein wichtiger und äußerst hilfreicher Ansprechpartner gewesen ist, und Professor Dr. Helmut Satz für seine Bereitschaft, als Gutachter zu fungieren.

Ich habe mich an meinem Arbeitsplatz immer wohl und gut versorgt gefühlt, woran unser kompetentes und freundliches Sekretariats-Trio Gudrun, Karin und Susi einen nicht unwesentlichen Anteil hatte. Auch die vielen Gastwissenschaftler aus dem In- und Ausland haben viel zum guten, internationalen Betriebsklima beigetragen. Zu guter Letzt bedanke ich mich bei allen meinen Mitsudentinnen und Mitstudenten, die mir stets mit Rat und Tat zur Seite standen. Insbesondere Tim Scheideler, jetzt in Finnland, und Christian Legeland, schon in Stuttgart, mit denen ich wohl am längsten zusammengearbeitet habe, danke ich für die schöne gemeinsame Zeit. Vielen Dank auch meinen Korrekturlesern Sylvia Kristen und Hans Lütgemeier, die immer noch mehr Fehler als der Computer gefunden haben.

Bielefeld, im November 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	15
1.1	Thematische Motivation	15
1.2	Inhaltlicher Aufbau	16
2	<i>QCD</i> mit dynamischen Fermionen auf dem Gitter	19
2.1	Definition der Wirkung	20
2.2	Definition der Observablen	21
3	Von <i>QCD</i> zu <i>aQCD</i>	25
3.1	Die adjungierte Darstellung der $SU(3)$	25
3.2	Die β -Funktion der <i>aQCD</i>	27
3.3	Veränderung von Wirkung und Algorithmus	28
3.4	Definition weiterer Observablen	30
3.5	Die Symmetrien der <i>aQCD</i>	31
4	<i>QCD</i> am Phasenübergang	35
4.1	Kritisches Verhalten in der <i>QCD</i>	35
4.1.1	Bestimmung des Phasenübergangs	36
4.1.2	Kritische Temperatur in physikalischen Einheiten	39
4.2	Screening Massen in der <i>QCD</i>	45

5	Die Phasenstruktur der $aQCD$	47
5.1	Die Simulationen	47
5.2	Thermodynamik der $aQCD$	48
5.2.1	Der Deconfinement Phasenübergang	49
5.2.2	Der chirale Phasenübergang	54
5.2.3	Latente Wärme und Druck in der Umgebung von T_d	58
5.3	Goldstone Moden in der $aQCD$	62
6	Zusammenfassung	65
	Anhang	68
A	Formeln und Herleitungen für die $aQCD$	69
A.1	Eigenschaften der adjungierten Darstellung	69
A.2	Vorbemerkungen zum HMC Algorithmus	70
A.2.1	Einführung der Variablen	70
A.2.2	Notation	70
A.2.3	Formalismus der adjungierten Fermionen	71
A.2.4	Fermion Matrix	72
A.3	Der HMC Algorithmus	73
A.3.1	Gluonischer Anteil	74
A.3.2	Fermionischer Anteil	74
B	Tabellen der QCD	83
B.1	Einfache Observablen	83
B.1.1	Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter	83
B.2	Meson Massen	86
B.2.1	Screening Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter	86
B.2.2	Massen auf dem 16^4 Gitter	87
B.3	Potentiale aus Wilsonloops	88

C Tabellen der $aQCD$	89
C.1 Einfache Observablen	89
C.1.1 Ergebnisse vom $8^3 \times 4$ Gitter	89
C.1.2 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter	95
C.2 Fundamentale und adjungierte Potentiale	96
C.3 Screening Massen	101
D Bilder der QCD	103
D.1 Einfache Observablen	103
D.1.1 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter	103
D.2 Meson Massen	107
D.2.1 Screening Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter	107
D.2.2 Massen auf dem 16^4 Gitter	112
D.3 Potentiale aus Wilsonloops	113
E Bilder der $aQCD$	117
E.1 Einfache Observablen	117
E.1.1 Ergebnisse vom $8^3 \times 4$ Gitter	117
E.1.2 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter	123
E.2 Fundamentale und adjungierte Potentiale	126
E.3 Screening Massen	131
Literaturverzeichnis	133

Tabellenverzeichnis

4.1	Simulationsparameter auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.	36
4.2	Kritische Kopplungen und Peakhöhen, $16^3 \times 4$	37
4.3	Simulationsparameter auf dem 16^4 Gitter.	40
4.4	Meson Massen, $16^3 \times 4$	41
4.5	Fitparameter aus den Potentialfits, 16^4	42
5.1	Simulationsparameter in der $aQCD$	48
5.2	Kritische Kopplungen β_d , $8^3 \times 4$	50
5.3	Fitparameter μ/T und α , $16^3 \times 4$	53
5.4	Kritische Kopplungen β_c , $8^3 \times 4$	58
5.5	Plaquette Differenzen bei β_d , $8^3 \times 4$	59
B.1	Simple Observablen für $m = 0.20$, $16^3 \times 4$	83
B.2	Suszeptibilitäten χ_L und χ_m für $m = 0.20$, $16^3 \times 4$	84
B.3	Simple Observablen für $m = 0.40$, $16^3 \times 4$	84
B.4	Suszeptibilitäten χ_L und χ_m für $m = 0.40$, $16^3 \times 4$	84
B.5	Simple Observablen für $m = 0.60$, $16^3 \times 4$	84
B.6	Suszeptibilitäten χ_L und χ_m für $m = 0.60$, $16^3 \times 4$	85
B.7	Simple Observablen für $m = 1.00$, $16^3 \times 4$	85

B.8	Suszeptibilitäten χ_L und χ_m für $m = 1.00, 16^3 \times 4$	85
B.9	Meson Massen bei $m = 0.20, 16^3 \times 4$	86
B.10	Meson Massen bei $m = 0.40, 16^3 \times 4$	86
B.11	Meson Massen bei $m = 0.60, 16^3 \times 4$	86
B.12	Meson Massen bei $m = 1.00, 16^3 \times 4$	86
B.13	Meson Massen, $16^3 \times 4$	87
B.14	Potentiale für $m = 0.02, 0.0375, 0.075, 16^4$	88
B.15	Potentiale für $m = 0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 16^4$	88
B.16	Fitparameter aus den Potentialfits, 16^4	88
C.1	Plaquette Erwartungswerte, $8^3 \times 4$	90
C.2	Polyakov Loop Erwartungswerte, $8^3 \times 4$	91
C.3	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $8^3 \times 4$	92
C.4	Chirales Kondensat, $8^3 \times 4$	93
C.5	Extrapolation des chiralen Kondensates, $8^3 \times 4$	93
C.6	Suszeptibilität des chiralen Kondensates, $8^3 \times 4$	94
C.7	Simple Observablen, $16^3 \times 4$	95
C.8	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $16^3 \times 4$	95
C.9	Suszeptibilität des chiralen Kondensates, $16^3 \times 4$	95
C.10	Fundamentale Potentiale, $16^3 \times 4$	96
C.11	Adjungierte Potentiale, $16^3 \times 4$	97
C.12	Fundamentale Potentiale, $16^3 \times 4$	98
C.13	Adjungierte Potentiale, $16^3 \times 4$	99
C.14	Fitparameter μ/T und α , $16^3 \times 4$	100
C.15	Fitparameter σ/T^2 und V_∞/T , $16^3 \times 4$	100
C.16	Pion Massen, $16^3 \times 4$	101
C.17	a_0 Massen, $16^3 \times 4$	101

Abbildungsverzeichnis

4.1	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $16^3 \times 4$	37
4.2	Plaquette und Polyakov Loop Histogramme jeweils bei β_k , $16^3 \times 4$	38
4.3	Suszeptibilität des chirales Kondensates, $16^3 \times 4$	39
4.4	Kritische Temperatur in Einheiten von $\sqrt{\sigma}$, 16^4	43
4.5	Kritische Temperatur in Einheiten von m_ρ , 16^4	43
4.6	Screening Massen m_π, m_{a_0} , $16^3 \times 4$	45
5.1	Fundamentaler und adjungierter Polyakov Loop, $8^3 \times 4$ und $16^3 \times 4$	49
5.2	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $8^3 \times 4$	50
5.3	Plaquette Histogramm bei β_d für $m = 0.04$, $8^3 \times 4$	51
5.4	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.25$ und $\beta = 5.40$, $m = 0.02$	52
5.5	Chirales Kondensat, $8^3 \times 4$	54
5.6	Suszeptibilität des chirales Kondensates, $8^3 \times 4$	55
5.7	Suszeptibilität des chirales Kondensates aufgetragen gegen $1/\sqrt{m}$, $8^3 \times 4$	56
5.8	Chirales Kondensat aufgetragen gegen m , $8^3 \times 4$	56
5.9	Pseudo-kritische Kopplung in der $\beta - m$ Ebene	57
5.10	Plaquette Differenzen bei β_d , $8^3 \times 4$	59
5.11	Plaquette Erwartungswerte, $8^3 \times 4$	61
5.12	Pion und a_0 Masse im Quadrat, $16^3 \times 4$	62

D.1	Plaquette Erwartungswerte, $16^3 \times 4$	103
D.2	Polyakov Loop Erwartungswerte, $16^3 \times 4$	104
D.3	Chirales Kondensat, $16^3 \times 4$	104
D.4	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $16^3 \times 4$	105
D.5	Suszeptibilität des chirales Kondensates, $16^3 \times 4$	105
D.6	Plaquette Histogramme jeweils bei β_k , $16^3 \times 4$	106
D.7	Polyakov Loop Histogramme jeweils bei β_k , $16^3 \times 4$	106
D.8	Screening Massen m_π, m_{a_0} bei $m = 0.20$, $16^3 \times 4$	107
D.9	Screening Massen m_π, m_{a_0} bei $m = 0.40$, $16^3 \times 4$	107
D.10	Screening Massen m_π, m_{a_0} bei $m = 0.60$, $16^3 \times 4$	108
D.11	Screening Massen m_π, m_{a_0} bei $m = 1.00$, $16^3 \times 4$	108
D.12	Screening Massen $m_{b_1}, m_{a_1}, m_{\pi_2}, m_\rho$ bei $m = 0.20$, $16^3 \times 4$	109
D.13	Screening Massen $m_{b_1}, m_{a_1}, m_{\pi_2}, m_\rho$ bei $m = 0.40$, $16^3 \times 4$	109
D.14	Screening Massen $m_{b_1}, m_{a_1}, m_{\pi_2}, m_\rho$ bei $m = 0.60$, $16^3 \times 4$	110
D.15	Screening Massen $m_{b_1}, m_{a_1}, m_{\pi_2}, m_\rho$ bei $m = 1.00$, $16^3 \times 4$	110
D.16	Pion Massen für alle Massen, $16^3 \times 4$	111
D.17	a_0 Massen für alle Massen, $16^3 \times 4$	111
D.18	Meson Massen m_π und m_{a_0} , 16^4	112
D.19	Meson Massen $m_\rho(a)$ und $m_\rho(b)$, 16^4	112
D.20	Potentiale, 16^4	113
D.21	Fitparameter σ , 16^4	114
D.22	Fitparameter α , 16^4	114
D.23	Fitparameter V_0 , 16^4	115

E.1	Plaquette Erwartungswerte, $8^3 \times 4$	117
E.2	Polyakov Loop Erwartungswerte, $8^3 \times 4$	118
E.3	Chirales Kondensat, $8^3 \times 4$	118
E.4	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $8^3 \times 4$	119
E.5	Suszeptibilität des chirales Kondensates, $8^3 \times 4$	119
E.6	Chirales Kondensat aufgetragen gegen m , $8^3 \times 4$	120
E.7	Suszeptibilität des chirales Kondensates aufgetragen gegen m , $8^3 \times 4$	120
E.8	Plaquette Histogramm bei β_d für $m = 0.02$, $8^3 \times 4$	121
E.9	Plaquette Histogramm bei β_d für $m = 0.04$, $8^3 \times 4$	121
E.10	Plaquette Histogramm bei β_d für $m = 0.08$, $8^3 \times 4$	122
E.11	Plaquette Histogramm bei β_d für $m = 0.10$, $8^3 \times 4$	122
E.12	Plaquette Erwartungswerte, $16^3 \times 4$	123
E.13	Polyakov Loop Erwartungswerte, $16^3 \times 4$	123
E.14	Chirales Kondensat, $16^3 \times 4$	124
E.15	Suszeptibilität des Polyakov Loops, $16^3 \times 4$	124
E.16	Suszeptibilität des chirales Kondensates, $16^3 \times 4$	125
E.17	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.25$, $m = 0.02$	126
E.18	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.40$, $m = 0.02$	127
E.19	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.70$, $m = 0.02$	127
E.20	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 6.20$, $m = 0.02$	128
E.21	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 6.50$, $m = 0.02$	128
E.22	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.25$, $m = 0.04$	129
E.23	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.40$, $m = 0.04$	129
E.24	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.70$, $m = 0.04$	130
E.25	Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 6.20$, $m = 0.04$	130
E.26	Pion Masse im Quadrat, $16^3 \times 4$	131
E.27	Pion Masse im Quadrat aufgetragen gegen m , $16^3 \times 4$	131
E.28	a_0 Masse im Quadrat, $16^3 \times 4$	132
E.29	a_0 Masse im Quadrat aufgetragen gegen m , $16^3 \times 4$	132

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thematische Motivation

Eines der vielen noch ungelösten Probleme in der QCD ist der Zusammenhang von Confinement/Deconfinement Eigenschaften des Systems einerseits mit der chiralen Symmetrie andererseits. Entgegen ursprünglichen Spekulationen [1] finden der Deconfinement und der chirale Übergang nämlich bei derselben kritischen Temperatur statt. Diese Tatsache ist besonders erstaunlich, da es a priori keine gemeinsame Ursache für beide Phänomene gibt. Sie entstammen zwei unterschiedlichen nicht-störungstheoretischen Mechanismen. Aus dem Zusammenfall ergeben sich weitere Fragen über den QCD Phasenübergang. Welche am Übergang auftretenden Phänomene entstammen dem Deconfinement und welche der Restaurierung der chiralen Symmetrie? Wodurch wird die Ordnung des Phasenüberganges bestimmt?

Bislang konnten diese Fragen nur teilweise beantwortet werden. So zeigt zum Beispiel der Vergleich von QCD mit der reinen $SU(3)$ Eichtheorie, daß der plötzliche Anstieg von thermodynamischen Observablen wie Druck und Energiedichte am kritischen Punkt allein durch das Freisetzen vieler neuer Freiheitsgrade zu erklären ist, die vorher durch das Confinement nicht vorhanden waren. Hier scheinen die chiralen Eigenschaften des Systems also keine bedeutende Rolle zu spielen. Anders verhält es sich bei der Ordnung des Übergangs. QCD mit zwei leichten Quarks besitzt vermutlich einen Phasenübergang zweiter Ordnung, so wie es aufgrund allgemeiner Universalitätsargumente [2] wegen der chiralen $SU(2) \times SU(2)$ Symmetrie erwartet wird. In diesem Fall sind also die Deconfinement Eigenschaften unerheblich, da diese – wie man an $SU(3)$ erkennt – einen Übergang erster Ordnung verursachen würden. Da die Gruppe $SU(2) \times SU(2)$ in derselben Universalitätsklasse wie $O(4)$ liegt, sollten auch die kritischen Exponenten die gleichen sein. Allerdings haben die bisherigen Untersuchungen das nicht bestätigen können [3, 4].

Um die gerade beschriebenen Probleme besser untersuchen zu können, es ist sinnvoll, ein Modell zu untersuchen, das der QCD möglichst ähnlich ist, in dem aber die beiden Phasenübergänge nicht mehr zusammenfallen. Diese Forderungen treffen auf eine $SU(N)$ Eichtheorie zu, die an

dynamische Fermionen in der adjungierten Darstellung gekoppelt ist. Diese Theorie wurde für die Gruppe $SU(2)$ bereits von Kogut und Mitarbeitern untersucht [5, 6], wobei tatsächlich Hinweise für zwei voneinander getrennte Übergänge mit $T_{\text{deconf}} < T_{\text{chiral}}$ gefunden wurden.

Weitergehende Untersuchungen über die Natur der Übergänge und die für die Thermodynamik des Systems sich ergebenden Konsequenzen sind allerdings nicht durchgeführt worden. Dies soll nun für den realistischeren Fall der $SU(3)$ Eichgruppe geschehen. Für die vorliegende Arbeit wurde daher eine $SU(3)$ Eichtheorie mit zwei dynamischen Fermionen in der adjungierten Darstellung, im folgenden $aQCD$ genannt, simuliert, mit dem Ziel, die Phasenstruktur aufzuklären und verschiedene Observablen wie etwa Potentiale oder Abschirmmassen in allen Phasen zu untersuchen.

Ein weiterer Zugang zur Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeiten bzw. der Unterschiede zwischen Confinement/Deconfinement und dem chiralen Phasenübergang ergibt sich aus der Möglichkeit, die Quarkmasse m als freien Parameter der Theorie zu behandeln. Dabei entspricht der Grenzfall $m \rightarrow \infty$ der reinen $SU(3)$ Eichtheorie, in der es nur einen Deconfinementübergang gibt. Und das andere Extremum, $m = 0$, charakterisiert den chiralen Limes, in dem die chiralen Eigenschaften des Systems entscheidend sind. In dieser Arbeit werden dazu Simulationen von QCD mit zwei Fermionen (in der Fundamentaldarstellung) bei mittelgroßen Massen mit denen bei sehr kleinen bzw. mit der reinen Eichtheorie ($m \rightarrow \infty$) verglichen. Die Auswertung der Suszeptibilitäten vom Polyakov Loop und vom chiralen Kondensat gibt dabei Aufschluß über die Bedeutung des jeweiligen Mechanismus bei der betrachteten Masse. Eine weitere interessante Größe bei den Analysen ist der Wert der kritischen Temperatur in physikalischen Einheiten, also im Verhältnis zur String Tension oder zur ρ -Masse. Im chiralen Limes ($m \rightarrow 0$) ist nämlich $T_c \approx 160$ MeV mit einem kontinuierlichen Übergang (vermutlich zweiter Ordnung), während man in der $SU(3)$ Theorie an einem erster Ordnung Übergang auf $T_c \approx 260$ MeV kommt. Beide Extremfälle gelten aber nicht nur bei $m = 0$ bzw. $m = \infty$, sondern auch noch im jeweils angrenzenden Massenbereich. Untersuchungen bei mittleren Massen sollen nun klären, ab wann noch Signale des einen oder anderen Extremfalles zu erkennen sind. Die Analyse weiterer Observablen wie etwa der Screening Massen dient hauptsächlich als Vergleichsgrundlage für die $aQCD$.

1.2 Inhaltlicher Aufbau

Im vorigen Abschnitt wurde kurz erläutert, warum die Untersuchung der QCD einerseits und der $aQCD$ andererseits von Bedeutung ist. Die Kapitel 2 und 3 beschäftigen sich jeweils mit der Frage, “Wie kann man die gestellten Probleme mit Hilfe von Simulationen angehen?”. Dazu sind in Kapitel 2 über die QCD nur noch einmal die wichtigsten Formeln und Eigenschaften zusammengefaßt, während sich Kapitel 3 mit den notwendigen Änderungen in der $aQCD$ aufgrund der adjungierten Fermionen beschäftigt.

“Was kommt heraus”, diese Frage beantworten die Kapitel 4 und 5 und in komprimierter Form auch die Zusammenfassung, Kapitel 6. Die Arbeit besitzt einen recht langen Anhang, der

hauptsächlich als Nachschlagewerk dienen soll. Anhang A enthält alle Details, die zur Simulation von adjungierten Fermionen notwendig sind. In Anhang B und C sind alle Simulationsergebnisse von QCD bzw. $aQCD$ tabelliert, um Interessierten das neuerliche Auswerten z.B. der Potentiale zu ermöglichen. Und schließlich enthalten die Anhänge D und E graphische Darstellungen fast aller Resultate, die im Zweifelsfall die Analysen aus dem Auswertungsteil ergänzen und verständlicher machen sollen.

Kapitel 2

QCD mit dynamischen Fermionen auf dem Gitter

Dieses Kapitel enthält einen kurzen Überblick über die für die nachfolgenden Untersuchungen wichtigsten Aspekte der *QCD* mit dynamischen Fermionen und insbesondere ihrer Phasenübergänge. Danach folgen die Definitionen der Wirkung und der Observablen, die bei den Simulationen verwendet werden. Es soll nicht dazu dienen, die Gitterwirkung herzuleiten oder die technischen Details der Kogut-Susskind Fermionen zu erläutern, da dieses einschlägigen Lehrbüchern (z.B. [7, 8]) zu entnehmen ist. Vielmehr sollen Nomenklatur und Konventionen vereinbart werden, damit unter anderem im Kapitel 3 über die *aQCD* die Veränderungen aufgezeigt werden können.

Die Gitterformulierung der *QCD* hat im Gegensatz zur reinen $SU(3)$ Eichtheorie keine globale $Z(3)$ Symmetrie mehr, sie wird durch den fermionischen Anteil der Wirkung zerstört. Der dazugehörige Ordnungsparameter, der Polyakov Loop L , wird also in der Confinement Phase, d.h. bei tiefen Temperaturen, nicht exakt Null.

Allerdings ist der Logarithmus von $\langle L \rangle$ proportional zum asymptotischen Wert des Potentials zwischen einem statischen Quark-Antiquark-Paar,

$$\exp(-V(R)/T) \longrightarrow |\langle L \rangle|^2, \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

Daher bedeutet ein von Null verschiedener aber kleiner Polyakov Loop, daß in einer Theorie mit dynamischen Quarks das statische Paar bei genügend großem Abstand, also bei genügend großer Energie, in zwei neue Mesonen zerfällt. Der String, der es zusammengehalten hat, reißt und kann daher nicht wie im Falle der $SU(3)$ Theorie unendlich viel Energie aufnehmen.

Trotzdem kann man mit Hilfe des Polyakov Loops Confinement und Deconfinement Phase unterscheiden, da das Potential in der Deconfinement Phase abgeschirmt ist und somit bei großen Abständen sehr klein wird. Also ist $\langle L \rangle$ der obigen Beziehung entsprechend groß.

Die zweite wichtige Symmetrie in der QCD ist die chirale Symmetrie $SU(N_F) \times SU(N_F)$, die linkshändige und rechtshändige Quarks transformiert. Sie ist allerdings nur dann exakt vorhanden, wenn man die Quarks als masselos ansieht. In diesem Fall ist sie für tiefe Temperaturen, $T < T_C$, spontan zu $SU(N_F)$ gebrochen und die (dann ebenfalls masselosen) Pionen sind die Goldstone-Bosonen.

In der Gitter QCD läßt sich mit Hilfe der Kogut-Susskind Formulierung [9] eine $U(N_F/4) \times U(N_F/4)$ Untergruppe der chiralen Symmetrie der Kontinuumstheorie realisieren. Diese chirale Symmetrie ist ebenfalls nicht exakt, da sie vom Massenterm $m\bar{\psi}\psi$ explizit gebrochen wird. Im Limes $m \rightarrow 0$, dem chiralen Limes, ist sie jedoch wieder vorhanden. Bei genügend kleinen Quarkmassen kann daher der zugehörige Ordnungsparameter, das chirale Kondensat $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$, Aufschluß über spontane Brechung oder Restaurierung dieser Symmetrie im chiralen Limes geben.

Alle bisherigen Simulationen haben das Zusammenfallen des Deconfinement und des chiralen Überganges gezeigt, obwohl es dafür a priori keinen theoretischen Grund gibt. Tatsächlich wurden in der Vergangenheit Modelle diskutiert, die zwei unterschiedliche Übergänge in der QCD vorhersagen, wobei $T_{\text{deconf}} < T_{\text{chiral}}$ gelten soll [1].

In Abhängigkeit von der Quarkmasse ist der QCD Übergang von verschiedener Natur. Im $SU(3)$ Grenzfall ($m \rightarrow \infty$) ist er erster Ordnung und im chiralen Limes ($m \rightarrow 0$) vermutlich zweiter Ordnung. Inwieweit dieses auch für sehr große bzw. sehr kleine Massen gilt, ist unklar. In einem großen Bereich dazwischen handelt es sich aber sicherlich nur noch um ein Cross-over.

2.1 Definition der Wirkung

Die Wirkung setzt sich zusammen aus der Standard Wilson Plaquette Wirkung im gluonischen Teil und der Kogut-Susskind Formulierung für die Fermionen (die sogenannten *staggered* Fermionen):

$$S = \beta S_G + \sum_{x,y} \bar{\psi}_x M(U)_{x,y} \psi_y \quad (2.1)$$

mit

$$S_G = \sum_{\square} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr } U_{\square} \right\} \quad (2.2)$$

und

$$M_{x,y} = m \delta_{x,y} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\mu}(x) (U_{\mu}(x) \delta_{x+\hat{\mu},y} - U_{\mu}^{\dagger}(x - \hat{\mu}) \delta_{x-\hat{\mu},y}), \quad (2.3)$$

wobei m die Quarkmasse in Gittereinheiten ist, die über den Gitterabstand a mit der unrenormierten oder “nackten” Quarkmasse der Kontinuumstheorie zusammenhängt, $m = a \cdot m_{\text{phys.}}$, und die $\eta_\mu(x)$ sind die Kogut-Susskind Phasen, $\eta_\mu(x) = (-1)^{x_0 + \dots + x_{\mu-1}}$. Bei der Staggered Fermion Formulierung ist die Anzahl der Quarks im Kontinuum bekanntermaßen viermal so groß wie in der Gitter Version. Daher liefert das Ausintegrieren der Fermion Wirkung in der Zustandssumme einen Faktor $(\det M)^{N_F/4}$ für N_F entartete Quarks im Kontinuum. Ist N_F ein Vielfaches von vier, so kann man die Determinante als Gaußsches Integral über bosonische Pseudofermionfelder schreiben. Mit dem Hybrid- Φ -Algorithmus [10] existiert dann eine exakte Methode, diese Theorie zu simulieren.

Da in dieser Arbeit ausschließlich nur Simulationen zwei Teilchensorten, d.h. zwei Flavour, durchgeführt werden sollen, muß der Hybrid-R-Algorithmus [10] benutzt werden. In diesem Fall können die Diskretisierungsfehler, die bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen auftreten, nicht durch einen Metropolis Accept-Reject-Schritt korrigiert werden. Es handelt sich in diesem Sinne also um einen nicht-exakten Algorithmus. Bei der gewählten Schrittweite von $\Delta\tau = 0.01 - 0.02$ weiß man aber aus Erfahrung, daß die Diskretisierungsfehler in den Observablen im Rahmen der statistischen Fehler zu vernachlässigen sind.

2.2 Definition der Observablen

Die folgenden Definitionen gelten für ein $N_\sigma^3 \times N_\tau$ Gitter und (falls relevant) für N_F Fermionen.

Einfache Observablen Die Plaquette wird nicht nach Raum-Raum und Raum-Zeit Anteilen aufgeschlüsselt, sondern nur als Gesamtplaquette gemessen, da diese Unterscheidung für die Untersuchung von Phasenübergängen nicht von Bedeutung ist.

$$P = \langle \square \rangle = \frac{1}{6N_\sigma^3 N_\tau} \left\langle \sum_{\square} \frac{1}{3} \text{Re Tr } U_{\square} \right\rangle. \quad (2.4)$$

Mit der Definition der Gluonwirkung (Gl. 2.2) folgt dann für den Erwartungswert der gluonischen Wirkung

$$\langle S_G \rangle = 6N_\sigma^3 N_\tau (1 - P). \quad (2.5)$$

Der Erwartungswert des Polyakov Loops wird mit L_3 bezeichnet, um ihn von der entsprechenden Größe in der adjungierten Darstellung, L_8 , zu unterscheiden.

$$L_3 = \frac{1}{N_\sigma^3} \left\langle \left| \sum_{\vec{x}} L_3(\vec{x}) \right| \right\rangle = \frac{1}{3N_\sigma^3} \left\langle \left| \sum_{\vec{x}} \text{Tr} \prod_{x_0=1}^{N_\tau} U(x_0, \vec{x}) \right| \right\rangle \quad (2.6)$$

Obwohl, wie bereits erwähnt, der Polyakov Loop kein echter Ordnungsparameter ist, so ist er doch geeignet, um eine (pseudo-) kritische Kopplung β_k aus dem Maximum der Suszeptibilität

$$\chi_L = N_\sigma^3 \left(\left\langle \left| \frac{1}{N_\sigma^3} \sum_{\vec{x}} L_3(\vec{x}) \right|^2 \right\rangle - L_3^2 \right) \quad (2.7)$$

zu bestimmen. Bei der Definition des chiralen Kondensates muß beachtet werden, daß die zugehörige Gitterobservable bei einem ‘‘Gitter-Fermion’’ das Ergebnis für vier ‘‘Kontinuums-Fermionen’’ liefert. Da die Zahl der Teilchen aber additiv eingeht, kann die Observable einfach mit einem Faktor $N_F/4$ korrigiert werden.

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{N_F}{4} \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \langle \text{Tr } M^{-1} \rangle \quad (2.8)$$

Entsprechend muß auch bei der chiralen Suszeptibilität χ_m die Zahl der Fermionen beachtet werden. Analog zur Konvention in [3] gibt

$$\chi_m = \frac{N_F}{16} \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \left(\langle (\text{Tr } M^{-1})^2 \rangle - \langle \text{Tr } M^{-1} \rangle^2 \right) \quad (2.9)$$

den nicht-zusammenhängende Teil der vollen Suszeptibilität.

Bei den Simulationen bei endlicher Temperatur werden bei jeder Messung 25 Zufallsvektoren gezogen, um den Erwartungswert der Spur mit Hilfe eines sog. Noisy Estimators zu schätzen. Damit verhindert man, daß der Term $\langle (\text{Tr } M^{-1})^2 \rangle$ ungewollte Beiträge vom Quarkpropagator zur Suszeptibilität liefert.

Meson Massen Meson Massen werden aus dem zeitlichen Abfall von Meson Korrelationsfunktionen bestimmt. Da Simulationen bei endlicher Temperatur nur sehr wenige Gitterpunkte in Zeitrichtung haben, sind die Mesonen also nur bei $T = 0$ zu bestimmen. Ist $T \neq 0$, so betrachtet man die entsprechenden Korrelationsfunktionen in Raumrichtung und erhält daraus die Abschirmmassen oder Screening Massen. Die folgenden Formeln gelten für zeitliche Korrelationen, können aber direkt auf den räumlichen Fall übertragen werden.

Da bei den Staggered Fermionen die Flavour Freiheitsgrade auf verschiedene Gitterpunkte verteilt sind, muß man zunächst die Gittersymmetrien analysieren, um die Mesonoperatoren zu bestimmen, die dann zu entsprechenden Teilchen im Kontinuum gehören. Dieses ist ausführlich von Goltermann und Smit untersucht [11, 12] und die Ergebnisse sind zum Beispiel in [13] nochmals übersichtlich zusammengefaßt worden.

Für diese Arbeit wurden nur die vier Mesonoperatoren gemessen, deren Quelle bzw. Senke lokal in Raum und Zeit ist. Jeder dieser Operatoren enthält das Signal eines Mesons und

seines Paritätspartners, sofern vorhanden. Im vorliegenden Fall sind dies das Pion (alleine), das π und das f_0 , das ρ mit dem b_1 und das ρ mit dem a_1 . Die Messung liefert jeweils nur den zusammenhängenden Anteil der Korrelationsfunktion. Das bereitet nur beim f_0 im (π, f_0) Kanal Probleme, da in den anderen Fällen der fehlende nicht-zusammenhängende Teil Null ergibt. Bei vorhandener Flavoursymmetrie ist das f_0 jedoch im Kontinuum mit dem a_0 Masse-entartet, und da dieses Teilchen keinen nicht-zusammenhängenden Beitrag enthält, mißt man also eher die a_0 Masse. Im folgenden wird das Teilchen daher mit a_0 und das Pion, das als sein Paritätspartner auftritt, mit π_2 bezeichnet, um es vom alleine auftretenden Pion zu unterscheiden.

Die gemessenen Korrelationsfunktionen hängen asymptotisch über

$$C(t) = A^+ \cdot \cosh(m^+(t - N_\tau/2)) + (-1)^t \cdot A^- \cdot \cosh(m^-(t - N_\tau/2)), \quad \text{für } t \gg 1, \quad (2.10)$$

mit den Meson Massen m^\pm zusammen, wobei sich die Indizes + bzw. - auf die Parität beziehen. Negative Parität haben π und ρ , positive Parität haben a_0 ($\simeq f_0$), a_1 und b_1 .

Wilson Loops und Potentiale Im Rahmen einer $T = 0$ Simulation bestimmt man das Potential zwischen einem statischen Quark-Antiquark Paar aus den Wilson Loops. Prinzipiell ist es zwar auch möglich, dazu die Polyakov Loop Korrelationen zu verwenden, aber da der Polyakov Loop in der Confinement Phase nahe bei Null ist, liefern die Korrelationen nur ein sehr schlechtes Signal. (Bei der Analyse der $aQCD$ Daten werden sie im Bereich $T \approx T_C$ untersucht. Siehe Kapitel 3.4.)

Aus den Erwartungswerten der gemessenen Wilson Loops bei räumlichem Abstand r und zeitlichem Abstand t berechnet man die lokalen Potentiale

$$V_t(r) = \log \frac{\langle W(r, t) \rangle}{\langle W(r, t+1) \rangle}, \quad (2.11)$$

die bei großen Zeitabständen das Potential liefern:

$$V(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_t(r). \quad (2.12)$$

In der Praxis bildet man für jeden Abstand r das gewichtete Mittel der $V_t(r)$, $t \geq t_{\min}$ und wählt t_{\min} in geeigneter Weise. Dabei soll t_{\min} so groß sein, daß das Potential nicht von seiner Wahl abhängt und andererseits so klein wie möglich, weil die statistischen Fehler mit wachsendem t stark zunehmen. Um diese Bedingungen erfüllen zu können, wurden die Wilson Loops vor jeder Messung mit dem APE-smearing Verfahren [14] verändert, das bewirkt, daß $V_t(r)$ schon bei geringeren t -Werten seinen asymptotischen Wert erreicht.

Kapitel 3

Von QCD zu $aQCD$

Bei der Beschreibung der starken Wechselwirkung durch die QCD geht explizit die gewählte Darstellung der Transformationsgruppe $SU(3)$ ein. Da die Quarks in der Natur drei Farbfreiheitsgrade besitzen, ist es die irreduzible, dreidimensionale Darstellung, die sogenannte Fundamentaldarstellung. D.h. das rote, das grüne und das blaue Quark bilden eine Basis im Darstellungsraum. Damit ist klar, daß bei der Verwendung einer anderen, höherdimensionalen Darstellung der $SU(3)$ die Quarks mehr als drei verschiedene Farben besitzen. Eine solche irreduzible Darstellung ist die adjungierte, die die Dimension acht hat.

Weil die Quarks nun aber eben drei und nicht acht Farben besitzen, ist eine QCD mit Fermionen in der adjungierten Darstellung (im folgenden $aQCD$ genannt) keine korrekte Beschreibung der starken Wechselwirkung in der Natur. Eine Untersuchung der $aQCD$ dient also in erster Linie dazu, einige der Probleme und ungelösten Fragen, die sich in der QCD ergeben haben, besser zu verstehen. Das ist besonders im Bereich der Symmetrien und Phasenübergänge gut möglich, da auch die $aQCD$ bei tiefen Temperaturen Confinement besitzt und bei hohen die chirale Symmetrie restauriert wird. Darüber hinaus fallen die beiden Übergänge aber nicht wie in der QCD zusammen, sondern lassen sich getrennt beobachten.

In den nächsten Abschnitten (3.1, 3.2) werden zuerst die technischen Aspekte der adjungierten Darstellung erörtert. In 3.3 und 3.4 werden dann die zugehörige Gitterwirkung und die neuen Observablen eingeführt. Abschließend wird in Kapitel 3.5 auf die Symmetrien und Phasenübergänge eingegangen.

3.1 Die adjungierte Darstellung der $SU(3)$

Jede Gruppe $SU(N)$ besitzt eine irreduzible Darstellung der Dimension N , die fundamentale Darstellung, und – neben weiteren – eine irreduzible Darstellung der Dimension $N^2 - 1$, die

adjungierte Darstellung. Ein Element aus $SU(N)$ läßt sich durch $N^2 - 1$ Parameter und $N^2 - 1$ Generatoren beschreiben,

$$U = \exp(i\phi_k t^k) \in SU(N), \quad (3.1)$$

wobei die Generatoren t^k spurlose hermitesche Matrizen sind. Sie haben dieselbe Dimension wie das Gruppenelement U in der betrachteten Darstellung und allgemein gilt

$$[t_a, t_b] = i f_{abc} t^c. \quad (3.2)$$

Die f_{abc} sind dabei die total antisymmetrischen Strukturkonstanten der Gruppe. Die Generatoren der Fundamentaldarstellung sind normiert auf

$$\text{tr}(t_a \cdot t_b) = T^F \cdot \delta_{ab} \quad (3.3)$$

mit $T^F = 1/2$, woraus sich der Casimiroperator wie folgt ergibt:

$$C^F = \sum_{k=1}^{N^2-1} t_k^2 = T^F \cdot \frac{N^2 - 1}{N} \cdot \mathbf{1}_N = \frac{N^2 - 1}{2N} \cdot \mathbf{1}_N \quad (3.4)$$

Der Darstellungsraum der adjungierten Darstellung ist der Raum aller spurlosen hermiteschen $N \times N$ Matrizen, $R = \text{span} \langle t_1, t_2, \dots, t_{N^2-1} \rangle$, d.h. $r \in R \iff r = \phi_i t^i$. Ein Gruppenelement u operiert nun auf dem Darstellungsraum R durch

$$D^{\text{adjungiert}}(u) : r \longmapsto u r u^\dagger. \quad (3.5)$$

Da sich ein Element aus dem Vektorraum R als $N^2 - 1$ -komponentiger reeller Vektor schreiben läßt, kann man $D^{\text{adjungiert}}(u)$ als nicht notwendigerweise reelle $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ Matrix auffassen, für die gilt:

$$D^{\text{adjungiert}}(u)_{ab} \equiv U_{ab}^{\text{adj}} = 2 \cdot \text{tr}(t_a u t_b u^\dagger) \quad \text{mit } a, b = 1, \dots, N^2 - 1 \quad (3.6)$$

Der Beweis hierfür steht im Anhang A.1. Die Generatoren der adjungierten Darstellung, die es entsprechend Formel 3.1 gibt, können aus Gleichung 3.6 hergeleitet werden, indem man infinitesimale Transformationen betrachtet. Auch diese Rechnung steht im Anhang (A.1) und liefert

$$(T_a)_{bc} = -i f_{abc}. \quad (3.7)$$

Aus der Normierung 3.3 folgt dann

$$\text{tr}(T_a \cdot T_b) = T^A \cdot \delta_{ab} \quad (3.8)$$

mit $T_A = N$ und für den Casimiroperator

$$C^A = \sum_{k=1}^{N^2-1} T_k^2 = T^A \cdot \mathbf{1}_{N^2-1} = N \cdot \mathbf{1}_{N^2-1}. \quad (3.9)$$

Im Falle der $SU(3)$ sind die Generatoren die halben Gell-Mann Matrizen und es gilt

$$U_{ab}^{\text{adj}} = U_{ab}^{(8)} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\lambda_a U^{(3)} \lambda_b U^{(3)\dagger} \right]. \quad (3.10)$$

Außerdem ist $C^F = 4/3$, $T^A = N = 3$ und $C^A = N = 3$.

3.2 Die β -Funktion der $aQCD$

Die β -Funktion stellt den Zusammenhang zwischen der dimensionslosen Kopplung $\beta = 2N/g^2$, die in Gittersimulationen verwendet wird, und dem dimensionsbehafteten Gitterabstand a her. Sie kann von der betrachteten Observablen abhängen, jedoch sind die Koeffizienten in 1- und 2-Loop Ordnung universell und störungstheoretisch bekannt. Es gilt

$$a(\beta) \cdot \Lambda_L = R(\beta) \simeq \left(\frac{6}{\beta} \cdot b_0 \right)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} \cdot \exp\left(-\frac{\beta}{12b_0}\right), \quad (3.11)$$

wobei Λ_L der Lambda-Parameter für Gitterrechnungen ist. Die Koeffizienten b_0 und b_1 lauten für eine $SU(N)$ Theorie mit N_F dynamischen Fermionen [15]

$$b_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} C^A - \frac{4}{3} N_F T^A \right) \quad (3.12)$$

$$b_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{34}{3} C^{A^2} - \frac{10}{3} C^A N_F - 2 C^F N_F \right). \quad (3.13)$$

Mit den Werten aus Abschnitt 3.1 ergibt sich dann für $N_F = 2$

$$b_0 = \frac{3}{16\pi^2} \quad (3.14)$$

$$b_1 = \frac{230}{3} \cdot \frac{1}{(16\pi^2)^2} = \frac{115}{384\pi^4} \quad (3.15)$$

und somit

$$R(\beta) \simeq \left(\frac{9}{8\pi^2\beta} \right)^{-\frac{115}{27}} \cdot \exp\left(-\frac{4\pi^2}{9}\beta\right). \quad (3.16)$$

Zu beachten ist bei dieser Formel, daß der Faktor in der Exponentialfunktion, $\frac{4\pi^2}{9}$, deutlich größer ist als bei der normalen *QCD*. Folglich bewirkt schon eine geringe Änderung der Kopplung β eine große Änderung des Gitterabstandes. Die Ursache hierfür liegt an dem sehr kleinen Wert von b_0 , $b_0 = \frac{3}{16\pi^2}$. Man beachte, daß bereits ab $N_F \geq 3$ der Koeffizient b_0 negativ wird, wodurch die Theorie dann nicht mehr asymptotisch frei wäre.

3.3 Veränderung von Wirkung und Algorithmus

Wirkung Da die Fermionen nun acht Farbfreiheitsgrade besitzen, müssen auch die Gluonfelder U in den Wechselwirkungstermen der Lagrangedichte durch eine achtdimensionale Darstellung beschrieben werden. Unter Benutzung des Zusammenhangs zwischen den 3×3 -Matrizen $U^{(3)}$ und den 8×8 -Matrizen $U^{(8)}$ aus Gleichung 3.10 wird die Wirkung aus Gleichung 2.1 dann zu

$$S = \beta S_G + \sum_{x,y} \bar{\psi}_x M(U^{(8)})_{x,y} \psi_y, \quad (3.17)$$

wobei S_G weiterhin durch 2.2 mit den $U^{(3)}$ definiert ist. Die Matrizen $U^{(8)}$ sind aufgrund der Beziehung 3.10 rein reell und damit auch die gesamte Fermionmatrix $M(U^{(8)})$ und deren Determinante. Diese Tatsache beeinflusst den Teilchengehalt der Simulation. Die Kogut-Susskind Fermion Wirkung ist so konstruiert, daß es pro Fermion auf dem Gitter im Kontinuum statt 16 Fermion Dopplern nur noch vier gibt. Ausintegrieren der Fermionfelder liefert (pro Gitter Fermion) den Term $\det M$, den man als Integral über komplexe bosonische Hilfsfelder darstellen kann,

$$\det M = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^* \exp(-\Phi^* M^{-1} \Phi). \quad (3.18)$$

Um diese effektive Fermion Wirkung ebenso wie die Gluonwirkung als Wahrscheinlichkeitsmaß interpretieren zu können, muß man $M^\dagger M$ anstelle von M betrachten, da M nicht positiv definit ist. Das bewirkt eine Verdoppelung der Kontinuumsfermionen, die allerdings i.a. durch die Even-odd Präkonditionierung wieder rückgängig gemacht wird. N_F massenentartete Fermionen im Kontinuum werden also durch den Term $(\det M)^{N_F/4}$ beschrieben und für $N_F = 4$ ist – wie gerade erklärt – eine Berechnung mit Hilfe eines komplexen Gaußintegrals möglich (3.18). Ist die Matrix M nun rein reell, so kann die Wurzel ihrer Determinante als reelles Gaußintegral geschrieben werden,

$$\sqrt{\det M} = \int \mathcal{D}\Phi \exp(-\Phi^t M^{-1} \Phi). \quad (3.19)$$

Folglich beschreibt der Standardalgorithmus für vier Flavours, der Hybrid- Φ -Algorithmus [10], im Falle der adjungierten Fermionen automatisch nur zwei Teilchen, indem man reelle Hilfsfelder Φ verwendet. Die Pseudo-Fermion Wirkung für 2 Fermionen lautet dann also

$$S_{\text{eff}} = \beta \sum_{\square} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \text{Re tr } U_{\square} \right\} + \Phi^t \left\{ M(U^{(8)})^\dagger M(U^{(8)}) \right\}^{-1} \Phi, \quad (3.20)$$

mit reellen achtkomponentigen Feldern Φ .

Algorithmus Der Hybrid- Φ -Algorithmus kann auf den Fall der adjungierten Fermionen nun übertragen werden, allerdings mit einem großen Unterschied. Die Bewegungsgleichung für die zu den Eichfeldern kanonisch konjugierten Impulse muß neu berechnet werden. Sie folgt nämlich aus der Forderung, daß der Hamiltonoperator, $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{l,\mu} \text{tr} H_\mu(l)^2 + S_{\text{eff}}$, zeitlich konstant bleibt, also $\dot{\mathcal{H}} = 0$. Dabei gehen dann explizit die 8×8 Matrizen aus der Fermionmatrix ein.

Bei der Berechnung von $\dot{\mathcal{H}}$ ersetzt man die $U^{(8)}$ durch die $U^{(3)}$ nach Formel 3.10 und betrachtet die 3×3 Matrizen $U, U^\dagger, H, H^\dagger$ als unabhängige Variablen. Da die U 's nun quadratisch auftreten, erhält man beim Ableiten doppelt so viele Terme wie normalerweise, aber am Ende der Rechnung fallen je zwei wieder zusammen. Außerdem können die Kogut-Susskind Phasen nun nicht mehr in die Definition der U 's aufgenommen werden. Wie in [10] versucht man nun, $\dot{\mathcal{H}}$ zu schreiben als

$$\dot{\mathcal{H}} = \sum_{l,\mu} \text{tr} \left\{ H_\mu(l) \left[\dot{H}_\mu(l) + iF_\mu(l) \right] \right\}, \quad (3.21)$$

um schließlich aus den $F_\mu(l)$ einen Ausdruck für die Änderung der kanonisch konjugierten Impulse, $\dot{H}_\mu(l)$, zu erhalten. Um auf Gleichung 3.21 zu kommen, zieht man die dreidimensionale Spur aus Gleichung 3.10 nach ganz außen, wobei man vorher die unter der Spur stehenden Faktoren so zyklisch vertauscht, daß $\dot{U} (= iHU)$ nach links herausgezogen werden kann. Die Spur im adjungierten Farbraum, also die 8-Spur, verbleibt dagegen bis hin zum Endergebnis in den fermionischen Ausdrücken. Sie wird von einer Matrix genommen, deren Einträge jeweils 3×3 Matrizen sind, so daß der Term im Vergleich zu den fundamentalen Fermionen sehr rechenaufwendig ist. Eine detaillierte Herleitung des Ergebnisses befindet sich im Anhang A.

Rechenzeitbedarf Bei der Simulation ergibt sich mit adjungierten Fermionen ein deutlich höherer Zeitbedarf als mit fundamentalen. Das hat im wesentlichen drei Gründe: Erstens, die elementare Operation in der Inversionsroutine, $Vektor = Matrix \text{ mal } Vektor$, dauert fast doppelt so lange. Bei einer komplexen 3×3 Matrix benötigt man 36 Multiplikationen und 30 Additionen, bei einer reellen 8×8 Matrix dagegen 64 Multiplikationen und 56 Additionen. Zweitens tritt in der Molekulardynamik wie oben beschrieben eine zusätzliche 8-Spur auf, bei der einige Operationen mit 3×3 Matrizen anfallen. Der dritte Grund liegt hauptsächlich an den Prozessoren der QUADRICS Parallelrechner, für die das Programm erstellt worden ist. Ihnen steht jeweils ein Register von 128 reellen Zahlen zur Verfügung. Da die zentrale Operation $Vektor = Matrix \text{ mal } Vektor$ aber alleine schon 80 Register benötigt, können kompliziertere Ausdrücke nur in Teilschritten und nach vorheriger Leerung der Register durchgeführt werden. Das ständige Löschen des Registerinhaltes wirkt sich wiederum negativ auf das Pipelining aus, so daß im Endeffekt gar nicht die volle Leistungsfähigkeit der Maschine ausgenutzt werden kann.

3.4 Definition weiterer Observablen

Die Definition der Plaquette 2.4 bleibt unverändert, zusätzlich zum üblichen Polyakov Loop L_3 (2.6) gibt es nun aber noch L_8 , den Polyakov Loop in der adjungierten Darstellung:

$$L_8 = \frac{1}{N_\sigma^3} \langle \sum_{\vec{x}} L_8(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{8N_\sigma^3} \langle \sum_{\vec{x}} \text{Tr} \prod_{x_0=1}^{N_\tau} U^{(8)}(x_0, \vec{x}) \rangle \quad (3.22)$$

Man kann L_8 allerdings bestimmen, ohne die Eichmatrizen U explizit in die 8-Darstellung zu setzen, da aus Gleichung 3.10 direkt

$$\text{Tr}U^{(8)} = \left| \text{tr}U^{(3)} \right|^2 - 1 \quad (3.23)$$

folgt. Aus den Polyakov Loops lassen sich das Potential zwischen einem fundamentalen statischen Quark-Antiquark Paar

$$V_f(\vec{x})/T = -\log \left(\langle L_3(\vec{0}) L_3^\dagger(\vec{x}) \rangle \right) \quad (3.24)$$

und zwischen einem adjungierten statischen Quark-Antiquark Paar

$$V_a(\vec{x})/T = -\log \left(\langle L_8(\vec{0}) L_8^\dagger(\vec{x}) \rangle \right) \quad (3.25)$$

bestimmen. Die Suszeptibilität des Polyakov Loops, χ_L , wird nur für L_3 benutzt und ist genauso wie in Gleichung 2.7 definiert.

Das chirale Kondensat und seine Suszeptibilität sind analog zu 2.8 und 2.9 definiert, nur daß der Normierungsfaktor für die Zahl der Fermionen jetzt zwei beträgt (siehe Abschnitt 3.3),

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{N_F}{2} \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \langle \text{tr } M^{-1} \rangle, \quad (3.26)$$

$$\chi_m = \frac{N_F}{4} \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \left(\langle (\text{tr } M^{-1})^2 \rangle - \langle \text{tr } M^{-1} \rangle^2 \right). \quad (3.27)$$

In diesen beiden Formeln ist die Spur tr sowohl über alle Raumpunkte als auch über die 8×8 Matrizen $U^{(8)}$ zu nehmen.

Die Behandlung der Mesonen erfolgt analog zur QCD . Der Teilchengehalt der Theorie hat sich ja nicht verändert, es gibt weiterhin zwei Fermionen, die als u und d Quark angesehen werden können. Mögliche Mesonen ergeben sich aus der Betrachtung des starken Isospins, also der $SU(2)$ Untergruppe der Flavour $SU(3)$, die u , d und s Quark beschreibt. Eine geeignete Erweiterung erfordert die Analyse der Farbe: In der Fundamentaldarstellung werden Mesonen durch die reduzible Darstellung $3 \otimes \bar{3}$ beschrieben. Wenn man diese ausreduziert, erhält man $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$, also ein Farbsinglett und ein Oktett. Den Mesonen kann nur das Singlett entsprechen, da in der Natur nur farblose Teilchen vorkommen. Der zugehörige Eigenzustand ist $\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$, wenn man die Farbeigenzustände als rot, grün und blau kennzeichnet. Nun muß geprüft werden, ob auch die reduzible Darstellung $8 \otimes 8$, die adjungierte Mesonen beschreibt, ein oder mehrere Singletts enthält. Es ergibt sich $8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10 \oplus 27$ mit dem Eigenzustand $\frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{f=1}^8 f\bar{f}$. Es gibt also auch hier einen und nur einen farblosen Zustand, der wie oben eine Linearkombination aller Farb-Antifarbbzw. Farb-Farb Zustände ist. Folglich läßt sich die Konstruktion von Mesonkorrelationsfunktionen in der $aQCD$ aus der QCD übernehmen, wobei dann nur über acht statt drei Farben summiert werden muß.

3.5 Die Symmetrien der $aQCD$

Zentrumssymmetrie Die Wirkung der $aQCD$ besitzt eine globale $Z(3)$ Symmetrie, die nun im Gegensatz zur QCD exakt ist. Aus Gleichung 3.10 und 3.17 folgt nämlich, daß auch die Fermion Wirkung symmetrisch unter globalen $Z(3)$ Transformationen ist, da die $U^{(3)}$ immer nur in Paaren U, U^\dagger vorkommen und außerdem die Elemente von $Z(3)$ mit den λ -Matrizen kommutieren.

Folglich ist L_3 ein Ordnungsparameter für die spontane Brechung der Zentrumssymmetrie, der in der Confinement Phase exakt Null wird. Die zugehörige Übergangstemperatur wird mit T_{deconf} oder einfach T_d bezeichnet. Das zugehörige fundamentale Potential V_f wird also für $T < T_d$ linear anwachsen und der String zwischen den beiden Teilchen kann unendlich viel Energie aufnehmen. Das Reißen des Strings (*String Breaking*), das bei QCD Simulationen

knapp unterhalb von T_d beobachtet worden ist [16], kann hier nicht vorkommen, da das System dynamisch nur adjungierte Quark-Antiquark Paare erzeugen kann. Ein gemischtes Meson (z.B. fundamentales Quark und adjungiertes Antiquark) wäre aber nicht farbneutral und kann daher nicht entstehen.

Für $T > T_d$, also in der Deconfinement Phase, sind die fundamentalen Farbladungen abgeschirmt, da sie durchaus mit den dynamischen, adjungierten und nun freien Quarks Gluonen austauschen können. Das Potential ist in diesem Fall Coulomb-artig mit einem exponentiellen Abschirmterm und einer dynamisch erzeugten Abschirmmasse.

Auf dieselbe Art sind auch die adjungierten Farbladungen abgeschirmt und man kann erwarten, daß die Abschirmmasse gleich groß ist, da sie zumindest störungstheoretisch nur durch Korrekturen zum Gluonpropagator erzeugt wird, die von virtuellen Gluon Loops und virtuellen (adjungierten) Quark Loops herrühren. Lediglich die Kopplungsstärke, also ein Vorfaktor im Potential, kann verschieden sein, da der Vertex $Gluon \leftrightarrow adj. Quark$ von dem Vertex $Gluon \leftrightarrow fund. Quark$ verschieden ist.

In der Confinement Phase, $T < T_d$, sollte man beim adjungierten Potential ein String Breaking beobachten. Denn nun können sich, wenn der String zwischen den beiden statischen Teilchen genügend Energie angesammelt hat, zwei neue adjungierte Mesonen bilden, die jeweils aus einem statischen (schweren) und einem dynamischen (leichten) Quark bestehen. Da die Gluonen ebenfalls unter der adjungierten Darstellung transformieren, könnte bei einem Reißen des Strings auch je ein Gluon mit einem adjungierten Fermion einen farbneutralen Zustand bilden. Daher kann ein String Breaking zwischen adjungierten Ladungen auch in der reinen $SU(3)$ Theorie auftreten. Das Potential wird in jedem Fall gegen einen konstanten Wert gehen, der der Ruheenergie der beiden neuen Teilchen (Meson und Fermion/Gluon Zustand) entspricht. Folglich wird L_8 bei $T < T_d$ zwar kleiner sein als bei $T > T_d$, aber nie exakt Null werden, da es mit dem asymptotischen Potentialwert zusammenhängt

$$\exp(-V_a(R)/T) \longrightarrow \langle L_8 \rangle^2, \quad \text{für } R \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Es ist nicht unmittelbar einsichtig, ob die kritische Temperatur des Deconfinement Überganges, T_d , für adjungierte Quarks dieselbe ist wie für fundamentale Quarks. Denn es ist fraglich, wie groß der Einfluß der spontanen Brechung der $Z(3)$ Symmetrie auf das Confinement oder Deconfinement der adjungierten Fermionen ist. Die Analyse der Meßergebnisse in Kapitel 5.2.1 wird allerdings zeigen, daß es nur einen Deconfinement Übergang, also nur ein T_d gibt.

Chirale Symmetrie Eine $SU(3)$ Theorie mit N_F (Dirac-) Fermionen besitzt eine $SU(N_F) \times SU(N_F)$ Flavour Symmetrie (auch chirale Symmetrie genannt), wenn die Fermionen in der fundamentalen Darstellung sind, aber eine $SU(2N_F)$ Symmetrie, wenn sie in der adjungierten Darstellung sind.

Um zu verstehen, wie dieser Unterschied zustande kommt, zerlegt man wie üblich den Dirac Spinor ψ für jeweils ein Fermion in seinen links- und rechtshändigen Anteil $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ ¹. Im Falle einer masselosen Theorie ist dann die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{N_F} \bar{\psi}^j i\gamma_\mu \partial^\mu \psi^j = \sum_{j=1}^{N_F} \left(\bar{\psi}_L^j i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_L^j + \bar{\psi}_R^j i\gamma_\mu \partial^\mu \psi_R^j \right) \quad (3.29)$$

invariant unter $SU(N_F)$ Transformationen der N_F linkshändigen Zweier-Spinoren ψ_L und unabhängig davon unter $SU(N_F)$ Transformationen der N_F rechtshändigen Zweier-Spinoren ψ_R . Ein Massenterm

$$m \bar{\psi} \psi = m \bar{\psi}_L \psi_R + m \bar{\psi}_R \psi_L \quad (3.30)$$

bricht dagegen diese Symmetrie. Zerlegt man nun die γ Matrizen in ihre 2×2 Untermatrizen, so lassen sich aus den rechtshändigen Feldern neue Zweier-Spinoren definieren, die sich unter Lorentz Transformationen genau wie die linkshändigen Felder transformieren. Betrachtet man die Ankopplung an die $SU(3)$ Eichfelder, so stellt man dann fest, daß diese neuen Fermionen gerade zu der konjugierten der ursprünglich gewählten Darstellung gehören. Hat man also die Darstellung r gewählt, so befinden sich in der Theorie nun N_F linkshändige Zweier-Spinoren, die sich wie r unter $SU(3)$ transformieren, und weitere N_F linkshändige Zweier-Spinoren, die sich wie \bar{r} transformieren. Die erstgenannten beschreiben dabei die Teilchen und die anderen die Antiteilchen.

Wählt man nun für r die adjungierte Darstellung, so gilt $r = \bar{r}$. Das hat wiederum zur Konsequenz, daß sich Teilchen und Antiteilchen nicht mehr unterscheiden lassen. Beide werden durch einen linkshändigen Zweier-Spinor beschrieben und transformieren sich auf die gleiche Weise unter der Farbgruppe $SU(3)$. Es handelt sich also um Majorana Fermionen. Folglich gibt es eine Symmetrie, die alle $2N_F$ Teilchen untereinander vertauscht, die $SU(2N_F)$, die die alte Symmetriegruppe $SU(N_F) \times SU(N_F)$ als eine Untergruppe enthält.

Führt man auch im Massenterm ausschließlich linkshändige Spinoren ein, so ist dieser proportional zu $\psi^T \psi$, d.h. er bricht die $SU(2N_F)$ zu einer $SO(2N_F)$ Symmetrie. Wenn in einer masselosen Theorie das chirale Kondensat also einen Erwartungswert hat, so ist die globale $SU(2N_F)$ Symmetrie spontan zur $SO(2N_F)$ gebrochen [17, 19]. Im Spektrum sollte dann für jede der gebrochenen Symmetrien ein masseloses Goldstone Boson zu finden sein. Für $N_F = 2$ sind das $(4^2 - 1) - (\frac{4 \cdot 3}{2}) = 15 - 6 = 9$ Teilchen. Bei der Analyse des Spektrums sollte man daher neben den drei Pionen sechs weitere Mesonen mit verschwindender Masse finden.

¹Die nachfolgenden Argumente und Formeln kann man zum Beispiel im Buch von Peskin und Schroeder [18], Kapitel 19.4 nachlesen

Die gemischte Phase Aus Untersuchungen der $SU(2)$ ist bekannt, daß Deconfinement und chiraler Phasenübergang in einer Theorie mit adjungierten Fermionen nicht mehr zusammenfallen [5]. In so einem Fall sollte dann $T_{\text{deconf}} \leq T_{\text{chiral}}$ gelten. Zumindest lassen sich heuristische Argumente finden, die es plausibel machen, daß sich Confinement und chirale Symmetrie gegenseitig ausschließen: Sind zwei oder drei Quarks durch das Confinement in einem Meson oder Baryon stark gebunden, so erhalten sie – obwohl an sich masselos – aufgrund der Bindung eine Konstituentenmasse. Diese bricht aber die chirale Symmetrie. Desweiteren sind stark gebundene Quarks auf einen gewissen Raumbereich eingeschränkt. So können sie sich bei dem MIT-Bag Modell nur innerhalb einer Blase (=Bag) mit endlichem Inhalt aufhalten. Betrachtet man sie darin als klassische Teilchen, die von einem Potentialwall (= Wand der Blase) umgeben sind, so können sie von dieser Wand reflektiert werden. Dabei kehrt sich der Impuls um, während der Spin erhalten bleibt, und somit ist die chirale Symmetrie verletzt. Schließlich kann man den Deconfinementübergang als Perkolation von Hadronen im QCD Vakuum auffassen und den chiralen Übergang dann als Perkolation der Konstituentenquarks, die erst bei höheren Dichten, also auch höheren Temperaturen einsetzen kann [20].

Man erwartet in der $aQCD$ also drei Phasen: eine Confinement Phase, in der die chirale Symmetrie spontan gebrochen ist, eine gemischte Phase, in der zusätzlich die Zentrumssymmetrie $Z(3)$ gebrochen ist, und eine chiral symmetrische Phase, die dem normalen Quark-Gluon-Plasma entspricht. In der gemischten Phase $T_d < T < T_c$ erwartet man daher immer noch Goldstone Bosonen, da die chirale Symmetrie ja noch nicht wiederhergestellt worden ist, die aber nicht fest gebunden sein können, da die Brechung der $Z(3)$ Symmetrie die Confinement Eigenschaft aufhebt. Daher ist eine Untersuchung der gemischten Phase hinsichtlich der Potentiale und des Spektrums besonders interessant.

Kapitel 4

QCD am Phasenübergang

In den folgenden zwei Kapiteln sollen die Resultate numerischer Rechnungen zur Phasenstruktur der *QCD* und der *aQCD* diskutiert werden. In diesem Kapitel werden die *QCD* Daten analysiert und im nächsten die Ergebnisse aus der *aQCD* ausgewertet.

Generell werden Mittelwerte und Fehler der Observablen mit dem Jackknife Verfahren ermittelt, wobei die Daten in fünf oder zehn Blöcke unterteilt sind. Auch bei den Ferrenberg-Swendsen Interpolationen wird Jackknife benutzt, lediglich bei Fits ergibt sich der Fehler der Parameter aus der Fehlerfortpflanzung.

4.1 Kritisches Verhalten in der *QCD*

Bei der Analyse des kritischen Verhaltens der *QCD* wird in der Hauptsache der Frage nachgegangen, in wie weit sich die kritische Temperatur verschiebt, wenn man von den Bereichen sehr kleiner Quarkmassen - chiraler Limes - zu denen intermediärer und großer Quarkmassen - reiner Eichtheorie Grenzfall - übergeht. Desweiteren soll untersucht werden, wie sich die Existenz und gegebenenfalls die Ordnung des Deconfinement- und des chiralen Überganges verändert.

Dazu werden zunächst in Abschnitt 4.1.1 die jeweiligen kritischen Kopplungen bestimmt, bevor dann in 4.1.2 die String Tension und die Mesonmassen bei $T = 0$ ermittelt werden, die dazu dienen, eine physikalische Skala festzulegen.

Für die Quarkmasse werden die Werte 0.02, 0.0357, 0.075, 0.2, 0.4, 0.6 und 1.0 betrachtet, die in physikalischen Einheiten dem Bereich $m/T = 0.08$ bis $m/T = 4.0$ entspricht.¹ Für die drei kleinsten Parameterwerte existieren schon Rechnungen bei endlicher Temperatur [21] und daher sind die kritischen Kopplungen schon bekannt.

¹Der Buchstabe m wird sowohl für die physikalische Quarkmasse als auch für zugehörigen den dimensionslosen Gitterparameter benutzt, da immer aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, welche Größe gemeint ist.

4.1.1 Bestimmung des Phasenübergangs

Simulationsparameter Die Untersuchungen bei endlicher Temperatur wurden auf einem Gitter der räumlichen Ausdehnung 16^3 und der zeitlichen Ausdehnung 4 durchgeführt. Für die Massen 0.2, 0.4, 0.6 und 1.0 wurden jeweils fünf bis sieben β -Werte in der Nähe des kritischen Wertes simuliert (siehe Tabelle 4.1).

Masse	β -Werte
0.20	5.430, 5.440, 5.445, 5.450, 5.455, 5.460, 5.470
0.40	5.500, 5.510, 5.520, 5.530, 5.540, 5.550
0.60	5.570, 5.580, 5.590, 5.600, 5.620
1.00	5.620, 5.630, 5.635, 5.640, 5.650

Tabelle 4.1: Simulationsparameter auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Auf etwa 2000 bis 10000 thermalisierten Konfigurationen wurden jeweils die Erwartungswerte der Plaquette und des Polyakov Loops gemessen. Das chirale Kondensat wurde bei jeder zweiten Iteration bestimmt, wobei ein Noisy Estimator mit 25 Zufallsvektoren benutzt wurde. Die Schrittweite im Molekulardynamikteil des Updates war $\Delta t = 0.02$ und die Trajektorienlänge $\tau = n \cdot \Delta t = 0.6$.

Analyse Die Resultate der o.g. einfachen Observablen sind im Anhang ausführlich dargestellt (Abschnitt B.1 bzw. D.1) und sollen hier nicht weiter behandelt werden.

Für den Polyakov Loop und das chirale Kondensat werden nun die Suszeptibilitäten χ_L und χ_m bestimmt und im Falle von χ_L mit dem Ferrenberg-Swendsen Verfahren [22] (im folgenden FS genannt) interpoliert. An den daraus entstehenden Kurven lassen sich Position und Höhe des Maximums und die kritische Kopplung β_k ablesen (siehe Abb. 4.1) ².

Man erkennt, daß sich β_k mit zunehmender Quarkmasse nach rechts verschiebt und dabei die Peakhöhe zunimmt. Dieses ist nicht weiter überraschend, da die kritische Kopplung der reinen Eichtheorie (d.h. $m \rightarrow \infty$) mit $\beta_{SU_3} = 5.6925$ [23] deutlich größer ist als bei Simulationen mit dynamischen Fermionen. Dort liegt der Phasenübergang im chiralen Limes ($m \rightarrow 0$) bei 5.233(7) [21]. Bis zu welcher Masse kann man nun aber noch einen wesentlichen Einfluß der dynamischen Fermionen erwarten? Hierfür ist der Boltzmannfaktor $\exp(-m/T)$ wohl die entscheidende Größe, so daß ab $m/T \approx 1$, d.h. $m = 0.25$, die Fermionen keinen wichtigen Beitrag mehr für die Dynamik des Systems leisten. So ist es zu verstehen, daß bei der Masse $m = 1.0$ (also $m/T = 4.0$) β_k bereits gut 88% der Differenz zwischen den beiden Extremwerten erreicht hat (siehe Tabelle 4.2).

Das Anwachsen der Peakhöhe zeigt die Veränderung des Phasenüberganges von einem Cross-over bei kleinen und mittleren Massen hin zu einem Übergang erster Ordnung in der reinen

²Genaugenommen muß man bei $m > 0$ von einer pseudo-kritischen Kopplung sprechen, da die Symmetrien der Gitter QCD erst im chiralen Limes $m \rightarrow \infty$ exakt sind. Diese Unterscheidung wird im folgenden aber nicht gemacht.

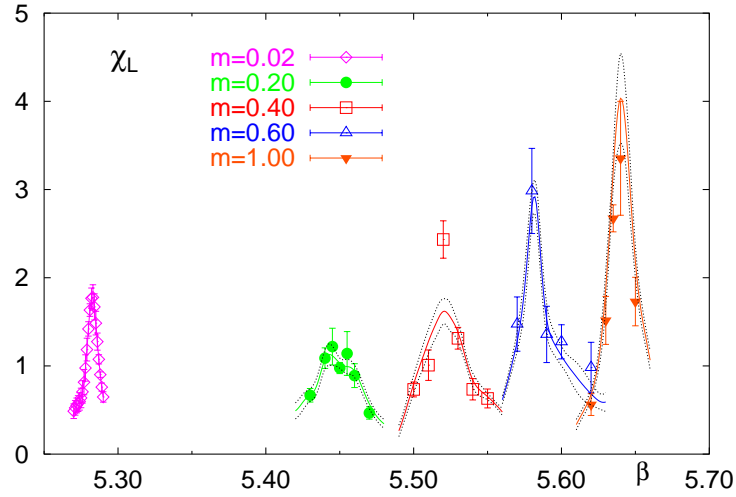
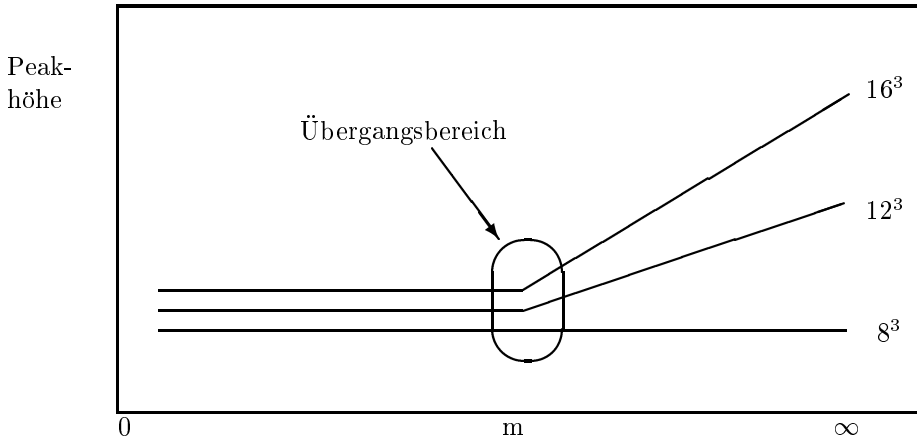


Abbildung 4.1: Suszeptibilität des Polyakov Loops für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation. Zum Vergleich ist auch in früheres Ergebnis bei $m = 0.02$ dargestellt.

m	β_k	χ_L^{max}
0.20	5.443 (5)	1.13 (12)
0.40	5.521 (6)	1.62 (14)
0.60	5.582 (3)	2.92 (19)
1.00	5.640 (4)	4.04 (51)
∞	5.691 (1)	7.645 (6)

Tabelle 4.2: Kritische Kopplungen und Peakhöhen von χ_L auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Eichtheorie³. Eine genauere Aussage kann allerdings erst getroffen werden, wenn die Volumenabhängigkeit der Peakhöhe untersucht wurde. Die folgende Skizze zeigt, was in etwa erwartet wird, wenn man das räumliche Volumen vergrößert.



Während die Peakhöhe bei $m = 0.2$ und $m = 0.4$ in etwa genauso hoch ist wie dicht am chiralen Limes, $m = 0.02$, ist sie bei $m = 1.0$ schon sichtbar gegenüber den kleineren Massen angestiegen ist (siehe Tabelle 4.2). Daher liegt nun die Vermutung nahe, daß der Übergang dort schon Erster-Ordnungs-Signale zeigt. In Abbildung 4.2 sind die Histogramme der Plaquette dargestellt, wobei sie jeweils mit Hilfe des FS Verfahrens genau bei β_k interpoliert sind.

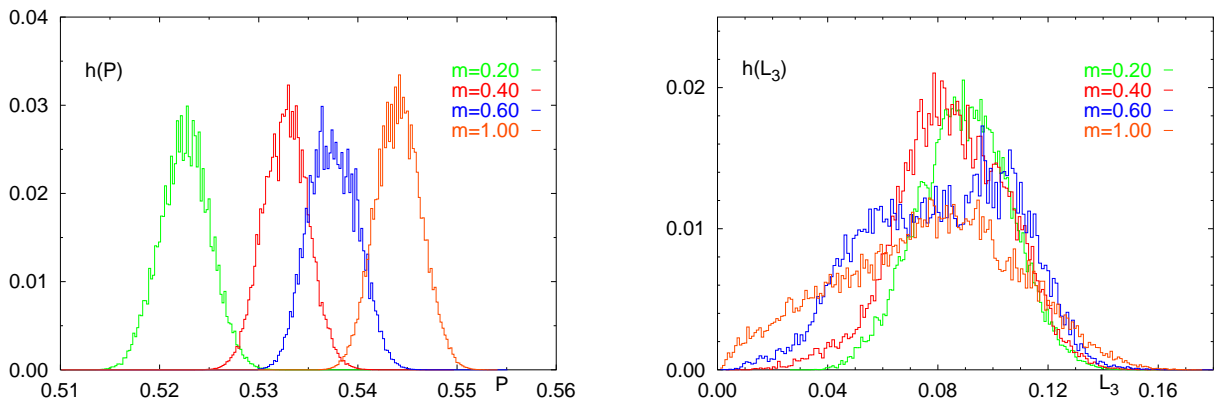


Abbildung 4.2: Plaquette und Polyakov Loop Histogramme jeweils bei β_k für alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Hier sind noch keine deutlichen Anzeichen für eine Doppel-Peak-Struktur und damit für einen Übergang erster Ordnung zu erkennen. Das entsprechende Bild der Polyakov Loop Histogramme (rechts in Abb. 4.2) zeigt allerdings schon eine Verbreiterung des Histogramms auf β_k , auch wenn sich noch keine zwei Maxima ausgebildet haben. Auch in den Zeitentwicklungen des Polyakov Loops sind bei den beiden größeren Massen schon Sprünge zu erkennen, nur daß die beiden Bereiche noch nicht sehr klar voneinander zu trennen sind, so wie es bei zwei metastabilen Zuständen sein müßte.

³Bei sehr kleinen Massen handelt es sich vermutlich um einen Übergang zweiter Ordnung.

Bei einer Masse von $m = 1.0$ scheint das System also schon recht nahe an dem Bereich zu sein, in dem der Phasenübergang schwach erster Ordnung ist. Möglicherweise zeigt sich dieses Verhalten erst bei einem System mit größerem (räumlichen) Volumen, denn aus den Untersuchungen der reinen Eichtheorie ist bekannt, daß erst Volumen größer als 16^3 ein klares 2-Phasen-Signal zeigen.

Die Betrachtung der chiralen Suszeptibilität (Abb. 4.3) zeigt, daß der Peak in χ_m mit zunehmender Masse rapide abnimmt und bei $m = 1.0$ schließlich gar nicht mehr vorhanden ist.

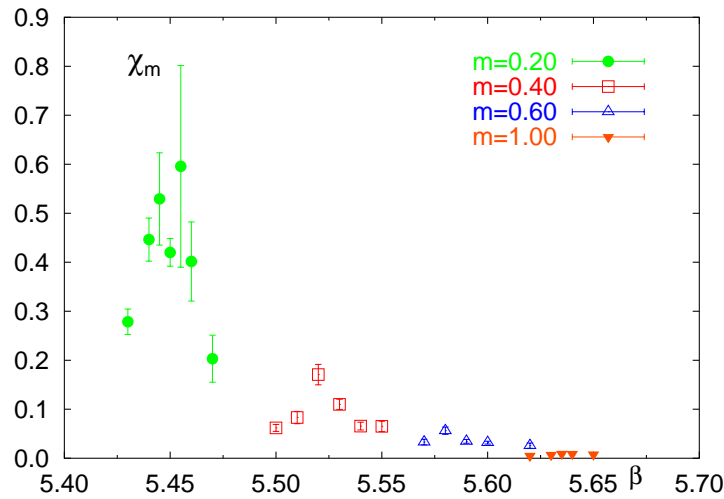


Abbildung 4.3: Suszeptibilität des chirales Kondensates für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Diese Beobachtung reflektiert die Tatsache, daß die Gitter-Lagrangefunktion die chirale Symmetrie explizit bricht und diese Brechung mit einer größer werdenden Masse m weiter zunimmt.

Für die Bestimmung der kritischen Kopplung β_k , um die es in diesem Abschnitt hauptsächlich ging, ist χ_m also ungeeignet und wird daher auch nicht weiter analysiert.

Um nun von den gerade erhaltenen Kopplungen auf kritische Temperaturen in physikalischen Einheiten schließen zu können, müssen weitere Observablen berechnet werden, deren Wert aus Experimenten bekannt ist. Dazu sind Simulationen bei $T = 0$ notwendig, die im folgenden Abschnitt ausgewertet werden.

4.1.2 Kritische Temperatur in physikalischen Einheiten

Simulationsparameter Zur Durchführung der $T = 0$ Simulationen wurde ein 16^4 Gitter verwendet. Für alle sieben Massen von 0.02 bis 1.0 wurde jeweils nur bei β_k simuliert, um an dieser Stelle den Gitterabstand bestimmen zu können. Da allerdings zu Beginn der $T = 0$ Berechnungen die genauen Werte für β_k noch nicht bekannt waren, ergaben sich im Nachhinein

Masse	simuliert bei	β_k
0.02	5.282	5.282
0.0375	5.306	5.306
0.075	5.350	5.350
0.20	5.443	5.443
0.40	5.521	5.521
0.60	5.581 (!)	5.582
1.00	5.635 (!)	5.640

Tabelle 4.3: Simulationsparameter auf dem 16^4 Gitter.

geringfügige Unterschiede zwischen den gewählten β 's und den tatsächlichen β_k 's. Tabelle 4.3 zeigt die verwendeten Parameter.

Auf etwa 2000 bis 5000 thermalisierten Konfigurationen wurden jeweils die Erwartungswerte der Plaquette und des Polyakov Loops sowie das chirale Kondensat gemessen. Bei jeder fünften Iteration wurden die Mesonkorrelationen berechnet und jede zehnte Konfiguration wurde gespeichert, um dann mit einem anderen Programm darauf die Wilsonloops zu messen. Die Schrittweite im Molekulardynamik Teil des Updates war $\Delta t = 0.01$ für $m = 0.02$, $\Delta t = 0.012$ für $m = 0.0375$ und ansonsten $\Delta t = 0.02$, die Trajektorienlänge war immer $\tau = n \cdot \Delta t = 0.6$.

Analyse der Mesonkorrelationen Von den vier gemessenen Korrelationen enthält nur eine lediglich ein einziges Teilchen, nämlich das Pion. Die anderen drei enthalten die Teilchenpaare $(\rho; b_1)$, $(\rho; a_1)$ und $(\pi_2; a_0)$ (siehe Kapitel 2.2). Bei einem Fit der Korrelationen lassen sich die Teilchen allerdings trennen, da das Signal des jeweils zweitgenannten ein mit dem Abstand alternierendes Vorzeichen hat. Die Daten werden mit einem Ansatz entsprechend Gleichung 2.10 gefittet,

$$C(t) = A_1 \cdot \cosh(m_1(t - 8)) + (-1)^t \cdot A_2 \cdot \cosh(m_2(t - 8)). \quad (4.1)$$

Da in den Daten allerdings ein für beide Summanden gemeinsamer Faktor $(-1)^{t+1}$ fehlt, beziehen sich nun A_1 , m_1 auf die Mesonen mit negativer Parität (π , ρ) und A_2 , m_2 auf die mit positiver (a_0 , a_1 und b_1). Beim Fit des Pions wird $A_2 \equiv 0$ gesetzt. Der Cosinus Hyperbolicus ist notwendig, da auf einem Gitter der Länge 16 die Korrelationsfunktionen wegen der geschlossenen Randbedingungen um $t = 8$ symmetrisch sind.

Da sich die Massen aus dem Abfallverhalten der Korrelationsfunktionen bei großen Abständen ergeben, wird beim Fit zum einen der Wert bei $t = 0$ ausgelassen und zum anderen der Fitbereich schrittweise symmetrisch eingeschränkt. Auf diese Weise kann geprüft werden, in wie weit das Ergebnis von der Auswahl des Fitbereiches abhängt. Weil aber andererseits die Meßungenauigkeiten der Daten mit wachsendem Abstand auch größer werden, ist es in der Praxis nur beim Pion möglich, sinnvolle Ergebnisse für $t_{min} > 1$ zu erhalten. Die Pionkorrelation wird also

β	m	m_π	$m_\rho(b)$	m_{b_1}	$m_\rho(a)$	m_{a_1}	m_{π_2}	m_{a_0}
5.282	0.0200	0.3735(45)	1.254(32)	2.2(3)	1.357(60)	1.96(11)	0.766(183)	1.56(6)
5.306	0.0375	0.5072(36)	1.311(13)	2.4(2)	1.454(44)	1.79 (6)	1.249(123)	1.28(3)
5.350	0.0750	0.7068(57)	1.415(11)	1.9(1)	1.666(41)	1.70 (5)	1.177 (62)	1.48(2)
5.443	0.2000	1.1047(30)	1.548 (5)	2.6(2)	1.659(11)	2.28 (6)	1.582 (21)	1.76(1)
5.521	0.4000	1.4977(36)	1.801 (3)	2.5(1)	1.923 (5)	2.27 (3)	1.893 (18)	2.08(2)
5.581	0.6000	1.7912(15)	2.015 (2)	2.5(1)	2.114 (5)	2.48 (5)	2.109 (10)	2.39(3)
5.635	1.0000	2.2614 (7)	2.397 (1)	3.0(1)	2.475 (4)	2.94 (8)	2.512 (9)	2.84(5)

Tabelle 4.4: Meson Massen für alle β und alle Massen auf dem 16^4 Gitter.

im Intervall [3.0;13.0] gefittet, die anderen im Intervall [1.0;15.0]. Die Resultate beim Pion zeigen aber, daß die gefitteten Parameter im Rahmen der Fehler nicht vom Fitbereich abhängen, so daß sich für die anderen Massen wohl auch keine Einschränkungen ergeben. In Tabelle 4.4 sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

Die ρ Masse läßt sich aus zwei Signalen bestimmen, entweder zusammen mit dem a_1 oder mit dem b_1 . Da bei der letztgenannten Kombination die Fehler geringer sind, werden diese Ergebnisse verwendet.

Für die weitere Analyse sind nur das Pion (Pseudoskalar) und das ρ (Vektor) von Bedeutung. Der Quotient $(m_\pi/m_\rho)^2$ ist geeignet, um sowohl den chiralen Limes als auch den Limes der reinen Eichtheorie zu betrachten. Einerseits ist er proportional zur Quarkmasse m , so daß $(m_\pi/m_\rho)^2 \rightarrow 0$ auch $m \rightarrow 0$ bedeutet, und andererseits sind im Falle unendlich schwerer Quarkmassen Pion und ρ gleich (unendlich) schwer und somit gilt $(m_\pi/m_\rho)^2 = 1$.

Analyse der Wilsonloops Bei Gitterrechnungen dient in der Regel die Saitenspannung dazu, eine physikalische Skala einzuführen, da sie einerseits relativ einfach zu bestimmen ist, und andererseits der experimentelle Wert $\sqrt{\sigma} \approx 420$ MeV recht gut bekannt ist.

Die Potentiale $V(r)$ werden mit dem Standardverfahren aus den Wilsonloops bzw. den lokalen Potentialen $V_l(r)$ bestimmt, wobei diese erst ab dem Abstand $t = 2$ berücksichtigt werden (siehe Kapitel 2.2). Die Parameter für das verwendete APE-smearing wurden pro β -Wert auf einer Testkonfiguration des Systems optimiert. Eine detaillierte Untersuchung, wie sich das Smearing auf die Potentialbestimmung auswirkt, findet man in [24]. Für die Anzahl der Smearing Schritte, n , und das Gewicht der Staple gegenüber dem Link, $\epsilon = \beta/\alpha$, wurden die folgenden Werte verwendet:

β	5.282	5.306	5.350	5.443	5.521	5.581	5.635
n	4	4	5	5	5	5	5
ϵ	0.1	0.1	0.05	0.1	0.1	0.1	0.1

Die Wilsonloops sind auch für diagonale Abstände gemessen worden, aber die Effekte der durch das Gitter zerstörten Rotationsinvarianz, die bei der benutzten Standardwirkung zu erwarten

waren, sind zu stark, als daß sie zusätzliche Information über das Potential enthalten. Mit anderen Worten, beim Fitten aller Daten sind die Ergebnisse schlechter, als wenn die Abstände $n \cdot \sqrt{2}$ weggelassen werden.

Daher werden im folgenden nur die Potentialwerte bei $r = 1, 2, \dots, 8$ verwendet, die im Anhang (Abschnitt B.3) auch tabelliert sind. Bei dem üblichen Fitansatz

$$V(r) = V_0 + \sigma r - \frac{\alpha}{r} \quad (4.2)$$

wird der Parameter α einmal frei gelassen (Fitintervall $R = [1, 8]$) und einmal auf $\pi/12$ gesetzt (Fitintervall dann $R = [2, 8]$). Dieser Wert wird für die reine $SU(3)$ Eichtheorie aufgrund von Untersuchungen in der Stringtheorie vorhergesagt. Für die QCD ist das in sofern nicht relevant, als der String zwischen Quark und Antiquark ja reißen kann und die Stringtheorie somit keine Anwendung mehr findet. Trotzdem zeigt Abbildung D.22, daß der gefittete Parameter α dem Wert von $\pi/12 = 0.261799$ um so näher kommt, je größer die Quarkmasse wird, also ja näher man sich am $SU(3)$ Grenzfall befindet. Tabelle 4.5 zeigt die erzielten Resultate aus beiden Fitansätzen.

β	m	V_0		σ		α
		String	Coulomb	String	Coulomb	Coulomb
5.282	0.0200	0.530 (7)	0.508(15)	0.357(3)	0.361 (4)	0.232(11)
5.306	0.0375	0.533(10)	0.511(22)	0.344(4)	0.347 (7)	0.233(16)
5.350	0.0750	0.513 (7)	0.454(15)	0.334(3)	0.345 (5)	0.191(10)
5.443	0.2000	0.552 (6)	0.536(13)	0.280(3)	0.283 (4)	0.241 (9)
5.521	0.4000	0.555 (4)	0.539 (9)	0.259(1)	0.262 (2)	0.240 (6)
5.581	0.6000	0.571 (4)	0.564 (9)	0.226(2)	0.227 (2)	0.251 (7)
5.635	1.0000	0.582 (4)	0.578 (7)	0.204(2)	0.204 (2)	0.257 (6)

Tabelle 4.5: Fitparameter V_0 , σ und α aus den Potentialfits auf dem 16^4 Gitter.

Da, wie bereits erwähnt, das α recht nahe bei $\pi/12$ liegt, stimmen auch die übrigen Fitparameter gut überein. Für weitere Analysen werden jedoch die Resultate verwendet, die mit freiem α erzielt wurden, da im anderen Falle eine zwar kleine aber doch systematische Abweichung vorliegt.

Resultate in physikalischen Einheiten Das Ergebnis für die kritische Temperatur, T_c , in Einheiten der Saitenspannung ist in Abbildung 4.4 zusammengefaßt. Da in zwei Fällen ($m = 0.6$, $m = 1.0$) nicht genau bei β_k simuliert wurde, müßten diese $T = 0$ Ergebnisse noch auf $\beta = \beta_k$ verschoben werden, aber weil dieses nur eine Änderung von weniger als 1 Promille bedeutet, kann im Rahmen der auftretenden statistischen Fehler im Prozentbereich darauf verzichtet werden.

Der Wert der reinen Eichtheorie ist aus [25] entnommen. Eine lineare Extrapolation der beiden kleinsten Werte zum chiralen Limes ($(m_\pi/m_\rho)^2 \rightarrow 0$) liefert $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.404(8)$, ein Fit der

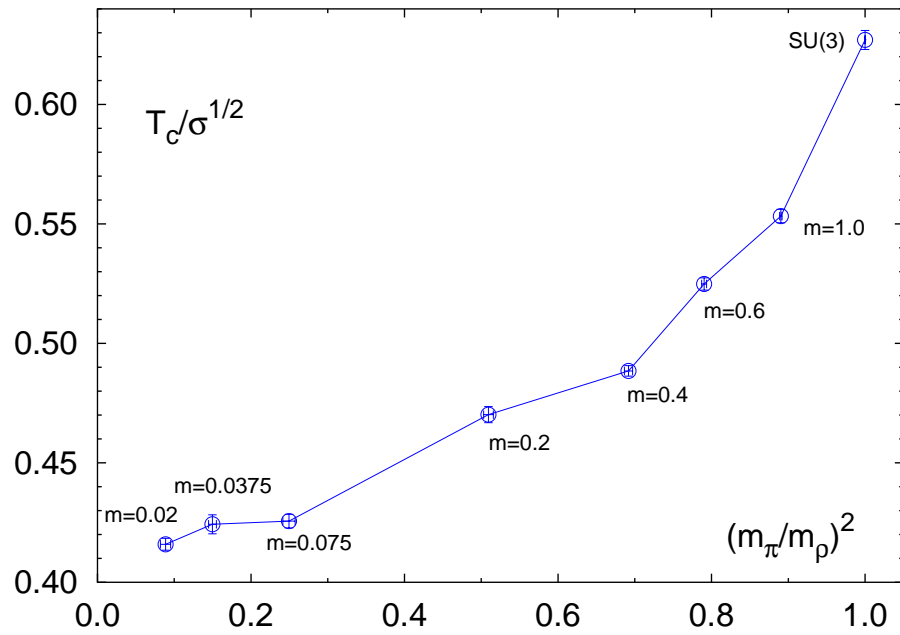


Abbildung 4.4: Kritische Temperatur in Einheiten von $\sqrt{\sigma}$ aufgetragen gegen $(m_\pi/m_\rho)^2$ auf dem 16^4 Gitter.

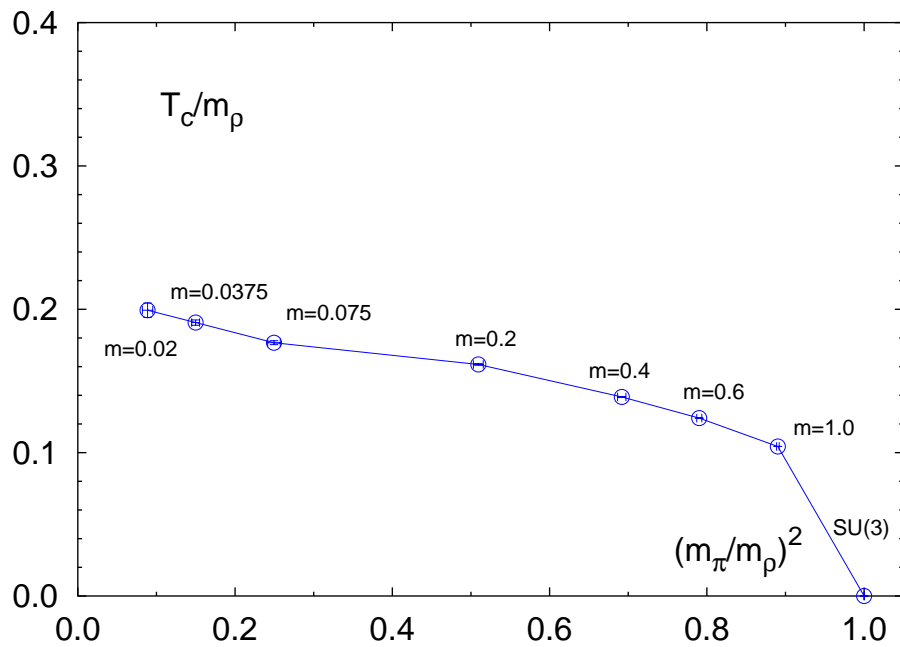


Abbildung 4.5: Kritische Temperatur in Einheiten von m_ρ aufgetragen gegen $(m_\pi/m_\rho)^2$ auf dem 16^4 Gitter.

drei kleinsten Massenpunkte $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.412(4)$. Mit $\sqrt{\sigma} \approx 420$ MeV ergibt sich also eine Übergangstemperatur von ca. 170 - 173 MeV.

Auch die ρ Masse, $m_\rho \approx 770$ MeV, kann als Skala für die kritische Temperatur benutzt werden (siehe Abb. 4.5) und man erhält durch Extrapolation von zwei bzw. Fit von drei Punkten $T_c/m_\rho = 0.212(13)$ bzw. $T_c/m_\rho = 0.212(4)$ und damit etwa $T_c \approx 163$ MeV. Diese Zahlen sind in guter Übereinstimmung mit früheren Resultaten [26].

Interessanter ist hier die Beobachtung, daß der lineare Trend bei $T_c/\sqrt{\sigma}$ bis $m = 0.4$ und bei T_c/m_ρ sogar bis $m = 0.6$ anzuhalten scheint. Das bedeutet, daß man – zumindest bei der Observablen T_c – von Ergebnissen bei recht großen Quarkmassen einigermaßen verlässlich per Extrapolation auf den chiralen Limes schließen kann. Generell muß man jedoch die Aussagekraft der Extrapolation einschränken, da die kleinste hier behandelte Quarkmasse einer Pionmasse von ca. 230 MeV entspricht, die damit über der relevanten Skala von $T_c \approx 160$ MeV liegt. Es wäre durchaus möglich, daß die mit den vorhandenen Daten gut funktionierende lineare Extrapolation in der Quarkmasse bei Simulationen mit $m_\pi < T_c$ ihre Gültigkeit verliert, so wie es von σ -Modellen vorhergesagt wird.

Ab $m \approx 0.4$ spielen die chiralen Eigenschaften des Systems dann aber keine Rollen mehr, stattdessen gewinnen Einflüsse der reinen Eichtheorie die Oberhand und $T_c/\sqrt{\sigma}$ steigt deutlich schneller an. Diese Feststellung deckt sich mit der zuvor getroffenen Aussage, daß in den Polyakov Loop Histogrammen bei den beiden größten Quarkmassen eine starke Verbreiterung zu sehen ist, die auf einen Phasenübergang erster Ordnung hindeutet.

4.2 Screening Massen in der QCD

Die Screening Massen übernehmen in Simulationen bei endlicher Temperatur die Rolle der normalen Mesonmassen, da diese wegen der geringen Anzahl von Gitterpunkten in Zeitrichtung nicht extrahiert werden können. Sie dürfen zwar nicht mit den experimentell bestimmten Ruhemassen verglichen werden, liefern aber dennoch einen guten qualitativen Überblick über das Spektrum. Sie werden an dieser Stelle hauptsächlich deswegen analysiert, um später in der $aQCD$ die Veränderungen aufzuzeigen.

Die gemessenen räumlichen Korrelationen werden nun analog zum vorigen Abschnitt mit dem Ansatz in Gleichung 4.1 gefittet aber mit z anstelle von t . Die Tabellen in B.2 und die Bilder in D.2 zeigen die Resultate.

Die wesentliche Feststellung ist die, daß das Pion und sein Paritätspartner das a_0 eine deutlich verschiedene Masse haben und daß diese Massendifferenz am Übergang zwar abnimmt, aber noch keine Massentartung vorliegt, wie sie im Falle einer vollständig wiederhergestellten chiralen Symmetrie ($m \rightarrow 0$) vorkommt (Abb. 4.6, links).

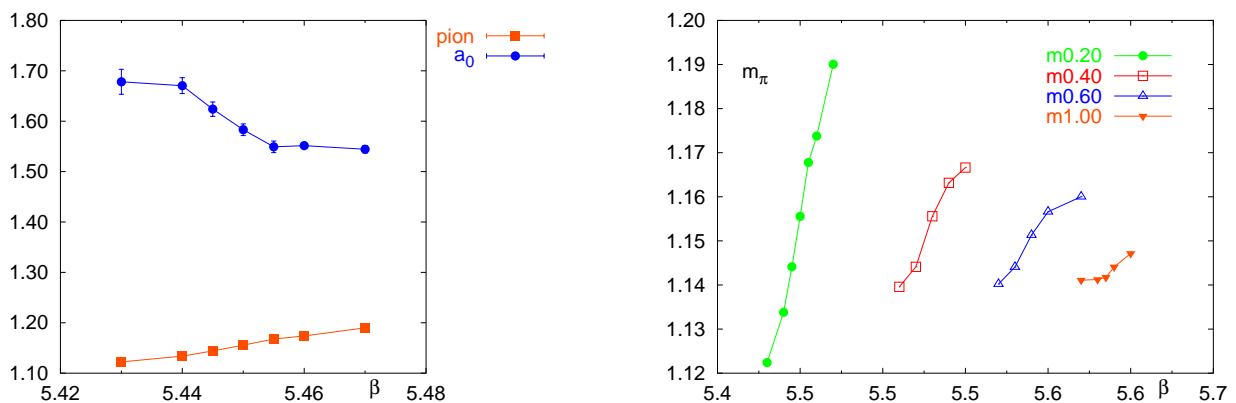


Abbildung 4.6: Links: Screening Massen m_π und m_{a_0} für alle β bei $m = 0.20$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Rechts: Pion Massen m_π , verschoben auf dieselbe Höhe bei β_k , für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Untersuchungen bei wesentlich kleineren Quarkmassen zeigen tatsächlich ein Zusammenfallen der Pionmasse und der a_0 Masse am chiralen Übergang [21]. Desweiteren zeigt Abbildung 4.6, daß der Anstieg von m_π in der Umgebung von β_k um so größer ausfällt, je kleiner die Quarkmasse ist. Es zeigt sich also auch in dieser Observablen, daß die chiralen Eigenschaften des Systems gerade im betrachteten Bereich $0.2 \leq m \leq 1.0$ deutlich zurückgehen.

Kapitel 5

Die Phasenstruktur der $aQCD$

5.1 Die Simulationen

Aufgrund des zusätzlichen Aufwandes, den die Behandlung von adjungierten Fermionen verursacht, wurde der Hauptteil der Simulationen auf einem $8^3 \times 4$ Gitter durchgeführt, insbesondere diejenigen, die zur Bestimmung der kritischen Kopplungen dienen. Die Potentiale und die Mesonkorrelationen wurden aber ausschließlich auf einem $16^3 \times 4$ gemessen, da man sich für das Verhalten bei großen Abständen interessiert.

Die Auswahl der β -Werte stützte sich auf die Annahme, daß der Deconfinementübergang in etwa an der gleichen Stelle wie in der QCD ist, und auf die Tatsache, daß der chirale Übergang nur oberhalb davon liegen kann. Nachdem dann Signale für einen Deconfinementübergang bei $\beta \approx 5.3$ gefunden waren, wurde der Bereich $\beta > 5.3$ nach Signalen im chiralen Sektor durchsucht. Als besonders schwierig erwies sich dabei die richtige Wahl der Quarkmasse m , die ja auch wesentlichen Einfluß auf die Dauer der Inversion der Fermionmatrix und damit der gesamten Simulation hat. Die ursprüngliche Annahme, daß Messungen bei $m = 0.1$ und $m = 0.05$ ausreichen, um den chiralen Phasenübergang zu finden, erwies sich als zu optimistisch. Weder im chiralen Kondensat noch in der Suszeptibilität zeigten sich eindeutige Signale (siehe Auswertung). Erst bei einer Verringerung der Masse auf $m = 0.02$ und $m = 0.01$ wurden verwertbare Peaks in χ_m sichtbar. Um β_c zu lokalisieren, erschien allerdings eine Extrapolation von $\langle \bar{\psi}\psi \rangle(m)$ nach $m \rightarrow 0$ erfolversprechender zu sein, als die genaue Lage des Peaks zu bestimmen. Daher wurden weitere Messungen bei $m = 0.03, 0.04$ und 0.08 durchgeführt und die bei $m = 0.01$ ausgeweitet, um bei festem β genügend viele Punkte für einen 3- oder 4-Parameterfit in m zu bekommen. Tabelle 5.1 gibt Aufschluß über einige der Simulationsparameter.

Die Schrittweite $\Delta\tau$ in der Molekulardynamik ist jeweils so gewählt, daß die Trajektorienlänge sich zu 0.25 ergibt. Nach jeder Iteration, also nach einer Trajektorie, wurden die einfachen Observablen Plaquette, Polyakov Loop und Chirales Kondensat und nach jeder zweiten die Polyakov Loop Korrelationen und die Mesonkorrelationen gemessen.

Masse	Mol. Dynamik Schritte	Trajektorien zur Thermalisierung	Trajektorien zur Messung	Anzahl der β -Werte
$8^3 \times 4$ Gitter				
0.01	64	500	1000 - 3000	8
0.02	40	500	1500 - 6500	18
0.03	32	500	1500	2
0.04	28	500	2800 - 7500	17
0.05	25	500	2500 - 6500	9
0.08	21	500 - 1000	1500 - 7000	15
0.10	20	500 - 1000	400 - 14000	30
$16^3 \times 4$ Gitter				
0.02	50-75	100 - 1000	500 - 2300	8

Tabelle 5.1: Simulationsparameter in der $aQCD$.

Polyakov Loop Korrelationen wurden für alle Abstände $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ mit $x_i = 0, \dots, 4$ und $R = 5, 6, 7, 8$ konstruiert, wodurch sich insgesamt 34 verschiedene Längen von 0 bis 8 ergeben. Messungen dazu existieren für $m = 0.02$ bei $\beta = 5.25, 5.40, 5.70, 6.20, 6.50$ und für $m = 0.04$ bei $\beta = 5.25, 5.40, 5.70, 6.20$.

Für $m = 0.02$ und $m = 0.04$ sind bei $\beta = 5.25, 5.40, 5.70, 6.20$ auf 200 bis 500 Konfigurationen auch die Mesonkorrelationen in z -Richtung gemessen worden.

Neben den gerade erwähnten Polyakov Loop und Meson Korrelationen sind auf dem $16^3 \times 4$ Gitter natürlich auch die einfachen Observablen und zusätzlich der adjungierte Polyakov Loop gemessen worden. Allerdings reicht die Statistik nicht aus, um präzise Aussagen über die Position der Phasenübergänge zu treffen. Außerdem wurden gar keine Simulationen in der Nähe des Deconfinementüberganges gemacht, da diese schon auf dem kleineren Gitter besonders zeitaufwendig waren.

Alle Simulationen liefen auf QUADRICS Parallelrechnern Q2, Q4open oder QH1 mit 16, 32 bzw. 128 Prozessoren. Die gesamte Rechenzeit beläuft sich auf ca. 1,5 Millionen CPU-Stunden in den vergangenen drei Jahren.

5.2 Thermodynamik der $aQCD$

Der Erwartungswert des fundamentalen Polyakov Loops, L_3 , ist wie bereits erwähnt in der $aQCD$ ein Ordnungsparameter der Zentrumsymmetrie $Z(3)$. Sein Zusammenhang mit der Confinement Eigenschaft statischer fundamentaler Quarks ist offensichtlich (siehe Gleichung 3.24). Weniger klar sind die Effekte der spontanen Symmetriebrechung auf die adjungierten Fermionen.

In Abschnitt 5.2.1 soll daher zunächst der Deconfinement Phasenübergang bestimmt und seine Auswirkungen auf die verschiedenen Potentiale untersucht werden. Die Analyse des chiralen Phasenüberganges ist ein weiterer zentraler Punkt der Datenauswertung, in dem der Unterschied zwischen T_{deconf} und T_{chiral} berechnet wird (Abschnitt 5.2.2). Im letzten Unterabschnitt (5.2.3) wird der Druck in der Nähe des Deconfinement Überganges behandelt und die latente Wärme abgeschätzt.

5.2.1 Der Deconfinement Phasenübergang

Die Simulationsergebnisse für Plaquette, Polyakov Loop, Chirales Kondensat und die Potentiale sind umfassend im Anhang aufgelistet (C.1, C.2) und graphisch dargestellt (E.1, E.2).

Abbildung 5.1 zeigt den fundamentalen Polyakov Loop, L_3 , bei verschiedenen Massen und zum Vergleich das Ergebnis aus der reinen $SU(3)$ Eichtheorie sowie einen Vergleich zwischen L_3 und dem adjungierten Polyakov Loop, L_8 , bei der Masse $m = 0.02$.

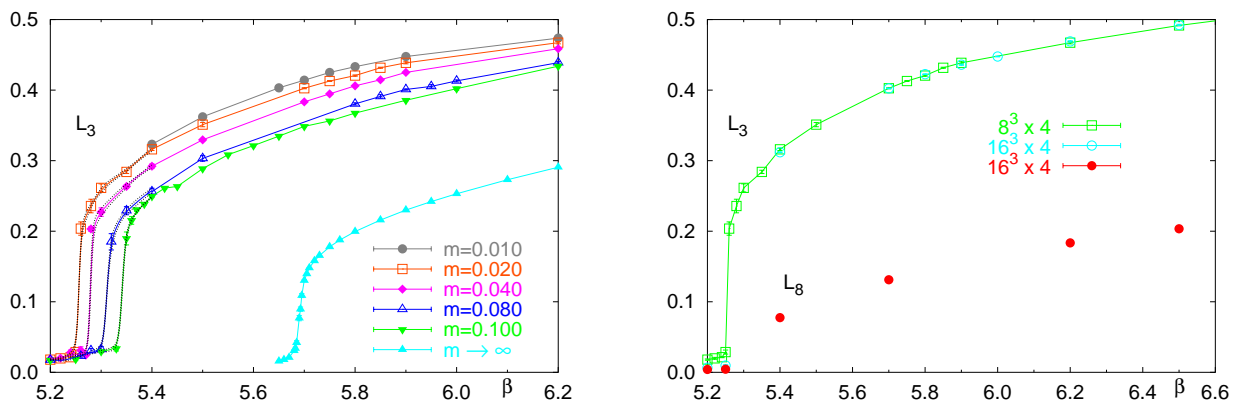


Abbildung 5.1: Links: fundamentaler Polyakov Loop, L_3 , für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Zum Vergleich sind auch Daten der reinen Eichtheorie angegeben. Rechts: L_3 und L_8 für $m = 0.02$ auf dem $8^3 \times 4$ und dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Man erkennt, daß L_3 einen deutlichen Sprung in der Nähe von $\beta = 5.3$ macht, der zwar kaum von der Masse abhängt, aber um einiges größer ausfällt als in der $SU(3)$ Theorie ($m \rightarrow \infty$). Das bestätigt die Erwartung, daß es sich auch hier um einen Phasenübergang erster Ordnung handelt. Die größere Diskontinuität wirkt sich auf den Verlauf des Potentials aus, das im weiteren Verlauf dieses Abschnittes diskutiert wird. Das Verhalten von L_8 hat offenbar dieselbe Form wie das von L_3 , d.h. L_8 ist nahe Null unterhalb von $\beta = 5.3$ und deutlich größer für $\beta > 5.3$. Also muß sich auch das adjungierte Potential entsprechend deutlich am Deconfinementübergang verändern.

Die genaue Position des Phasenüberganges wird bestimmt, indem man in der Suszeptibilität von L_3 , χ_L , das Maximum sucht. Dazu interpoliert man die Daten mit dem Ferrenberg-Swendsen Algorithmus. Dies ist nur bei den vier Quarkmassen $m = 0.1, 0.08, 0.04$ und 0.02 möglich, da bei diesen genügend viele Meßpunkte in der Nähe der kritischen Kopplung liegen. In Abbildung

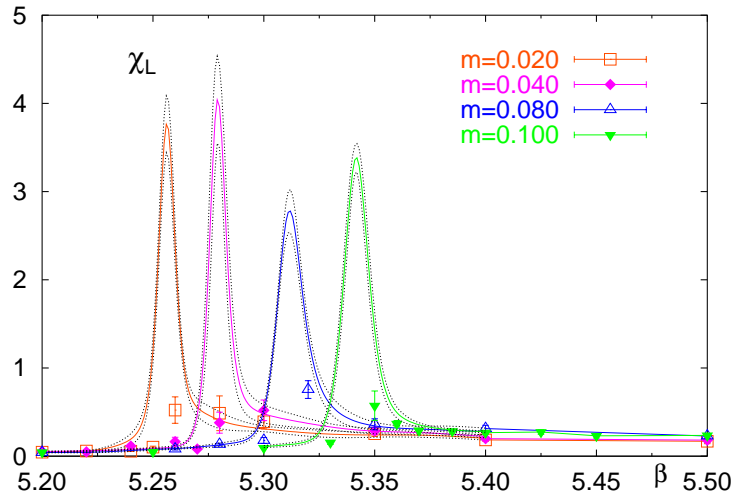


Abbildung 5.2: Suszeptibilität des Polyakov Loops für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation.

5.2 sind die Messungen bei den vier genannten Massen und die Interpolationen inklusive einem Fehlerband eingezeichnet.

Die kritischen Kopplungen, β_d , und deren Fehler können nun aus Lage und Breite des jeweiligen Maximums abgelesen werden und sind in Tabelle 5.2 zusammengefaßt.

m	0.10	0.08	0.04	0.02
$\beta_d(m)$	5.342 (2)	5.312 (2)	5.279 (2)	5.256 (2)

Tabelle 5.2: Kritische Kopplungen am Deconfinement Übergang für verschiedene Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

Die Abhängigkeit der kritischen Kopplung von der Quarkmasse ist im allgemeinen

$$\beta_d(m) = \beta_d(0) + c \cdot m^\alpha. \quad (5.1)$$

Da sich der Parameter α bei einem Fit der Formel an die Daten ungefähr zu 1 ergibt, kann man eine lineare Abhängigkeit voraussetzen und $\alpha = 1$ setzen. Mit dieser Wahl ergibt der Fit

$$\beta_d(0) = 5.236(2) \quad (5.2)$$

für die kritische Kopplung des Deconfinementüberganges im chiralen Limes. Dieser Wert liegt bemerkenswert dicht am Resultat für QCD mit 2 fundamentalen Quarks, $\beta_d^{\text{fund.}}(m=0) = 5.233(7)$, [21]. Diese Untersuchung auf Gittern der Größe $8^3 \times 4$, $12^3 \times 4$ und $16^3 \times 4$ hatte ergeben, daß die kritische Kopplung im Rahmen der Fehler überhaupt nicht vom betrachteten

Volumen abhängt, und man kann wohl annehmen, daß es sich bei der $aQCD$ ähnlich verhält. Ob die Übergangstemperatur in physikalischen Einheiten auch dieselbe ist, bleibt jedoch völlig unklar, da weder Messungen bei $T = 0$ vorliegen noch experimentelle Daten existieren, aus denen sich eine Skala bestimmen ließe.

Da nun $\beta_d(m)$ für die einzelnen Quarkmassen bekannt ist, kann man das Plaquette Histogramm mit Hilfe des FS Verfahrens genau bei dieser Kopplung berechnen, um noch etwas mehr über die Natur des Übergangs zu erfahren.

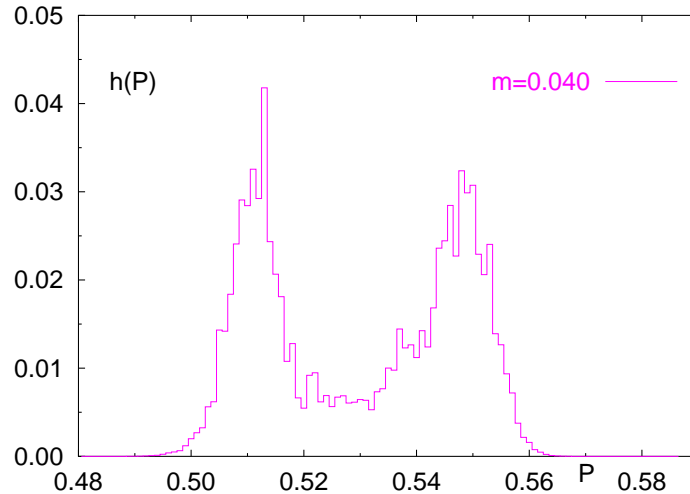


Abbildung 5.3: Plaquette Histogramm bei $\beta_d = 5.279$ für $m = 0.04$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

In allen Plaquette Histogrammen ist dabei ein klares Zwei-Zustands-Signal zu erkennen (z.B. Bild 5.3), was das Vorhandensein eines Übergangs erster Ordnung bestätigt. In Kapitel 5.2.3 wird die zugehörige latente Wärme abgeschätzt.

Der relativ große Sprung von L_3 am Deconfinement Übergang hat auch Konsequenzen für die Potentiale, die nun behandelt werden. Sie werden aus Korrelationen des Polyakov Loops L_3 bzw. L_8 berechnet wie in den Formeln 3.24 und 3.25 angegeben. Messungen dazu existieren bei Masse $m = 0.02$ für $\beta = 5.25, 5.4, 5.7, 6.2$ und 6.5 (Abbildungen E.17 bis E.21) und bei Masse $m = 0.04$ für $\beta = 5.25, 5.4, 5.7$ und 6.2 (Abbildungen E.22 bis E.25).

Da die verwendete Wirkung hinsichtlich ihres Kontinuumslimites nicht verbessert ist, sind Abweichungen von der Rotationsinvarianz zu erwarten. Besonders stark treten sie bei den Abständen $R = \sqrt{2}$ und $R = \sqrt{3}$ auf, da dort die möglichen Wege auf dem Gitter am weitesten von dem direkten Weg zwischen Quark und Antiquark entfernt liegen. Bei der Analyse und den zugehörigen Bildern im Anhang E.2 sind sie daher weggelassen, in den Tabellen im Anhang C.2 jedoch aufgeführt worden.

Der ausgewählte β -Wert 5.25 entspricht einer Temperatur von ungefähr $T \simeq 0.974 T_d$, wenn man $\beta_d = 5.256$ (für $m = 0.02$) und den 1-Loop Anteil der β -Funktion aus Gleichung 3.16 zugrunde legt. Die anderen β -Werte (5.4, 5.7, 6.2, 6.5) entsprechen Temperaturen oberhalb von T_d .

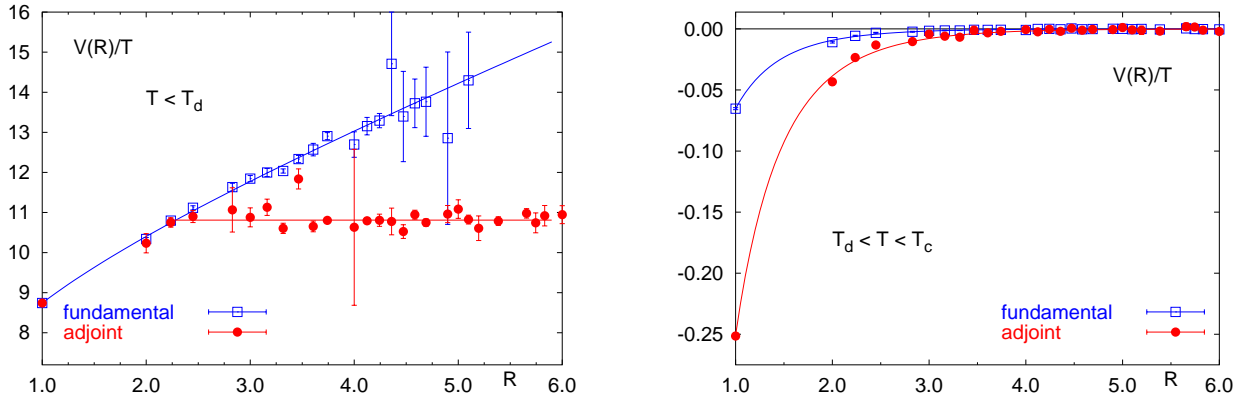


Abbildung 5.4: Links: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.25$, $m = 0.02$. Die beiden Kurven sind bei $R = 1.0$ aufeinander geschoben worden. Rechts: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.40$, $m = 0.02$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen jeweils die Fits an die Daten.

Abbildung 5.4 zeigt die Potentiale für den Fall $T < T_d$ (links) und für den Fall $T > T_d$ (rechts) jeweils bei $m = 0.02$, bei denen ein völlig unterschiedliches Verhalten zu sehen ist.

Fundamentales und adjungiertes Potential zeigen bei $T < T_d$ einen Confinement Verlauf, d.h. ein lineares Ansteigen, mit einem deutlichen Anzeichen für das String Breaking im adjungierten Fall, wo das Potential ab dem Abstand 2 (in Gittereinheiten) konstant wird. Für $T > T_d$ dagegen erkennt man eine starke Abschirmung der Ladungen und die Potentiale überstreichen einen Wertebereich, der um zwei Größenordnungen kleiner ist als in der Confinement Phase. Diese sehr große Abschirmung spiegelt die Tatsache wider, daß beide Polyakov Loops, L_3 und L_8 , am Deconfinement Übergang eine große Diskontinuität haben, da wie bereits erwähnt der Logarithmus von L^2 proportional zum Potential im Abstand Unendlich ist.

Ein Vergleich der beiden Potentiale bei $\beta = 5.25$ zeigt, daß der lineare Anstieg – sofern vorhanden – etwa gleich groß ist. Das bedeutet, daß ein Casimir Scaling, d.h. ein Unterschied der Potentiale entsprechend der verschiedenen Eigenwerte des Casimiroperators, wie es in der reinen $SU(3)$ Theorie bei $T = 0$ auftritt [27], hier nicht vorkommt. Das ist aber nicht erstaunlich, da die Operatoreigenschaften in der Nähe der kritischen Temperatur T_d keine große Rolle mehr spielen. Weiterhin ist auffällig, daß das String Breaking schon recht früh bei einem Abstand von $RT \simeq 0.6$ einsetzt. Bei QCD mit 2 fundamentalen Quarks geschieht dies erst bei ungefähr $RT \simeq 0.8 - 1.0$ [16] und scheint auch nicht derart “spontan” zu sein. Eine mögliche Erklärung dafür liefern Kaczmarek et al. [28], die eine $SU(2)$ Theorie mit 4 Quarks untersucht haben. Dort gibt es wie auch in der $aQCD$ im Gegensatz zur normalen QCD mehr leichte Mesonen in der Confinement Phase, wodurch ein früheres Brechen des Strings zu erklären wäre. Vergleicht man Abbildung 5.4 (links) mit dem entsprechenden Bild bei $m = 0.04$ (E.17), so erkennt man, daß die Konstante V_∞/T in beiden Fällen bei etwa 11 liegt (siehe Tabelle C.15), also nicht wesentlich von der Masse abhängt. Bei der spontanen Bildung zweier Mesonen müßte der asymptotische Wert aber mit der Quarkmasse zunehmen, so daß man darauf schließen kann, daß hier die Anlagerung von Gluonen an die vorhandenen adjungierten Fermionen zum String Breaking führt.

Um ein Confinement Potential, daß aus Polyakov Loop Korrelationen stammt, zu fitten, benutzt man üblicherweise (siehe z.B. [29]) den Fitansatz

$$V(R)/T = V_0/T + \sigma/T^2 \cdot RT - \log(2RT). \quad (5.3)$$

Es ergibt sich für $m = 0.02$ eine String Tension von $\sqrt{\sigma}/T = 1.97(2)$, die relativ groß ist im Vergleich zum $SU(3)$ Wert $\sqrt{\sigma}/T = 0.856(5)$ (bei $T \simeq 0.979 T_d$, [29]). Da σ ab $T = T_d$ aber Null ist, zeigt sich auch hier, daß der Deconfinementübergang stark erster Ordnung ist, da offenbar auch in der String Tension eine große Diskontinuität vorliegt.

Für die abgeschirmten Potentiale benutzt man den Ansatz

$$V(R)/T = \alpha/(RT) \cdot \exp(\mu/T \cdot RT), \quad (5.4)$$

mit der Kopplungsstärke α und der Abschirmmasse μ . Obwohl die Störungstheorie einen Coulombterm proportional zu $1/R^2$ vorhersagt, waren bislang die Potentiale der QCD eher mit $1/R$ verträglich. Da die vorliegenden Daten nicht genau genug sind, um zwischen den beiden Möglichkeiten zu unterscheiden, wird der Standardansatz 5.4 aus der QCD übernommen. Alle Daten für $\beta \geq 5.40$ sind mit diesem Ansatz verträglich und die Ergebnisse für die Fitparameter α und μ sind in Tabelle 5.3 zusammengefaßt.

μ/T					α				
	$m = 0.02$		$m = 0.04$			$m = 0.02$		$m = 0.04$	
β	adj.	fund.	adj.	fund.	β	adj.	fund.	adj.	fund.
5.400	4.72 (8)	5.01 (8)	4.7(2)	4.8(1)	5.400	0.204 (5)	0.057(2)	0.242(14)	0.0676(34)
5.700	6.56(44)	6.02(26)	5.5(2)	4.0(1)	5.700	0.156(17)	0.031(2)	0.111 (6)	0.0190 (6)
6.200	8.16(21)	8.21(24)	7.2(3)	7.2(2)	6.200	0.135 (9)	0.030(2)	0.116 (9)	0.0255(16)
6.500	8.16(28)	7.79(25)			6.500	0.116 (9)	0.023(1)		

Tabelle 5.3: Fitparameter μ/T und α für $\beta \geq 5.40$ und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

Wie in Kapitel 3.5 spekuliert, ergibt sich in allen Fällen eine sehr gute Übereinstimmung der Abschirmmassen bei fundamentalem und adjungiertem Potential, während die Kopplungsstärken voneinander verschieden sind. Damit bestätigt sich die Vorstellung, daß für die Größe der Abschirmmasse lediglich der Gluonpropagator zwischen den beiden Quarks verantwortlich ist, der in beiden Fällen virtuelle Loops von Gluonen oder adjungierten Quarks haben kann. Die unterschiedlichen Vertizes $Gluon \leftrightarrow adj. Quark$ bzw. $Gluon \leftrightarrow fund. Quark$ beeinflussen μ nicht und schlagen sich nur in der Kopplungsstärke α nieder.

Im Vergleich zu Ergebnissen aus der $SU(3)$ fällt auf, daß μ/T hier deutlich größer ist. So erhält man in $SU(3)$ bei $T/T_C \simeq 3$ etwa $\mu/T \simeq 2.5$ [29], während in der $aQCD$ bei $\beta = 5.4$ - was ungefähr derselben Temperatur entspricht - $\mu/T \simeq 5$ herauskommt. Um diesen Umstand zu

verstehen, kann man ein Resultat der Störungstheorie in niedrigster Ordnung betrachten. Dort ergibt sich für die Abschirmmasse in einer $SU(N)$ Theorie mit N_F dynamischen Fermionen

$$\mu/T = g(T) \sqrt{\frac{1}{3}(N + t \cdot N_F)}, \quad (5.5)$$

wobei die Zahl t durch

$$\text{tr}(T_a T_b) = t \cdot \delta_{ab} \quad (5.6)$$

definiert ist. Die T_a sind dabei die Generatoren der $SU(N)$ in der für die Fermionen relevanten Darstellung. Für die Fundamentaldarstellung gilt $t = 1/2$ und für die adjungierte $t = N$. Also ergibt sich insgesamt in der $aQCD$ ($N = 3$, $N_F = 2$) eine um den Faktor $\sqrt{3}$ größere Abschirmmasse. Dieses störungstheoretische Resultat kann also zumindest qualitativ die deutlich größeren Werte für μ/T erklären.

5.2.2 Der chirale Phasenübergang

Mit der Analyse des chiralen Kondensates soll nun geklärt werden, ob und um wieviel der chirale Übergang vom Deconfinementübergang abweicht. Die Betrachtung von $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ (Abbildung 5.5) zeigt zunächst einmal eine Diskontinuität im Bereich von $\beta \simeq \beta_d \simeq 5.3$.

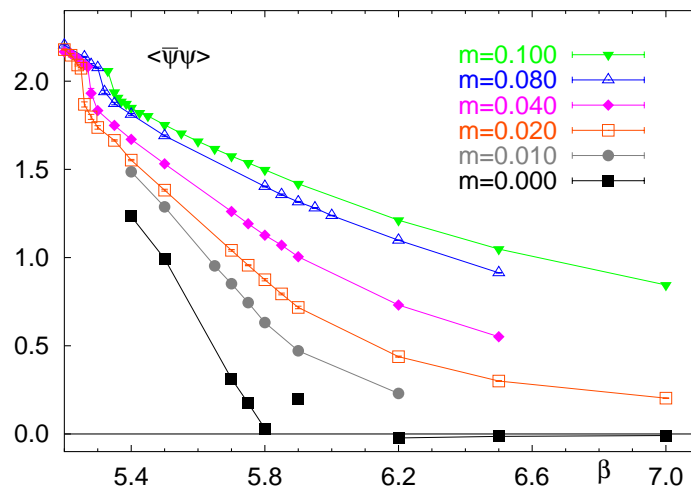


Abbildung 5.5: Chirales Kondensat für einige Massen und auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Außerdem ist (in schwarz) die Extrapolation zu $m = 0$ angegeben.

Sie ist aber nur eine Konsequenz des Phasenübergangs erster Ordnung, an dem ja zwei metastabile Phasen mit zwei unterschiedlich großen Wirkungen existieren. Für $\beta > \beta_d$ ist $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$

bei allen gemessenen Massen weiterhin endlich, wobei die Werte mit zunehmendem β abnehmen. Um festzustellen, ob die chirale Symmetrie weiterhin gebrochen ist, ist es notwendig, die gemessenen Ergebnisse zum chiralen Limes ($m \rightarrow \infty$) zu extrapolieren. Dazu ist es allerdings erforderlich, die Abhängigkeit der Größen von der Masse m zu kennen.

Die $aQCD$ mit 2 Fermionen besitzt eine $SU(4)$ Symmetrie, die für $T < T_{\text{chiral}} \equiv T_c$ spontan gebrochen ist. Die Gruppe $SU(4)$ liegt in derselben Universalitätsklasse wie das $O(6)$ Modell in drei Dimensionen, wodurch man einen Phasenübergang zweiter Ordnung erwarten kann. Dann sollte die chirale Suszeptibilität am Übergang wie $m^{-(1-1/\delta)}$ mit abnehmender Masse divergieren mit demselben kritischen Exponenten δ wie bei $O(6)$ ($\delta \approx 5$). Bei einer endlichen Quarkmasse erreicht die chirale Suszeptibilität bei einer pseudo-kritischen Kopplung β_c ein Maximum und die Höhe dieses Maximums hat dieselbe Massenabhängigkeit, $\chi_{m,\text{max}} \sim m^{-(1-1/\delta)}$. Dieses wurde – zumindest qualitativ – bei den QCD Simulationen auch beobachtet. Nicht beobachtet wurde dagegen eine Divergenz $\sim m^{-1/2}$ von χ_m , die für Temperaturen knapp unterhalb des Übergangs auftreten soll. Sie wird erwartet aufgrund der Analyse der Goldstone Moden im dreidimensionalen σ -Modell [30]. In diesem Fall würde der chirale Übergang bei genügend kleiner Masse immer noch durch einen Peak in der Suszeptibilität zu erkennen sein, da die Divergenz bei T_d mit $1 - 1/\delta \simeq 0.8$ stärker ist als darunter.

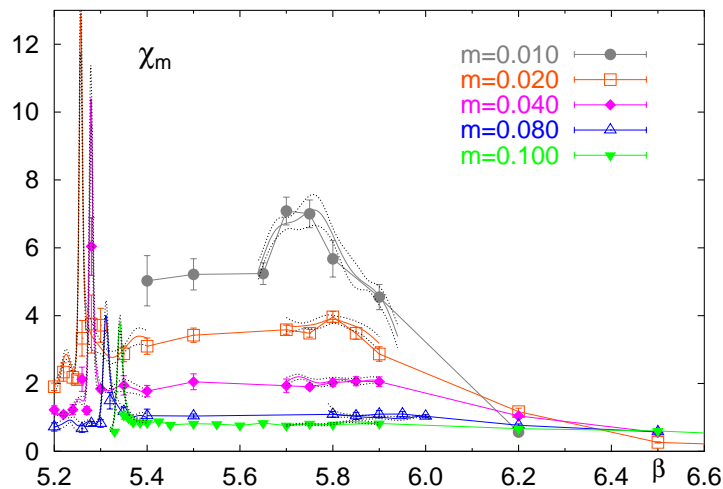


Abbildung 5.6: Suszeptibilität des chirales Kondensates für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation.

Bei Betrachtung der chiralen Suszeptibilität, Abbildung 5.6, erkennt man für jede Masse ein ausgeprägtes Maximum im Bereich von β_d . Bestimmt man die Position der Maxima aus den FS-Kurven, so erhält man genau die gleichen Resultate, die aus χ_L gewonnen wurden (siehe Tabelle 5.2). Rechts von diesen Peaks, im Bereich $5.4 \leq \beta \leq 5.65$, liegen massenabhängige Plateaus, woran sich für die beiden kleinsten Massen $m = 0.02$ und $m = 0.01$ ein weiteres Maximum anschließt. Daraus ist ersichtlich, daß der chirale Übergang bei einem $\beta_c > \beta_d$ stattfindet. Bei zwei β -Werten innerhalb der Plateaus, 5.4 und 5.5, und einem Wert im Bereich der zweiten Maxima, 5.7, läßt sich nun die vermutete Massenabhängigkeit überprüfen. In Abbildung 5.7 ist dazu χ_m gegen $1/\sqrt{m}$ aufgetragen.

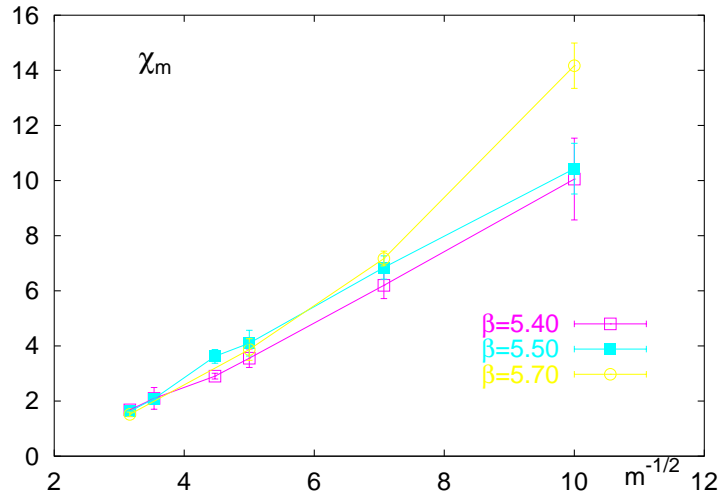


Abbildung 5.7: Suszeptibilität des chirales Kondensates für einige β werte aufgetragen gegen $1/\sqrt{m}$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

Der lineare Verlauf für $\beta = 5.4$ und $\beta = 5.5$ bestätigt die Divergenz $\sim 1/\sqrt{m}$ und der überproportionale Anstieg von χ_m bei $\beta = 5.7$ zeigt, daß man sich dem kritischen Bereich nähert, in dem die Divergenz ja stärker sein soll. Aufgrund dieser Überlegungen eignet sich folgender Ansatz zur Beschreibung des chiralen Kondensates in Abhängigkeit von der Masse:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(\beta, m) = a_0 + \bar{a}_1 m^{1/2} + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + \dots \quad (5.7)$$

Die Terme höherer Ordnung sind relevant, um auch den Verlauf bei größeren Massen beschreiben zu können. Im Bereich $\beta > 5.8$ wird der Ansatz mit $\bar{a}_1 \equiv 0$ verwendet.

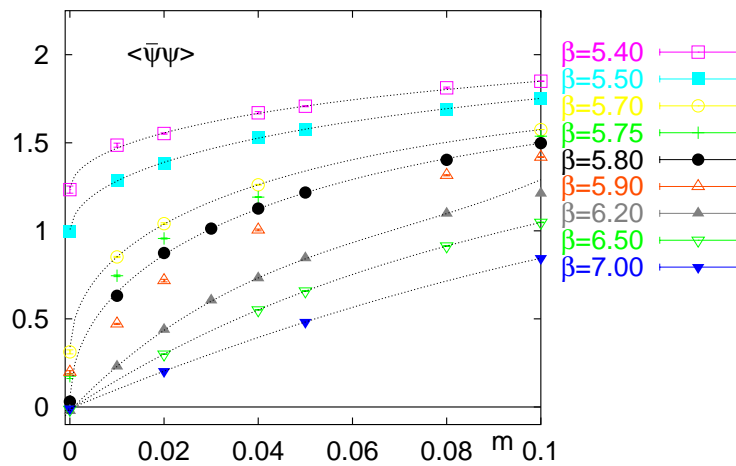


Abbildung 5.8: Chirales Kondensat für einige β 's aufgetragen gegen m auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die gestrichelten Linien sind Fits, die zur Extrapolation nach $m = 0$ dienen.

Abbildung 5.8 zeigt die Fits dieses Ansatzes an die Daten. Die jeweiligen Werte bei $m = 0$ sind in Abbildung 5.5 als schwarzes Quadrat eingezeichnet und bilden zusammen das chirale Kondensat im chiralen Limes. Daraus liest man eine kritische Kopplung von

$$\beta_c \simeq 5.8$$

ab, denn für $\beta < 5.8$ ist $\langle \bar{\psi}\psi \rangle(m = 0)$ ungleich Null während es ab $\beta = 5.8$ gleich Null bzw. mit Null verträglich ist.

Eine Ausnahme scheint der Wert bei $\beta = 5.9$ zu sein, der wider Erwarten oberhalb von Null liegt. Dies ist aber wohl auf ein technisches Problem bei der Extrapolation bzw. dem Fit zu $m = 0$ zurückzuführen. Dabei muß nämlich beachtet werden, daß sich die pseudo-kritische Kopplung $\beta_c(m)$ mit der Quarkmasse verschiebt. Sie wird mit wachsender Quarkmasse größer. Wenn man also bei einem festen β , das größer ist als $\beta_c(0)$ (der kritischen Kopplung bei verschwindender Masse), von kleinen zu großen Quarkmassen übergeht, kann es passieren, daß die pseudo-kritische Linie im $\beta - m$ Diagramm gekreuzt wird (siehe Skizze 5.9). In diesem Fall liefert die Extrapolation kein vernünftiges Resultat, da die Formel 5.7 nicht gleichzeitig das Verhalten in der chiral symmetrischen und der gebrochenen Phase beschreiben kann.

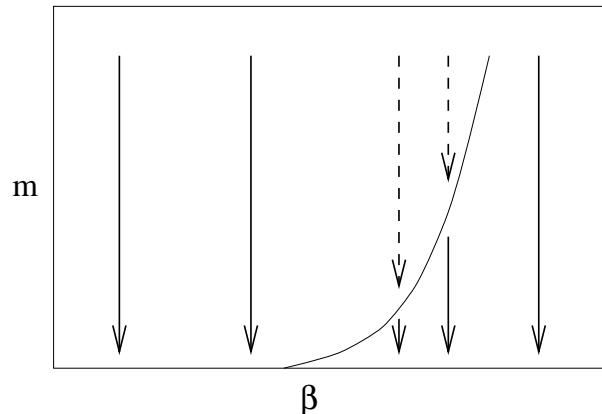


Abbildung 5.9: Skizze der pseudo-kritischen Kopplung in der $\beta - m$ Ebene. Die Kurve zeigt den ungefähren Verlauf von $\beta_c(m)$ und die Pfeile die Extrapolationen bei festem β . Im Bereich der gestrichelten Pfeile ist keine Extrapolation zu $m = 0$ möglich.

Die chirale Suszeptibilität χ_m eignet sich bei den beiden kleinsten Quarkmassen 0.02 und 0.01 auch dazu, β_c abzuschätzen, indem die Position des Maximums anhand der FS-Interpolation bestimmt wird. Die Ergebnisse (siehe Tabelle 5.4) stimmen dabei recht gut mit dem vorher aus $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ ermittelten Wert $\beta_c \simeq 5.8$ überein.

Zusammenfassend gilt also für die kritischen Kopplungen des Deconfinement und des chiralen Überganges im chiralen Limes

$$\begin{aligned} \beta_d &= 5.236 \pm 0.003 \\ \beta_c &= 5.80 \pm 0.05 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Masse	0.02	0.01
β_c	5.80 (3)	5.77 (3)

Tabelle 5.4: Kritische Kopplungen am chiralen Übergang für verschiedene Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

Mit dieser Differenz in den Kopplungen läßt sich der Quotient zwischen der Temperatur des Deconfinementüberganges, T_d , und der des chiralen Überganges, T_c , abschätzen, indem man die 2-Loop Formel der β -Funktion 3.16 benutzt:

$$T_c/T_d \approx 7.7 \pm 2.1. \quad (5.9)$$

Dieser Wert ist deutlich kleiner als das in Referenz [5] im Falle der $SU(2)$ abgeschätzte Verhältnis, $T_c/T_d = 175 \pm 50$. Auch wenn man nur die 1-Loop Formel verwendet (so wie in [5] geschehen), erhält man mit $T_c/T_d \approx 11.9 \pm 2.8$ ein geringeres Resultat.

Unter der Annahme, daß die verwendete störungstheoretische β -Funktion zur nicht-störungstheoretischen ähnlich verhält wie in der reinen $SU(3)$ Theorie, ist das Ergebnis aus Gleichung 5.9 noch um einen Faktor zwei unterschätzt.

5.2.3 Latente Wärme und Druck in der Umgebung von T_d

Latente Wärme Im vorigen Abschnitt ist bereits mehrfach darauf hingewiesen worden, daß der Deconfinement Übergang in der $aQCD$ genau wie in der $SU(3)$ Theorie erster Ordnung ist. Daher kann man aus der Diskontinuität der Wirkung, ΔS_G , am kritischen Punkt eine latente Wärme, $\Delta\epsilon$, abschätzen.

$$\frac{\Delta\epsilon}{T^4} = \frac{\Delta(\epsilon - 3p)}{T^4} = -a \frac{d\beta}{da} \cdot \left(\frac{N_\tau}{N_\sigma} \right)^3 \cdot \langle \Delta S_G \rangle \quad (5.10)$$

Dabei ist $-ad\beta/da$ die β -Funktion, die aus Gleichung 3.11 folgt, während ΔS_G sich mit Gleichung 2.5 aus der Plaquette Differenz bei β_d bestimmen läßt. Dazu wurden sowohl die Plaquette Messungen oberhalb von β_d als auch die unterhalb mit einem quadratischen bzw. linearen Ansatz nach β_d extrapoliert. Dort ergibt sich dann eine Differenz, die den Sprung der Plaquette am kritischen Punkt recht gut abschätzt. Es wäre ebenfalls möglich, die Differenz anhand der auf β_d verschobenen Plaquette Histogramme 5.3 zu bestimmen, wobei ganz ähnliche Ergebnisse herauskommen.

Die Ergebnisse für vier Massen und die lineare Extrapolation zu $m = 0$ sind in Tabelle 5.5 und Abbildung 5.10 angegeben.

Masse	ΔP
0.00	0.0336 (16)
0.02	0.0308 (13)
0.04	0.0335 (29)
0.08	0.0227 (12)
0.10	0.0220 (9)

Tabelle 5.5: Plaquette Differenzen am Deconfinement Übergang für verschiedene Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die Zahl bei $m = 0$ entstammt einer linearen Extrapolation.

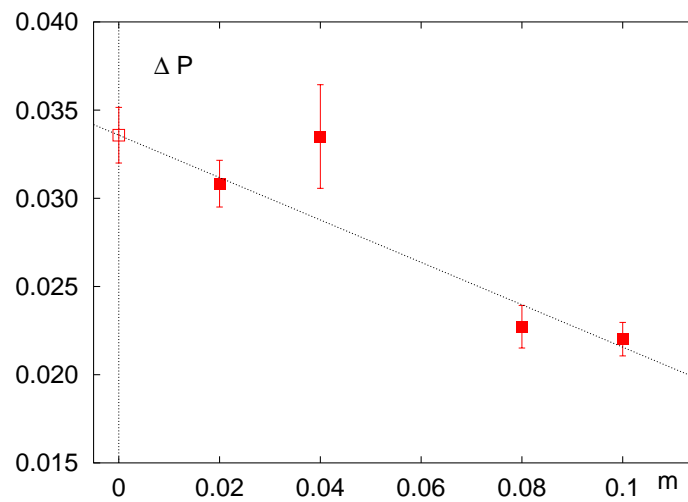


Abbildung 5.10: Plaquette Differenzen am Deconfinement Übergang für verschiedene Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die gestrichelte Linie zeigt einen linearen Fit der vier gemessenen Punkte und der Punkt bei $m = 0$ den extrapolierten Wert.

Die β -Funktion, die in Gleichung 5.10 auftritt, sollte natürlich nicht-störungstheoretisch bestimmt sein, da die asymptotische Formel im Bereich von β_d sicherlich nicht mehr richtig ist. Da die dazu notwendigen Rechnungen bei $T = 0$ jedoch noch nicht existieren, wird hier ähnlich wie in [33] für die QCD die 2-Loop Formel benutzt. Dadurch kann das Ergebnis – wie bereits bei T_c/T_d erwähnt – durchaus um einen Faktor zwei falsch (hier zu groß) sein. Es ergibt sich also für die latente Wärme

$$\frac{\Delta\epsilon}{T^4} = 12.39 \pm 0.59 \quad . \quad (5.11)$$

Um sie mit anderen Resultaten vergleichen zu können, betrachtet man die latente Wärme im Verhältnis zur Energiedichte eines freien Stefan-Boltzmann Gases von Bosonen und Fermionen. Im Falle der $aQCD$ erhält man unter Berücksichtigung der zeitlichen Gitterausdehnung $N_\tau = 4$ [34] und der Anzahl der Freiheitsgrade bei adjungierten Fermionen, $2 \cdot (N^2 - 1)(1 + 2N_F)$, $\epsilon_{SB}/T^4 = 40.50$ und damit

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{SB}} = 0.306(15) \quad , \quad (5.12)$$

eine Zahl, die der aus der $SU(3)$, $\Delta\epsilon/\epsilon_{SB} = 0.31(3)$ [33] sehr ähnlich ist. Das bedeutet, daß die latente Wärme pro Freiheitsgrad am Deconfinement Übergang etwa gleich groß ist.

Druck Nun soll der Frage nachgegangen werden, in wieweit sich das Auseinanderfallen der beiden Phasenübergänge auf thermodynamische Observablen auswirkt, die sich ja in der Regel am Deconfinement Übergang stark ändern. Bei Gittersimulationen können Druck p , Energiedichte und Entropiedichte aus der gluonischen Wirkung sowohl bei endlicher Temperatur als auch bei $T = 0$ und der (nicht-störungstheoretischen) β -Funktion ermittelt werden [31, 32]. Ohne Kenntnis der β -Funktion kann man allerdings nur den Druck bekommen, der im thermodynamischen und chiralen Limes gleich der negativen freien Energiedichte ist. Dazu muß man die Differenz von Plaquetteerwartungswerten bei $T \neq 0$ und $T = 0$ über die Kopplung β integrieren, wobei die Subtraktion der $T = 0$ Daten nur der Normierung $p(T = 0) = 0$ dient. Die Analyse von $SU(3)$ und QCD Daten hat gezeigt, daß das Verhalten des Druckes im wesentlichen vom Verhalten der Plaquette bei endlicher Temperatur bestimmt wird, während die $T = 0$ Plaquetten, die hier ja nicht verfügbar sind, kaum Einfluß nehmen.

Abbildung 5.11 zeigt die Meßdaten für die Plaquette P im Vergleich zu $SU(3)$ Daten von einem $16^3 \times 4$ Gitter. Im Bereich von $\beta \approx \beta_d (\simeq 5.3)$ ist ein Sprung zu erkennen, der auf einen großen Druckanstieg deutet. Dagegen verlaufen die Kurven in der Region des chiralen Überganges bei $\beta = 5.8$ glatt. Daraus läßt sich auch ohne genaue Analyse des Drucks schließen, daß thermodynamische Observablen praktisch nichts von der Restaurierung der chiralen Symmetrie bemerken. Das liegt vermutlich daran, daß sich dort die Zahl der relevanten, d.h. leichten, Freiheitsgrade nicht verändert.

In wiefern umgekehrt die Goldstone Teilchen, die unterhalb von T_c vorkommen müssen, den Deconfinementübergang spüren, wird im folgenden Kapitel untersucht.

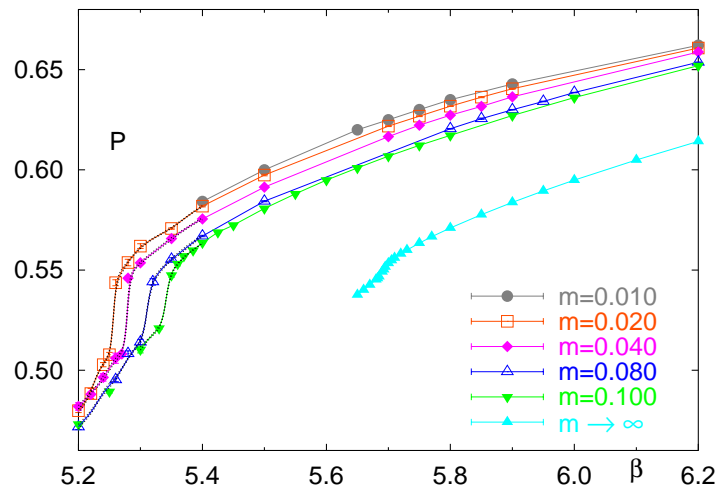


Abbildung 5.11: Plaquette Erwartungswerte für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation. Zum Vergleich sind auch die Werte einer $SU(3)$ Simulation ($m \rightarrow \infty$) bei $16^3 \times 4$ angegeben.

5.3 Goldstone Moden in der $aQCD$

In diesem Abschnitt geht es um die Meson (Screening) Massen und insbesondere um die Goldstone Teilchen, die im Falle einer spontan gebrochenen chiralen Symmetrie auftreten müssen. Eine Analyse des wirklichen Massenspektrums bei $T = 0$ ist leider nicht möglich, da keine symmetrischen Gitter betrachtet worden sind, aber auch die Screening Massen geben schon einen Einblick in das Spektrum der Theorie, da sie aus der selben Spektraldichte ermittelt werden.

Wie bereits in Kapitel 4.2 werden die räumlichen Mesonkorrelationen mit dem Ansatz

$$C(z) = A_1 \cdot \cosh(m_1(z - 8)) + (-1)^t \cdot A_2 \cdot \cosh(m_2(z - 8)) \quad (5.13)$$

gefittet. Wegen der relativ schlechten Statistik konnten die Massen der schwereren Mesonen b_1 , a_1 und ρ nicht gut genug bestimmt werden, um schlüssige Aussagen zu bekommen. Sie werden daher im weiteren nicht betrachtet.

Das auffälligste Ergebnis ist im π_2 , a_0 Kanal zu finden. Er wird vollständig vom a_0 dominiert, d.h. es ist nicht möglich, eine Masse für das Teilchen mit negativer Parität, das π_2 , zu ermitteln. Seine Amplitude ist anscheinend im Vergleich zu der vom a_0 so klein, daß es im gemeinsamen Signal untergeht. Daher wird zur endgültigen Auswertung bei den Fits dieses Kanals $A_1 \equiv 0$ gesetzt. Vergleicht man nun die Massen von Pion und a_0 (Abb. 5.12), so findet man eine auffällige Übereinstimmung, die in der QCD nicht vorkommt (vgl. Abb. 4.6).

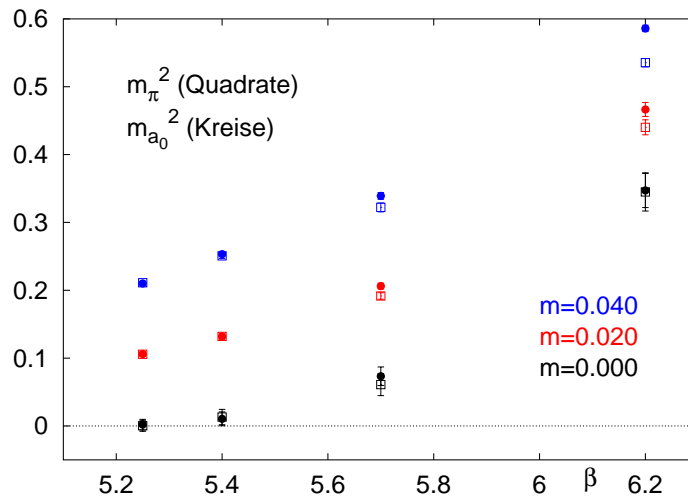


Abbildung 5.12: Pion und a_0 Masse im Quadrat, m_π^2 und $m_{a_0}^2$, für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Datenpunkte kennzeichnen die lineare Extrapolation zu $m = 0$.

Da das Quadrat der Pionmasse proportional zur Quarkmasse ist, zeigt die Abbildung 5.12 sowohl m_π^2 als auch $m_{a_0}^2$ als Funktion von β und zusätzlich eine lineare Extrapolation zu $m = 0$.

Dabei ist zu erkennen, daß die beiden Mesonmassen im chiralen Limes besonders gut übereinstimmen. Nun ist zu beachten, daß die Punkte bei $\beta = 5.25$ in der Confinementphase liegen und die bei $\beta = 5.4$ bzw. $\beta = 5.7$ in der gemischten Phase, in der die chirale Symmetrie immer noch gebrochen ist. Erst $\beta = 6.2$ liegt in der chiral symmetrischen Phase.

Die Massen m_π und m_{a_0} sind im chiralen Limes für $\beta = 5.25$ sicherlich mit Null verträglich und mit Einschränkungen auch für $\beta = 5.4$. Also ist neben dem π auch das a_0 ein Kandidat für die 9 Goldstone Bosonen, die es aufgrund der Symmetrieüberlegungen aus Kapitel 3.5 geben sollte. Die $m = 0$ Ergebnisse bei $\beta = 5.7$ sind schon nicht mehr Null, allerdings mit $m_{\pi/a_0} \simeq 0.05$ immer noch deutlich kleiner als bei $\beta = 6.2$ mit $m_{\pi/a_0} \simeq 0.35$. Nun ist eine Kopplung von 5.7 nur knapp unterhalb des chiralen Phasenüberganges, $\beta_c = 5.80(5)$, an dem die Pionmasse ja auf einen endlichen Wert ansteigen soll. Leider liegen jedoch keine Massen knapp oberhalb von β_c vor, sonst könnte man eventuell erkennen, ob dieser Massenanstieg eher sprunghaft oder eher kontinuierlich verläuft. Der größere Wert bei $\beta = 5.7$ scheint zumindest auf letzteres hinzudeuten.

In der chiral symmetrischen Phase, $\beta = 6.2$, sind beide Massen von Null verschieden, aber immer noch gleich groß. Das gilt im Gegensatz zu den beiden kleinsten β -Werten nur noch im $m \rightarrow 0$ Grenzfall, bei endlicher Quarkmasse sind die Mesonmassen im Rahmen ihrer statistischen Fehler verschieden. Unklar ist nun, ob in der $aQCD$ eine Gitter- oder Kontinuumssymmetrie existiert, an der man direkt ablesen kann, daß Pion und a_0 unabhängig von der chiralen Symmetrie entartet sein müssen. Allerdings ist diese Möglichkeit eher unwahrscheinlich, da die Amplituden in den beiden Korrelationen unterschiedlich groß sind.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird mit Hilfe von Gittersimulationen eine $SU(3)$ Eichtheorie mit zwei dynamischen Kogut-Susskind Fermionen untersucht, die sich einmal wie üblich in der fundamentalen Darstellung ($\rightarrow QCD$) und einmal in der adjungierten Darstellung ($\rightarrow aQCD$) befinden.

QCD Die Bestimmung des Phasenüberganges bei den Quarkmassen 0.2, 0.4, 0.6 und 1.0 zeigt, daß etwa ab $m = 0.6$ erste Hinweise auf einen Übergang erster Ordnung zu finden sind, so wie er im Fall der reinen $SU(3)$ Theorie ($m \rightarrow \infty$) auftritt. Gleichzeitig sieht man zum Beispiel am Verschwinden der chiralen Suszeptibilität oder an der geringeren β -Abhängigkeit der Screening Massen, daß die chiralen Eigenschaften des Systems im betrachteten Massenbereich mit zunehmendem m schnell an Bedeutung verlieren.

Zusätzlich zu den oben aufgeführten Massen wird auch bei $m = 0.02$, $m = 0.0375$ und $m = 0.075$ direkt am kritischen Punkt die String Tension, σ , und die Mesonmassen, vor allem m_π und m_ρ , bestimmt. Damit ergibt sich die Übergangstemperatur zu $T_c \approx 170$ MeV aus $\sqrt{\sigma}$ und zu $T_c \approx 165$ MeV aus m_ρ . Eine lineare Extrapolation der zwei bzw. drei kleinsten Quarkmassen liefert im chiralen Limes $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.404(8)$ bzw. $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.412(4)$. Diese Ergebnisse stehen mit früheren Rechnungen im Einklang. Selbst eine Extrapolation der Resultate von $m = 0.2$ und $m = 0.4$ liefert für $T_c/\sqrt{\sigma}$ ungefähr 0.42, eine Tatsache, die andeutet, daß auch Simulationen bei recht großen Quarkmassen zumindest bei einigen Observablen Informationen über den chiralen Limes liefern können. Der Wechsel von einem mehr chiral beeinflussten System zu einem, das eher der reinen $SU(3)$ ähnelt, scheint in etwa bei der Quarkmasse $m = 0.4$ zu geschehen. Diese Aussage wird auch von entsprechenden Untersuchungen mit drei Fermionen bestätigt, die momentan an der Universität Bielefeld betrieben werden.

aQCD Die Rechnungen dieses Promotionsprojektes verwenden erstmalig adjungierte Fermionen in Verbindung mit einer $SU(3)$ Eichgruppe, nachdem schon früher (Kogut, 1985/1987) mit $SU(2)$ vielversprechende, aber auch bei weitem weniger umfangreiche Simulationen durchgeführt worden sind.

Eine umfangreiche Analyse der Quarkmassenabhängigkeit klärt nun die Phasenstruktur der $aQCD$, in der es neben der Confinement und chiral symmetrischen Phase auch noch eine gemischte Phase bei $T_{\text{deconf}} < T < T_{\text{chiral}}$ gibt. Dort ist sowohl die globale $Z(3)$ Symmetrie als auch die globale chirale $SU(4)$ Symmetrie spontan gebrochen. Der Deconfinementübergang, im chiralen Limes bei $\beta_d = 5.236(2)$, ist stark erster Ordnung, während der chirale Übergang bei $\beta_c = 5.80(5)$ vermutlich kontinuierlich ist. Der Quotient der beiden Übergangstemperaturen läßt sich mit Hilfe der 2-Loop β -Funktion abschätzen zu $T_c/T_d \approx 7.7 \pm 2.1$.

In allen drei Phasen werden die Potentiale sowohl zwischen einem fundamentalen als auch einem adjungierten statischen Quark-Antiquarkpaar untersucht. Für $T < T_d$ verlaufen die Potentiale entsprechend dem Confinement Szenario, d.h. linearer Anstieg mit $\sqrt{\sigma}/T = 1.97(2)$ bzw. im adjungierten Fall zuerst ein linearer Anstieg und dann ein konstanter Wert, wenn der String gebrochen ist und sich zwei neue Quark/Gluon Zustände gebildet haben. In den beiden anderen Phasen, $T > T_d$, sind die Potentiale mit einem abgeschirmten Coulombpotential verträglich. Dabei hängt die Abschirmmasse nicht von der Darstellung ab. Das bestätigt die Vorstellung, daß sie durch virtuelle Loops von Gluonen oder dynamischen – also hier adjungierten – Quarks entsteht, die den Gluonpropagator zwischen den beiden Teilchen korrigieren.

Die grobe Untersuchung des Druckes deutet an, daß thermodynamische Größen nur auf den Deconfinement Phasenübergang empfindlich sind, da im Bereich von T_c keine wesentlichen Veränderungen sichtbar sind. Eine Abschätzung der latenten Wärme liefert $\frac{\Delta\epsilon}{T^4} = 12.39 \pm 0.59$ oder ausgedrückt im Verhältnis zur freien Energie eines Stefan-Boltzmann Gases $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_{SB}} = 0.306(15)$. Dieses Ergebnis entspricht dem der reinen Eichtheorie und das bedeutet, daß die latente Wärme pro Freiheitsgrad des Deconfinement Systems in etwa gleich groß ist.

Aufgrund der chiralen $SU(4)$ Symmetrie der $aQCD$, die für $T < T_c$ spontan zur $SO(4)$ gebrochen ist, erwartet man statt der üblichen drei Pionen nun neun masselose Goldstone Bosonen. Tatsächlich findet man bei der Untersuchung der Screening (Meson-) Massen mit dem a_0 ein weiteres masseloses Teilchen neben dem π . Ob die Massenentartung dieser beiden Mesonen, die auch bei endlicher Quarkmasse noch recht gut ist, auf eine Operatorsymmetrie im Kontinuum oder auf dem Gitter zurückzuführen ist, bleibt offen. Ein leichter Anstieg der Massen am oberen Ende der gemischten Phase deutet darauf hin, daß es sich bei dem chiralen um einen kontinuierlichen Übergang handelt.

Fazit und weitere Anwendungsmöglichkeiten Die $aQCD$, also die $SU(3)$ Theorie mit adjungierten Fermionen, hat sich als geeignet erwiesen, die Abhängigkeit von verschiedenen QCD Phänomenen vom Confinement oder von der chiralen Symmetrie zu untersuchen. Sie ist in vielen Punkten der normalen QCD sehr ähnlich, obwohl es auch exotische Baryonen (Fermion+Gluon) gibt, die kein Analogon in der QCD besitzen. Quantitative Übereinstimmungen in physikalischen Einheiten können erst überprüft werden, wenn bei Temperatur Null eine Skala bestimmt worden ist. Wegen der sehr rechenzeitintensiven Simulationen, die dafür nötig wären, konnte das für diese Arbeit nicht realisiert werden. Ergebnisse aus der $aQCD$ sind für die Untersuchung supersymmetrischer Theorien interessant, da die acht Fermionen als Superpartner (Gluinos) der acht Gluonen aufgefaßt werden können [35]. Die $aQCD$ mit $N_F = 1/2$ entspricht in diesem Sinne einer supersymmetrischen reinen $SU(3)$ Eichtheorie. Allerdings ist die Supersymmetrie durch die Gitterregularisierung explizit gebrochen und wird

erst im Kontinuumslimit wiederhergestellt. Speziell für die Supersymmetrie ist die Abhängigkeit des Quotienten T_c/T_d von der Zahl der Flavour interessant, da spekuliert wird, daß die beiden Übergänge bei $N_F = 1/2$ wieder zusammenfallen. Schließlich eignet sich die $aQCD$ wegen der rein reellen Fermionmatrix auch zur Einführung eines chemischen Potentials und stellt damit einen Zusammenhang zu einem Gebiet her, das momentan innerhalb der QCD Gemeinde große Aufmerksamkeit erfährt.

Anhang A

Formeln und Herleitungen des Hybrid Monte Carlo Algorithmus für die $aQCD$

A.1 Eigenschaften der adjungierten Darstellung

Sei $R = \text{span} \langle t_1, t_2, \dots, t_{N^2-1} \rangle$, der Darstellungsraum der adjungierten Darstellung der Gruppe $SU(N)$. Dann gilt der folgende

Satz 1: Sei $r \in R$, d.h. $r = \phi_i t^i$. Dann ist $\phi_i = 2 \text{tr}(t^i \cdot r)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} 2 \text{tr}(t^i \cdot r) &= 2 \text{tr}(t^i \cdot \phi_j t^j) \\ &= 2 \phi_j \text{tr}(t^i \cdot t^j) \\ &= 2 \phi_j \frac{1}{2} \delta^{ij} \\ &= \phi_i. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Auf R wirkt ein $D^{\text{adj.}}(u)$ als $r \mapsto u r u^\dagger$. Daraus folgt der nächste

Satz 2: Sei $u \in SU(N)$. Dann gilt $D^{\text{adjungiert}}(u)_{ab} = 2 \cdot \text{tr}(t_a u t_b u^\dagger)$.

Beweis:

$$\begin{aligned} D^{\text{adjungiert}}(u)_{ab} &= \langle e^a, D^{\text{adjungiert}}(u) e^b \rangle \quad \text{mit } e^a, e^b \text{ Einheitsvektoren} \\ &= \langle e^a, u t^b u^\dagger \rangle \\ &= a - \text{ter Koeffizient von } u t^b u^\dagger \\ &= 2 \text{tr}(t^a u t^b u^\dagger) \quad , \text{ nach Satz 1.} \end{aligned} \tag{A.2}$$

Satz 3: Für die Generatoren der adjungierten Darstellung gilt: $(T_k)_{ab} = -i f_{kab}$.

Beweis: Rechne infinitesimal.

$$\begin{aligned}
u^{\text{fund.}} &\simeq \mathbf{1} + i\omega_k t^k \\
\Rightarrow (U^{\text{adj.}})^{ab} &= 2\text{tr}(t^a u t^b u^\dagger) \\
&\simeq 2\text{tr}(t^a (\mathbf{1} + i\omega_k t^k) t^b (\mathbf{1} - i\omega_k t^k)) \\
&= 2\text{tr}(t^a t^b - i\omega_k (t^a t^b t^k - t^a t^k t^b) + \mathcal{O}(\omega^2)) \\
&\simeq \delta_{ab} - 2i\omega_k \text{tr}(t^a [t^b, t^k]) \\
&= \delta_{ab} + 2\omega_k f_{bkc} \text{tr}(t^a t^c) \\
&= \delta_{ab} + \omega^k f_{kab} \\
\Rightarrow U^{\text{adj.}} &\simeq \mathbf{1} + i\omega^k T_k \quad , \text{ mit } (T_k)_{ab} = -i f_{kab}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2 Vorbemerkungen zum HMC Algorithmus

A.2.1 Einführung der Variablen

Die adjungierte Darstellung der $SU(3)$ soll nur für die Fermionen benutzt werden. D.h. im rein gluonischen Teil der $aQCD$ Wirkung sind die (Link-) Variablen U 3×3 Matrizen aus $SU(3)$. Im übrigen Teil (Fermionmatrix) sind die U reelle 8×8 Matrizen aus $SU(3)$, da sie mit den Fermionen wechselwirken.

Die Pseudofermionfelder X, Φ, \dots besitzen wie bei KS-Fermionen üblich nur einen Raum- und einen Farbindex. Allerdings geht der Farbindex nun von $1, \dots, 8$ und die Felder sind **reell**.

Dies hat zur Folge, daß die Anzahl der simulierten Flavours im (exakten!) Hybrid- Φ -Algorithmus von 4 auf 2 gesenkt werden kann.

A.2.2 Notation

tr	:	3-Spur
Tr	:	8-Spur
TR	:	Raum-Spur

- Indizes i, j, k, \dots bezeichnen Raumpunkte.
- $a, b, c, \dots = 1, \dots, 8$ sind Farbindizes der adjungierten Darstellung.

A.2.3 Formalismus der adjungierten Fermionen

$$U^{(8)} = \left(\frac{1}{2} \text{tr}[\lambda_a U \lambda_b U^\dagger] \right)^{ab} \quad (\text{A.4})$$

$$U^{\dagger(8)} = \left(\frac{1}{2} \text{tr}[\lambda_b U \lambda_a U^\dagger] \right)^{ab} \quad (\text{A.5})$$

Bemerkung: $U_{ab}^{(8)}$ ist reell, denn:

$$\begin{aligned} 2U_{ab}^* &= \text{tr}[\lambda_a U \lambda_b U^\dagger]^* \\ &= \text{tr}[(\lambda_a U \lambda_b U^\dagger)^\dagger] \\ &= \text{tr}[U \lambda_b U^\dagger \lambda_a] \quad , \text{ die } \lambda\text{'s sind hermitesch} \\ &= \text{tr}[\lambda_a U \lambda_b U^\dagger] \quad , \text{ zyklisch vertauschen} \\ &= 2U_{ab} \end{aligned}$$

$$\tilde{U} = \left(\frac{1}{2} U \lambda_b U^\dagger \lambda_a \right)^{ab} \in M_{8,8}(M_{3,3}(\mathcal{C})) \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{W} = \left(\frac{1}{2} U \lambda_a U^\dagger \lambda_b \right)^{ab} \in M_{8,8}(M_{3,3}(\mathcal{C})) \quad (\text{A.7})$$

Dann gilt:

$$U = \text{tr}(\tilde{U}) \quad , \text{ 'tr' ist die 3-Spur} \quad (\text{A.8})$$

$$U^\dagger = \text{tr}(\tilde{W}) \quad (\text{A.9})$$

ACHTUNG: $(\tilde{W})^\dagger \neq \tilde{U}$!!!

Dagegen ist $\text{tr}[(\tilde{W})^\dagger] = \text{tr}[\tilde{U}]$ und dafür wird ab jetzt $\tilde{W}^\dagger \equiv \tilde{U}$ geschrieben.

$$\tilde{U}' = \left(\frac{1}{2} \lambda_a U \lambda_b U^\dagger \right)^{ab} \in M_{8,8}(M_{3,3}(\mathcal{C})) \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{W}' = \left(\frac{1}{2} \lambda_b U \lambda_a U^\dagger \right)^{ab} \in M_{8,8}(M_{3,3}(\mathcal{C})) \quad (\text{A.11})$$

Auch dann gilt:

$$U = \text{tr}(\tilde{U}') \quad (\text{A.12})$$

$$U^\dagger = \text{tr}(\tilde{W}') \quad (\text{A.13})$$

Folgerung: $\tilde{U} \equiv \tilde{U}'$ und $\tilde{W} \equiv \tilde{W}'$.

A.2.4 Fermion Matrix

$$M_{ij} = m\delta_{ij}1_8 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{i,\nu} \left(U_\nu(i)\delta_{i,j-\nu} - U_\nu^\dagger(j)\delta_{j,i-\nu} \right) = m\delta_{ij}1_8 + \frac{1}{2}D_{ij} \quad (\text{A.14})$$

$$M_{ij}^\dagger = m\delta_{ij}1_8 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{j,\nu} \left(U_\nu(i)\delta_{i,j-\nu} - U_\nu^\dagger(j)\delta_{j,i-\nu} \right) = m\delta_{ij}1_8 - \frac{1}{2}D_{ij} \quad (\text{A.15})$$

Analog zu oben definiert man:

$$\widetilde{M}_{ij} = \frac{m}{3}\delta_{ij}1_8 \otimes 1_3 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{i,\nu} \left(\widetilde{U}_\nu(i)\delta_{i,j-\nu} - \widetilde{W}_\nu(j)\delta_{j,i-\nu} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\widetilde{M}_{ij}^\dagger = \frac{m}{3}\delta_{ij}1_8 \otimes 1_3 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{j,\nu} \left(\widetilde{U}_\nu(i)\delta_{i,j-\nu} - \widetilde{W}_\nu(j)\delta_{j,i-\nu} \right) \quad (\text{A.17})$$

Entsprechend sind \widetilde{M}'_{ij} und \widetilde{M}'_{ij} definiert, wobei jeweils statt \widetilde{U} und \widetilde{W} die Matrizen \widetilde{U}' und \widetilde{W}' benutzt werden.

Damit gelten die folgenden Beziehungen:

$$M_{ij} = \text{tr}(\widetilde{M}_{ij}) = \text{tr}(\widetilde{M}'_{ij}) \quad (\text{A.18})$$

$$M_{ij}^\dagger = \text{tr}(\widetilde{M}_{ij}^\dagger) = \text{tr}(\widetilde{M}'_{ij}^\dagger) \quad (\text{A.19})$$

A.3 Der HMC Algorithmus

Die effektive Wirkung für QCD mit 4 Flavour KS-Fermionen lautet

$$S_{\text{eff}}(\{U\}, \{\Phi\}) = S_W(\{U\}) + S_F(\{U\}, \{\Phi\}) \quad (\text{A.20})$$

mit

$$S_F(\{U\}, \{\Phi\}) = \Phi^* (M^\dagger M)^{-1} \Phi \quad (\text{A.21})$$

Um die U -Felder zu erneuern, führt man kanonisch konjugierte Impulse H ein und benutzt die Molekulardynamik (MD).

Die neue Zustandsumme lautet

$$Z = \int [\delta U][\delta \Phi][\delta H] \exp(-\mathcal{H}) \quad (\text{A.22})$$

mit $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{l,\mu} \text{tr} H_\mu(l)^2 + S_{\text{eff}}$.

Die Entwicklung des U Feldes ist dann (der Punkt steht für $\frac{d}{dt}$)

$$\dot{U}_\mu(l) = iH_\mu(l)U_\mu(l) \quad (\text{A.23})$$

Die "zeitliche" Entwicklung von H muß nun so berechnet werden, daß \mathcal{H} konstant bleibt. Also:

$$0 = \dot{\mathcal{H}} \quad (\text{A.24})$$

$$= \sum_{l,\mu} \text{tr} \dot{H}_\mu(l) H_\mu(l) + \dot{S}_W + \dot{S}_F \quad (\text{A.25})$$

Die folgenden Rechnungen werden zeigen, daß man diese Bedingung umformulieren kann zu

$$0 = \sum_{l,\mu} \text{tr} \left\{ H_\mu(l) \left[\dot{H}_\mu(l) + iF_\mu(l) \right] \right\} \quad (\text{A.26})$$

mit

$$F_\mu(l) = G_\mu(l) - G_\mu^\dagger(l). \quad (\text{A.27})$$

F und G lassen sich jeweils in einen Gluon- und einen Fermionanteil zerlegen:

$$F_\mu(l) = F_\mu^{\text{Gluon}}(l) + F_\mu^{\text{Fermion}}(l) \quad (\text{A.28})$$

$$G_\mu(l) = G_\mu^{\text{Gluon}}(l) + G_\mu^{\text{Fermion}}(l). \quad (\text{A.29})$$

Dann folgt wie in [10] beschrieben:

$$i\dot{H}_\mu(l) = [2G_\mu(l)]_{TA} \quad (\text{A.30})$$

$$= G_\mu(l) - G_\mu^\dagger(l) - \frac{1}{3} \text{tr} [G_\mu(l) - G_\mu^\dagger(l)] \quad (\text{A.31})$$

A.3.1 Gluonischer Anteil

Aus $\dot{S}_W(\{U\}) = 0$ folgt leicht

$$G'_\mu(l) = -\frac{\beta}{6}U_\mu(l)V_\mu(l) \quad (\text{A.32})$$

wobei V der zu U gehörige Staple ist, also das Produkt der drei Links, die zusammen mit U eine Plaquette bilden.

A.3.2 Fermionischer Anteil

Die (Pseudo)Fermionwirkung ist gegeben durch

$$S_F = -\Phi^* \cdot (M^\dagger M)^{-1} \cdot \Phi \quad \in \mathcal{C}. \quad (\text{A.33})$$

Ableitung nach der Zeit liefert:

$$\dot{S}_F = -\Phi^* (M^\dagger M)^{-1} \cdot \frac{d}{dt}(M^\dagger M) \cdot (M^\dagger M)^{-1} \Phi \quad (\text{A.34})$$

$$= -X^* \cdot \frac{d}{dt}(M^\dagger M) \cdot X \quad (\text{A.35})$$

Dabei gilt $X = (M^\dagger M)^{-1} \phi$ und Φ, Φ^*, X, X^* sind Vektoren im Ortsraum und im 8-Farbraum.

$$\dot{S}_F = -X^* \cdot \frac{d}{dt}(M^\dagger M) \cdot X \quad (\text{A.36})$$

$$= -X^* \left\{ \frac{dM^\dagger}{dt} M + M^\dagger \frac{dM}{dt} \right\} X \quad (\text{A.37})$$

$$= -\text{tr} \left[X^* \left\{ \frac{d\widetilde{M}^\dagger}{dt} M + M^\dagger \frac{d\widetilde{M}}{dt} \right\} X \right] \quad (\text{A.38})$$

$$= -\sum_{\mu,l} \text{tr} \left[X^* \left\{ \dot{U}_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M + \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu^\dagger(l)} \dot{U}_\mu^\dagger(l) \cdot M \right. \right. \\ \left. \left. + M^\dagger \cdot \dot{U}_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} + M^\dagger \cdot \frac{\partial \widetilde{M}'}{\partial U_\mu^\dagger(l)} \dot{U}_\mu^\dagger(l) \right\} X \right] \quad (\text{A.39})$$

Die \widetilde{M} , \widetilde{M}' , \widetilde{M}^\dagger und \widetilde{M}'^\dagger wurden gerade so gewählt, daß jeweils die inneren Ableitungen an der richtigen Stelle stehen. Es kann gezeigt werden, daß sich die 4 Summanden durch nur 2 (plus deren hermitesch konjugiertes) ersetzt werden können. Sei

$$S_1 = \dot{U} \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U} \quad (\text{A.40})$$

$$S_2 = \frac{\partial \widetilde{M}'^\dagger}{\partial U^\dagger} \dot{U}^\dagger \quad (\text{A.41})$$

$$S_3 = \dot{U} \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U} \quad (\text{A.42})$$

$$S_4 = \frac{\partial \widetilde{M}'}{\partial U^\dagger} \dot{U}^\dagger \quad (\text{A.43})$$

Dann gilt

$$S_1^\dagger = S_4 \quad \text{und} \quad S_3^\dagger = S_2 \quad (\text{A.44})$$

Nebenrechnung:

$$S_2 = \frac{\partial}{\partial U_\mu^\dagger(l)} (M^\dagger) \cdot \dot{U}_\mu^\dagger(l) = \frac{\partial}{\partial U_\mu^\dagger(l)} \left(-\frac{1}{2} D \right) \cdot \dot{U}_\mu^\dagger(l) \quad (\text{A.45})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial U_\mu^\dagger(l)} \left[-\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{j,\nu} \left(\widetilde{U}'_\nu(i) \delta_{i,j-\nu} - \widetilde{W}'_\nu(j) \delta_{j,i-\nu} \right) \right] \cdot \dot{U}_\mu^\dagger(l) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{j,\nu} \left[\left(\frac{1}{2} \lambda_a U_\nu(i) \lambda_b \dot{U}_\mu^\dagger(l) \right)^{ab} \delta_{i,j-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{il} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \lambda_b U_\nu(j) \lambda_a \dot{U}_\mu^\dagger(l) \right)^{ab} \delta_{j,i-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jl} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

$$S_3 = \dot{U}_\mu(l) \cdot \frac{\partial}{\partial U_\mu(l)} (M) = \dot{U}_\mu(l) \cdot \frac{\partial}{\partial U_\mu(l)} \left(\frac{1}{2} D \right) \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} &= \dot{U}_\mu(l) \cdot \frac{\partial}{\partial U_\mu(l)} \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{i,\nu} \left(\widetilde{U}_\nu(i) \delta_{i,j-\nu} - \widetilde{W}_\nu(j) \delta_{j,i-\nu} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{i,\nu} \left[\left(\frac{1}{2} \dot{U}_\mu(l) \lambda_b U_\nu^\dagger(i) \lambda_a \right)^{ab} \delta_{i,j-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{il} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \dot{U}_\mu(l) \lambda_a U_\nu^\dagger(j) \lambda_b \right)^{ab} \delta_{j,i-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jl} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Berechne nun S_3^\dagger nach den folgenden Regeln:

1. Hat eine Matrix Matrizen als Einträge, so spiegele sie, d.h. vertausche die Indizes, und wende dann die Regeln auf die Einträge an.
2. Hat eine Matrix nur noch (komplexe) Zahlen als Einträge, so konjugiere sie hermitesch (wie üblich).

Für S_3^\dagger bedeutet das: vertausche $i \leftrightarrow j$, vertausche $a \leftrightarrow b$ und konjugiere die 3×3 -Matrizen.

$$\begin{aligned}
S_3^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{j,\nu} \left[\left(\frac{1}{2} \lambda_b U_\nu(j) \lambda_a \dot{U}_\mu^\dagger(l) \right)^{ab} \delta_{i,j-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{il} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \lambda_a U_\nu(i) \lambda_b \dot{U}_\mu^\dagger(l) \right)^{ab} \delta_{i,j-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{il} \right] \\
&= S_2
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\dot{S}_F &= - \sum_{\mu,l} \text{tr} \left[X^* \left\{ \dot{U}_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M + M^\dagger \cdot \dot{U}_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} + \text{h.c.} \right\} X \right] \\
&= - \sum_{\mu,l} \text{tr} \text{Tr} \text{TR} \left[\dot{U}_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M \cdot P + \dot{U}_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \cdot P \cdot M^\dagger + \text{h.c.} \right]
\end{aligned} \tag{A.50}$$

mit $P_{ia,jb} = X_{ia} X_{jb}^*$ und $P = P^\dagger$.

$$\begin{aligned}
\dot{S}_F &= - \sum_{\mu,l} \text{tr} \left\{ i H_\mu(l) \cdot \text{Tr} \text{TR} \left[U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M \cdot P + U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \cdot P \cdot M^\dagger - \text{h.c.} \right] \right\} \\
&= - \sum_{\mu,l} \text{tr} \left\{ i H_\mu(l) \cdot \left[\text{Tr} \text{TR} \left\{ U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M \cdot P + U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \cdot P \cdot M^\dagger \right\} - \text{h.c.} \right] \right\} \\
&= \sum_{\mu,l} \text{tr} \left\{ i H_\mu(l) \cdot F_\mu^{\text{Fermion}}(l) \right\}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Aus $F_\mu^{Fermion}(l) = G_\mu^{Fermion}(l) - G_\mu^{Fermion}(l)^\dagger$ (s.o.) folgt

$$G_\mu^{Fermion}(l) = -\text{Tr TR} \left\{ U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M \cdot P + U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \cdot P \cdot M^\dagger \right\} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} &= -\text{Tr} \left[\text{TR} \left\{ U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M \cdot P \right\} + \text{TR} \left\{ U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \cdot P \cdot M^\dagger \right\} \right] \\ &= -\text{Tr} [G_1 + G_2] \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Sei

$$G_1 = \text{TR} \left\{ U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \cdot M \cdot P \right\} = \text{TR} \{ \hat{S}_1 \cdot M \cdot P \} \quad (\text{A.54})$$

$$\hat{S}_1 = U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}^\dagger}{\partial U_\mu(l)} \quad (\text{A.55})$$

$$G_2 = \text{TR} \left\{ U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \cdot P \cdot M^\dagger \right\} = \text{TR} \{ \hat{S}_2 \cdot P \cdot M^\dagger \} \quad (\text{A.56})$$

$$\hat{S}_2 = U_\mu(l) \frac{\partial \widetilde{M}}{\partial U_\mu(l)} \quad (\text{A.57})$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \left(-\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{j,\nu} \left[\left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_b U_\nu^\dagger(i) \lambda_a \right)^{ab} \delta_{i,j-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{il} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_a U_\nu^\dagger(j) \lambda_b \right)^{ab} \delta_{j,i-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jl} \right] \right)^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{1}{2} \eta_{j,\mu} \left[\left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_b U_\mu^\dagger(i) \lambda_a \right)^{ab} \delta_{i,j-\mu} \delta_{il} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_a U_\mu^\dagger(j) \lambda_b \right)^{ab} \delta_{j,i-\mu} \delta_{jl} \right] \right)^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

sowie

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 &= \left(\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \eta_{i,\nu} \left[\left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_b U_\nu^\dagger(i) \lambda_a \right)^{ab} \delta_{i,j-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{il} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_a U_\nu^\dagger(j) \lambda_b \right)^{ab} \delta_{j,i-\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jl} \right] \right)^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} \eta_{i,\mu} \left[\left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_b U_\mu^\dagger(i) \lambda_a \right)^{ab} \delta_{i,j-\mu} \delta_{il} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda_a U_\mu^\dagger(j) \lambda_b \right)^{ab} \delta_{j,i-\mu} \delta_{jl} \right] \right)^{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Schließlich erhält man nach Einsetzen und Ausführen der Spur (TR):

$$\begin{aligned}
G_1 = & \frac{1}{4} \sum_{\nu=0}^3 -\eta_{l+\mu,\mu} \eta_{l+\mu,\nu} \quad \tilde{U}_\mu(l) \quad U_\nu(l+\mu) \quad P_{l+\mu+\nu,l} \\
& + \eta_{l+\mu,\mu} \eta_{l+\mu,\nu} \quad \tilde{U}_\mu(l) \quad U_\nu^\dagger(l+\mu-\nu) \quad P_{l+\mu-\nu,l} \\
& + \eta_{l,\mu} \eta_{l,\nu} \quad \widetilde{W}_\mu(l) \quad U_\nu(l) \quad P_{l+\nu,l+\mu} \\
& - \eta_{l,\mu} \eta_{l,\nu} \quad \widetilde{W}_\mu(l) \quad U_\nu^\dagger(l-\nu) \quad P_{l-\nu,l+\mu}
\end{aligned} \tag{A.62}$$

und

$$\begin{aligned}
G_2 = & \frac{1}{4} \sum_{\nu=0}^3 -\eta_{l,\mu} \eta_{l,\nu} \quad \tilde{U}_\mu(l) \quad P_{l+\mu,l-\nu} \quad U_\nu(l-\nu) \\
& + \eta_{l,\mu} \eta_{l,\nu} \quad \tilde{U}_\mu(l) \quad P_{l+\mu,l+\nu} \quad U_\nu^\dagger(l) \\
& + \eta_{l+\mu,\mu} \eta_{l+\mu,\nu} \quad \widetilde{W}_\mu(l) \quad P_{l,l+\mu-\nu} \quad U_\nu(l+\mu-\nu) \\
& - \eta_{l+\mu,\mu} \eta_{l+\mu,\nu} \quad \widetilde{W}_\mu(l) \quad P_{l,l+\mu+\nu} \quad U_\nu^\dagger(l+\mu)
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Bisher hat man also

$$G_\mu^{Fermion}(l) = -\text{Tr} [G_1 + G_2]. \tag{A.64}$$

Im folgenden werden die beiden Fälle l gerade und l ungerade getrennt behandelt, da jeweils nur 2 der 4 Terme in den G_n von Null verschieden sind. Außerdem wird gezeigt, daß in jedem Fall $G_1 = G_2$ gilt.

l gerade, erster Term

$$\begin{aligned}
-4 \text{Tr} G_1 &= \eta_{l+\mu,\mu} \text{Tr} \left\{ \tilde{U}_\mu(l) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l+\mu,\nu} \left(U_\nu(l+\mu) P_{l+\mu+\nu,l} - U_\nu^\dagger(l+\mu-\nu) P_{l+\mu-\nu,l} \right) \right] \right\} \\
&= \eta_{l+\mu,\mu} \text{Tr} \left\{ \tilde{U}_\mu(l) \cdot Z_\mu(l) \right\}
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Z ist eine reelle 8×8 Matrix.

$$Z_\mu(l) = \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l+\mu,\nu} \left(U_\nu(l+\mu) X_{l+\mu+\nu} - U_\nu^\dagger(l+\mu-\nu) X_{l+\mu-\nu} \right) \right] \otimes X_l^* \quad (\text{A.66})$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern läßt sich auch schreiben als Produkt des nichtdiagonalen Anteils D_{oe} der Fermion Matrix M mit dem Vektor X .

$$Z_\mu(l) = [D_{oe} \cdot X](l+\mu) \otimes X_l^* \quad (\text{A.67})$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} -4 \operatorname{Tr} G_1 &= \eta_{l+\mu,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{U}_\mu(l) \cdot Z_\mu(l) \right\} \\ &= \eta_{l+\mu,\mu} \sum_{a,b=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^b U_\mu^\dagger(l) \lambda^a \cdot Z_\mu(l)^{ba} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

1 gerade, zweiter Term

$$\begin{aligned} -4 \operatorname{Tr} G_2 &= \eta_{l+\mu,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{W}_\mu(l) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l+\mu,\nu} \left(P_{l,l+\mu+\nu} U_\nu^\dagger(l+\mu) - P_{l,l+\mu-\nu} U_\nu(l+\mu-\nu) \right) \right] \right\} \\ &= \eta_{l+\mu,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{W}_\mu(l) \cdot Z'_\mu(l) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Z' ist eine reelle 8×8 Matrix.

$$\begin{aligned} Z'_\mu(l) &= X_l \otimes \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l+\mu,\nu} \left(X_{l+\mu+\nu}^* U_\nu^\dagger(l+\mu) - X_{l+\mu-\nu}^* U_\nu(l+\mu-\nu) \right) \right] \\ &= X_l \otimes \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l+\mu,\nu} \left(U_\nu(l+\mu) X_{l+\mu+\nu} - U_\nu^\dagger(l+\mu-\nu) X_{l+\mu-\nu} \right) \right]^t \\ &= X_l \otimes \{ [D_{oe} \cdot X](l+\mu) \}^t \\ &= Z_\mu(l)^t \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Man erhält also auch hier

$$\begin{aligned} -4 \operatorname{Tr} G_2 &= \eta_{l+\mu,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{W}_\mu(l) \cdot Z'_\mu(l) \right\} \\ &= \eta_{l+\mu,\mu} \sum_{a,b=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^a U_\mu^\dagger(l) \lambda^b \cdot Z'_\mu(l)^{ba} \\ &= \eta_{l+\mu,\mu} \sum_{a,b=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^a U_\mu^\dagger(l) \lambda^b \cdot Z_\mu(l)^{ab} \\ &= \eta_{l+\mu,\mu} \sum_{b,a=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^b U_\mu^\dagger(l) \lambda^a \cdot Z_\mu(l)^{ba} \\ &= -4 \operatorname{Tr} G_1 \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

Damit folgt insgesamt für l gerade

$$\begin{aligned}
G^{Fermion}_\mu(l) &= -\text{Tr} [G_1 + G_2] \\
&= -2 \text{Tr} G_1 \\
&= \frac{1}{4} \eta_{l,\mu} \sum_{a,b=1}^8 U_\mu(l) \lambda^b U_\mu^\dagger(l) \lambda^a \cdot Z_\mu(l)^{ba} \\
&= \frac{1}{4} \eta_{l,\mu} \cdot \text{Tr} [2\tilde{U}_\mu(l) Z_\mu(l)]
\end{aligned} \tag{A.72}$$

l ungerade, erster Term

$$\begin{aligned}
-4 \text{Tr} G_1 &= \eta_{l,\mu} \text{Tr} \left\{ \tilde{W}_\mu(l) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l,\nu} (U_\nu^\dagger(l-\nu) P_{l-\nu,l+\mu} - U_\nu(l) P_{l+\nu,l+\mu}) \right] \right\} \\
&= -\eta_{l,\mu} \text{Tr} \left\{ \tilde{W}_\mu(l) \cdot Z_\mu(l) \right\}
\end{aligned} \tag{A.73}$$

Z ist eine reelle 8×8 Matrix (verschieden von der im letzten Paragraph definierten).

$$Z_\mu(l) = \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l,\nu} (U_\nu(l) X_{l+\nu} - U_\nu^\dagger(l-\nu) X_{l-\nu}) \right] \otimes X_{l+\mu}^* \tag{A.74}$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern läßt sich auch schreiben als Produkt des nichtdiagonalen Anteils D_{oe} der Fermion Matrix M mit dem Vektor X .

$$Z_\mu(l) = [D_{oe} \cdot X](l) \otimes X_{l+\mu}^* \tag{A.75}$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}
-4 \text{Tr} G_1 &= -\eta_{l,\mu} \text{Tr} \left\{ \tilde{W}_\mu(l) \cdot Z_\mu(l) \right\} \\
&= -\eta_{l,\mu} \sum_{a,b=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^a U_\mu^\dagger(l) \lambda^b \cdot Z_\mu(l)^{ba}
\end{aligned} \tag{A.76}$$

l ungerade, zweiter Term

$$\begin{aligned}
-4 \operatorname{Tr} G_2 &= \eta_{l,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{U}_\mu(l) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l,\nu} \left(P_{l+\mu, l-\nu} U_\nu(l-\nu) - P_{l+\mu, l+\nu} U_\nu^\dagger(l) \right) \right] \right\} \\
&= -\eta_{l,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{U}_\mu(l) \cdot Z'_\mu(l) \right\}
\end{aligned} \tag{A.77}$$

Z' ist eine reelle 8×8 Matrix.

$$\begin{aligned}
Z'_\mu(l) &= X_{l+\mu} \otimes \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l,\nu} \left(X_{l+\nu}^* U_\nu^\dagger(l) - X_{l-\nu}^* U_\nu(l-\nu) \right) \right] \\
&= X_{l+\mu} \otimes \left[\sum_{\nu=0}^3 \eta_{l,\nu} \left(U_\nu(l) X_{l+\nu} - U_\nu^\dagger(l-\nu) X_{l-\nu} \right) \right]^t \\
&= X_{l+\mu} \otimes \{ [D_{oe} \cdot X](l) \}^t \\
&= Z_\mu(l)^t
\end{aligned} \tag{A.78}$$

Man erhalt also auch hier

$$\begin{aligned}
-4 \operatorname{Tr} G_2 &= -\eta_{l,\mu} \operatorname{Tr} \left\{ \tilde{U}_\mu(l) \cdot Z'_\mu(l) \right\} \\
&= -\eta_{l,\mu} \sum_{a,b=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^b U_\mu^\dagger(l) \lambda^a \cdot Z'_\mu(l)^{ba} \\
&= -\eta_{l,\mu} \sum_{a,b=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^b U_\mu^\dagger(l) \lambda^a \cdot Z_\mu(l)^{ab} \\
&= -\eta_{l,\mu} \sum_{b,a=1}^8 \frac{1}{2} U_\mu(l) \lambda^a U_\mu^\dagger(l) \lambda^b \cdot Z_\mu(l)^{ba} \\
&= -4 \operatorname{Tr} G_1
\end{aligned} \tag{A.79}$$

Damit folgt insgesamt fur l ungerade

$$\begin{aligned}
G^{\text{Fermion}}_\mu(l) &= -\operatorname{Tr} [G_1 + G_2] \\
&= -2 \operatorname{Tr} G_1 \\
&= -\frac{1}{4} \eta_{l,\mu} \sum_{a,b=1}^8 U_\mu(l) \lambda^b U_\mu^\dagger(l) \lambda^a \cdot Z_\mu(l)^{ab} \\
&= -\frac{1}{4} \eta_{l,\mu} \operatorname{Tr} [2\tilde{U}(l) Z_\mu^t(l)]
\end{aligned} \tag{A.80}$$

Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
G_\mu(l) &= G_\mu^{Gluon}(l) + G_\mu^{Fermion}(l) \\
&= -\frac{\beta}{6} U_\mu(l) \cdot V_\mu(l) + \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{4} \eta_{l,\mu} \text{Tr} [2\tilde{U}(l) Z_\mu(l)] \quad | \quad 1 \text{ gerade} \\ -\frac{1}{4} \eta_{l,\mu} \text{Tr} [2\tilde{U}(l) Z_\mu^t(l)] \quad | \quad 1 \text{ ungerade} \end{array} \right\} \quad (\text{A.81})
\end{aligned}$$

Anhang B

Tabellen der QCD

B.1 Einfache Observablen

Unter dem Begriff *einfache Observablen* sind die Erwartungswerte der Plaquette, des Polyakov Loops, des chiralen Kondensates und der Suszeptibilität der beiden letztgenannten zusammengefaßt.

B.1.1 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter

β	Plaquette	Polyakov Loop	Chirales Kondensat
5.430	0.5157(5)	0.060(4)	0.4934(15)
5.440	0.5205(6)	0.079(4)	0.4807(19)
5.445	0.5239(3)	0.097(2)	0.4706(10)
5.450	0.5265(3)	0.108(2)	0.4636(10)
5.455	0.5295(6)	0.125(4)	0.4533(30)
5.460	0.5321(3)	0.136(2)	0.4473(9)
5.470	0.5364(3)	0.158(2)	0.4352(10)

Tabelle B.1: Plaquette Erwartungswert, Polyakov Loop und chirales Kondensat für $m = 0.20$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	χ_L	χ_m
5.430	0.67 (8)	0.28 (3)
5.440	1.09(12)	0.45 (4)
5.445	1.22(21)	0.53 (9)
5.450	0.98 (6)	0.42 (3)
5.455	1.14(25)	0.60(21)
5.460	0.89(14)	0.40 (8)
5.470	0.47 (7)	0.20 (5)

Tabelle B.2: Suszeptibilitäten vom Polyakov Loop und vom chiralen Kondensat für $m = 0.20$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	Plaquette	Polyakov Loop	Chirales Kondensat
5.500	0.5233(1)	0.037(2)	0.5910(3)
5.510	0.5278(2)	0.059(3)	0.5846(5)
5.520	0.5321(6)	0.081(6)	0.5782(12)
5.530	0.5369(3)	0.111(3)	0.5707(5)
5.540	0.5414(1)	0.137(1)	0.5638(2)
5.550	0.5445(3)	0.152(2)	0.5594(5)

Tabelle B.3: Plaquette Erwartungswert, Polyakov Loop und chirales Kondensat für $m = 0.40$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	χ_L	χ_m
5.500	0.73 (8)	0.062 (7)
5.510	1.01(17)	0.083(13)
5.520	2.43(21)	0.171(21)
5.530	1.31(12)	0.110(10)
5.540	0.73(12)	0.066 (8)
5.550	0.63(11)	0.065(11)

Tabelle B.4: Suszeptibilitäten vom Polyakov Loop und vom chiralen Kondensat für $m = 0.40$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	Plaquette	Polyakov Loop	Chirales Kondensat
5.570	0.5324(3)	0.045(3)	0.6288(3)
5.580	0.5360(3)	0.067(4)	0.6256(4)
5.590	0.5418(3)	0.115(4)	0.6198(3)
5.600	0.5454(1)	0.134(2)	0.6167(2)
5.620	0.5504(2)	0.155(3)	0.6128(3)

Tabelle B.5: Plaquette Erwartungswert, Polyakov Loop und chirales Kondensat für $m = 0.60$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	χ_L	χ_m
5.570	1.5(3)	0.033(6)
5.580	3.0(5)	0.056(7)
5.590	1.4(3)	0.034(4)
5.600	1.3(2)	0.032(3)
5.620	1.0(3)	0.026(5)

Tabelle B.6: Suszeptibilitäten vom Polyakov Loop und vom chiralen Kondensat für $m = 0.60$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	Plaquette	Polyakov Loop	Chirales Kondensat
5.620	0.53696(5)	0.023(2)	0.63769(5)
5.630	0.53962(24)	0.035(6)	0.63684(16)
5.635	0.54143(30)	0.046(7)	0.63627(21)
5.640	0.54423(35)	0.081(7)	0.63486(22)
5.650	0.54870(26)	0.123(4)	0.63310(13)

Tabelle B.7: Plaquette Erwartungswert, Polyakov Loop und chirales Kondensat für $m = 1.00$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	χ_L	χ_m
5.620	0.6(1)	0.0052 (3)
5.630	1.5(3)	0.0070 (4)
5.635	2.7(2)	0.0091 (8)
5.640	3.4(6)	0.0089(17)
5.650	1.7(3)	0.0079 (9)

Tabelle B.8: Suszeptibilitäten vom Polyakov Loop und vom chiralen Kondensat für $m = 1.00$ bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

B.2 Meson Massen

B.2.1 Screening Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter

β	m_π	$m_\rho(b)$	m_{b_1}	$m_\rho(a)$	m_{a_1}	m_{π_2}	m_{a_0}
5.430	1.122(2)	1.595(7)	1.99(35)	1.728(18)	1.95(5)	1.64(7)	1.678(25)
5.440	1.134(3)	1.578(4)	2.10(17)	1.684 (7)	1.95(3)	1.62(5)	1.671(16)
5.445	1.144(4)	1.582(4)	1.89(12)	1.705(12)	1.89(3)	1.64(5)	1.624(14)
5.450	1.156(3)	1.592(4)	1.97(11)	1.688(11)	1.95(3)	1.63(5)	1.583(12)
5.455	1.168(6)	1.596(4)	1.96(10)	1.690(12)	1.88(2)	1.65(7)	1.549(11)
5.460	1.174(2)	1.587(2)	2.07 (6)	1.706 (9)	1.85(2)	1.60(2)	1.552 (4)
5.470	1.190(3)	1.593(6)	2.00(13)	1.721(12)	1.80(2)	1.62(6)	1.544 (7)

Tabelle B.9: Meson Massen für alle β bei $m = 0.20$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	m_π	$m_\rho(b)$	m_{b_1}	$m_\rho(a)$	m_{a_1}	m_{π_2}	m_{a_0}
5.510	1.510(1)	1.807(2)	2.44(13)	1.914(4)	2.19(3)	1.906(16)	2.033(18)
5.520	1.515(2)	1.807(2)	2.37(14)	1.914(5)	2.20(3)	1.896(13)	2.012(13)
5.530	1.526(1)	1.813(1)	2.40 (9)	1.916(4)	2.18(2)	1.929(12)	1.958 (9)
5.540	1.534(1)	1.816(2)	2.32(12)	1.925(5)	2.15(2)	1.904(10)	1.952 (6)
5.550	1.538(2)	1.814(2)	2.37(10)	1.926(5)	2.13(2)	1.936(14)	1.933 (7)

Tabelle B.10: Meson Massen für alle β bei $m = 0.40$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	m_π	$m_\rho(b)$	m_{b_1}	$m_\rho(a)$	m_{a_1}	m_{π_2}	m_{a_0}
5.570	1.7972(16)	2.0156(19)	2.67(20)	2.116(3)	2.51(4)	2.127(9)	2.338(22)
5.580	1.8011 (7)	2.0181 (8)	2.67 (6)	2.120(2)	2.49(3)	2.144(5)	2.322(10)
5.590	1.8083(13)	2.0216(13)	2.49 (6)	2.124(2)	2.37(2)	2.134(6)	2.287(12)
5.600	1.8136 (9)	2.0244(15)	2.51 (9)	2.128(3)	2.37(2)	2.144(9)	2.275(14)
5.620	1.8170(14)	2.0192(20)	2.59(13)	2.116(3)	2.39(2)	2.141(7)	2.249(10)

Tabelle B.11: Meson Massen für alle β bei $m = 0.60$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	m_π	$m_\rho(b)$	m_{b_1}	$m_\rho(a)$	m_{a_1}	m_{π_2}	m_{a_0}
5.620	2.2626(6)	2.3979(13)	2.78(18)	2.478(3)	2.82(9)	2.515(6)	2.83(5)
5.630	2.2627(8)	2.3970 (6)	2.88 (8)	2.477(2)	2.86(4)	2.519(3)	2.78(2)
5.635	2.2632(5)	2.3969 (7)	2.90 (8)	2.478(1)	2.82(3)	2.517(3)	2.77(2)
5.640	2.2656(7)	2.3978 (8)	2.92 (9)	2.480(2)	2.84(4)	2.525(4)	2.74(2)
5.650	2.2686(4)	2.3998 (7)	2.87 (7)	2.480(2)	2.80(3)	2.517(3)	2.75(2)

Tabelle B.12: Meson Massen für alle β bei $m = 1.00$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

B.2.2 Massen auf dem 16^4 Gitter

β	m	m_π	$m_\rho(b)$	m_{b_1}	$m_\rho(a)$	m_{a_1}	m_{π_2}	m_{a_0}
5.282	0.0200	0.3735(45)	1.254(32)	2.2(3)	1.357(60)	1.96(11)	0.766(183)	1.56(6)
5.306	0.0375	0.5072(36)	1.311(13)	2.4(2)	1.454(44)	1.79 (6)	1.249(123)	1.28(3)
5.350	0.0750	0.7068(57)	1.415(11)	1.9(1)	1.666(41)	1.70 (5)	1.177 (62)	1.48(2)
5.443	0.2000	1.1047(30)	1.548 (5)	2.6(2)	1.659(11)	2.28 (6)	1.582 (21)	1.76(1)
5.521	0.4000	1.4977(36)	1.801 (3)	2.5(1)	1.923 (5)	2.27 (3)	1.893 (18)	2.08(2)
5.581	0.6000	1.7912(15)	2.015 (2)	2.5(1)	2.114 (5)	2.48 (5)	2.109 (10)	2.39(3)
5.635	1.0000	2.2614 (7)	2.397 (1)	3.0(1)	2.475 (4)	2.94 (8)	2.512 (9)	2.84(5)

Tabelle B.13: Meson Massen für alle β und alle Massen auf dem 16^4 Gitter.

B.3 Potentiale aus Wilsonloops auf dem 16^4 Gitter

R	$\beta = 5.282$ $m = 0.02$	$\beta = 5.306$ $m = 0.0375$	$\beta = 5.350$ $m = 0.075$
1.000	0.6372 (7)	0.6260 (8)	0.6082 (3)
2.000	1.1143 (18)	1.0888 (24)	1.0494 (11)
3.000	1.5161 (40)	1.4800 (55)	1.4198 (41)
4.000	1.8946 (79)	1.8428 (146)	1.7775 (128)
5.000	2.2534 (387)	2.1570 (330)	2.0645 (305)
6.000	2.5335(1930)	2.5702(1245)	2.4950(1210)
7.000	2.6864(2892)	3.0496(3410)	2.7221(3720)
8.000	3.3713 (674)	1.9753(7192)	3.7477 (750)

Tabelle B.14: Potentiale für $m = 0.02, 0.0375, 0.075$ auf dem 16^4 Gitter.

R	$\beta = 5.443$ $m = 0.20$	$\beta = 5.521$ $m = 0.40$	$\beta = 5.581$ $m = 0.60$	$\beta = 5.635$ $m = 1.00$
1.000	0.5777 (4)	0.5602 (5)	0.5397 (5)	0.5260 (5)
2.000	0.9810 (12)	0.9416 (12)	0.8910 (16)	0.8582 (11)
3.000	1.3059 (37)	1.2457 (16)	1.1632 (33)	1.1100 (48)
4.000	1.6038 (100)	1.5240 (43)	1.4117 (34)	1.3338 (68)
5.000	1.8897 (255)	1.7798 (154)	1.6381 (97)	1.5486 (74)
6.000	2.1722 (540)	2.0639 (278)	1.8546(197)	1.7551(141)
7.000	2.5249 (692)	2.3549 (801)	2.0994(337)	1.9535(226)
8.000	2.6465(2407)	2.5710(1906)	2.2909(950)	2.1773(659)

Tabelle B.15: Potentiale für $m = 0.2, 0.4, 0.6, 1.0$ auf dem 16^4 Gitter.

Parameter aus den Fits an die Potentiale

β	m	V_0		σ		α
		String	Coulomb	String	Coulomb	Coulomb
5.282	0.0200	0.530 (7)	0.508(15)	0.357(3)	0.361 (4)	0.232(11)
5.306	0.0375	0.533(10)	0.511(22)	0.344(4)	0.347 (7)	0.233(16)
5.350	0.0750	0.513 (7)	0.454(15)	0.334(3)	0.345 (5)	0.191(10)
5.443	0.2000	0.552 (6)	0.536(13)	0.280(3)	0.283 (4)	0.241 (9)
5.521	0.4000	0.555 (4)	0.539 (9)	0.259(1)	0.262 (2)	0.240 (6)
5.581	0.6000	0.571 (4)	0.564 (9)	0.226(2)	0.227 (2)	0.251 (7)
5.635	1.0000	0.582 (4)	0.578 (7)	0.204(2)	0.204 (2)	0.257 (6)

Tabelle B.16: Fitparameter V_0 , σ und α aus den Potentialfits auf dem 16^4 Gitter.

Anhang C

Tabellen der $aQCD$

C.1 Einfache Observablen

Unter dem Begriff *einfache Observablen* sind die Erwartungswerte der Plaquette, des Polyakov Loops, des chiralen Kondensates und der Suszeptibilität der beiden letztgenannten zusammengefaßt.

C.1.1 Ergebnisse vom $8^3 \times 4$ Gitter

β	$m = 0.01$	$m = 0.02$	$m = 0.03$	$m = 0.04$	$m = 0.05$	$m = 0.08$	$m = 0.10$
4.800							0.39160(103)
5.000							0.42284 (94)
5.100							0.44205 (91)
5.200		0.47987 (96)		0.48194(193)		0.47173(131)	0.47307 (98)
5.220		0.48838(253)		0.48805(120)			
5.240		0.50281(104)		0.49646(191)			
5.250		0.50777(114)					0.48940 (80)
5.260		0.54368(150)		0.50603(254)		0.49524 (91)	
5.270				0.50816 (88)			
5.280		0.55376(163)		0.54594(107)		0.50831(142)	
5.300		0.56195(118)		0.55360 (51)		0.51407(136)	0.51035(166)
5.320						0.54411(160)	
5.330					0.55970(114)		0.52097 (63)
5.350		0.57072 (34)		0.56570 (44)	0.56403 (26)	0.55534 (80)	0.54742 (99)
5.360							0.55311(101)
5.370					0.56711 (63)		0.55701 (55)
5.385							0.55982 (32)
5.400	0.58420(78)	0.58191 (38)		0.57552 (80)	0.57343 (22)	0.56698 (35)	0.56368 (19)
5.425							0.56885 (31)
5.450							0.57241 (15)
5.500	0.59996(37)	0.59742 (40)		0.59139 (40)	0.59003 (65)	0.58435 (28)	0.58072 (17)
5.550							0.58800 (12)
5.600							0.59489 (20)
5.650	0.61995(14)						0.60094 (15)
5.700	0.62494 (7)	0.62181 (20)		0.61655 (16)			0.60682 (8)
5.750	0.63004(11)	0.62679 (20)		0.62227 (12)			0.61220 (13)
5.800	0.63494(18)	0.63175 (14)	0.6294(2)	0.62723 (11)	0.62517 (25)	0.62050 (16)	0.61720 (10)
5.850		0.63626 (26)		0.63166 (14)		0.62553 (33)	
5.900	0.64278(25)	0.64048 (21)		0.63641 (13)		0.63000 (12)	0.62711 (21)
5.950						0.63411 (17)	
6.000						0.63857 (11)	0.63603 (19)
6.200	0.66216 (7)	0.66079 (17)	0.6598(1)	0.65881 (19)	0.65736 (14)	0.65369 (7)	0.65200 (11)
6.500		0.67829 (9)		0.67698 (4)	0.67602 (13)	0.67373 (3)	0.67188 (12)
7.000		0.70262 (8)			0.70159 (6)		0.69910 (6)
7.500							0.72152 (40)
8.000							0.73978 (49)
8.500							0.75579 (40)
9.000							0.77005 (31)

Tabelle C.1: Plaquette Erwartungswerte für alle Massen und bei allen β 's auf dem $8^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert.

β	$m = 0.01$	$m = 0.02$	$m = 0.03$	$m = 0.04$	$m = 0.05$	$m = 0.08$	$m = 0.10$
4.800							0.0150(13)
5.000							0.0179(13)
5.100							0.0179(13)
5.200		0.0180 (9)		0.0191 (9)		0.0175 (8)	0.0172(14)
5.220		0.0198(14)		0.0200 (6)			
5.240		0.0215 (7)		0.0282(33)			
5.250		0.0287(29)					0.0186(21)
5.260		0.2037(95)		0.0311(51)		0.0230 (16)	
5.270				0.0245(20)			
5.280		0.2357(96)		0.2032(36)		0.0308 (28)	
5.300		0.2614(57)		0.2271(60)		0.0325 (40)	0.0296(19)
5.320						0.1850(116)	
5.330					0.2482(63)		0.0336(33)
5.350		0.2841(23)		0.2634(28)	0.2628(25)	0.2291 (58)	0.1897(92)
5.360							0.2153(54)
5.370					0.2653(41)		0.2305(23)
5.385							0.2385(13)
5.400	0.3232(19)	0.3161(16)		0.2921(33)	0.2831(25)	0.2561 (48)	0.2494(17)
5.425							0.2610(15)
5.450							0.2635(12)
5.500	0.3621(23)	0.3511(29)		0.3295(17)	0.3243(36)	0.3032 (40)	0.2887(11)
5.550							0.3084(12)
5.600							0.3213(16)
5.650	0.4032(10)						0.3347 (8)
5.700	0.4140(12)	0.4027 (8)		0.3833(18)			0.3485 (7)
5.750	0.4249(11)	0.4129 (6)		0.3947(11)			0.3563(11)
5.800	0.4332(12)	0.4206 (9)	0.416 (2)	0.4061 (9)	0.3976 (7)	0.3804 (16)	0.3674 (7)
5.850		0.4317 (8)		0.4147(16)		0.3911 (24)	
5.900	0.4476 (5)	0.4387(15)		0.4251 (5)		0.4009 (9)	0.3856 (9)
5.950						0.4053 (24)	
6.000						0.4131 (15)	0.4020(22)
6.200	0.4737 (9)	0.4673(17)	0.463 (2)	0.4587 (5)	0.4568 (8)	0.4390 (17)	0.4340 (9)
6.500		0.4917 (3)		0.4882 (8)	0.4846 (8)	0.4761 (13)	0.4667(13)
7.000		0.5240 (7)			0.5197(10)		0.5093 (7)
7.500							0.5478(22)
8.000							0.5697(32)
8.500							0.5881(15)
9.000							0.6140(18)

Tabelle C.2: Polyakov Loop Erwartungswerte für alle Massen und bei allen β 's auf dem $8^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert.

β	$m = 0.01$	$m = 0.02$	$m = 0.03$	$m = 0.04$	$m = 0.05$	$m = 0.08$	$m = 0.10$
4.800							0.035 (8)
5.000							0.040 (4)
5.100							0.039 (6)
5.200		0.045 (8)		0.055 (5)		0.042 (4)	0.045 (6)
5.220		0.058 (14)		0.049 (2)			
5.240		0.056 (2)		0.115 (21)			
5.250		0.103 (10)					0.050 (4)
5.260		0.522(150)		0.165 (50)		0.081 (11)	
5.270				0.081 (17)			
5.280		0.487(197)		0.380(119)		0.133 (14)	
5.300		0.390 (82)		0.521(117)		0.178 (34)	0.095 (4)
5.320						0.756(100)	
5.330					0.294(49)		0.155 (22)
5.350		0.255 (31)		0.286 (40)	0.279(56)	0.362 (62)	0.572(167)
5.360							0.368 (37)
5.370					0.312(63)		0.292 (12)
5.385							0.284 (22)
5.400	0.113(19)	0.185 (16)		0.198 (18)	0.225(28)	0.313 (38)	0.267 (18)
5.425							0.273 (26)
5.450							0.231 (25)
5.500	0.097(13)	0.169 (28)		0.182 (26)	0.211(24)	0.229 (25)	0.236 (14)
5.550							0.184 (14)
5.600							0.168 (11)
5.650	0.102(10)						0.171 (7)
5.700	0.121 (7)	0.131 (8)		0.126 (9)			0.155 (9)
5.750	0.108 (8)	0.122 (8)		0.129 (21)			0.169 (10)
5.800	0.097(21)	0.104 (9)	0.100 (6)	0.120 (6)	0.147(19)	0.129 (11)	0.143 (8)
5.850		0.104 (6)		0.123 (7)		0.141 (8)	
5.900	0.077 (4)	0.103 (11)		0.103 (6)		0.115 (7)	0.152 (13)
5.950						0.147 (9)	
6.000						0.129 (14)	0.109 (11)
6.200	0.080 (6)	0.080 (8)	0.098 (8)	0.088 (7)	0.087 (3)	0.121 (19)	0.113 (2)
6.500		0.072 (5)		0.084 (7)	0.091(15)	0.095 (6)	0.105 (5)
7.000		0.069 (5)			0.085 (6)		0.082 (4)
7.500							0.053 (6)
8.000							0.073 (20)
8.500							0.051 (8)
9.000							0.047 (7)

Tabelle C.3: Suszeptibilität des Polyakov Loops für alle Massen und bei allen β 's auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

β	$m = 0.01$	$m = 0.02$	$m = 0.03$	$m = 0.04$	$m = 0.05$	$m = 0.08$	$m = 0.10$
5.200		2.1793 (34)		2.167 (5)		2.2039(46)	
5.220		2.1473 (95)		2.155 (4)			
5.240		2.0914 (52)		2.129 (6)			
5.250		2.0730 (47)					
5.260		1.8682(145)		2.094(11)		2.1370(33)	
5.270				2.082 (5)			
5.280		1.7977(145)		1.931(28)		2.0936(61)	
5.300		1.7377 (99)		1.833 (5)		2.0759(47)	
5.320						1.9398(89)	
5.330					1.8135(63)		2.0586(25)
5.350		1.6641 (38)		1.749 (5)	1.7739(38)	1.8731(73)	1.9373(54)
5.360							1.9065(55)
5.370					1.7572(65)		1.8846(28)
5.385							1.8721(17)
5.400	1.4865(114)	1.5526 (39)		1.670 (7)	1.7074(28)	1.8117(50)	1.8495(14)
5.425							1.8203(22)
5.450							1.8027 (9)
5.500	1.2875 (81)	1.3822 (56)		1.531 (4)	1.5730(78)	1.6903(47)	1.7523(12)
5.550							1.7044(16)
5.600							1.6591(18)
5.650	0.9531 (28)						1.6166(12)
5.700	0.8515 (33)	1.0409 (47)		1.262 (2)			1.5749 (5)
5.750	0.7447 (46)	0.9566 (28)		1.192 (2)			1.5370(13)
5.800	0.6315 (84)	0.8742 (60)	1.012 (6)	1.127 (3)	1.2172(51)	1.4029(28)	1.4977(10)
5.850		0.7938 (52)		1.070 (3)		1.3568(38)	
5.900	0.4714 (36)	0.7174 (71)		1.005 (5)		1.3153(30)	1.4186(15)
5.950						1.2809(22)	
6.000						1.2384(17)	
6.200	0.2300 (10)	0.4383 (34)	0.605 (5)	0.731 (2)	0.8449(36)	1.0982 (7)	1.2119(16)
6.500		0.2999 (7)		0.551 (1)	0.6582(23)	0.9139(12)	1.0480(17)
7.000		0.2031 (5)			0.4826 (8)		0.8446 (6)

Tabelle C.4: Chirales Kondensat für alle Massen und bei allen β 's auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

5.400	1.234(20)
5.500	0.993(22)
5.700	0.313(11)
5.750	0.175(14)
5.800	0.031(20)
5.900	0.197 (9)
6.200	-0.022 (7)
6.500	-0.014 (5)
7.000	-0.009 (1)

Tabelle C.5: Extrapolation des chiralen Kondensates zu $m = 0$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

β	$m = 0.01$	$m = 0.02$	$m = 0.03$	$m = 0.04$	$m = 0.05$	$m = 0.08$	$m = 0.10$
5.200		1.902(110)		1.22 (12)		0.72 (12)	
5.220		2.337(270)		1.09 (4)			
5.240		2.181(195)		1.23 (15)			
5.250		2.113(130)					
5.260		3.332(524)		2.12 (36)		0.67 (10)	
5.270				1.21 (12)			
5.280		3.752(855)		6.04 (85)		0.82 (6)	
5.300		3.716(500)		1.84 (9)		0.82 (11)	
5.320						1.49 (24)	
5.330					1.87 (24)		0.58 (4)
5.350		2.875(232)		1.94 (29)	1.56 (14)	1.18 (13)	1.07 (12)
5.360							0.98 (8)
5.370					1.73 (12)		0.85 (7)
5.385							0.85 (6)
5.400	5.03 (74)	3.100(240)		1.78 (17)	1.45 (5)	1.05 (20)	0.84 (5)
5.425							0.88 (4)
5.450							0.78 (6)
5.500	5.22 (46)	3.423(211)		2.05 (23)	1.81 (12)	1.04 (6)	0.81 (4)
5.550							0.80 (3)
5.600							0.76 (4)
5.650	5.24 (32)						0.83 (6)
5.700	7.08 (41)	3.586(134)		1.94 (20)			0.76 (4)
5.750	7.00 (41)	3.481(115)		1.90 (7)			0.82 (6)
5.800	5.67 (54)	3.964(157)	2.5 (2)	2.03 (11)	1.70 (9)	1.09 (8)	0.79 (2)
5.850		3.480(178)		2.07 (13)		1.04 (11)	
5.900	4.55 (37)	2.870(214)		2.05 (14)		1.09 (11)	0.82 (5)
5.950						1.10 (7)	
6.000						1.03 (5)	
6.200	0.56 (5)	1.170(102)	1.6 (2)	1.04 (6)	1.13 (14)	0.77 (4)	0.67 (5)
6.500		0.262 (17)		0.56 (2)	0.54 (4)	0.57 (4)	0.60 (4)
7.000		0.047 (4)			0.20 (1)		0.31 (1)

Tabelle C.6: Suszeptibilität des chiralen Kondensates für alle Massen und bei allen β 's auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

C.1.2 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter

β	Plaquette		Polyakov Loop		Chirales Kondensat	
	$m = 0.02$	$m = 0.04$	$m = 0.02$	$m = 0.04$	$m = 0.02$	$m = 0.04$
5.200	0.48494(47)		0.0065 (3)		2.1574(14)	
5.250	0.50674(38)	0.5006(10)	0.0097(12)	0.0069 (9)	2.0794(22)	2.112 (3)
5.400	0.58062(14)	0.5759 (4)	0.3119 (6)	0.2937(18)	1.5661(22)	1.666 (6)
5.700	0.62180 (7)	0.6170 (2)	0.4024 (5)	0.3863(11)	1.0374(23)	1.253 (2)
5.800	0.63170(12)		0.4226 (4)		0.8738(28)	
5.900	0.64026 (3)		0.4360 (9)		0.7277(13)	
6.000	0.64782(11)		0.4477 (6)		0.6059(31)	
6.200	0.66116 (4)	0.6586 (2)	0.4691 (9)	0.4587(10)	0.4324(14)	0.733 (4)
6.500	0.67820(11)		0.4923(10)		0.2987 (5)	

Tabelle C.7: Plaquette Erwartungswert, Polyakov Loop und chirales Kondensat für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert.

β	$m = 0.02$	$m = 0.04$
5.200	0.048 (3)	
5.250	0.104 (7)	0.06 (2)
5.400	0.111(21)	0.25 (5)
5.700	0.112 (5)	0.12 (2)
5.800	0.094 (4)	
5.900	0.111(15)	
6.000	0.105(22)	
6.200	0.099(14)	0.11 (1)
6.500	0.084(14)	

Tabelle C.8: Suszeptibilität des Polyakov Loops für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

β	$m = 0.02$	$m = 0.04$
5.200	2.07 (5)	
5.250	2.02 (8)	1.27 (10)
5.400	2.37 (13)	2.54 (86)
5.700	3.63 (49)	1.97 (34)
5.800	3.42 (44)	
5.900	3.03 (45)	
6.000	2.60 (18)	
6.200	1.01 (12)	1.94 (26)
6.500	0.26 (2)	

Tabelle C.9: Suszeptibilität des chiralen Kondensates für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

C.2 Fundamentale und adjungierte Potentiale auf dem $16^3 \times 4$ Gitter

Bei manchen Daten sind für einige Abstände keine Werte angegeben. Dies liegt daran, daß zur Potentialberechnung der Logarithmus von der Korrelationsfunktion genommen werden muß, welche u.U. einen negativen Mittelwert hat, besonders wenn - wie bei großen Abständen - der Erwartungswert nahe Null liegt.

fundamental					
R	$\beta = 5.25$	$\beta = 5.40$	$\beta = 5.70$	$\beta = 6.20$	$\beta = 6.50$
0.000	2.1624 (5)	-0.61529(241)	-0.34611(272)	-0.22009(140)	-0.18935(47)
1.000	4.4658 (89)	-0.06532 (82)	-0.02779 (33)	-0.01518 (35)	-0.01288(18)
1.414	5.4028 (222)	-0.02035 (45)	-0.00732 (36)	-0.00335 (15)	-0.00283(16)
1.732	5.9676 (469)	-0.00980 (23)	-0.00275 (40)	-0.00136 (5)	-0.00088(24)
2.000	6.0626 (382)	-0.01086 (74)	-0.00338 (49)	-0.00110 (10)	-0.00130 (9)
2.236	6.5221 (448)	-0.00567 (47)	-0.00169 (23)	-0.00050 (6)	-0.00040 (6)
2.449	6.8414 (510)	-0.00320 (37)	-0.00078 (27)	-0.00028 (7)	-0.00010 (8)
2.828	7.3569 (975)	-0.00234 (32)	-0.00021 (34)	-0.00018 (7)	-0.00020(14)
3.000	7.5699 (768)	-0.00157 (42)	-0.00014 (35)	-0.00003 (5)	-0.00005 (6)
3.162	7.7226 (1004)	-0.00128 (29)	-0.00049 (34)	-0.00001 (5)	-0.00004 (6)
3.317	7.7600 (527)	-0.00131 (7)	-0.00020 (30)	-0.00001 (5)	0.00002 (9)
3.464	8.0567 (900)	-0.00074 (55)	0.00071 (51)	0.00011 (17)	0.00012(13)
3.606	8.2938 (1566)	-0.00079 (29)	-0.00008 (33)	-0.00004 (12)	-0.00008(10)
3.742	8.6291 (876)	-0.00073 (18)	-0.00012 (13)	-0.00011 (5)	-0.00001 (3)
4.000	8.4196 (3185)	-0.00089 (36)	-0.00044 (29)	-0.00011 (18)	0.00000(11)
4.123	8.8793 (2184)	-0.00007 (20)	-0.00001 (9)	-0.00006 (3)	-0.00001 (6)
4.243	9.0173 (1782)	0.00002 (18)	-0.00005 (19)	-0.00003 (7)	-0.00004 (6)
4.359	10.4329(12914)	-0.00036 (22)	0.00006 (19)	-0.00007 (6)	-0.00020 (7)
4.472	9.1197(11260)	0.00034 (7)	-0.00019 (32)	-0.00000 (6)	-0.00001 (8)
4.583	9.4486 (6065)	-0.00037 (17)	-0.00004 (15)	-0.00006 (6)	0.00006 (2)
4.690	9.4871 (8624)	-0.00014 (28)	0.00011 (21)	0.00002 (11)	-0.00014 (9)
4.899	8.5788(21513)	0.00008 (23)	0.00017 (20)	-0.00006 (8)	0.00003 (8)
5.000		0.00007 (43)	-0.00028 (2)	-0.00007 (5)	0.00002 (6)
5.099	10.0219(12019)	-0.00024 (36)	0.00007 (12)	-0.00000 (5)	0.00002 (4)
5.196		-0.00009 (40)	-0.00002 (33)	-0.00027 (15)	-0.00025(11)
5.385	12.0767 (2415)	-0.00048 (24)	0.00005 (12)	-0.00003 (6)	0.00005 (5)
5.657		0.00044 (53)	-0.00006 (21)	-0.00019 (9)	-0.00012 (6)
5.745		-0.00011 (32)	0.00007 (14)	-0.00010 (9)	0.00004 (4)
5.831		-0.00022 (40)	0.00002 (11)	0.00000 (8)	0.00009 (9)
6.000		-0.00043 (13)	-0.00000 (18)	-0.00001 (10)	0.00006 (4)
6.403		-0.00045 (55)	0.00009 (17)	-0.00012 (6)	0.00009(11)
6.928	10.0118 (2002)	-0.00102 (74)	0.00023 (22)	-0.00003 (11)	0.00013(17)
7.000	8.5934 (6879)	-0.00061 (67)	0.00037 (51)	-0.00021 (13)	0.00044(16)
8.000	10.3578 (2072)	-0.00017 (89)	0.00089 (68)	-0.00011 (22)	0.00011(19)

Tabelle C.10: Potentiale aus fundamentalen Polyakov Loop Korrelationen für alle β bei $m = 0.020$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Bis auf $\beta = 5.25$ sind alle Daten auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert.

Die Werte bei den Abständen $R = \sqrt{2}$ und $R = \sqrt{3}$ sind hier zwar aufgeführt, wurden jedoch bei der Analyse nicht berücksichtigt, da sie zu stark durch die gebrochene Rotationsinvarianz beeinflusst worden sind.

adjungiert					
R	$\beta = 5.25$	$\beta = 5.40$	$\beta = 5.70$	$\beta = 6.20$	$\beta = 6.50$
0.000	4.0878 (7)	-1.8455(54)	-1.1878(62)	-0.8297(43)	-0.7309(14)
1.000	8.7415 (563)	-0.2514(28)	-0.1207(13)	-0.0704(17)	-0.0604 (9)
1.414	10.2284 (1929)	-0.0834(24)	-0.0330(23)	-0.0161 (6)	-0.0135 (7)
1.732	10.4073 (2789)	-0.0396(31)	-0.0142(28)	-0.0062 (3)	-0.0041(11)
2.000	10.2333 (2403)	-0.0433(26)	-0.0147(32)	-0.0049 (4)	-0.0064 (6)
2.236	10.7524 (1187)	-0.0234(15)	-0.0064(15)	-0.0024 (2)	-0.0020 (2)
2.449	10.8995 (1502)	-0.0132(12)	-0.0045(16)	-0.0013 (4)	-0.0004 (4)
2.828	11.0648 (5519)	-0.0104(16)	-0.0010(19)	-0.0011 (4)	-0.0008 (7)
3.000	10.8788 (2367)	-0.0043(25)	-0.0002(16)	-0.0003 (1)	-0.0002 (4)
3.162	11.1312 (2033)	-0.0060(14)	-0.0022(12)	0.0001 (3)	-0.0001 (1)
3.317	10.6041 (1276)	-0.0068 (4)	-0.0003(19)	-0.0003 (3)	0.0003 (4)
3.464	11.8377 (2498)	-0.0011(33)	0.0055(37)	0.0004 (9)	0.0008(11)
3.606	10.6536 (1341)	-0.0032(17)	-0.0004(12)	-0.0002 (6)	-0.0005 (6)
3.742	10.8045 (651)	-0.0020 (4)	-0.0006 (5)	-0.0006 (3)	0.0000 (3)
4.000	10.6318(19454)	-0.0005(20)	-0.0046(21)	-0.0003 (9)	0.0002 (7)
4.123	10.7924 (681)	-0.0024(14)	0.0005(10)	-0.0005 (2)	-0.0000 (2)
4.243	10.8066 (1524)	-0.0003 (8)	-0.0003(13)	0.0000 (4)	-0.0002 (3)
4.359	10.7766 (3336)	-0.0020(20)	0.0015(11)	-0.0001 (3)	-0.0010 (4)
4.472	10.5245 (1704)	0.0006(10)	-0.0010(20)	-0.0001 (4)	-0.0003 (4)
4.583	10.9459 (1118)	-0.0011(11)	0.0003 (8)	-0.0004 (3)	0.0003 (2)
4.690	10.7483 (926)	-0.0004(26)	0.0009(13)	0.0003 (6)	-0.0010 (4)
4.899	10.9614 (2138)	-0.0006(23)	0.0017(12)	-0.0003 (5)	0.0001 (3)
5.000	11.0855 (2323)	0.0011(27)	-0.0011 (3)	-0.0004 (4)	0.0003 (4)
5.099	10.8239 (1101)	-0.0008(17)	0.0004 (6)	0.0002 (3)	0.0003 (4)
5.196	10.6072 (3069)	-0.0012(34)	0.0002(19)	-0.0007 (9)	-0.0014 (5)
5.385	10.7857 (1079)	-0.0019(12)	0.0006 (9)	-0.0001 (3)	0.0004 (3)
5.657	10.9790 (1186)	0.0018(31)	-0.0005 (7)	-0.0009 (4)	-0.0005 (3)
5.745	10.7420 (2479)	0.0015(23)	0.0004(10)	-0.0005 (4)	-0.0001 (2)
5.831	10.9201 (2537)	-0.0011(22)	0.0006 (9)	0.0001 (5)	0.0003 (3)
6.000	10.9470 (2242)	-0.0022 (9)	0.0014(15)	0.0001 (6)	0.0005 (2)
6.403	10.6511 (1103)	-0.0006(12)	0.0008(10)	-0.0006 (3)	0.0003 (7)
6.928	10.8238 (3349)	-0.0033(30)	0.0043 (8)	-0.0002(11)	0.0003 (9)
7.000	10.5416(11911)	-0.0017(56)	0.0058(34)	-0.0010 (7)	0.0023 (6)
8.000	10.6498(15934)	-0.0053(41)	0.0050(42)	0.0005(12)	0.0010(11)

Tabelle C.11: Potentiale aus adjungierten Polyakov Loop Korrelationen für alle β bei $m = 0.020$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Bis auf $\beta = 5.25$ sind alle Daten auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert.

fundamental				
R	$\beta = 5.25$	$\beta = 5.40$	$\beta = 5.70$	$\beta = 6.20$
0.000	2.166 (2)	-0.6925(123)	-0.3799(21)	-0.23564(199)
1.000	4.561 (19)	-0.0801 (21)	-0.0315 (2)	-0.01711 (35)
1.414	5.580 (39)	-0.0267 (13)	-0.0082 (4)	-0.00404 (21)
1.732	6.158 (75)	-0.0141 (13)	-0.0036 (3)	-0.00173 (12)
2.000	6.252 (78)	-0.0126 (7)	-0.0039 (4)	-0.00151 (12)
2.236	6.785 (65)	-0.0074 (7)	-0.0018 (4)	-0.00068 (10)
2.449	7.161 (93)	-0.0055 (7)	-0.0011 (4)	-0.00041 (9)
2.828	7.857 (198)	-0.0032 (6)	-0.0008 (3)	-0.00033 (15)
3.000	7.927 (189)	-0.0023 (3)	-0.0005 (3)	-0.00027 (6)
3.162	7.920 (182)	-0.0021 (5)	-0.0002 (3)	-0.00015 (8)
3.317	8.176 (257)	-0.0017 (4)	0.0001 (3)	-0.00018 (9)
3.464	8.676 (480)	-0.0012 (4)	0.0003 (2)	-0.00015 (15)
3.606	8.875 (212)	-0.0005 (4)	0.0000 (2)	-0.00005 (9)
3.742	8.783 (196)	-0.0003 (4)	-0.0000 (2)	-0.00002 (5)
4.000	8.437 (300)	-0.0016 (9)	-0.0004 (5)	-0.00027 (13)
4.123	8.817 (231)	-0.0004 (4)	-0.0002 (1)	-0.00004 (6)
4.243	9.193 (471)	-0.0003 (4)	-0.0001 (2)	-0.00012 (7)
4.359	9.559 (366)	0.0002 (6)	0.0000 (1)	0.00010 (6)
4.472	9.767 (403)	-0.0001 (4)	0.0000 (2)	-0.00007 (6)
4.583	9.793 (542)	-0.0002 (5)	-0.0001 (1)	-0.00007 (5)
4.690	9.279 (278)	-0.0005 (6)	-0.0004 (2)	-0.00010 (10)
4.899	10.123 (334)	-0.0003 (5)	0.0001 (2)	-0.00006 (6)
5.000		0.0003 (6)	-0.0000 (2)	-0.00003 (8)
5.099	10.218(1016)	-0.0000 (3)	-0.0000 (2)	-0.00008 (6)
5.196	10.785 (216)	-0.0015 (6)	-0.0000 (3)	-0.00014 (13)
5.385	11.195 (224)	-0.0008 (6)	0.0001 (2)	-0.00006 (2)
5.657		-0.0005 (8)	-0.0002 (4)	-0.00011 (13)
5.745		-0.0004 (6)	0.0002 (3)	0.00009 (6)
5.831	10.393 (208)	-0.0004 (6)	-0.0002 (2)	-0.00019 (9)
6.000	11.047 (221)	-0.0005 (5)	-0.0001 (2)	0.00010 (10)
6.403	7.086(3314)	-0.0002 (4)	-0.0001 (2)	-0.00014 (3)
6.928	9.126 (247)	-0.0001 (5)	0.0002 (2)	-0.00018 (12)
7.000	8.804(1054)	0.0003 (9)	-0.0006 (3)	-0.00023 (18)
8.000	10.241 (205)	-0.0007 (7)	0.0002 (4)	-0.00023 (29)

Tabelle C.12: Potentiale aus fundamentalen Polyakov Loop Korrelationen für alle β bei $m = 0.040$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Bis auf $\beta = 5.25$ sind alle Daten auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert.

adjungiert				
R	$\beta = 5.25$	$\beta = 5.40$	$\beta = 5.70$	$\beta = 6.20$
0.000	4.094 (5)	-2.0143(286)	-1.2775(49)	-0.8757(59)
1.000	9.001 (95)	-0.3011 (78)	-0.1364(14)	-0.0776(13)
1.414	10.339 (210)	-0.1063 (64)	-0.0368(26)	-0.0186(11)
1.732	10.247 (167)	-0.0543 (50)	-0.0162(24)	-0.0077 (5)
2.000	10.918 (470)	-0.0526 (38)	-0.0173(13)	-0.0061(10)
2.236	11.107 (167)	-0.0296 (39)	-0.0083(22)	-0.0028 (7)
2.449	10.697 (256)	-0.0210 (37)	-0.0038(25)	-0.0022 (4)
2.828	10.541 (329)	-0.0112 (32)	-0.0027(17)	-0.0014 (6)
3.000	10.762 (717)	-0.0114 (22)	-0.0028(13)	-0.0015 (3)
3.162	11.301(1120)	-0.0087 (23)	0.0003(18)	-0.0005 (5)
3.317	10.508 (338)	-0.0093 (33)	0.0020(19)	-0.0005 (3)
3.464	10.502 (431)	-0.0066 (62)	0.0014 (3)	-0.0015 (8)
3.606	10.945 (632)	-0.0025 (25)	-0.0000(14)	-0.0002 (5)
3.742	11.134 (485)	-0.0010 (19)	0.0001 (9)	0.0001 (4)
4.000	10.707 (836)	-0.0075 (68)	-0.0014(31)	-0.0009 (8)
4.123	11.050 (568)	-0.0001 (15)	-0.0009 (7)	-0.0003 (3)
4.243	11.146 (380)	-0.0002 (18)	-0.0007(15)	-0.0004 (2)
4.359	11.293 (332)	0.0021 (29)	-0.0006 (5)	0.0005 (4)
4.472	10.949 (601)	0.0036 (28)	0.0007(11)	-0.0004 (3)
4.583	11.096 (325)	-0.0005 (17)	-0.0003 (6)	-0.0004 (2)
4.690	11.099 (541)	-0.0010 (37)	-0.0017 (8)	-0.0005 (6)
4.899	11.336 (311)	-0.0021 (41)	0.0000(15)	0.0000 (2)
5.000	11.556 (210)	0.0006 (30)	-0.0002 (9)	-0.0000 (5)
5.099	10.964 (569)	-0.0007 (9)	-0.0007 (9)	-0.0006 (4)
5.196	10.369 (252)	-0.0032 (42)	-0.0004(25)	-0.0003 (8)
5.385	11.306 (238)	-0.0025 (16)	-0.0000 (5)	-0.0000 (1)
5.657	10.833 (234)	-0.0013 (15)	-0.0009(31)	-0.0011 (6)
5.745	10.385 (277)	-0.0004 (13)	0.0004(13)	0.0005 (5)
5.831	10.753 (201)	-0.0026 (24)	-0.0014(13)	-0.0008 (6)
6.000	10.808 (564)	-0.0036 (27)	0.0002(14)	0.0003 (5)
6.403	10.813 (134)	0.0010 (20)	0.0000(13)	-0.0007 (3)
6.928	10.776(1993)	0.0010 (20)	0.0017 (8)	-0.0015 (6)
7.000	10.321(1711)	0.0020 (35)	-0.0031(17)	-0.0009 (8)
8.000	10.307 (561)	-0.0007 (65)	-0.0004(26)	-0.0022(22)

Tabelle C.13: Potentiale aus adjungierten Polyakov Loop Korrelationen für alle β bei $m = 0.040$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Bis auf $\beta = 5.25$ sind alle Daten auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert.

Parameter aus den Fits an die Potentiale Für alle $\beta \neq 5.25$ wurden die normierten Potentiale mit einem abgeschirmten Coulombpotential gefittet. Bei $\beta = 5.25$ ist für die fundamentalen Potentiale die Stringtension und für die adjungierten der asymptotische Wert V_∞/T angegeben.

μ/T					α				
	$m = 0.02$		$m = 0.04$			$m = 0.02$		$m = 0.04$	
β	adj.	fund.	adj.	fund.	β	adj.	fund.	adj.	fund.
5.400	4.72 (8)	5.01 (8)	4.7(2)	4.8(1)	5.400	0.204 (5)	0.057(2)	0.242(14)	0.0676(34)
5.700	6.56(44)	6.02(26)	5.5(2)	4.0(1)	5.700	0.156(17)	0.031(2)	0.111 (6)	0.0190 (6)
6.200	8.16(21)	8.21(24)	7.2(3)	7.2(2)	6.200	0.135 (9)	0.030(2)	0.116 (9)	0.0255(16)
6.500	8.16(28)	7.79(25)			6.500	0.116 (9)	0.023(1)		

Tabelle C.14: Fitparameter μ/T und α für $\beta \geq 5.40$ und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

σ/T^2			V_∞/T	
	$m = 0.02$	$m = 0.04$	$m = 0.02$	$m = 0.04$
β	nur fundamental		nur adjungiert	
5.250	3.87 (5)	4.21 (9)	5.250	10.81 (3) 10.91 (6)

Tabelle C.15: Fitparameter σ/T^2 und V_∞/T für $\beta = 5.25$ bei allen Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

C.3 Screening Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter

Obwohl auch noch weitere Mesonkorrelationen gemessen und ausgewertet wurden, sind hier nur das Pion und das a_0 aufgeführt, da in den übrigen Fällen kein deutliches Signal zu erhalten war.

Wenn im folgenden von *Masse* oder m die Rede ist, ist immer die nackte Quarkmasse gemeint, also der dimensionslose Parameter, der in den Simulationen die Dynamik der See-Quarks kontrolliert.

β	m_π		m_π^2
	$m = 0.04$	$m = 0.02$	$m = 0.00$
5.250	0.459 (3)	0.325 (4)	0.000 (8)
5.400	0.501 (4)	0.363 (5)	0.013(11)
5.700	0.568 (6)	0.438 (6)	0.061(16)
6.200	0.732 (4)	0.663 (8)	0.345(28)

Tabelle C.16: Pion Massen, m_π , für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die letzte Spalte enthält die lineare Extrapolation von m_π^2 zu $m = 0$.

β	m_{a_0}		$m_{a_0}^2$
	$m = 0.04$	$m = 0.02$	$m = 0.00$
5.250	0.458 (2)	0.326 (5)	0.002 (8)
5.400	0.503 (3)	0.363 (5)	0.011(10)
5.700	0.582 (4)	0.454 (5)	0.073(14)
6.200	0.765 (3)	0.683 (7)	0.347(25)

Tabelle C.17: a_0 Massen, m_{a_0} , für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die letzte Spalte enthält die lineare Extrapolation von $m_{a_0}^2$ zu $m = 0$.

Anhang D

Bilder der QCD

D.1 Einfache Observablen

D.1.1 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter

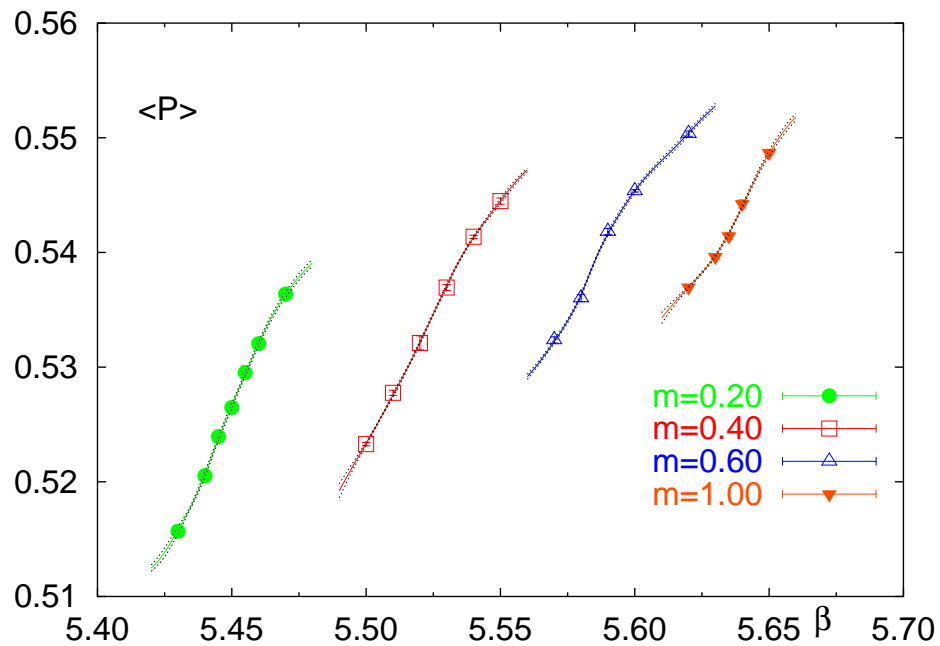


Abbildung D.1: Plaquette Erwartungswerte für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation.

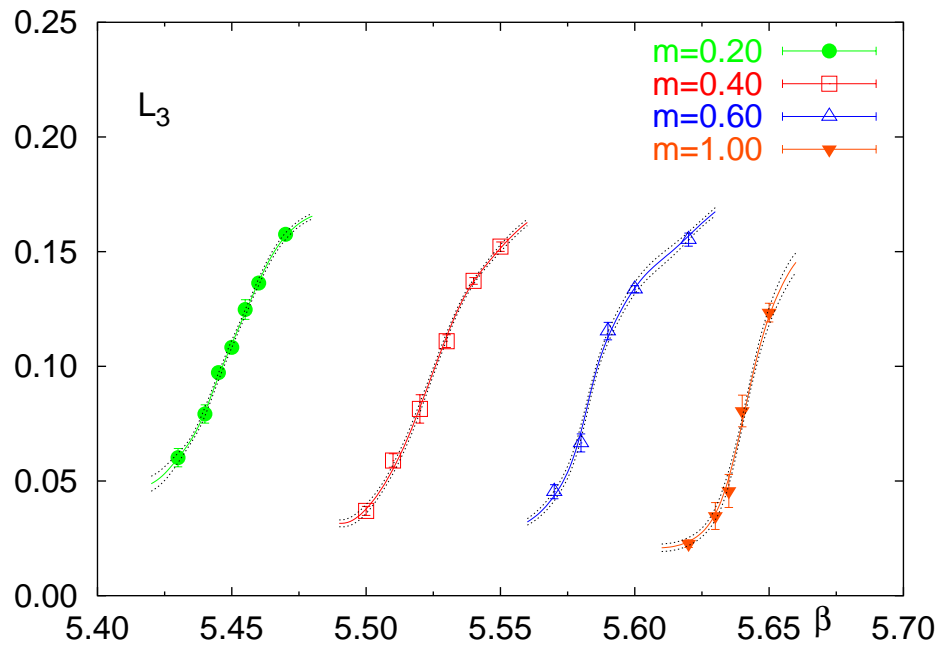


Abbildung D.2: Polyakov Loop Erwartungswerte für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation.

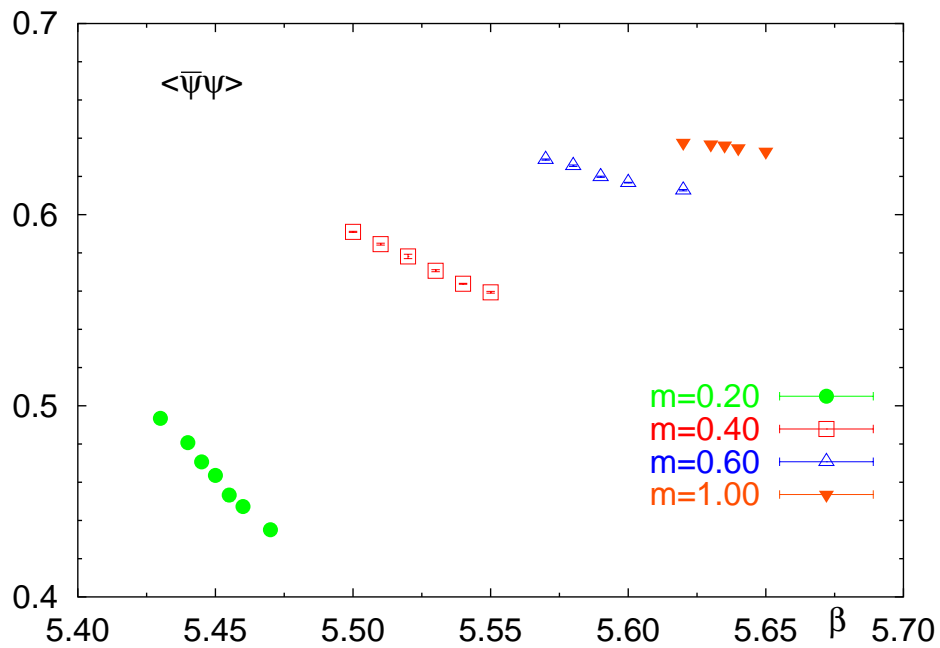


Abbildung D.3: Chirales Kondensat für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

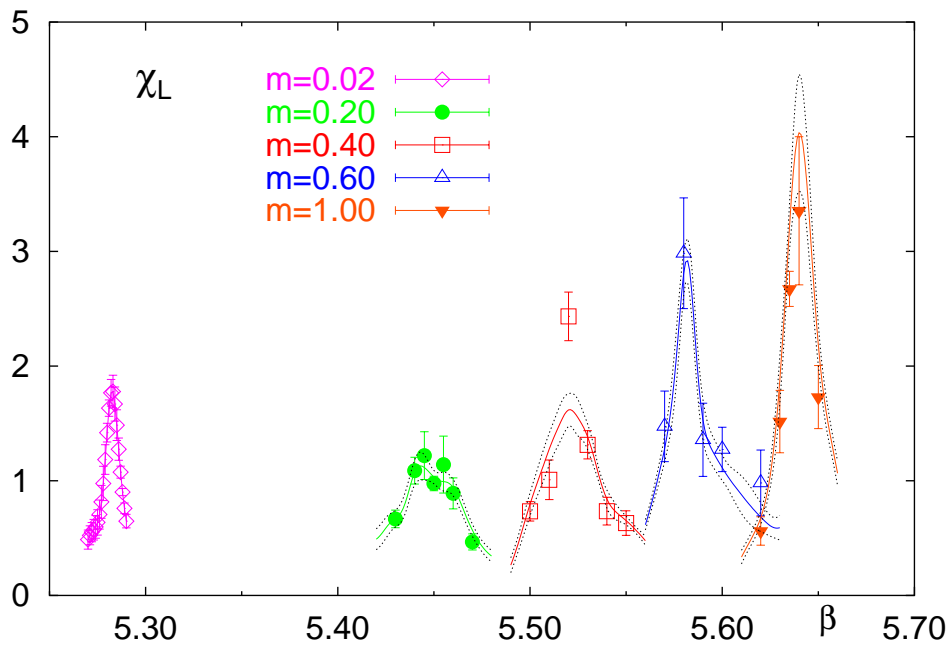


Abbildung D.4: Suszeptibilität des Polyakov Loops für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation. Zum Vergleich ist auch in früheres Ergebnis bei $m = 0.02$ dargestellt.

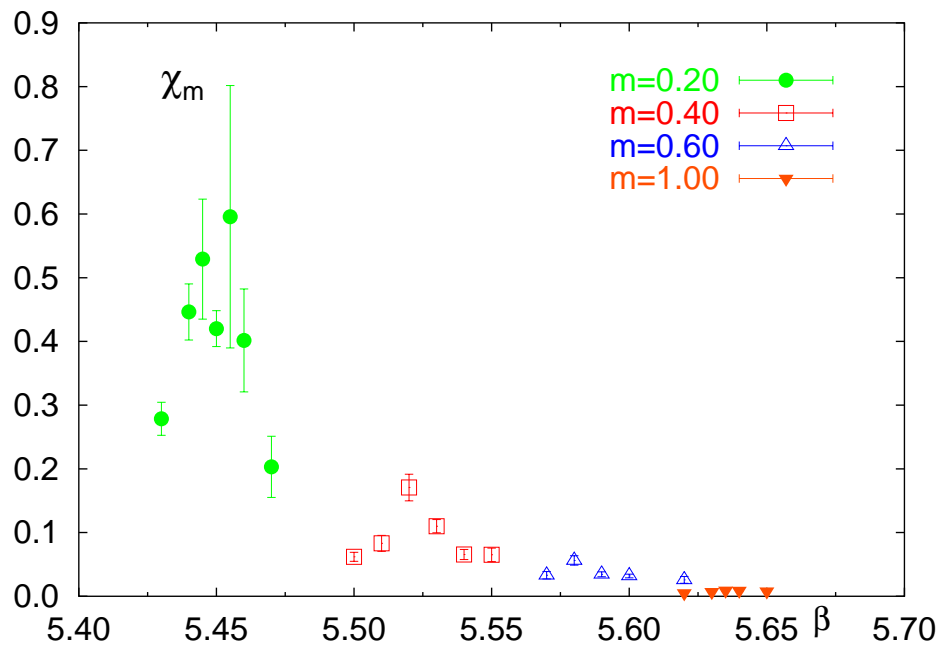


Abbildung D.5: Suszeptibilität des chirales Kondensates für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

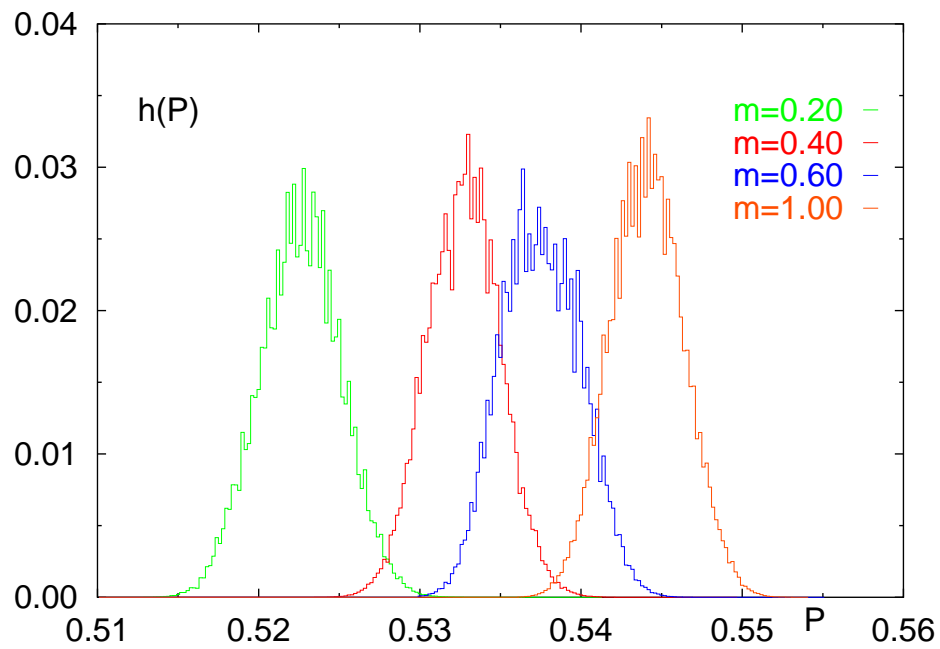


Abbildung D.6: Plaquette Histogramme jeweils bei β_k für alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

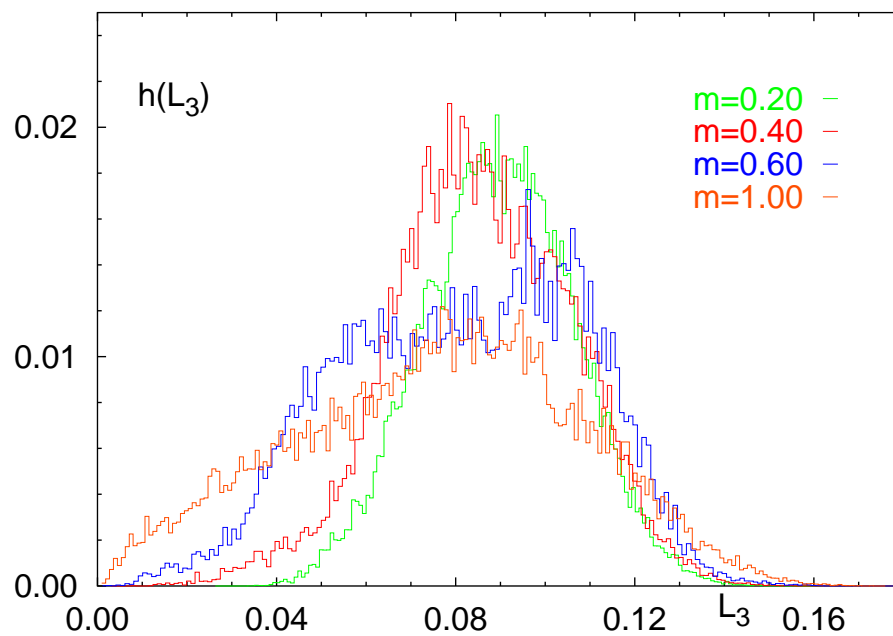


Abbildung D.7: Polyakov Loop Histogramme jeweils bei β_k für alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

D.2 Meson Massen

D.2.1 Screening Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter

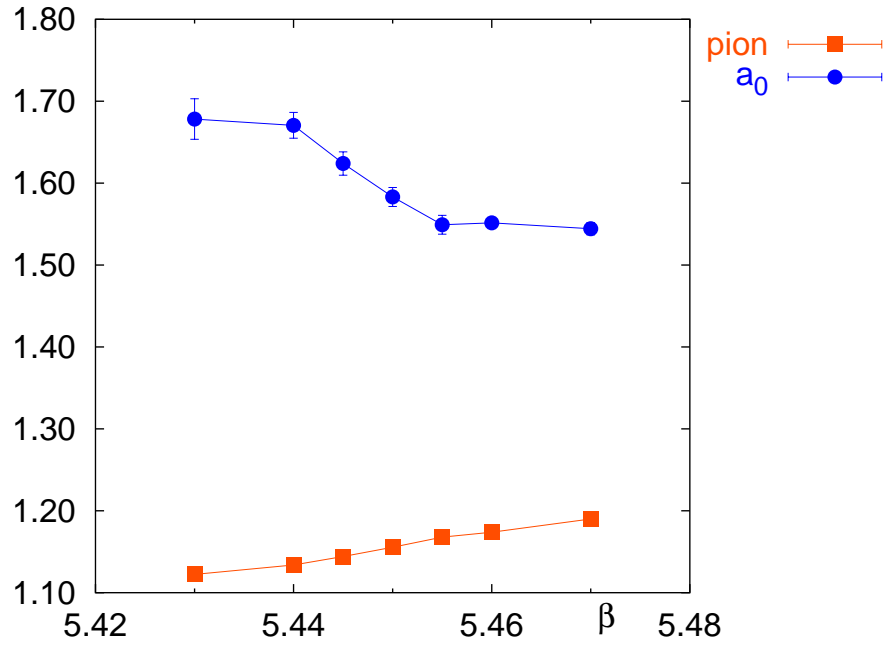


Abbildung D.8: Screening Massen m_π und m_{a_0} für alle β bei $m = 0.20$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

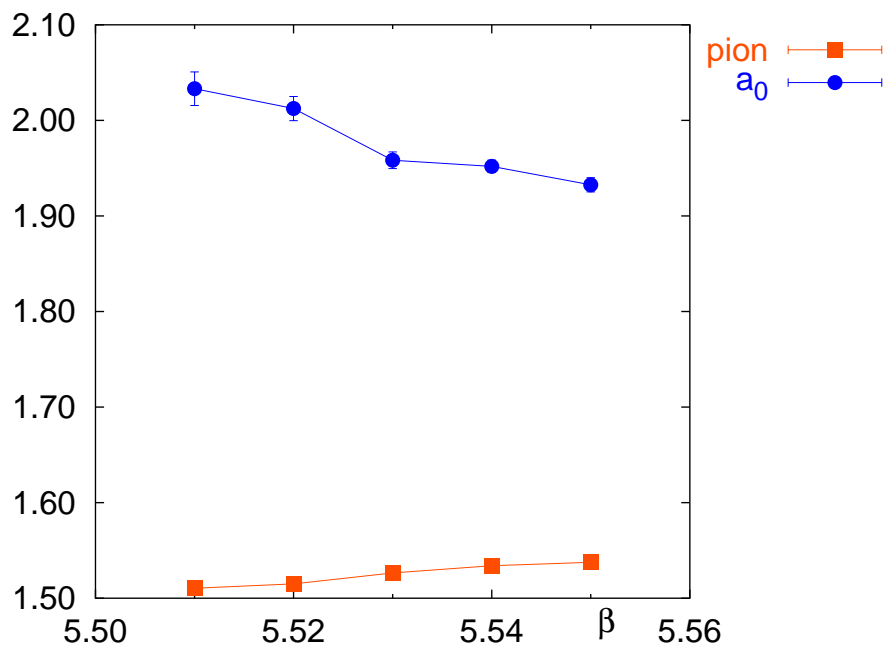


Abbildung D.9: Screening Massen m_π und m_{a_0} für alle β bei $m = 0.40$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

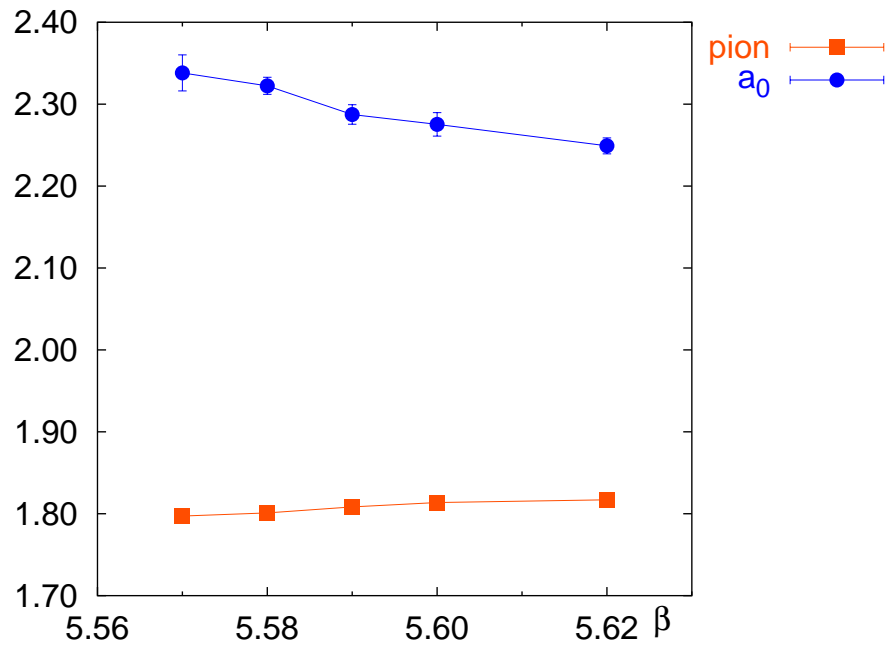


Abbildung D.10: Screening Massen m_π und m_{a_0} für alle β bei $m = 0.60$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

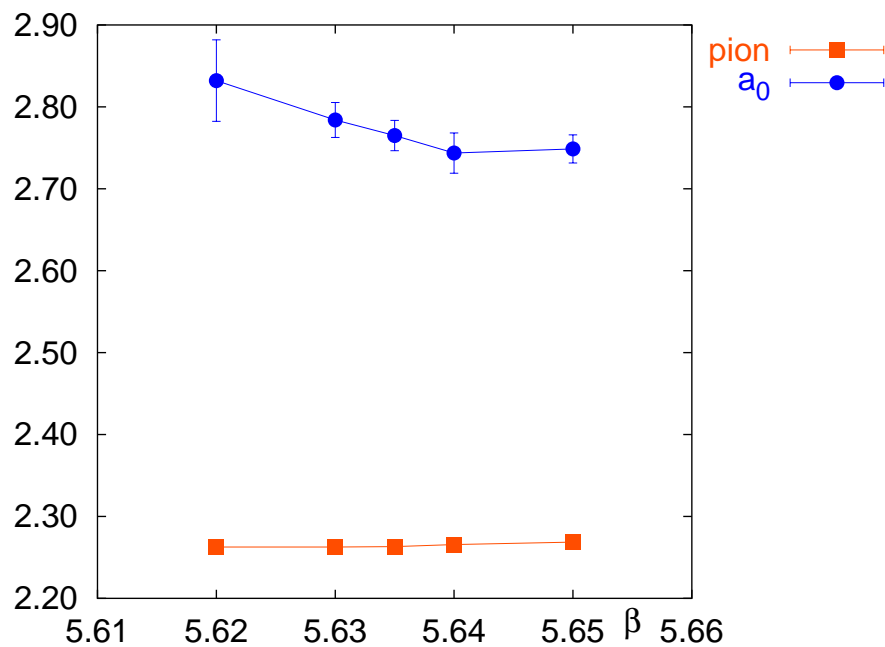


Abbildung D.11: Screening Massen m_π und m_{a_0} für alle β bei $m = 1.00$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

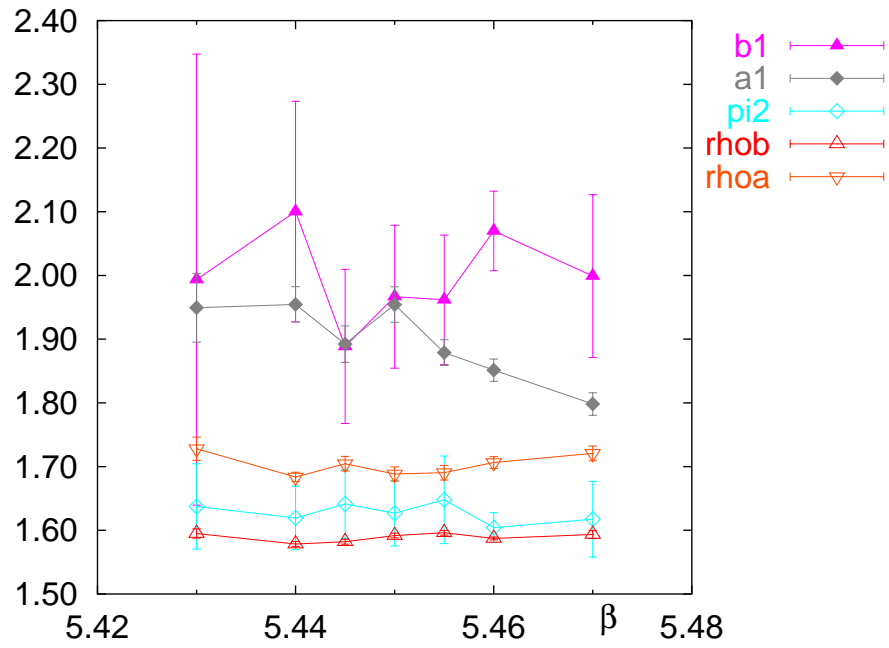


Abbildung D.12: Screening Massen m_{b_1} , m_{a_1} , m_{π_2} und m_ρ für alle β bei $m = 0.20$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

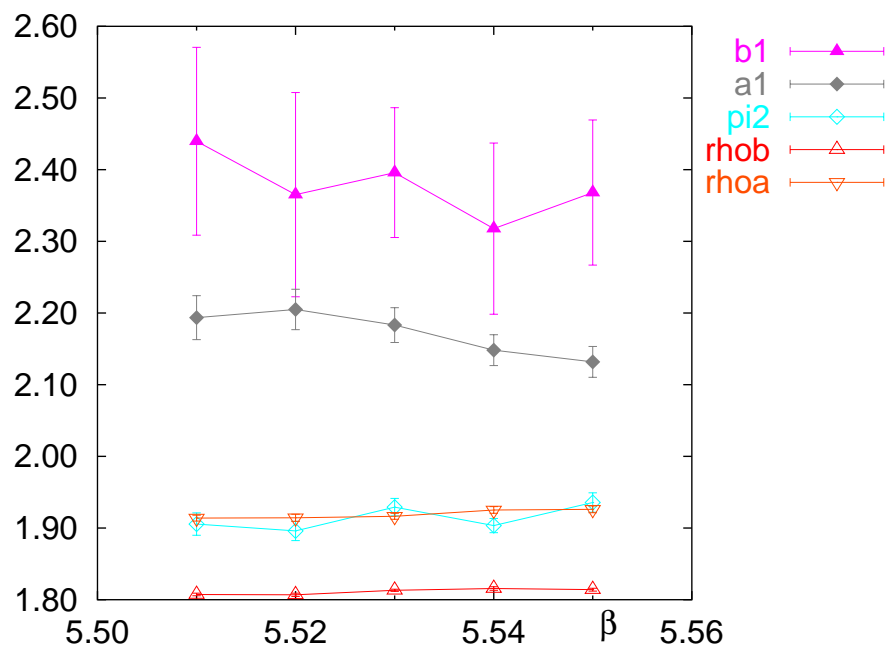


Abbildung D.13: Screening Massen m_{b_1} , m_{a_1} , m_{π_2} und m_ρ für alle β bei $m = 0.40$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

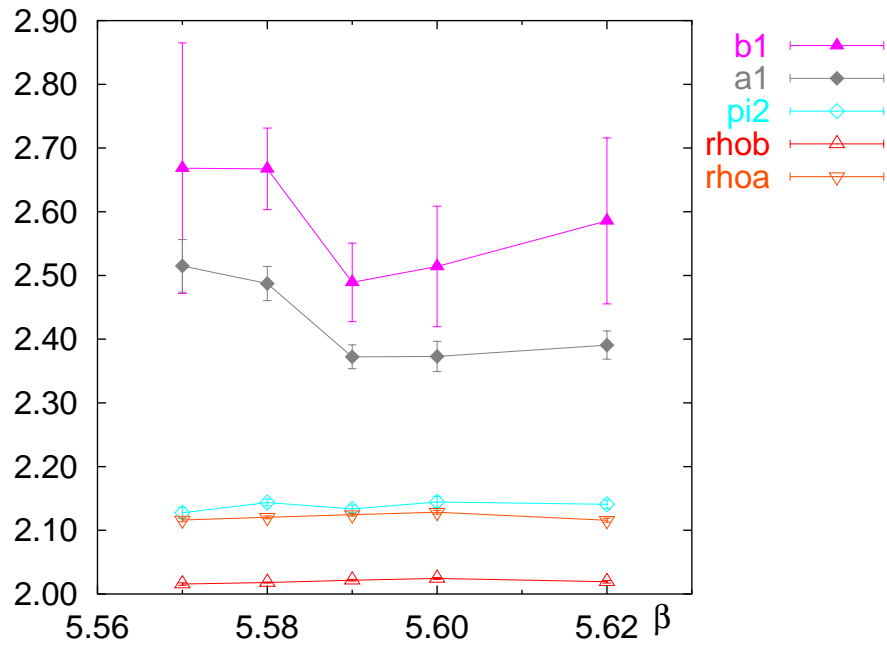


Abbildung D.14: Screening Massen m_{b_1} , m_{a_1} , m_{π_2} und m_ρ für alle β bei $m = 0.60$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

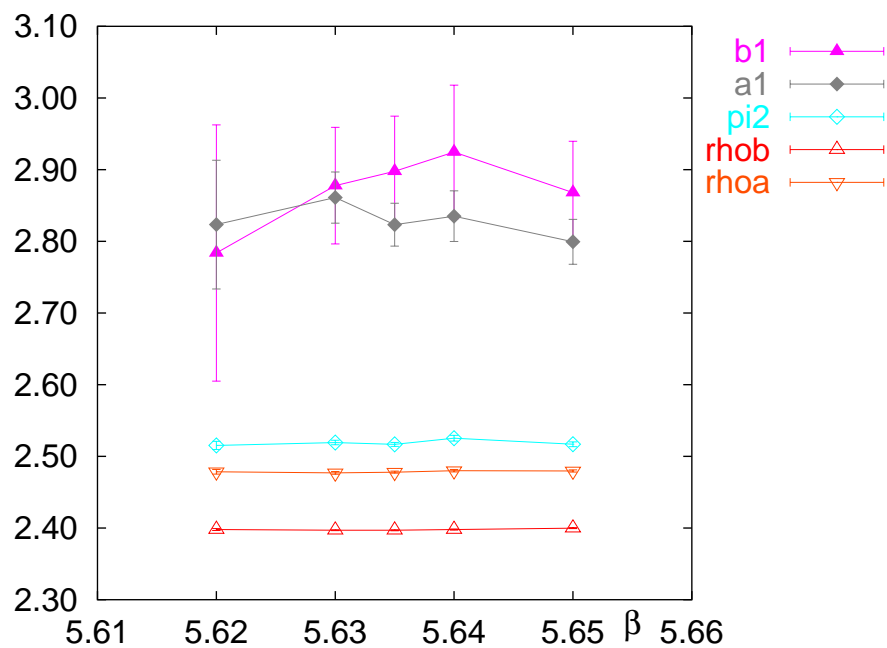


Abbildung D.15: Screening Massen m_{b_1} , m_{a_1} , m_{π_2} und m_ρ für alle β bei $m = 1.00$ auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

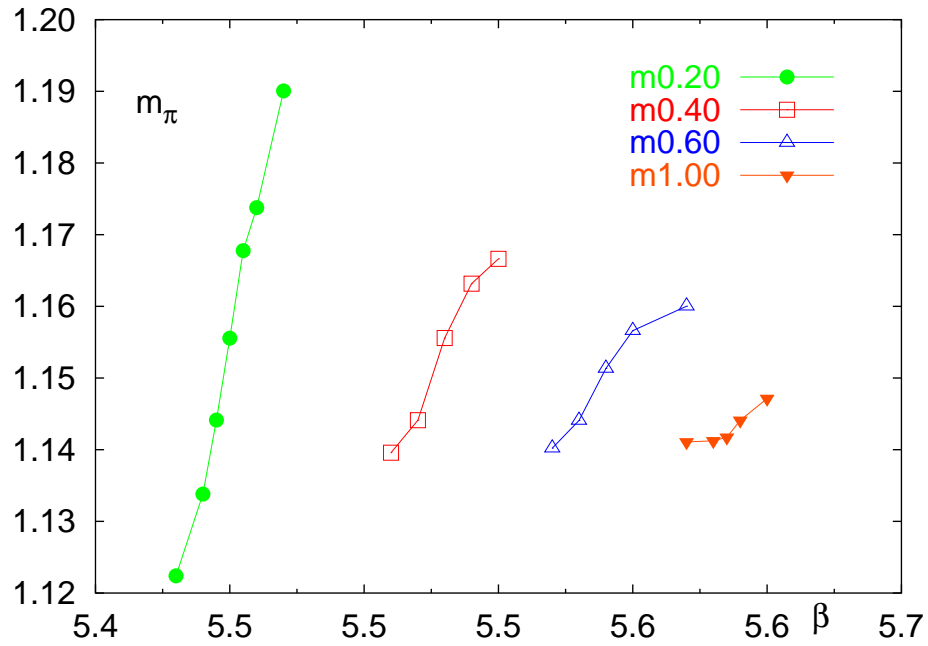


Abbildung D.16: Pion Massen m_π , verschoben auf dieselbe Höhe bei β_k , für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

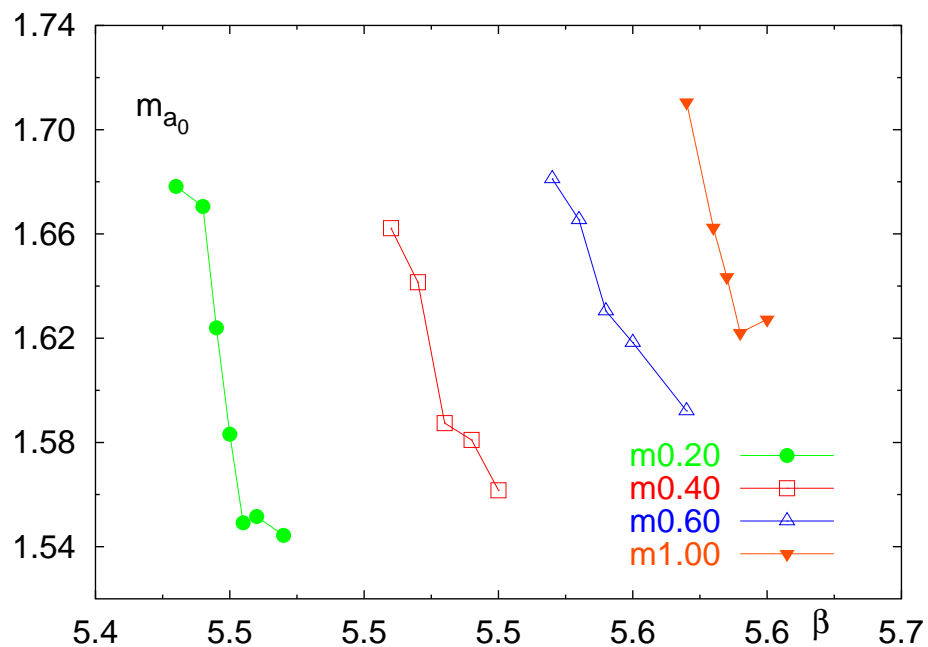


Abbildung D.17: a_0 Massen m_{a_0} , um den selben Betrag verschoben wie die Pion Massen, für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

D.2.2 Massen auf dem 16^4 Gitter

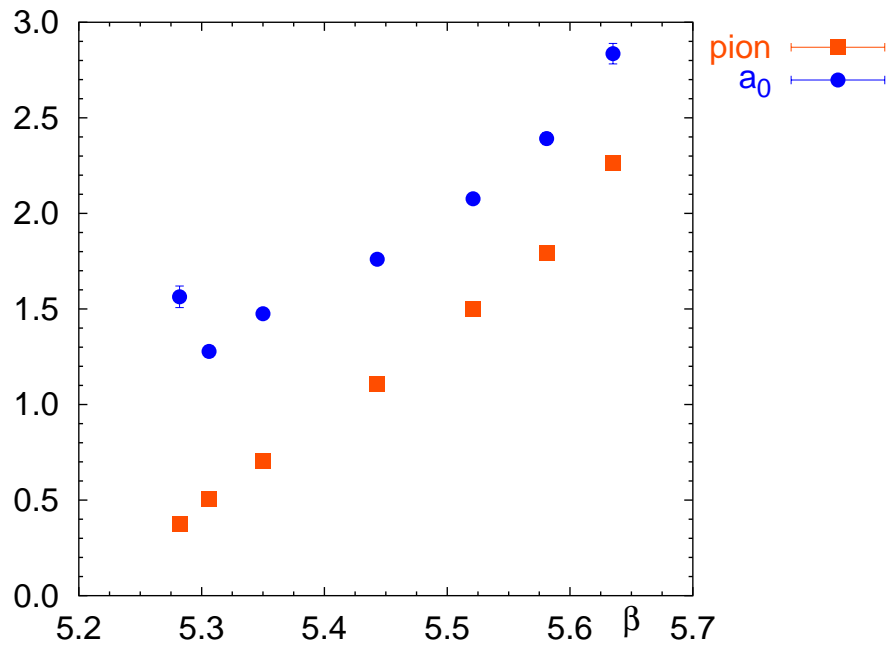


Abbildung D.18: Meson Massen m_π und m_{a_0} für alle $\beta_k(m)$ auf dem 16^4 Gitter.

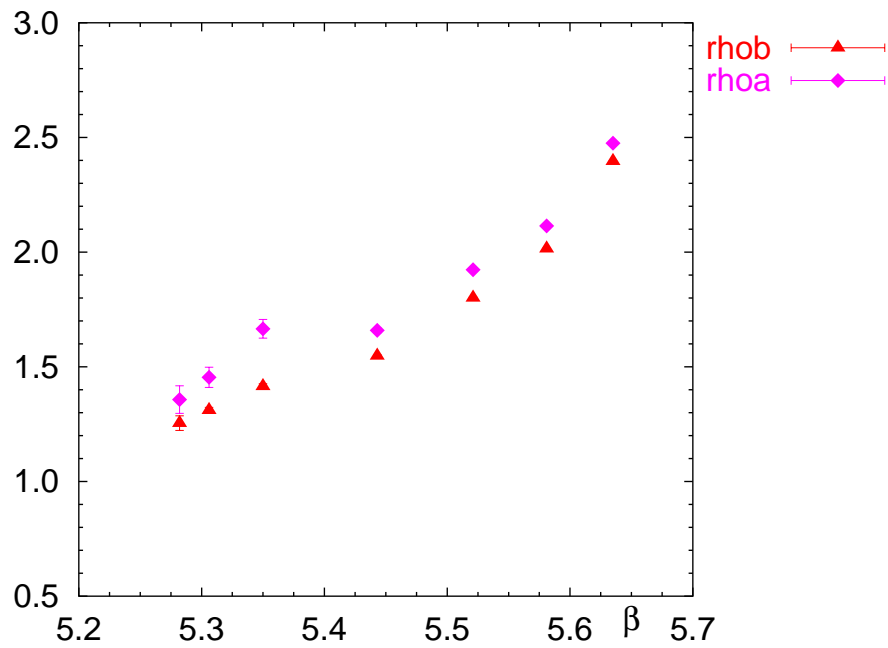


Abbildung D.19: Meson Massen $m_\rho(a)$ und $m_\rho(b)$ für alle $\beta_k(m)$ auf dem 16^4 Gitter.

D.3 Potentiale aus Wilsonloops auf dem 16^4 Gitter

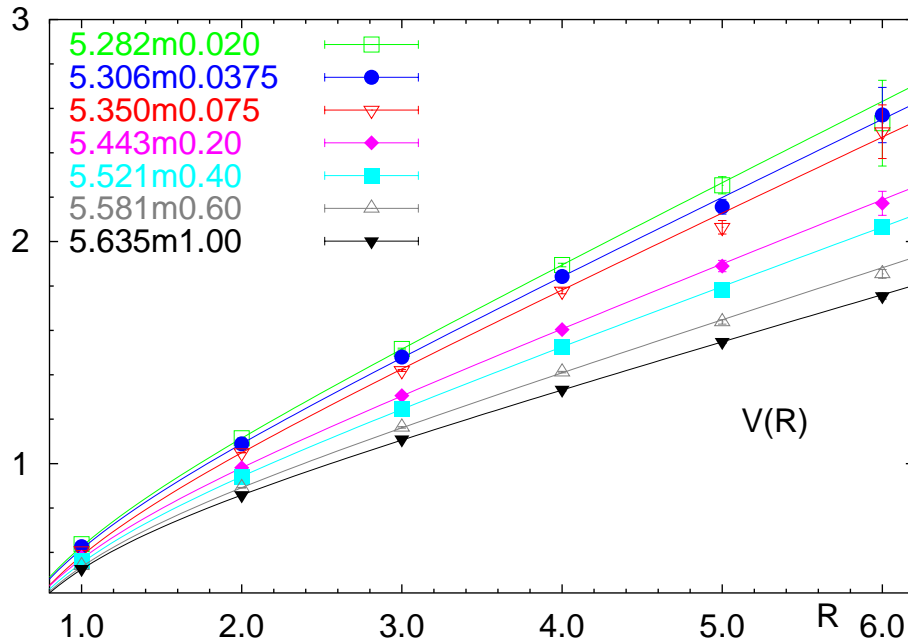


Abbildung D.20: Potential für alle $\beta_k(m)$ auf dem 16^4 Gitter. Zusätzlich sind die Fits mit dem String-Ansatz eingezeichnet.

Parameter aus den Fits an die Potentiale

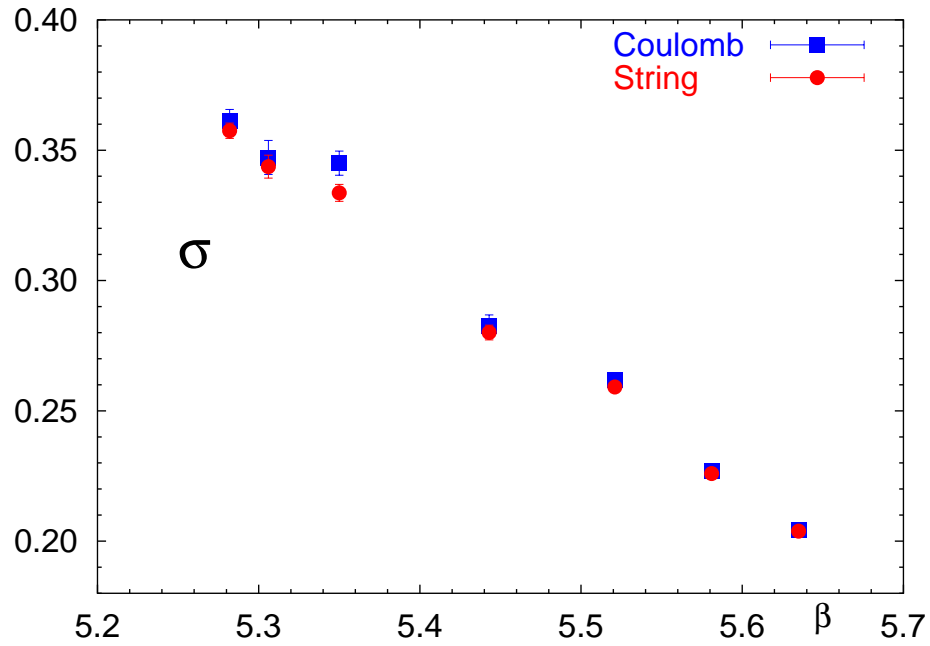


Abbildung D.21: Fitparameter σ aus den beiden Fits an das Potential für alle $\beta_k(m)$ auf dem 16^4 Gitter.

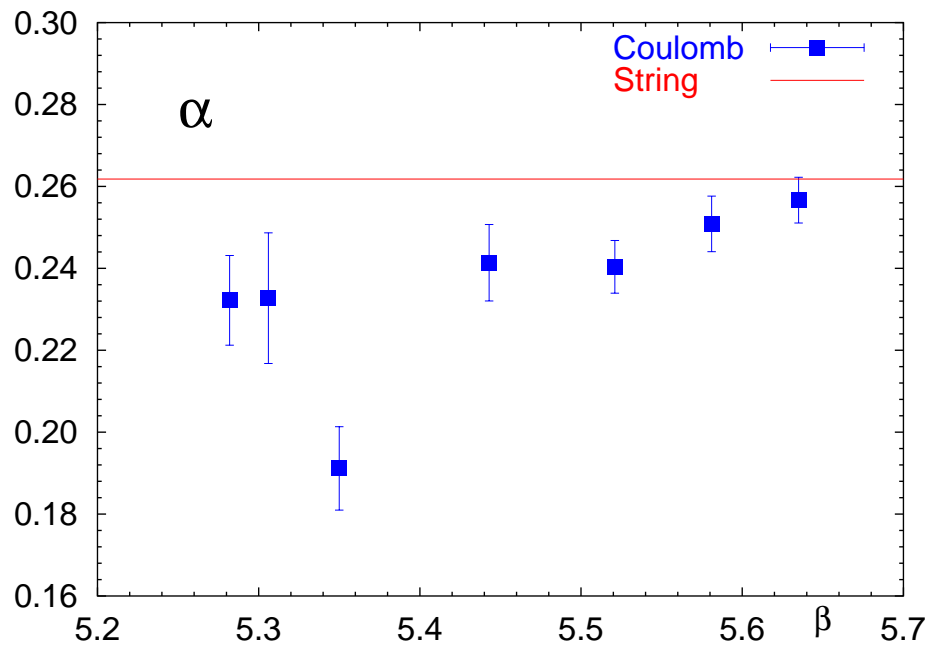


Abbildung D.22: Fitparameter α aus den beiden Fits an das Potential für alle $\beta_k(m)$ auf dem 16^4 Gitter.

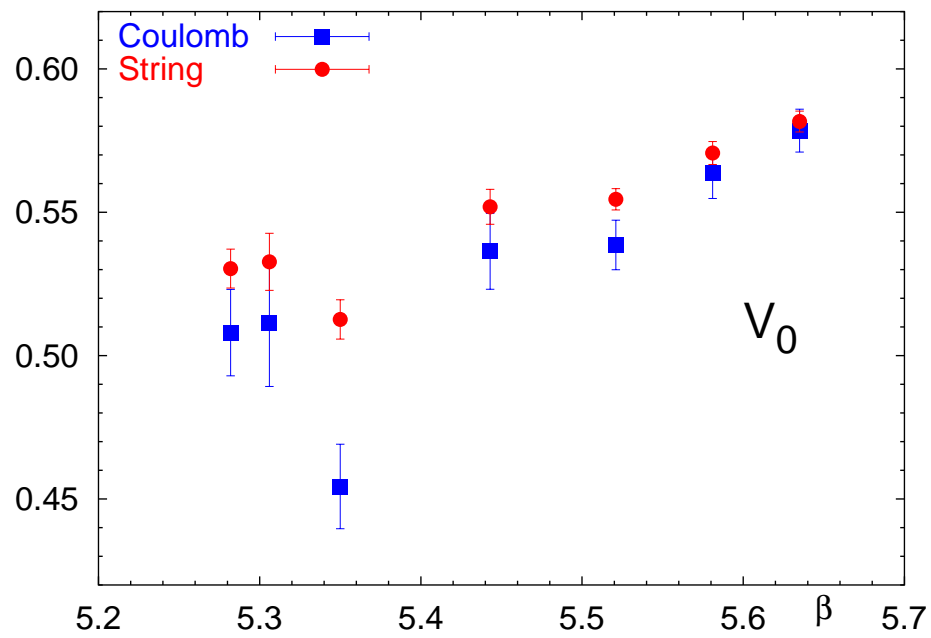


Abbildung D.23: Fitparameter V_0 aus den beiden Fits an das Potential für alle $\beta_k(m)$ auf dem 16^4 Gitter.

Anhang E

Bilder der $aQCD$

E.1 Einfache Observablen

E.1.1 Ergebnisse vom $8^3 \times 4$ Gitter

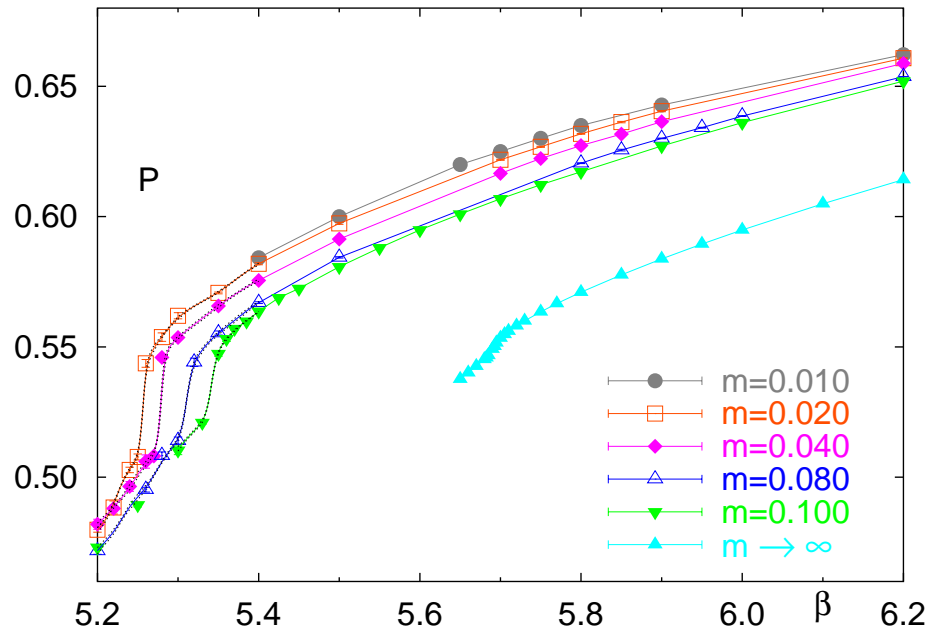


Abbildung E.1: Plaquette Erwartungswerte für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation. Zum Vergleich sind auch die Werte einer Pure Gauge Simulation ($m \rightarrow \infty$) bei $16^3 \times 4$ angegeben.

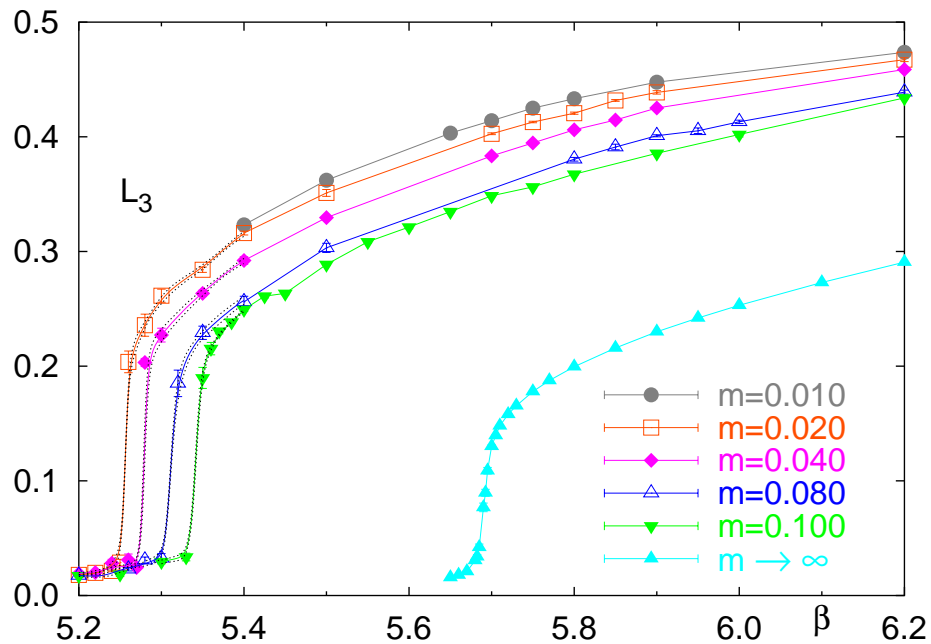


Abbildung E.2: Polyakov Loop Erwartungswerte für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation. Zum Vergleich sind auch die Werte einer Pure Gauge Simulation ($m \rightarrow \infty$) bei $16^3 \times 4$ angegeben.

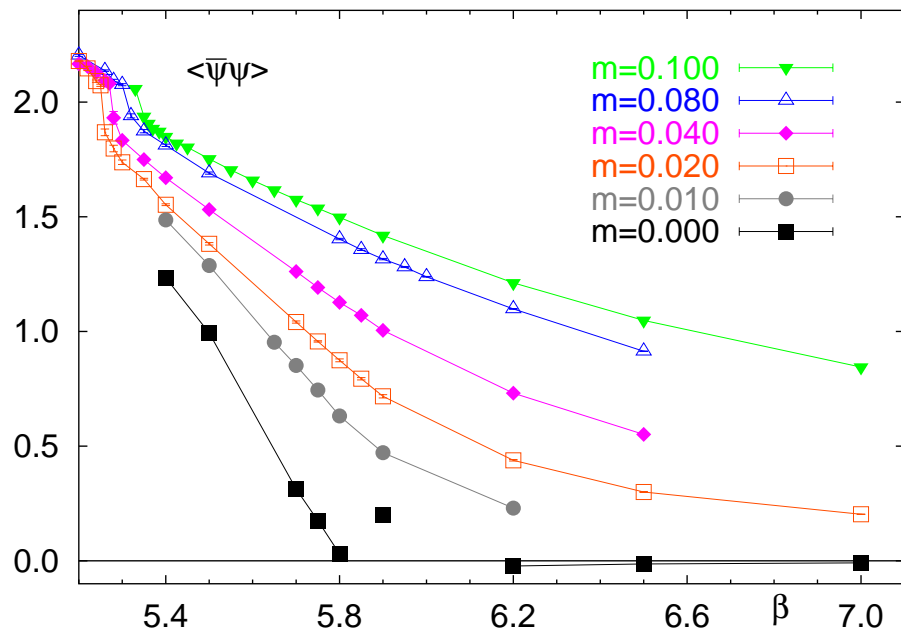


Abbildung E.3: Chirales Kondensat für einige Massen und auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Außerdem ist (in schwarz) die Extrapolation zu $m = 0$ angegeben.

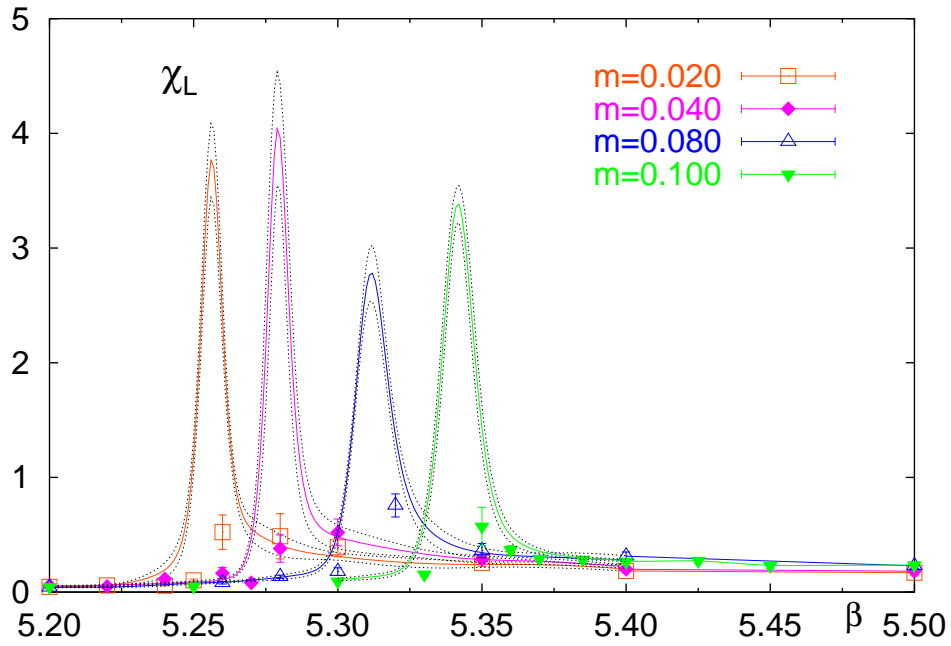


Abbildung E.4: Suszeptibilität des Polyakov Loops für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation.

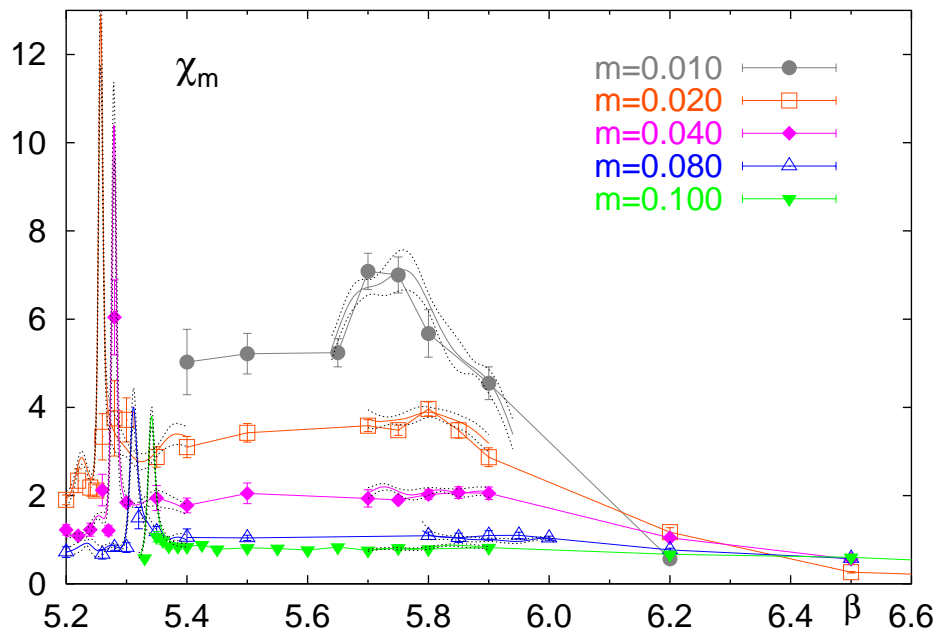


Abbildung E.5: Suszeptibilität des chirales Kondensates für einige Massen auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Linien zeigen die Ferrenberg-Swendsen Interpolation.

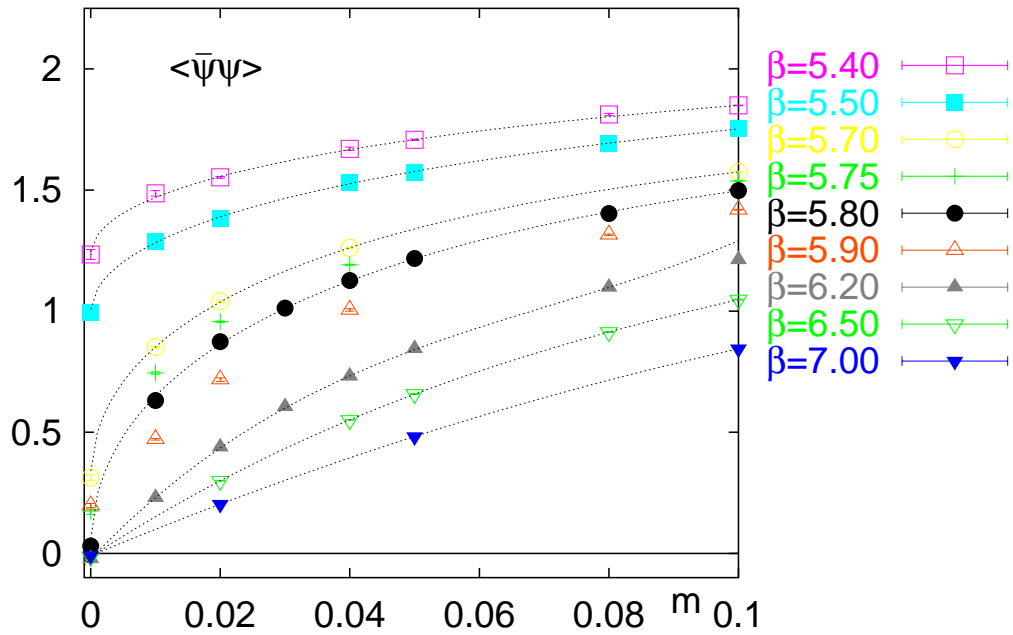


Abbildung E.6: Chirales Kondensat für einige β 's aufgetragen gegen m auf dem $8^3 \times 4$ Gitter. Die gestrichelten Linien sind Fits, die zur Extrapolation nach $m = 0$ dienen.

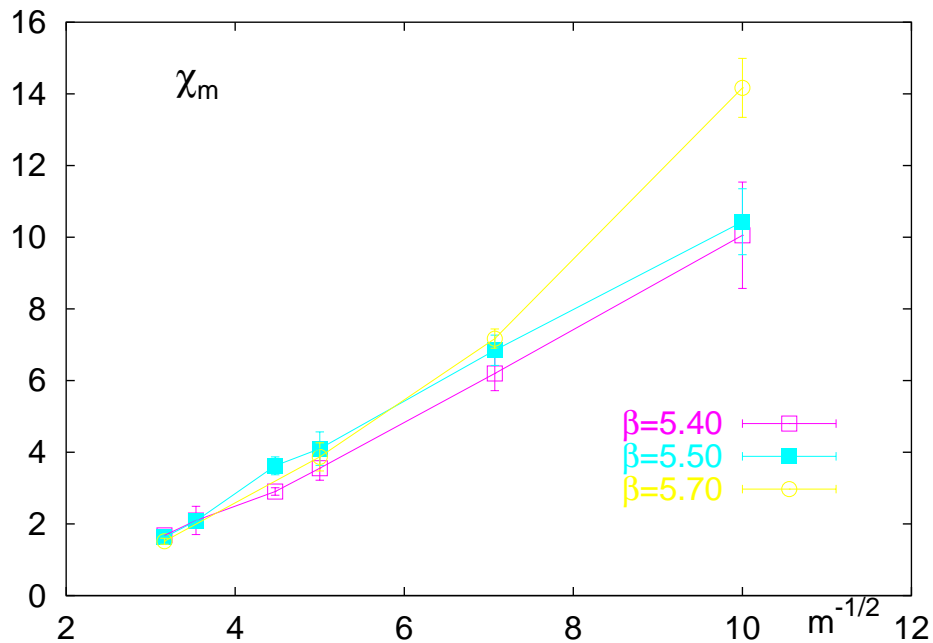


Abbildung E.7: Suszeptibilität des chirales Kondensates für einige β 's aufgetragen gegen m auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

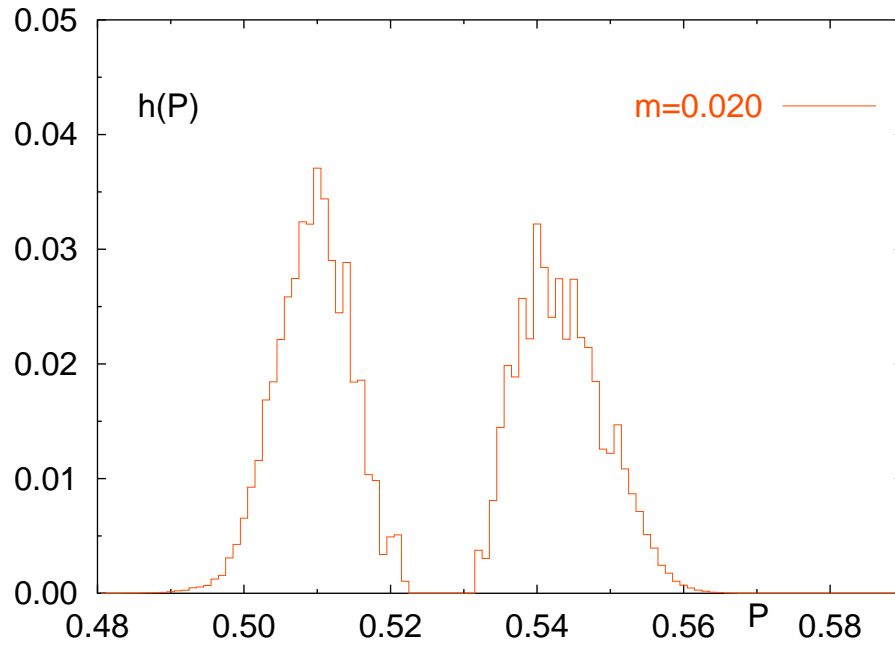


Abbildung E.8: Plaquette Histogramm bei $\beta_d = 5.256$ für $m = 0.02$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

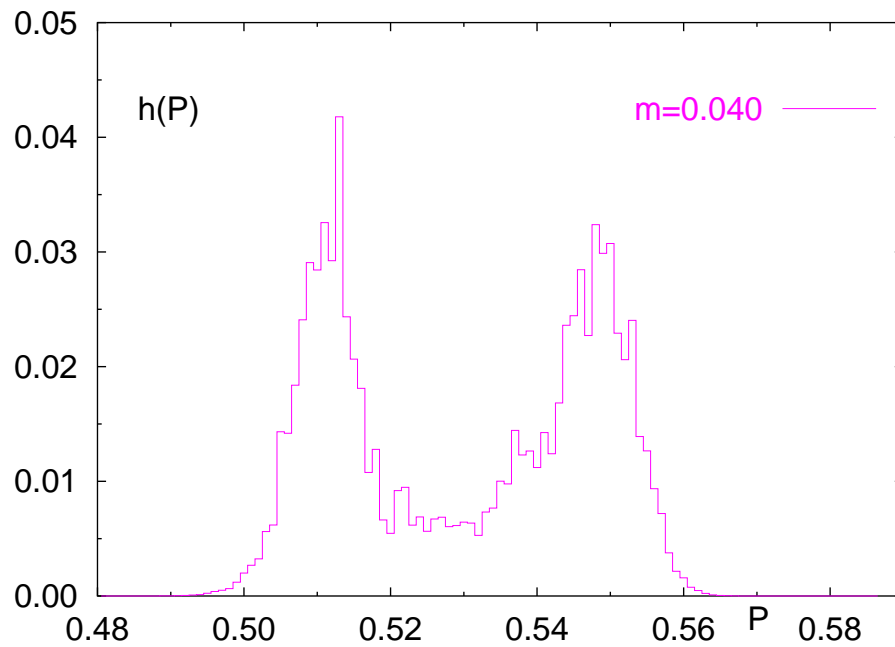


Abbildung E.9: Plaquette Histogramm bei $\beta_d = 5.279$ für $m = 0.04$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

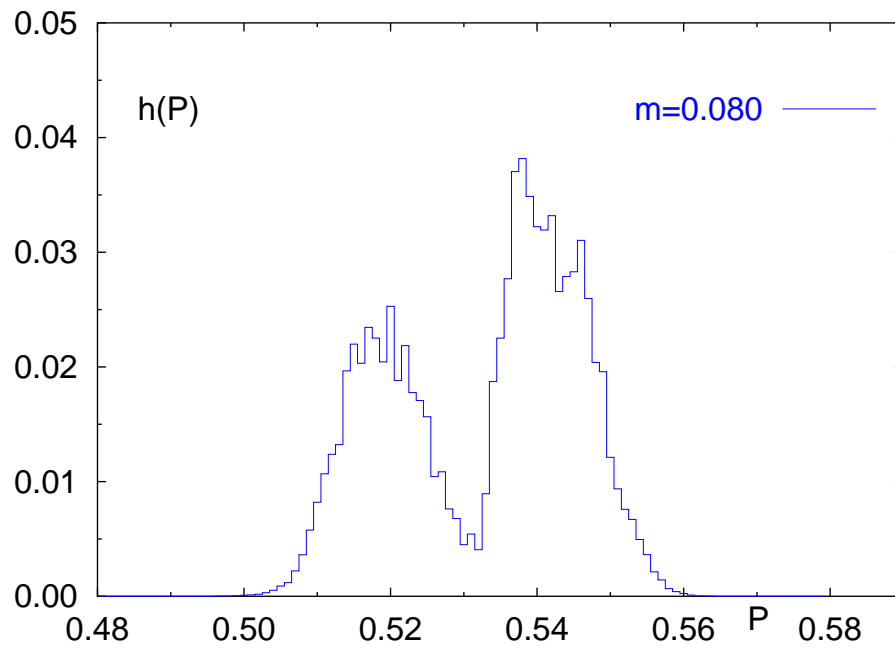


Abbildung E.10: Plaquette Histogramm bei $\beta_d = 5.312$ für $m = 0.08$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

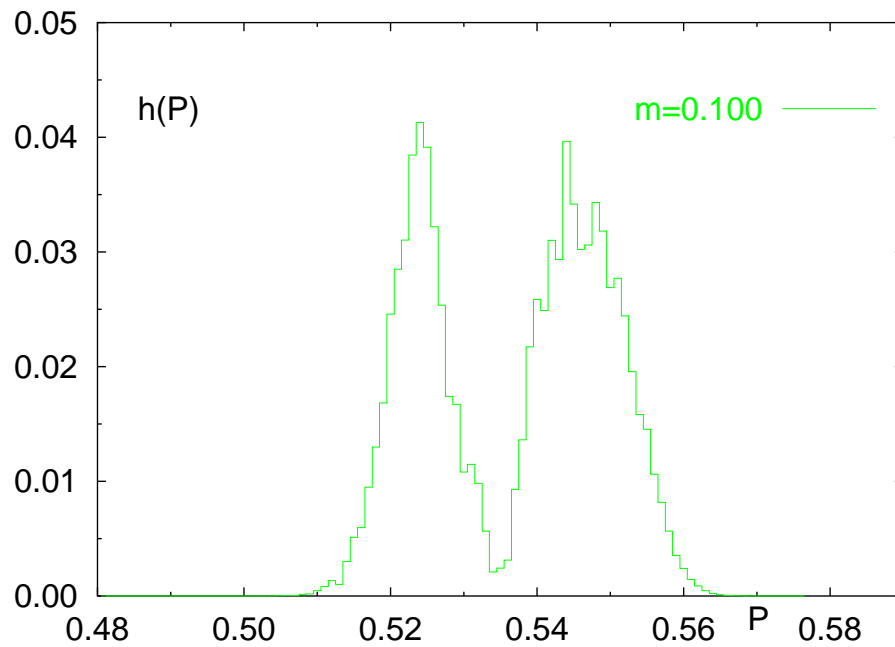


Abbildung E.11: Plaquette Histogramm bei $\beta_d = 5.342$ für $m = 0.10$ auf dem $8^3 \times 4$ Gitter.

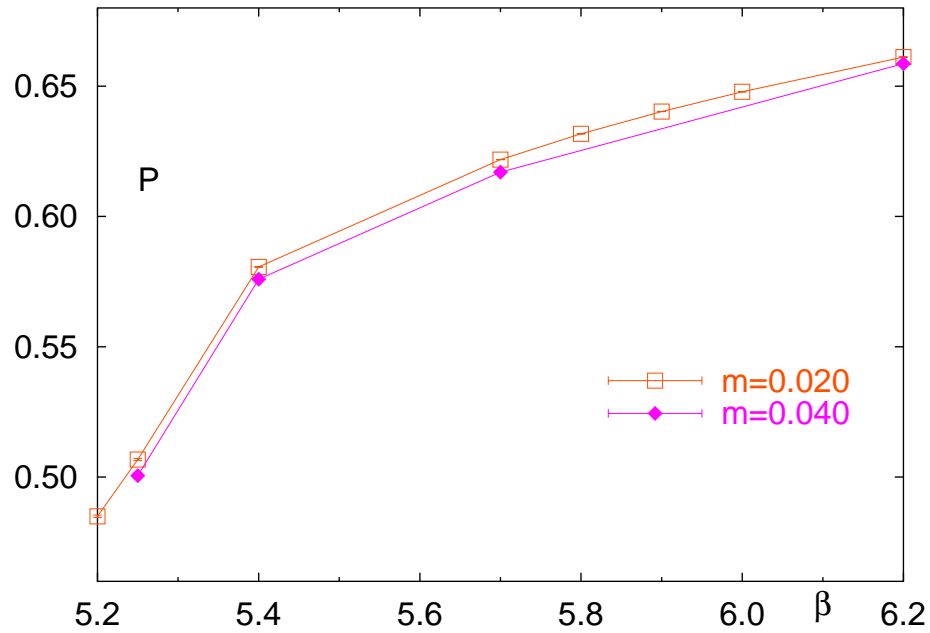
E.1.2 Ergebnisse vom $16^3 \times 4$ Gitter

Abbildung E.12: Plaquette Erwartungswerte für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert.

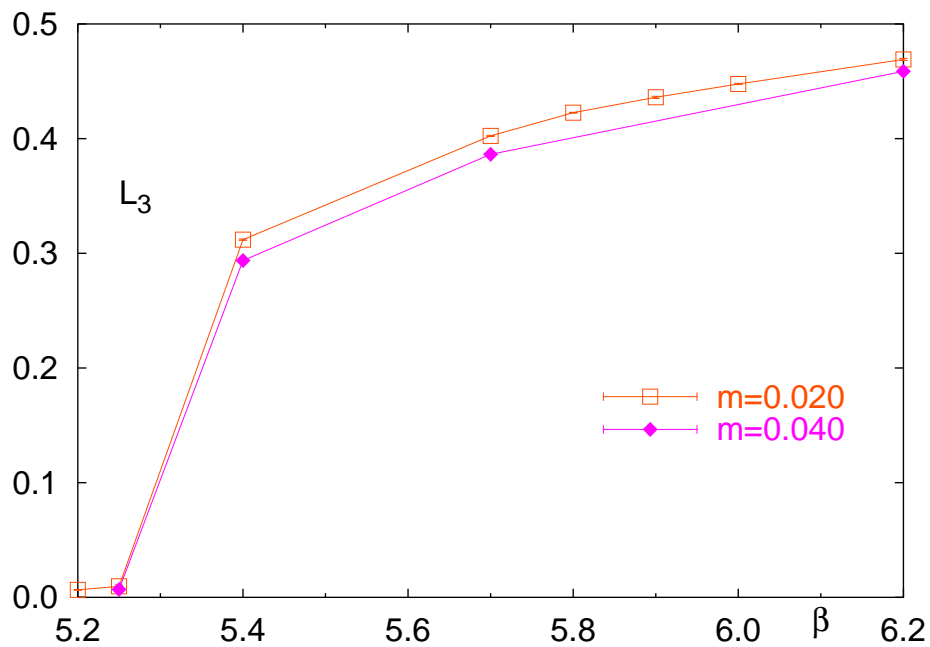


Abbildung E.13: Polyakov Loop Erwartungswerte für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert.

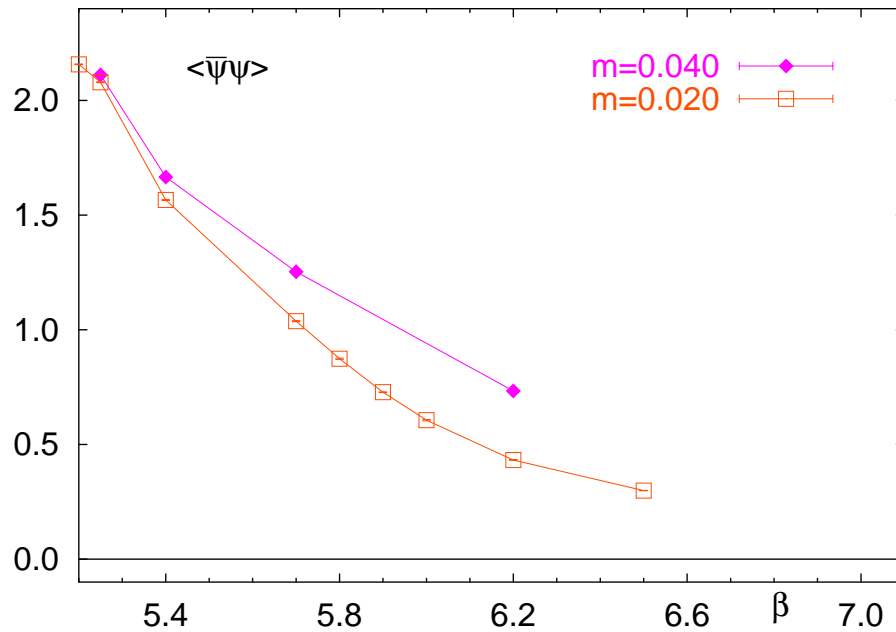


Abbildung E.14: Chirales Kondensat für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

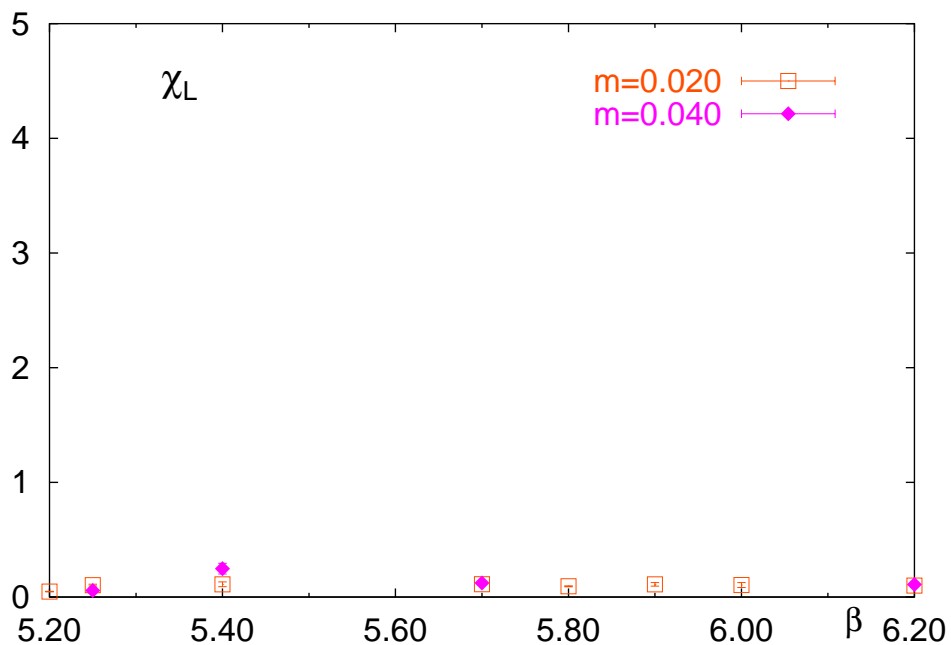


Abbildung E.15: Suszeptibilität des Polyakov Loops für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter, auf 1.0 normiert. Zum besseren Vergleich ist die Skala dieselbe wie bei den $8^3 \times 4$ Daten. Ein Peak ist hier aber nicht zu sehen, da der entsprechende Bereich, $\beta \approx 5.3$, nicht untersucht wurde.

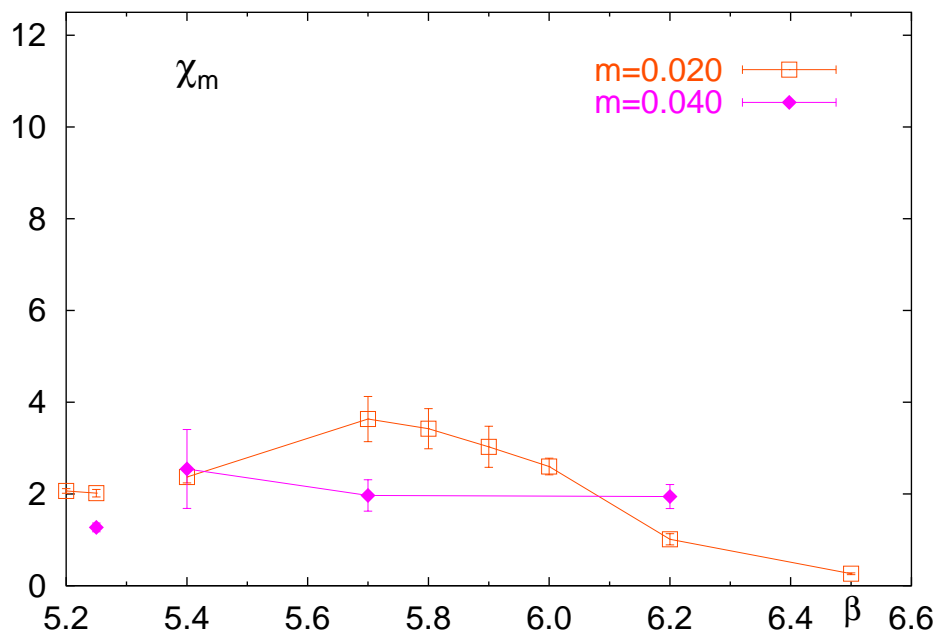


Abbildung E.16: Suszeptibilität des chirales Kondensates für alle Massen und bei allen β 's auf dem $16^3 \times 4$ Gitter.

E.2 Fundamentale und adjungierte Potentiale auf dem $16^3 \times 4$ Gitter

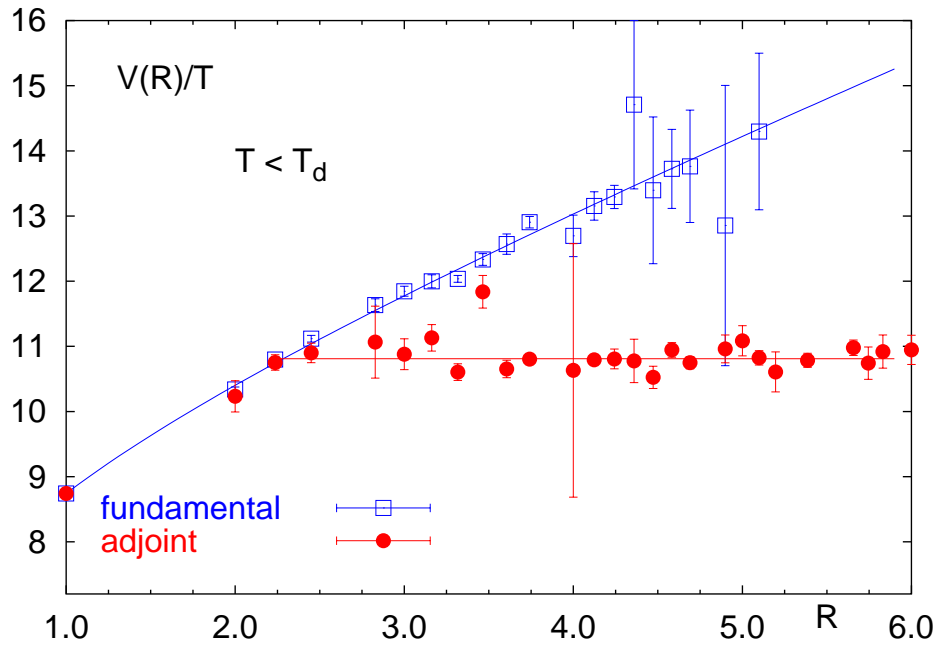


Abbildung E.17: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.25$, $m = 0.02$. Die beiden Kurven sind bei $R = 1.0$ aufeinander geschoben worden. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

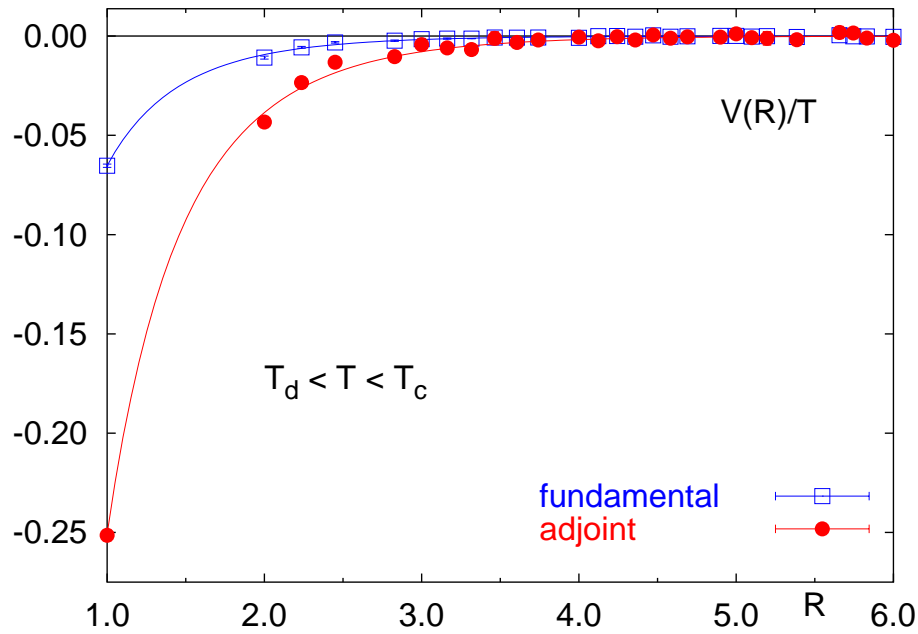


Abbildung E.18: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.40$, $m = 0.02$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

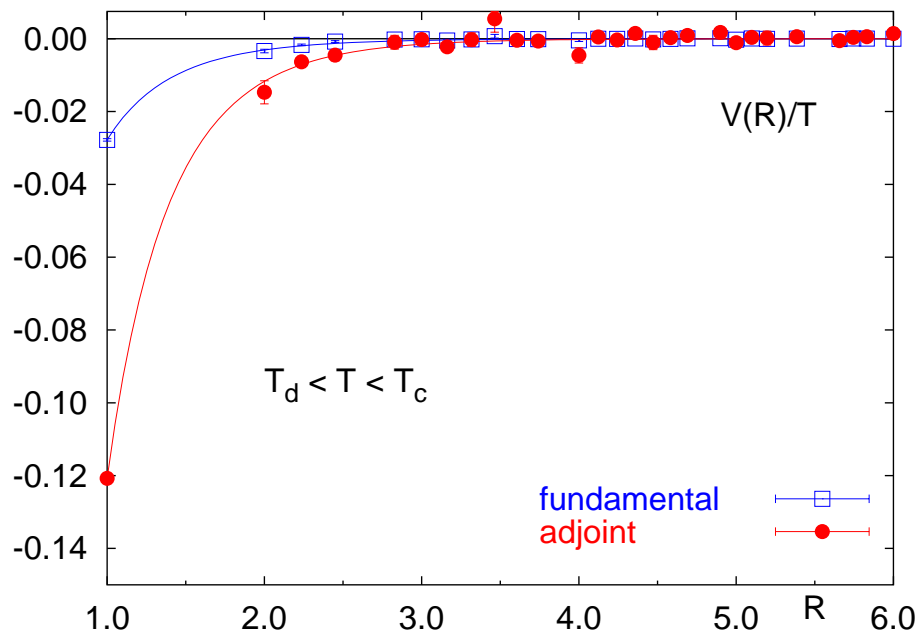


Abbildung E.19: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.70$, $m = 0.02$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

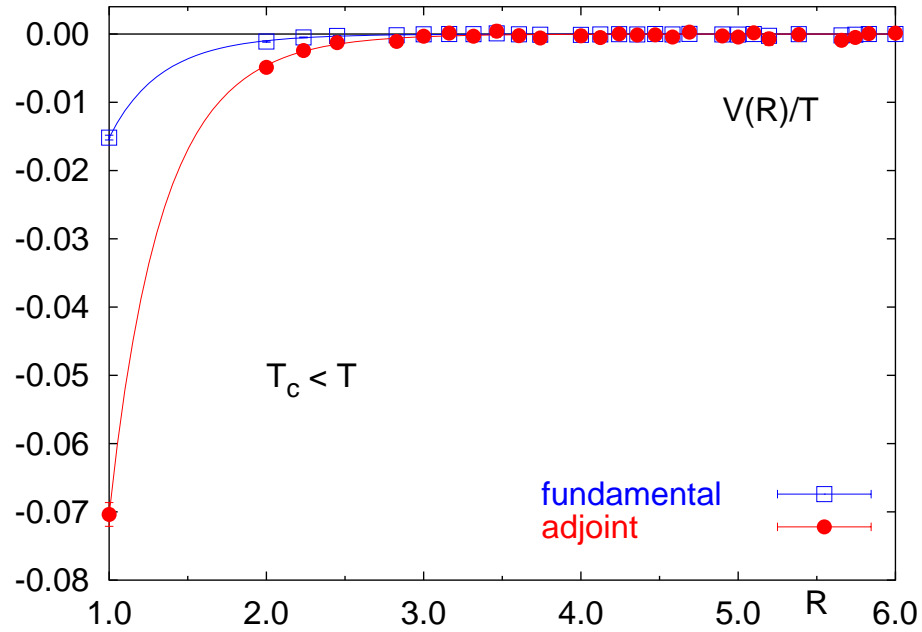


Abbildung E.20: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 6.20$, $m = 0.02$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

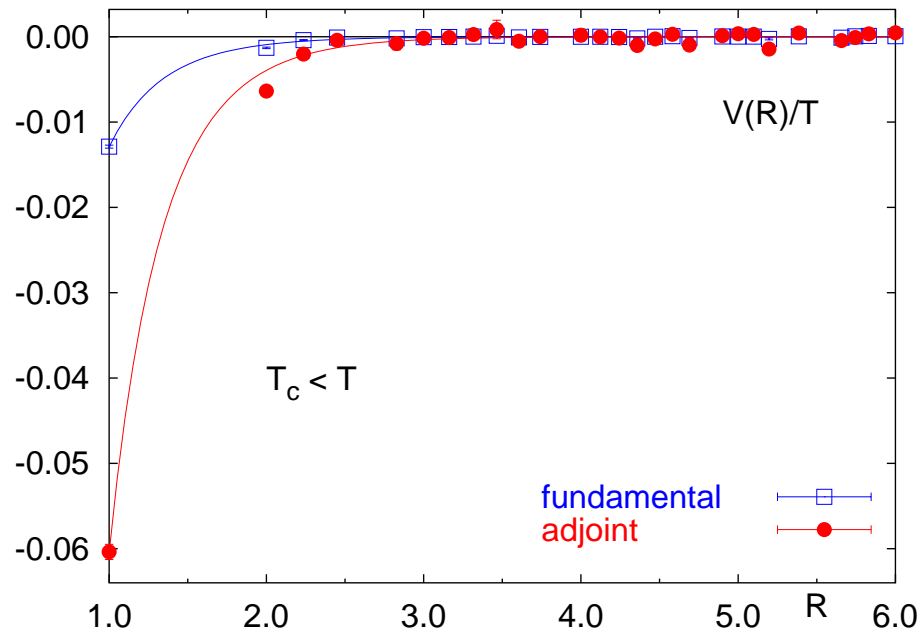


Abbildung E.21: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 6.50$, $m = 0.02$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

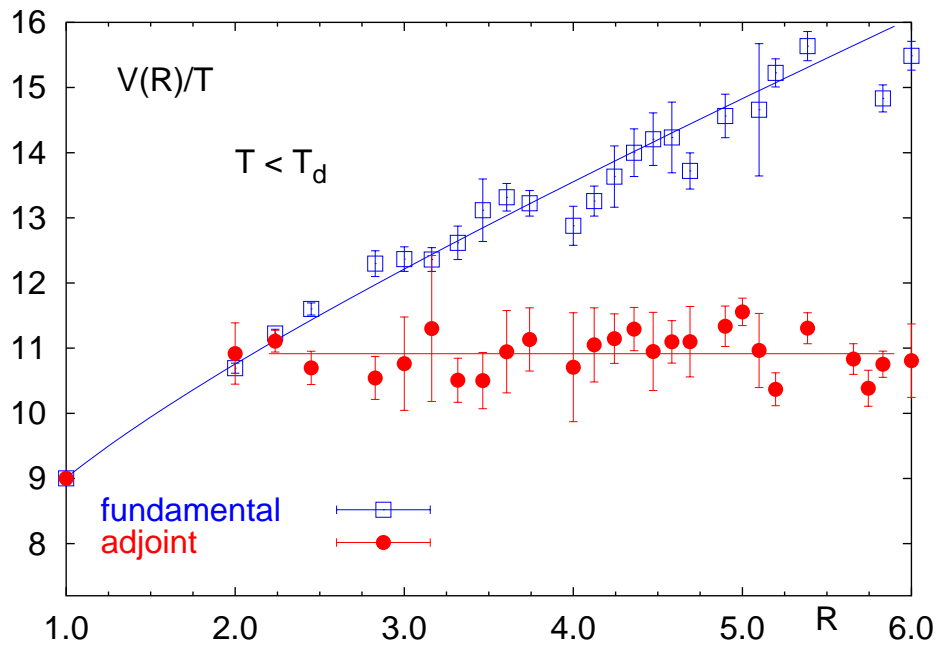


Abbildung E.22: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.25$, $m = 0.04$. Die beiden Kurven sind bei $R = 1.0$ aufeinander geschoben worden. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

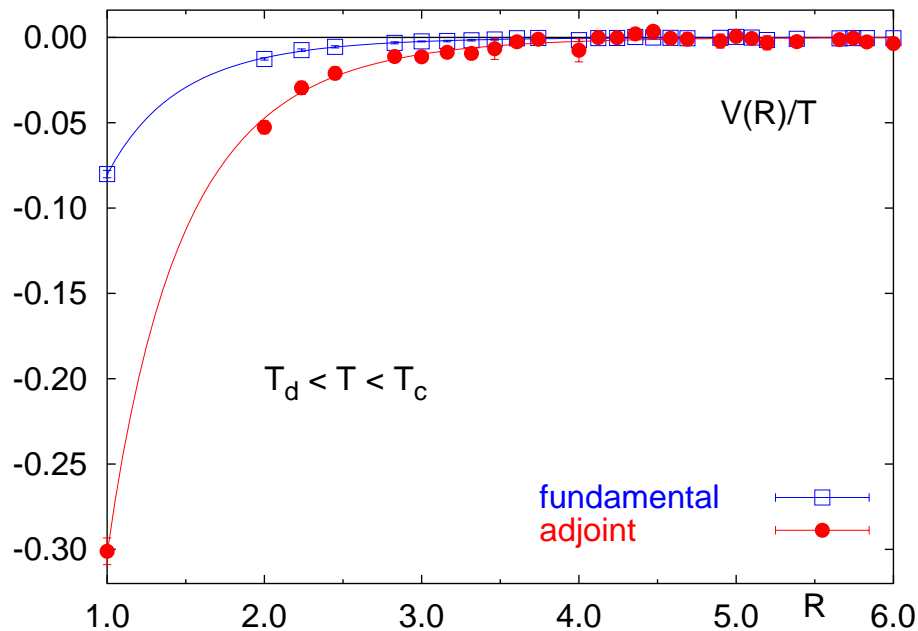


Abbildung E.23: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.40$, $m = 0.04$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

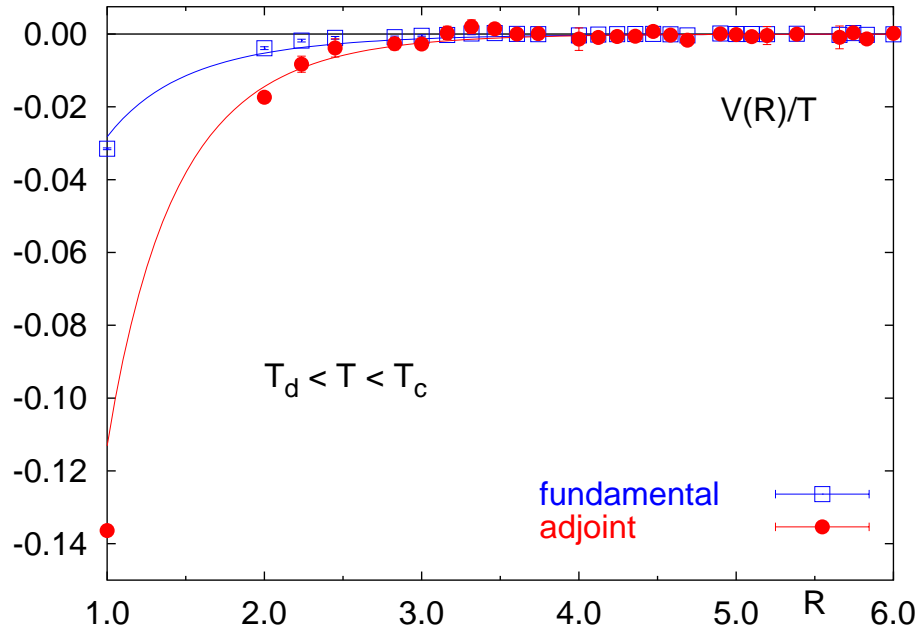


Abbildung E.24: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 5.70$, $m = 0.04$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

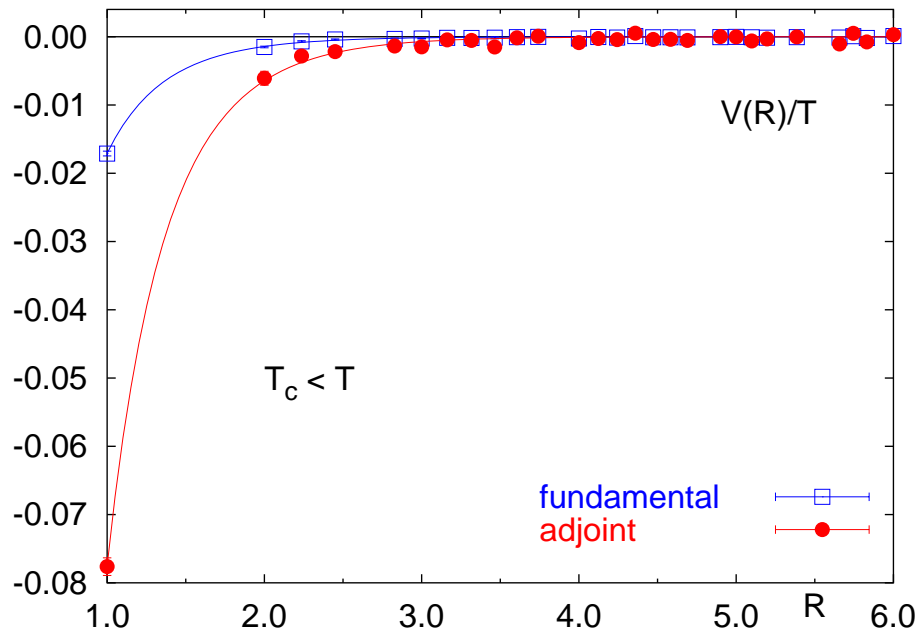


Abbildung E.25: Fundamentales und adjungiertes Potential bei $\beta = 6.20$, $m = 0.04$. Beide Kurven sind auf $V(R \rightarrow \infty) = 0.0$ normiert. Die Linien zeigen die Fits an die Daten.

E.3 Screening Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter

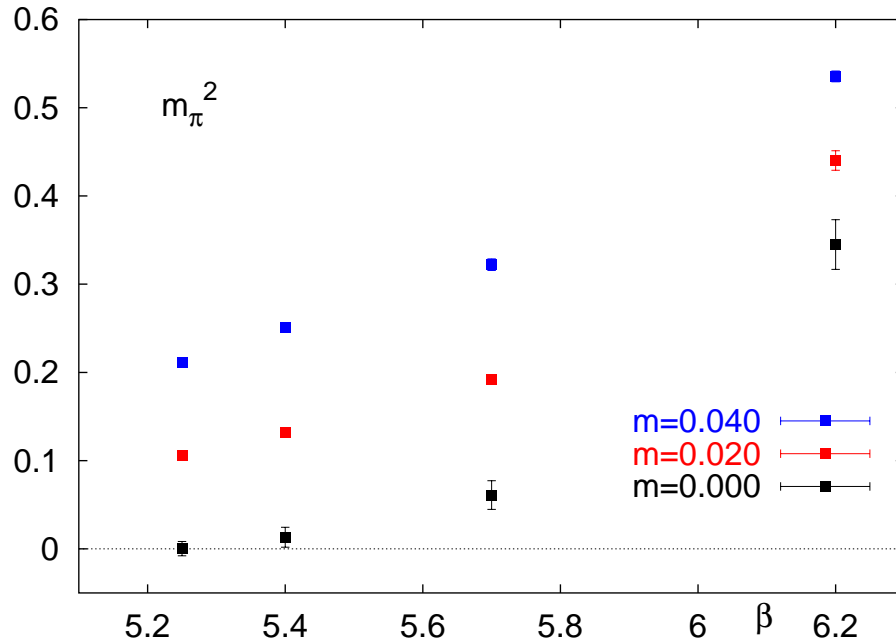


Abbildung E.26: Pion Masse im Quadrat m_π^2 für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Datenpunkte kennzeichnen die lineare Extrapolation zu $m = 0$.

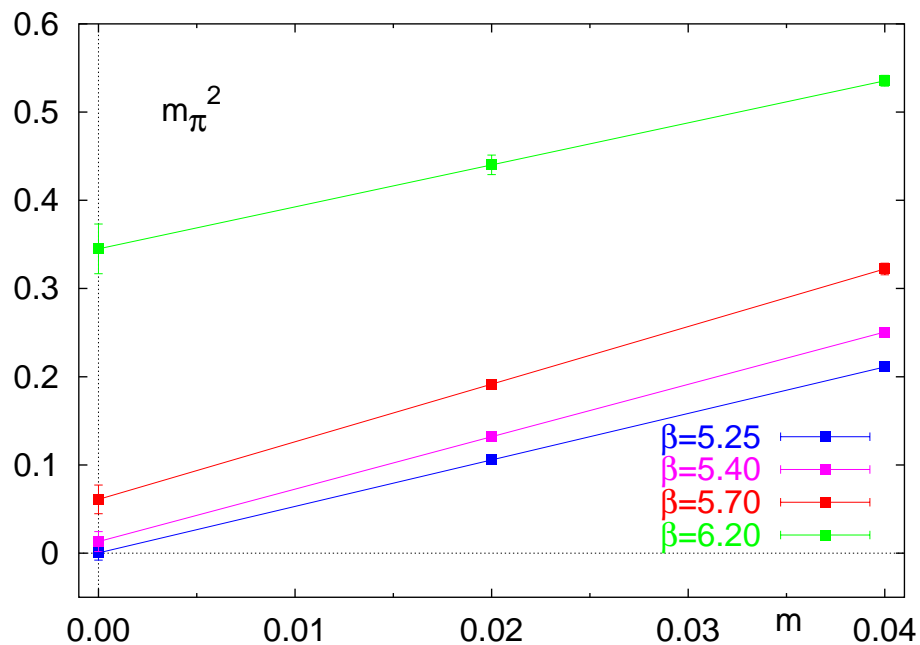


Abbildung E.27: Pion Masse im Quadrat m_π^2 für einige β aufgetragen gegen m auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die Linien zeigen die lineare Extrapolation zu $m = 0$.

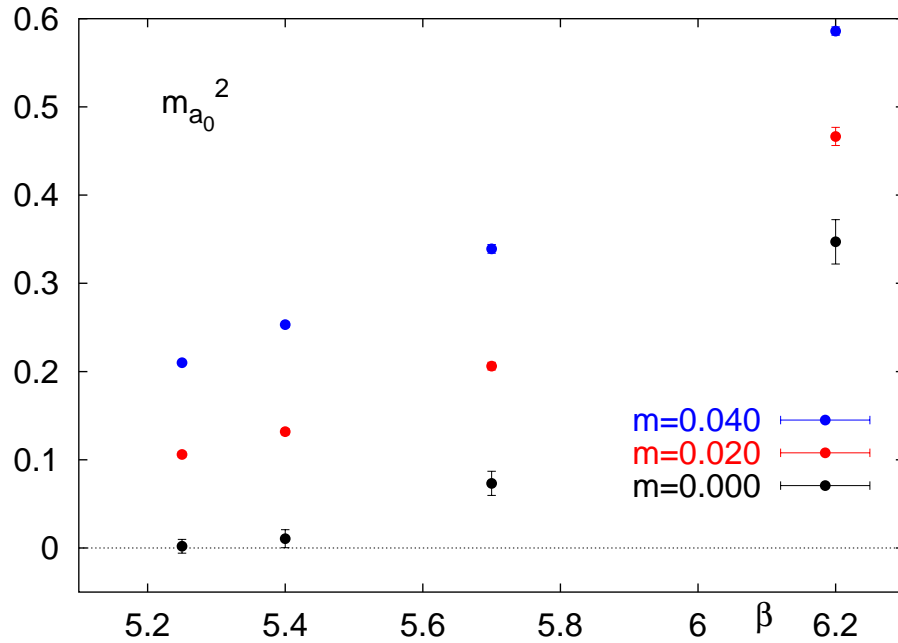


Abbildung E.28: a_0 Masse im Quadrat m_{π}^2 für alle β und alle Massen auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die schwarzen Datenpunkte kennzeichnen die lineare Extrapolation zu $m = 0$.

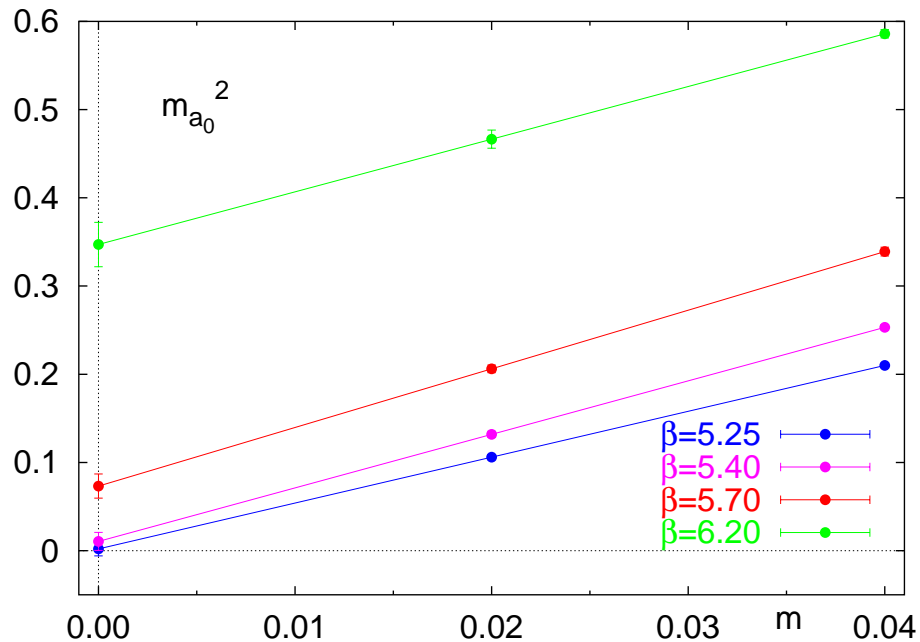


Abbildung E.29: a_0 Masse im Quadrat $m_{a_0}^2$ für einige β aufgetragen gegen m auf dem $16^3 \times 4$ Gitter. Die Linien zeigen die lineare Extrapolation zu $m = 0$.

Literaturverzeichnis

- [1] E.V. Shuryak, *Phys. Lett. B* 107 (1981), S. 103.
- [2] R. Pisarski und F. Wilczek, *Phys. Rev. D* 29 (1984), S. 339.
- [3] F. Karsch und E. Laermann, *Phys. Rev. D* 50 (1994), S. 6954.
- [4] S. Aoki, M. Fukugita, S. Hashimoto, N. Ishizuka, Y. Iwasaki, K. Kanaya, Y. Kuramashi, H. Mino, M. Okawa, A. Ukawa und T. Yoshie, *Phys. Rev. D* 57 (1998), S. 3910.
- [5] J.B. Kogut, J. Polonyi, D.K. Sinclair und H. W. Wyld, *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985), S. 1980.
- [6] J.B. Kogut, *Phys. Lett. B* 187 (1987), S. 347.
- [7] H. Rothe, "Lattice Gauge Theories, An Introduction", World Scientific (1992).
- [8] I. Montvay und G. Münster, "Quantum fields on a lattice", Cambridge University Press (1994).
- [9] L. Susskind, *Phys. Rev. D* 16 (1977), S. 3031;
H. Kluberg-Stern, A. Morel, O. Napoly, B. Petersson *Nucl. Phys. B* 220 (1983), S. 447.
- [10] S. Gottlieb, W. Liu, D. Toussaint, R.L. Renken und R.L. Sugar, *Phys. Rev. D* 35 (1987), S. 3972.
- [11] M.F.L. Goltermann und J. Smit, *Nucl. Phys. B* 255 (1985), S. 328.
- [12] M.F.L. Goltermann und J. Smit, *Nucl. Phys. B* 273 (1986), S. 366.
- [13] R. Altmeyer, K.D. Born, M. Göckeler, R. Horsley, E. Laermann und G. Schierholz (*MT_C* Collaboration), *Nucl. Phys. B* 389 (1993), S. 445.
- [14] M. Albanese et al., *Phys. Lett.* 192 B (1987), S. 163.
- [15] P. Becher, M. Böhm und H. Joos, "Eichtheorien", Teubner (1981).
- [16] C. DeTar, O. Kaczmarek, F. Karsch und E. Laermann, BI-TP-98-15, hep-lat/9808028, wird in *Phys. Rev. D* veröffentlicht.
- [17] M.E. Peskin, *Nucl. Phys. B* 175 (1980), S. 197.

- [18] M.E. Peskin und D.V. Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", Addison-Wesley (1995).
- [19] A. Smilga and J.J.M. Verbaarschot, *Phys. Rev. D* 51 (1995), S. 829.
- [20] T. Celik, F. Karsch und H. Satz, *Phys. Lett.* 97 B (1980), S. 128.
- [21] E. Laermann, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 60A (1998), S. 180.
- [22] A.M. Ferrenberg und R.H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989), S. 1195.
- [23] M. Fukugita et al., *Nucl. Phys. B* 337 (1990), S. 181.
- [24] C. Legeland et al., *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 63 (1998), S. 260.
- [25] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann und A. Peikert, BI-TP-97-18, hep-lat 9707023, wird in *Eur. Phys. J. C* veröffentlicht.
- [26] E. Laermann, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 63 (1998), S. 114.
- [27] N.A. Campbell, I.H. Jorysz und C. Michael, *Phys. Lett.* 167 B (1986), S. 91.
- [28] O. Kaczmarek, F. Karsch und E. Laermann, Vortrag auf der LATTICE '98, hep-lat/9809059.
- [29] O. Kaczmarek, Diplomarbeit (1997).
- [30] D.J. Wallace und R.K.P. Zia, *Phys. Rev. B* 12 (1975), S. 5340.
- [31] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lütgemeier und B. Petersson, *Nucl. Phys. B* 469 (1996), S. 419.
- [32] J. Engels, R. Joswig, F. Karsch, E. Laermann, M. Lütgemeier, B. Petersson, *Phys. Lett. B* 396 (1997), S.210.
- [33] Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Yoshie, T. Hoshino, T. Shirakawa, Y. Oyanagi, S. Ichii und T. Kawai, *Phys. Rev. D* 46 (1992), S. 4657.
- [34] J. Engels, F. Karsch und H. Satz, *Nucl. Phys. B* 205 [FS5] (1982), S. 285.
- [35] R. Kirchner, I. Montvay, J. Westphalen, S. Luckmann, K. Spanderen, hep-lat/9810062, und die darin zitierten Arbeiten.