

Nicht-störungstheoretische Bestimmung der Korrekturen zu Energiedichte und Druck in der reinen $SU(3)$ -Eichtheorie

Dissertation

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Tim Scheideler

27. September 1999

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Quark-Gluon-Plasma	1
1.2	QCD auf dem Gitter	2
1.3	Thermodynamische Observablen	3
1.4	Symanzik verbesserte Wirkungen	4
1.5	Perfekte Wirkungen	6
1.6	Motivation	7
2	Die Koeffizienten c_σ und c_τ	10
2.1	Das anisotrope Gitter	10
2.2	Die anisotrope Wirkung	11
2.3	Die Energiedichte	12
2.4	Methoden für die Bestimmung von c_σ und c_τ	13
2.5	Die Bestimmung der β -Funktion	16
2.6	Das Matching der Wilsonloops	17
2.7	Das Matching der Ratios	21
2.8	Die Bestimmung der Ableitung $(\partial\xi/\partial\gamma)_{\gamma=1}$	24
3	Verbesserte Meßmethoden	27
3.1	Multi-Wärmebad-Algorithmus	27
3.2	Linkintegration	27
3.3	Konstruktion von verbesserten Observablen	30
3.4	Implementation auf der Quadrics	32
4	Hochtemperaturverhalten der QS-Wirkung	36
4.1	Die Energiedichte in der Hochtemperaturphase	37
4.2	Der Druck in der Hochtemperaturphase	48
4.3	Vergleich verschiedener Wirkungen	51
4.4	Störungstheoretische Berechnung von $c_{\sigma,\tau}$	54
5	Ergebnisse der Gitterrechnungen	56
5.1	$c_{\sigma,\tau}$ für die Wilson-Wirkung	56
5.2	$c_{\sigma,\tau}$ für die 2×2 -Wirkung	62
5.3	Thermodynamik der QS-Wirkung	67

5.3.1	Bestimmung der kritischen Kopplung β_c	67
5.3.2	Bestimmung der Temperaturskala	68
5.4	$c_{\sigma,\tau}$ für die Quadratische Symanzik-Wirkung	70
6	Zusammenfassung und Diskussion	76
6.1	Methodik und Eigenschaften des Matchings	76
6.2	Der Hochtemperaturlimes	77
6.3	Einfluß von $c_{\sigma,\tau}$ auf Druck und Energie	78
6.4	QS-Wirkung für die Thermodynamik	80
A	Tabellen	81
	Literatur	84

Abbildungsverzeichnis

1.1	Fluß der Kopplungen	6
1.2	c_σ und c_τ für die Wilson-Wirkung	8
2.1	Bestimmung der β -Funktion	17
2.2	Matching der Wilsonloops	19
2.3	Einfluß von x_{\min} , t_{\min} auf das Matching der Wilsonloops	20
2.4	Matching der Ratios $R_1(x, t)$	22
2.5	Einfluß von x_{\min} , t_{\min} auf das Matching der Ratios	22
2.6	Matching der Ratios $R_3(x, t)$	23
2.7	Geradenfit von $\xi(\gamma)$	25
2.8	Geradenfits von $\xi(\gamma)$ in Abhängigkeit von x_{\min} , t_{\min}	25
2.9	Steigung der Fits	26
3.1	Reskalierung des Integrationsbereichs	30
3.2	Radius für die Linkintegration	31
3.3	Verbesserte Wilsonloops	31
3.4	Verlängerung der räumlichen Kanten	33
4.1	Die Koeffizienten c_4 , c_6 , c_8 der Energiedichte	47
4.2	Die Koeffizienten c_4 , c_6 , c_8 des Drucks	52
4.3	Vergleich der Wirkungen	53
5.1	Relativer Fehler der Wilsonloops	57
5.2	c_σ in Abhängigkeit des kleinsten Wilsonloops	58
5.3	c_σ und c_τ für die Wilson-Wirkung	60
5.4	Druck und Energie für die Wilson-Wirkung	61
5.5	c_σ in Abhängigkeit des kleinsten Wilsonloops	63
5.6	c_σ und c_τ für die 2×2 -Wirkung	64
5.7	Druck für die 2×2 -Wirkung	65
5.8	Energiedichte für die 2×2 -Wirkung	66
5.9	Suszeptibilität des Polyakovloops	68
5.10	Temperaturskala für die Quadratischen Symanzik-Wirkung	70
5.11	c_σ in Abhängigkeit des kleinsten Wilsonloops	71
5.12	Differenz der Plaquetteerwartungswerte	72
5.13	c_σ und c_τ für die Quad. Symanzik-Wirkung	73

5.14 Druck für die Quadratische Symanzik-Wirkung	74
5.15 Energie für die Quadratische Symanzik-Wirkung	75

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Das Quark-Gluon-Plasma

Eine der bemerkenswerten Voraussagen der Quantenchromodynamik (QCD) ist der Übergang von hadronischer Materie zu einer Form der Materie in der Quarks und Gluonen nicht mehr in Hadronen gebunden sind – das Quark-Gluon-Plasma. Dieser Zustand wird erreicht, wenn man Kernmaterie sehr hohen Temperaturen oder großen Dichten (3-5 mal dichter als Kernmaterie) wie im Inneren von Neutronensternen aussetzt.

Bei hadronischer Materie beobachtet man das Confinement. Die farbgeladenen Quarks sind durch gluonische Wechselwirkung in den Hadronen gebunden, so daß man keine einzelnen Quarks (Farb-Singlets) beobachten kann. Im Quark-Gluon-Plasma ist diese Beschränkung aufgehoben, man spricht von dem *Deconfinement*.

In jüngster Zeit finden sich bei Experimenten am CERN deutliche Signale für diesen Phasenübergang [1]. Durch die Kollision schwerer Kerne werden Temperaturen in Höhe von $T \approx 200\text{MeV}$ erzeugt. Als Signal für die Existenz des Plasmas dient die Unterdrückung des J/Ψ . J/Ψ entsteht bei Kollisionen durch Resonanzbindung aus einem Charmquark c und einem Anticharmquark \bar{c} . Im Quark-Gluon-Plasma sind die lang-reichweitigen Confinement-Kräfte abgeschirmt. Die Charmquarks sind im Mittel zu weit voneinander entfernt, so daß die c, \bar{c} -Paarbildung unterdrückt wird. Diese Bestätigung der Vorhersage ist für die QCD ein großer Erfolg.

Einer der Forschungsschwerpunkte der Hochenergiephysik in den nächsten zehn Jahren wird die Untersuchung der Plasmaphase sein. Um diesen Bemühungen zum Erfolg zu verhelfen, ist es wichtig, die Natur des Phasenübergangs und die Struktur der Plasmaphase deduktiv genau zu untersuchen. Die QCD stützt sich dabei auf störungstheoretische und nicht-störungstheoretische Methoden. Der Grenzfall besonders hoher Temperaturen jenseits des Phasenüberganges läßt sich störungstheoretisch behandeln, aber nicht der Bereich des Phasenüberganges.

1.2 QCD auf dem Gitter

Um den Phasenübergang von hadronischer Materie zum Quark-Gluon-Plasma zu untersuchen, muß man nicht-störungstheoretische Methoden benutzen. In den letzten Jahren hat die Gittereichtheorie wesentliche Resultate zu der Natur des Phasenübergangs geliefert. Grundlage der numerischen Berechnungen ist die Zustandssumme,

$$Z = \int DU_\mu \int D\psi \int D\bar{\psi} \exp \left(- \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3x \mathcal{L}(U_\mu, \psi, \bar{\psi}) \right). \quad (1.1)$$

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(U_\mu, \psi, \bar{\psi})$ wird über die Eichfelder U_μ und die Fermionfelder $\psi, \bar{\psi}$ integriert. Der Druck p wird im Gleichgewichtszustand und bei fester Temperatur durch Ableiten nach dem Volumen gewonnen. Die anderen thermodynamischen Größen lassen sich aus der Funktion $p(T)$ gewinnen. Im Formalismus der Feldtheorie bei endlicher Temperatur entspricht die Ausdehnung in Zeitrichtung der inversen Temperatur.

Durch die Diskretisierung auf dem Gitter, d.h. durch die Einführung des Gitterabstandes a , wird die Theorie ultraviolett reguliert. Ein vierdimensionales Gitter mit $N_\sigma^3 \times N_\tau$ Punkten besitzt ein räumliches Volumen $V = (N_\sigma a_\sigma)^3$ und eine Temperatur $T = 1/N_\tau a_\tau$.

Für die physikalische Aussagekraft der Ergebnisse ist es entscheidend, die Effekte der endlichen Ausdehnung des Volumens zu kontrollieren. Man wählt ein ausreichend großes Volumen, welches deutlich größer sein sollte, als die zu untersuchenden Teilchen und ihre Wechselwirkungen. Man spricht von dem thermodynamischen Grenzfall $V \rightarrow \infty$.

Der Gitterabstand a sollte hingegen deutlich kleiner sein als die auf dem Gitter betrachteten Objekte. Der Gitterabstand a kommt aber als wählbarer Parameter nicht explizit vor, a wird durch die dimensionslose Kopplung g induziert. Das Ziel ist der Übergang zum Kontinuum $a \rightarrow 0$, welcher aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD dem Grenzfall der verschwindenden Kopplung $g \rightarrow 0$ entspricht.

Den Zusammenhang zwischen der Kopplung g und dem Gitterabstand a beschreibt die Skalenfunktion $a = \Lambda_L R(g^2)$ bzw. die β -Funktion. Für ausreichend kleine g existiert eine universelle Skalenfunktion $R(g^2)$, welche nicht von der Observablen abhängt, aus der sie ermittelt wurde. In diesem *Skalenbereich* ist es nicht notwendig den Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ auszuführen, man kann physikalische Ergebnisse gewinnen, in dem man einen Maßstab einführt und diesen mit experimentellen Daten eicht. Bei der Simulation mit Fermionen bieten sich Massen an, weil sich Massen gut experimentell bestimmen lassen, $m_\rho^{\text{Gitter}} = m_\rho^{\text{phys.}} \cdot a^{\text{phys.}}$. Verhältnisse von Massen sind dimensionslos, sie lassen sich mit einem endlichen a bestimmen.

Simulationen mit dynamischen Fermionen sind sehr aufwendig im Bezug auf die Rechenzeit. In der *reinen Eichtheorie* betrachtet man den Grenzfall unendlicher Quarkmassen. Die Quarks sind statisch, es wird keine Quark-Antiquark-Paarbildung berücksichtigt. Die Wechselwirkung findet nur durch die Gluonen statt, Schleifen aus Quarks im Gluonpropagator werden nicht betrachtet. Die reine Eichtheorie ist für

Untersuchungen interessant, bei denen rein gluonische Effekte schon das qualitative Verhalten der Theorie beschreiben. Als Längenmaßstab bei Simulationen in der reinen Eichtheorie benutzt man zum Beispiel die Wurzel der Saitenspannung, welche auf dem Gitter dimensionlos ist und im Kontinuum inverse Längendimension besitzt, $\sqrt{\sigma^{\text{Gitter}}} = \sqrt{\sigma^{\text{phys.}}} \cdot a^{\text{phys.}}$. Mit der experimentell gemessenden Saitenspannung von $\sqrt{\sigma} = 420(20)$ MeV lassen sich beispielsweise Kopplungen in Temperaturen umrechnen.

1.3 Thermodynamische Observablen

Ein wesentliches Ziel auf dem Gebiet der Feldtheorie bei endlicher Temperatur ist das Auffinden der *Zustandsgleichung* der QCD. Man sucht die Abhängigkeit des Drucks $p(T)$ als Funktion der Temperatur. Die anderen thermodynamische Observablen wie die Energiedichte ϵ oder die Entropiedichte s lassen sich aus $p(T)$ gewinnen.

Man interessiert sich für das Verhalten dieser Größen im Bereich des Phasenübergangs und ihr Verhalten bei der Annäherung an den Grenzfall unendlicher Temperatur. Intuitiv erwartet man aufgrund der asymptotischen Freiheit für sehr große Temperaturen ein gering wechselwirkendes Gas aus Quarks und Gluonen. Im Grenzfall unendlicher Temperatur verschwindet die Wechselwirkung vollständig. Diese freie Theorie wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz $\epsilon_{\text{SB}}/T^4 = 3p_{\text{SB}}/T^4 = 2(N^2 - 1)\pi^2/30$ beschrieben, wobei N die Dimension der Eichgruppe und damit $2(N^2 - 1)$ die Anzahl der gluonischen Freiheitsgrade ist. Der Faktor 2 steht für die zwei Spinfreiheitsgrade des Gluons.

Bei der Berechnung auf dem Gitter verhindern ultraviolette cut-off Effekte, die der endliche Gitterabstand induziert, eine korrekte Bestimmung der thermodynamischen Observablen. Die hochfrequenten Moden $\sim T$ leisten einen wesentlichen Beitrag zu den Observablen, so daß die Observablen auf dem Gitter nicht zum Stefan-Boltzmann-Grenzwert des Kontinuums streben. Der Grenzwert wird in Abhängigkeit der Art der Diskretisierung der Wirkung und der verwendeten Gittergröße verschoben. Mit Hilfe der Gitterstörungstheorie läßt sich der verschobene Grenzwert bestimmen. Man betrachtet die Konvergenz der Gitterobservablen zu diesem Grenzwert.

Auch in der Störungstheorie im Kontinuum bereitet die Beschreibung des Gluonengases bei hohen Temperaturen Schwierigkeiten. Hier sind Infrarot-Effekte für die schlechte Konvergenz der Entwicklung der thermodynamischen Potentiale verantwortlich. Diese Probleme führen selbst bei einer drei-loop Entwicklung bis zur Ordnung g^5 auch für Temperaturen $T \gg T_c$ noch zu schlechter Konvergenz [2].

Vergleichen wir das Verhalten der thermodynamischen Observablen auf dem Gitter mit der Störungstheorie im Kontinuum. Auf dem Gitter finden wir im Bereich des Phasenübergangs das Maximum der Differenz $(\epsilon - 3p)/T^4$ etwas oberhalb der kritischen Temperatur T_c . Die Energiedichte ϵ/T^4 steigt kurz nach dem Phasenübergang steil an und erreicht bei $2T_c$ schon über 80% von ϵ_{SB}/T^4 . Der folgende Anstieg

vollzieht sich aber nur logarithmisch, d.h. für die Temperaturen, welche mit der Gittertheorie simulierbar sind, zeigt sich eine deutliche Diskrepanz zwischen $\epsilon(T)$ und ϵ_{SB} . Der Druck p/T^4 steigt auf dem Gitter im Bereich des Phasenübergangs langsamer an als die Energiedichte und erreicht erst bei etwa $3 T_c$ 80% des Grenzwertes p_{SB}/T^4 .

In der Störungstheorie im Kontinuum beobachtet man analog nur ein logarithmisches Anwachsen der freien Energiedichte (damit auch des Drucks und der Energiedichte) mit der Temperatur für kleine Kopplungen [2]. Die Ursache hierfür liegt in der β -Funktion, die Temperatur steigt nur logarithmisch mit der Verringerung der Kopplung, $\ln T \sim 1/g^2$. Diese Form der Annäherung der Kopplung an ihren asymptotischen Fixpunkt $g = 0$ ist eine Eigenschaft der nicht-abelschen Eichtheorien.

1.4 Symanzik verbesserte Wirkungen

Der bei der Diskretisierung der Theorie eingeführte Gitterabstand a findet sich in den Observablen wieder. Die Ergebnisse sind mit einem Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(a^n)$ behaftet. Die Potenz n hängt von dem gewählten Schema der Diskretisierung ab. Für die Beschreibung der Physik im Kontinuum ist es notwendig die Ergebnisse für verschiedene Abstände a gegen 0 zu extrapolieren oder den systematischen Fehler durch den Gitterabstand im Vorfeld so zu minimieren, daß er im statistischen Fehler verschwindet.

Mit *verbesserten Wirkungen* bezeichnet man Wirkungen, die die Auswirkung des Gitterabstandes auf das Ergebnis verringern. Die Idee der Verbesserung der Wirkung stammt schon aus den frühen 80' Jahren. Allerdings machten sich die systematischen Fehler gegenüber den statistischen Fehlern erst bemerkbar, als die Leistung der Rechner zunahm.

Die Formulierung der Wirkung von Wilson mittels der aus vier Links bestehenden Plaquette ist nur eine von beliebig vielen Möglichkeiten den Feldstärketensor $\frac{1}{4}F^{\mu,\nu}F_{\mu,\nu}$ zu diskretisieren. Die sogenannte Wilson-Wirkung zeichnet sich durch ihre Lokalität aus, besitzt aber einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$. Für die Gewinnung von physikalisch relevanten Ergebnissen muß man hier zu recht großen β -Werten gehen. Große β -Werten bedeuten aber aufgrund der asymptotischen Freiheit einen kleinen Gitterabstand, d.h. man muß relativ große Gitter benutzen [3]. Wie oben erwähnt, ist die Temperatur auf dem Gitter durch $T = 1/N_\tau a_\tau$ gegeben. So entspricht bei fester Temperatur eine größere Anzahl von Gitterpunkten N_τ einem kleineren Gitterabstand in Zeitrichtung a_τ . Entsprechendes gilt für das räumliche Volumen.

In der QCD-Thermodynamik wächst der Rechenaufwand sehr schnell mit der Anzahl der Gitterpunkte in Zeitrichtung N_τ an. Die Energiedichte ϵ hat die Einheit Länge^{-4} , der Wert der dimensionslosen Energiedichte auf dem Gitter $\hat{\epsilon}$ ist damit proportional zum Gitterabstand⁴, $\epsilon = \hat{\epsilon}/a^4$. Bei konstanter Temperatur bedeutet das $\hat{\epsilon} \sim 1/N_\tau^4$. Um einen gleichen relativen Fehler auf einem größeren Gitter zu erhalten, muß man die Statistik mit N_τ^8 anwachsen lassen. Zur Wahrung eines angenäherten

thermodynamischen Limes muß das räumliche Volumen des Gitters $\sim N_\sigma^3$ bei der Wahl eines größeren N_τ ebenfalls ausgedehnt werden. Bleibt das Verhältnis N_σ/N_τ konstant, so wächst das Gitter und somit die Anzahl der Multiplikationen für das Erzeugen einer neuen Konfiguration (engl. *update*) mit N_τ^4 , die Statistik aber nur mit N_τ^2 . So ergibt sich insgesamt für die Rechenzeit in Abhängigkeit der Diskretisierung in Zeitrichtung:

$$\text{Rechenzeit} \sim N_\tau^8 \cdot N_\tau^4 \cdot 1/N_\tau^2 = N_\tau^{10} .$$

Im Bereich des Phasenübergangs bietet ein größeres Gitter zusätzlich mehr Platz für weitreichende Korrelationen, welche das Erzeugen von unabhängigen Konfigurationen verlangsamen.

Diese Abschätzung zeigt die Notwendigkeit der Verwendung von verbesserten Wirkungen. Zwischen dem $N_\tau=4$ - und dem $N_\tau=8$ -Gitter liegt ein Faktor tausend an Rechenzeit. Die mit der Wilson-Wirkung auf dem $N_\tau=8$ -Gitter von der Qualität her vergleichbare verbesserte 2×2 -Wirkung auf dem $N_\tau=4$ -Gitter benötigt nur etwa fünfmal mehr Rechenzeit.

Bei den Symanzik verbesserten Wirkungen wird die Nicht-Eindeutigkeit der Diskretisierung benutzt. Wirkungen auf dem Gitter bestehen aus einer gewichteten Summe von geschlossenen Schleifen aus Links. Der Einfachheit halber beschränkt man sich gewöhnlich auf planare, rechteckige Schleifen, die sogenannten Wilsonloops.

Analog zu der Wilson-Wirkung könnte man auch eine Wirkung konstruieren, welche den 2×1 -Loop statt der 1×1 -Plaquette verwendet. Diese Wirkung wäre auch mit Fehlern der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ behaftet. Durch eine geschickte Linearkombination der beiden Terme läßt sich der Fehler $\mathcal{O}(a^2)$ jedoch eliminieren,

$$\begin{aligned} S^{\text{Wilson}} &= \sum_{x,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } \square \right) + \mathcal{O}(a^2) , \\ S^{\text{alternativ}} &= \sum_{x,\mu<\nu} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Re Tr } \left(\square + \square \right) \right) + \mathcal{O}(a^2) , \\ S^{2\times 1} &= \sum_{x,\mu<\nu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } \square \right) - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Re Tr } \left(\square + \square \right) \right) + \mathcal{O}(a^4) . \end{aligned}$$

Durch die Entwicklung der Wilsonloops in niedrigster Ordnung in g (das bedeutet $g^2=0$) läßt sich eine allgemeine Wirkung als Linearkombination von Wilsonloops finden. Mit jeder Hinzunahme eines weiteren, passenden Terms läßt sich die nächste Ordnung des Fehlers $\mathcal{O}(a^n)$, $n = 2, 4, 6, \dots$ beseitigen. Der Fehler fällt also polynominell mit der Anzahl der Summanden ab. Hier ist schnell eine Grenze erreicht, denn das Ziel der verbesserten Wirkungen ist die Verwendung eines kleinen Gitters, welches die Ausdehnung der Wirkung begrenzt.

Symanzik hat 1983 auch die Koeffizienten der 2×1 -Wirkung in Ordnung g^2 berechnet. Allerdings treten hier bei der Störungstheorie auf dem Gitter Tadpole-Diagramme auf, welche eine Renormierung der Kopplungskonstante nötig machen.

Lepage und Mackenzie schlugen 1993 vor, die Renormierung selbstkonsistent vorzunehmen. Die Links der erweiterten Plaquette werden mittels ihres Erwartungswertes $u_0 = \langle \square \rangle^{1/4}$ normiert, um die Tadpole-Beiträge zu beseitigen,

$$S^{\text{Tadpole}} = \sum_{x,\mu<\nu} \frac{5}{3u_0^4} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \square \right) - \frac{1}{6u_0^6} \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Re Tr} \left(\square + \square \right) \right) + \mathcal{O}(a^4).$$

1.5 Perfekte Wirkungen

Schon 1975 schlug K. Wilson vor, die Gittertheorie mittels der Renormierungsgruppentransformation so zu formulieren, daß die Ergebnisse keine Abhängigkeit von dem Gitterabstand a zeigen. Als *perfekte Wirkung* bezeichnet man eine Wirkung ohne Gitterartefakte. In der Praxis kann eine Wirkung als perfekt betrachtet werden, wenn sich auch auf einem sehr groben Gitter keine cut-off Effekte beobachten lassen. Eine *klassisch perfekte Wirkung* ist eine perfekte Wirkung für kleine Kopplungen ($g \rightarrow 0$), die aber für moderate Kopplungen benutzt wird. Das Ziel besteht in dem Auffinden einer (klassisch) perfekten Wirkung mit kurzreichweitiger Wechselwirkung und einfacher Struktur.

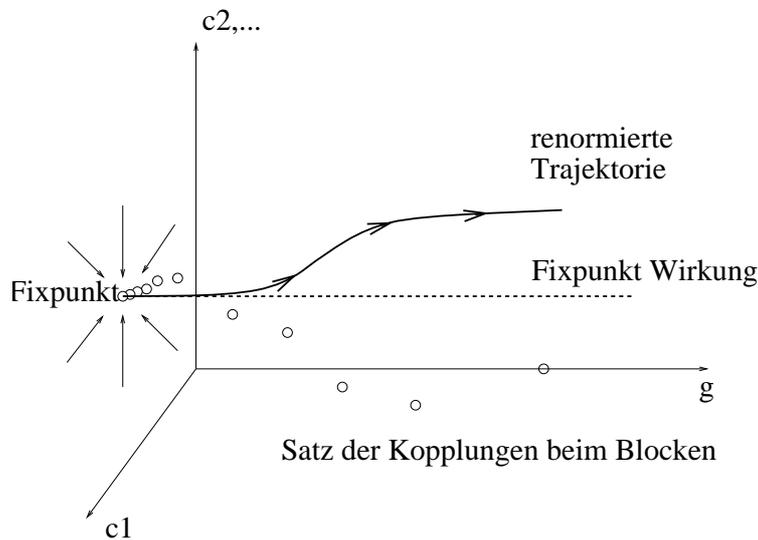


Abbildung 1.1: Fluß der Kopplungen unter der Renormierungsgruppentransformation.

Der Renormierungsgruppentransformation liegt folgende Idee zugrunde: Eine hinreichend glatte Konfiguration wird mit Hilfe eines Kerns so geblockt, daß die Zustandsumme gleichbleibt. Das Blocken induziert dabei neue Kopplungen, statt des Plaquette-Terms mit einer Kopplung g enthält die geblockte Wirkung eine Reihe von geschlossenen Schleifen aus Links mit entsprechenden Kopplungen c_1, c_2, \dots . Die

Folge von Blockungsschritten strebt in der QCD zu dem Fixpunkt $g = 0$. Hier parametrisiert der Satz von Kopplungen die klassisch perfekte Wirkung. Für moderate Werte der ursprünglichen Kopplung der Plaquetten wird der Satz von Kopplungen modifiziert. Dieser Fluß der Kopplungen wird von der renormierten Trajektorie beschrieben, siehe Abbildung 1.1. Man hat die Hoffnung, daß die renormierte Trajektorie sich nicht zu weit von der Fixpunktwirkung entfernt.

In der Praxis benutzt man nur zwei oder drei Blockungsschritte,

$$\exp\{-\beta' S'(U')\} = \int DU \exp\{-\beta[S(U) + K(U, U')]\} . \quad (1.2)$$

Die Form der geblockten Links $U' \in SU(3)$ des groberen Gitters wird durch den Kern $K(U, U')$ bestimmt. Er muß gewährleisten, daß die Zustandssumme unverändert bleibt,

$$Z = \int DU \exp\{-\beta S(U)\} = \int DU' \exp\{-\beta' S'(U')\} . \quad (1.3)$$

Nur das Minimum der Wirkung trägt wesentlich zu dem Ergebnis des Gaußintegrals (1.2) bei, so reduziert sich das Auffinden der neuen Kopplungen auf ein Minimierungsproblem mit der Randbedingung der gleichbleibenden Zustandssumme (1.3),

$$\beta' S'(U') = \min_{[U]} \{\beta[S(U) + K(U, U')]\} . \quad (1.4)$$

Die Fixpunktgleichung

$$S^{\text{FP}}(U') = \min_{[U]} \{S^{\text{FP}}(U) + K(U, U')\} , \quad (1.5)$$

sollte nach einigen Schritten annähernd erfüllt sein. Für die eigentliche Simulation beschränkt man sich auf einen ausgewählten Satz von Kopplungen. Hier fällt der Fehler durch Gitterartefakte *exponentiell* mit der Anzahl der Summanden der Wirkung ab.

Die Verwendung der perfekten Wirkungen erfordert einen enormen Aufwand. Es wird sich in der Zukunft zeigen, ob die perfekten Wirkungen wirklich diese großen Anstrengungen mit Resultaten belohnen, die sich nicht mit Symanzik verbesserten Wirkungen erzielen lassen. Diese Arbeit beschränkt sich deshalb auf Symanzik verbesserte Wirkungen.

1.6 Motivation

Die Gittertheorie ist eine Möglichkeit, die Phänomene der QCD nicht-störungstheoretisch zu behandeln. Unser Ziel besteht in der Beschreibung des Phasenübergangs, ohne auf Ergebnisse zurückzugreifen, welche unter der Annahme kleiner oder großer Kopplung gewonnen wurden. Leitet man die Energiedichte und den Druck aus der Zustandssumme ab, so enthalten sie die Ableitungen der Kopplungen in Raum-

und Zeitrichtung nach der Gitteranisotropie, die wir hier mit c_σ und c_τ bezeichnen. Zu Beginn der Gittereichtheorie, Anfang der 80'er Jahre, benutzte man die störungstheoretischen Werte dieser Ableitungen [4]. Später umging man dieses Problem. Die freie Energie ist der Logarithmus der Zustandsumme. Man betrachtete den Druck als negative freie Energie, was aber große Volumina voraussetzt, Oberflächeneffekte dürfen keine Rolle spielen. Zusammen mit der Differenz $\epsilon - 3p$ läßt sich dann auch die Energie bestimmen, ohne die Ableitungen der Kopplungskonstanten zu verwenden [5].

Kennt man nun Druck p oder Energiedichte ϵ , sowie die β -Funktion, welche den Zusammenhang zwischen Kopplung und Gitterabstand beschreibt, so lassen sich c_σ und c_τ indirekt bestimmen. Dazu löst man die Gleichung für $p(c_\sigma, c_\tau)$ oder $\epsilon(c_\sigma, c_\tau)$ nach c_σ und c_τ auf.

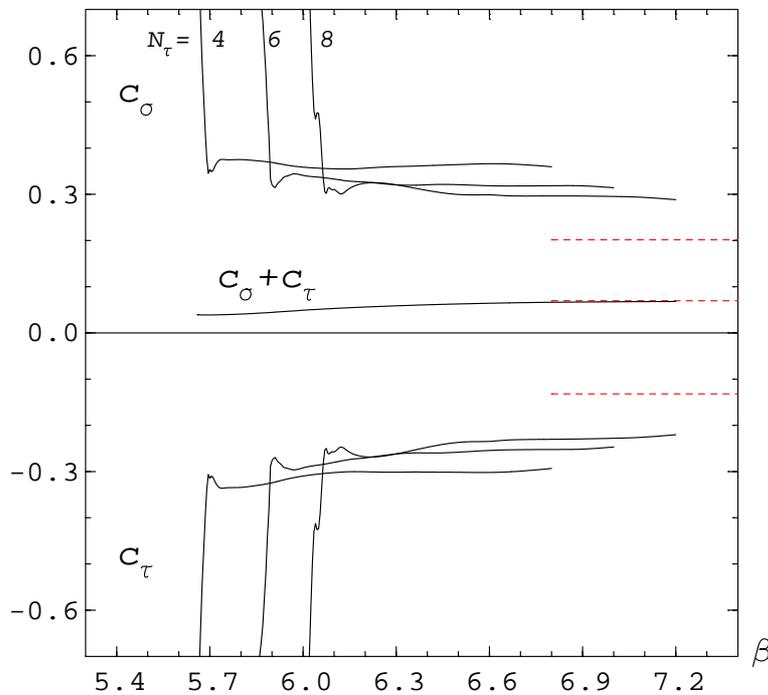


Abbildung 1.2: c_σ und c_τ für die Wilson-Wirkung über β aus der Simulation bei endlicher Temperatur für $N_\tau = 4, 6, 8$. Die gestrichelten Linien sind die störungstheoretischen Werte aus [4].

Die Simulationen mit der Wilson-Wirkung [3] ergaben die Werte für c_σ und c_τ , die in Abbildung 1.2 dargestellt sind. Da die Differenzen zwischen räumlicher und zeitlicher Plaquette unterhalb des thermodynamischen Phasenübergangs verschwinden, lassen sich c_σ und c_τ nur oberhalb des Phasenübergangs aus dem Druck bestimmen. Innerhalb der Schwankungen von $c_{\sigma,\tau}$ zeigt sich nur eine geringe Abhängigkeit vom Gitterabstand a . Eine Konvergenz gegen die störungstheoretischen Werte ist nicht zu erkennen.

Die Wilsonwirkung ist mit Fehlern der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ behaftet. So ergeben sich für die drei Gittergrößen $N_\tau = 4, 6, 8$ recht unterschiedliche Schätzungen für $c_{\sigma,\tau}$, obwohl die Ableitungen der Kopplungen nur eine Funktion des Gitterabstandes sind, $c_{\sigma,\tau} = c_{\sigma,\tau}(a)$.

Eine wesentliche Frage in der Gittereichtheorie bei endlicher Temperatur ist das Verhalten von Druck und Energiedichte bei der Annäherung an den Hochtemperaturlimes. Die Funktionen $c_\sigma(a)$ und $c_\tau(a)$ beeinflussen diese Konvergenz wesentlich. Mit der Kenntnis von $c_\sigma(a)$ und $c_\tau(a)$ läßt sich der Druck direkt berechnen und mit dem Druck vergleichen, der aus der Integration der Plaquetten bestimmt wurde.

Ziel dieser Arbeit ist es, $c_\sigma(a)$ und $c_\tau(a)$ direkt zu berechnen und $c_\sigma(a)$ und $c_\tau(a)$ verschiedener Wirkungen miteinander zu vergleichen, sowie die Konvergenz von $c_\sigma(a)$ und $c_\tau(a)$ gegen ihre störungstheoretischen Grenzwerte zu untersuchen.

Für die Wilson-Wirkung liegen viele Daten für die Plaquetten und die β -Funktion aus [3] vor, um die Methoden zur Bestimmung von Druck und Energiedichte zu vergleichen. Auch liefert uns [4] die Werte für $c_{\sigma,\tau}$ im schwachen Kopplungslimes.

Die 2×2 -Wirkung wird als Beispiel für eine verbesserte Wirkung untersucht, hier liegen Daten aus [6] vor.

Besonderes Augenmerk gilt der *überverbesserten* Quadratischen Symanzik-Wirkung. Obwohl sie nur Ordnung $\mathcal{O}(a^4)$ verbessert ist, enthält sie drei Terme. Unter Ausnutzung dieser zusätzlichen Freiheit läßt sich der Propagator diagonalisieren und damit $c_{\sigma,\tau}$ im schwachen Kopplungslimes berechnen. Damit können wir die Konvergenz der numerisch berechneten $c_{\sigma,\tau}$ gegen die störungstheoretischen Werte von verbesserter und nicht-verbesserter Wirkung vergleichen.

Im Vergleich zu den anderen Wirkungen ergaben sich für die Quadratische Symanzik-Wirkung auffallend kleine Werte für die störungstheoretischen $c_{\sigma,\tau}$. Dies wurde zum Anlaß genommen, die Quadratische Symanzik-Wirkung auf ihre Eignung für die Thermodynamik zu untersuchen.

Kapitel 2

Die Koeffizienten c_σ und c_τ

2.1 Das anisotrope Gitter

Die meisten Rechnungen in der Gittertheorie werden auf isotropen Gittern durchgeführt. Ein isotropes Gitter besitzt gleiche Gitterabstände a in allen Richtungen. Die Wahl von $a_\sigma = a_\tau$ hat den Vorteil, daß man nur eine Kopplung in der Simulation benötigt und man bei der Berechnung des physikalischen Abstands die Anisotropie nicht zu berücksichtigen braucht. Die Wahl eines *anisotropen* Gitters für Simulationen und analytische Rechnungen ist aus folgenden Gründen interessant:

- Die Temperatur auf dem isotropen Gitter ist durch $T = 1/(N_\tau a_\tau)$ gegeben. Als maximale Temperatur kann $1/a_\tau$ gewählt werden. Natürlich wären bei $N_\tau = 1$ die Effekte der geringen Ausdehnung in Zeitrichtung besonders groß. Mit der Wahl von a_τ unabhängig von a_σ läßt sich die Temperatur $T = 1/(N_\tau a_\tau)$ beliebig variieren, ohne das räumliche Gitter zu beeinflussen.
- Bei der Berechnung von Korrelationen in Zeitrichtung, wie bei der Bestimmung der Transportkoeffizienten oder von Massen, ist die Korrelationslänge durch $N_\tau/2$ beschränkt. Durch die Einführung eines kleinen a_τ läßt sich die Skala in Zeitrichtung verfeinern, ohne das räumliche Volumen zu vergrößern.
- Man benutzt anisotrope Gitter um die thermodynamischen Größen in der Gitterformulierung zu erhalten. Die Energiedichte ϵ und den Druck p erhält man als Ableitung der Zustandsumme,

$$\epsilon = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial (1/T)} \right)_V, \quad p = T \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T. \quad (2.1)$$

Der natürliche Weg diese Ableitungen auf dem Gitter zu berechnen, besteht in der Einführung der verschiedenen Gitterabstände a_σ und a_τ . So läßt sich für die Bestimmung der Energiedichte die Temperatur $T = (N_\tau a_\tau)^{-1}$ variieren und das räumliche Volumen $V = (N_\sigma a_\sigma)^3$ festhalten. Umgekehrt verfährt man beim Druck. Hier wird die Anisotropie nur für das Auffinden der Ableitung benutzt. Die Ableitung wird bei $a_\sigma = a_\tau$ ausgewertet, siehe Abschnitt 2.3.

2.2 Die anisotrope Wirkung

Die Wirkung des isotropen Gitters läßt sich leicht für anisotrope Gitter verallgemeinern, indem man unabhängige Kopplungen in Raum- und Zeitrichtung einführt [4],

$$\begin{aligned} S &= \beta_\sigma \sum_{\mu < \nu < 4} S_{\mu,\nu} + \beta_\tau \sum_{\mu < 4} S_{\mu,4} , \\ &= \frac{2N}{g_\sigma^2(a, \xi)} \frac{1}{\xi} \sum_{\mu < \nu < 4} S_{\mu,\nu} + \frac{2N}{g_\tau^2(a, \xi)} \xi \sum_{\mu < 4} S_{\mu,4} , \quad a = a_\sigma , \quad \xi \equiv a_\sigma / a_\tau . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Wirkung zerfällt in einen räumlichen und einen zeitlichen Anteil. Es ist notwendig zwei verschiedene Kopplungen g_σ und g_τ einzuführen, um bei unabhängiger Variation von a_σ und a_τ die Kopplungen so verändern zu können, daß die Physik gleich bleibt.

Man bezeichnet mit $\langle P \rangle$ das Gittermittel der verallgemeinerte Plaquette, d.h. die gewichtete Summe der Loops, die bei verbesserten Wirkungen die Plaquette der Wilson-Wirkung ersetzen,

$$\langle P_\sigma \rangle \equiv \frac{1}{3N_\sigma^3 N_\tau} \sum_{\mu < \nu < 4} S_{\mu,\nu} , \quad \langle P_\tau \rangle \equiv \frac{1}{3N_\sigma^3 N_\tau} \sum_{\mu < 4} S_{\mu,4} . \quad (2.3)$$

In dieser Arbeit werden drei Wirkungen untersucht, die klassische Wilson-Wirkung, die 2×2 -Wirkung [6] und die Quadratische Symanzik-Wirkung [7],

$$S_{\mu,\nu}^{\text{Wilson}} = \sum_x \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \square \right) , \quad (2.4a)$$

$$S_{\mu,\nu}^{2 \times 2} = \sum_x \left\{ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \square \right) - \frac{1}{48} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array} \right) \right\} , \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned} S_{\mu,\nu}^{\text{QS}} &= \sum_x \left\{ \frac{16}{9} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \square \right) - \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Re Tr} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{144} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \end{array} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (2.4c)$$

Man schreibt die anisotrope Wirkung oft auch mit dem Verhältnis der Kopplungen γ ,

$$S = \beta / \gamma \sum_{\mu < \nu < 4} S_{\mu,\nu} + \beta \gamma \sum_{\mu < 4} S_{\mu,4} , \quad (2.5)$$

$$\gamma(a, \xi) = \sqrt{\frac{\beta_\tau}{\beta_\sigma}} , \quad \beta(a, \xi) = \sqrt{\beta_\tau \beta_\sigma} . \quad (2.6)$$

Für $\gamma = 1$ erhalten wir die isotrope Wirkung zurück.

Durch die Anisotropie γ in den Kopplungen wird eine Anisotropie ξ in den Gitterabständen induziert. Nutzt man die Vorteile des anisotropen Gitters, so ist für

die Umrechnung der auf dem Gitter gemessenen Observablen in physikalische Einheiten eine Kalibrierung des Gitters notwendig. Physikalische Größen hängen von der physikalischen Ausdehnung des Gitters ab, nicht von der Anzahl der Gitterpunkte, auf die sie sich erstrecken. Mit der Kenntnis des Faktors $\xi = a_\sigma/a_\tau$ und des Gitterabstandes a lassen sich Gitterabstände in physikalische Abstände umrechnen.

Zur Bestimmung des funktionellen Zusammenhangs $\xi(\gamma)$ lassen sich diverse Methoden ersinnen, welche alle auf folgendem Prinzip beruhen. Man mißt eine physikalische Observable in Raum- und Zeitrichtung in Abhängigkeit von ihrer Ausdehnung auf dem Gitter r , beziehungsweise t . Dann sucht man zu jeder in Zeitrichtung gemessenen physikalische Observablen $O_\tau(t)$ eine in Raumrichtung gemessene Observablen $O_\sigma(r)$ mit dem gleichen physikalischen Erwartungswert, $\langle O_\sigma(r) \rangle = \langle O_\tau(t) \rangle$. Dann entsprechen r und t dem gleichen physikalischen Abstand, ihr Quotient gibt den Faktor $\xi = t/r$. Dieses Anpassen der Observablen bezeichnet man in der Literatur mit dem englischen Wort „*matching*“. Im folgenden wird diese Bezeichnung verwendet.

2.3 Die Energiedichte

Wie oben erwähnt, kennen wir die Energiedichte aus der statistischen Mechanik als

$$\epsilon = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial (1/T)} \right)_V . \quad (2.7)$$

Die Zustandssumme ist das Integral über alle Konfigurationen des Systems mit der Wirkung (2.2) als Gewicht,

$$\begin{aligned} Z &= \int dU e^{-S[U]} , \\ &= \int dU \exp \left(-6N N_\sigma^3 N_\tau \left(g_\sigma^{-2}(a, \xi) \xi^{-1} P_\sigma + g_\tau^{-2}(a, \xi) \xi P_\tau \right) \right) . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bei fester Gittergröße N_τ bedeutet die Ableitung nach $1/T$ auf dem anisotropen Gitter die Ableitung nach a_τ bzw. nach $\xi = a_\sigma/a_\tau$,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{T}{V} \xi \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \xi} \right)_{a_\sigma} , \\ &= 6N a_\sigma^2 a_\tau^2 \left(g_\sigma^{-2} \xi^{-2} \langle P_\sigma \rangle - g_\tau^{-2} \xi \langle P_\tau \rangle - \frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \langle P_\sigma \rangle - \frac{\partial g_\tau^{-2}}{\partial \xi} \xi \langle P_\tau \rangle \right)_{\xi=1} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Wirkung enthält noch den Vakuumsbeitrag. Die Energiedichte soll so normiert sein, daß sie bei $T = 0$ verschwindet, wir ziehen deshalb den $T=0$ -Beitrag ab. Diesen Beitrag erhalten wir von dem symmetrischen, isotropen Gitter. Dort gilt $P_0 = P_\sigma = P_\tau$. Werten wir (2.9) bei $\xi = 1$ aus,

$$\epsilon/T^4 = 6N N_\tau^4 \left(g^{-2} \langle P_\sigma - P_\tau \rangle - (c_\sigma \langle P_\sigma - P_0 \rangle + c_\tau \langle P_\tau - P_0 \rangle) \right) , \quad (2.10)$$

wobei wir definieren,

$$c_\sigma(a) \equiv \left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}, \quad c_\tau(a) \equiv \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}. \quad (2.11)$$

In der Literatur (z.B. in [4]) findet man auch eine andere Bezeichnung. In der Störungrechnung werden die asymmetrischen Kopplungen im schwachen Kopplungslimes entwickelt,

$$g_\sigma^{-2}(a, \xi) = g^{-2}(a) + c_\sigma^w(\xi) + \mathcal{O}(g^2), \quad (2.12a)$$

$$g_\tau^{-2}(a, \xi) = g^{-2}(a) + c_\tau^w(\xi) + \mathcal{O}(g^2). \quad (2.12b)$$

Hier bezeichnen $c_{\sigma,\tau}^w$ den anisotropen Anteil der Kopplungen im schwachen Kopplungslimes und es gilt im Grenzfall $a \rightarrow 0$ bzw. $g^2 \rightarrow 0$,

$$c_{\sigma,\tau} = \frac{\partial c_{\sigma,\tau}^w(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial g_{\sigma,\tau}^{-2}(\xi)}{\partial \xi}.$$

In dieser Arbeit wird immer die Definition (2.11) benutzt.

2.4 Methoden für die Bestimmung von c_σ und c_τ

Störungstheoretisch

Die Koeffizienten c_σ^w und c_τ^w wurden 1981 von F. Karsch störungstheoretisch für die Wilson-Wirkung berechnet [4]. Es wurden die Funktionen $\partial g_{\sigma,\tau}^{-2}(\xi)/\partial \xi$ und das Verhalten des Λ -Parameters $\Lambda(\xi)/\Lambda_{\text{Euklidisch}}$ auf anisotropen Gittern untersucht. Im schwachen Kopplungslimes ergibt sich für $N = 3$,

$$\left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = 0.202, \quad \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -0.132. \quad (2.13)$$

Aus der Invarianz der Saitenspannung unter Variation von ξ folgt die Relation,

$$\left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} + \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = b_0 = 11N/48\pi^2 \approx 0.07_{N=3}. \quad (2.14)$$

Mittels der kritischen Temperatur

Einen Versuch, die Koeffizienten c_σ und c_τ nicht-störungstheoretisch zu bestimmen, unternahm ein Jahr später I. Montvay [8] et al. . Sie wählten die kritische Temperatur des Deconfinement-Phasenübergangs als Observable. Dazu maßen sie den Erwartungswert des Polyakovloops in der Ebene der Kopplungen (g_σ, g_τ) . Sie bestimmten die kritische Temperatur T_c auf dem $9^3 \times 3$ -Gitter bei $\gamma = 3/4, 1$ und auf dem $9^3 \times 4$ -Gitter bei $\gamma = 1, 4/3$. Aus dem Verhältnis der vier Temperaturen bestimmten sie

$$c_\sigma = 0.14 \pm 0.06, \quad c_\tau = -0.12 \pm 0.06. \quad (2.15)$$

Für die Auswertung benutzen die Autoren die störungstheoretische β -Funktion und die Entwicklung (2.12a,b).

Mittels des Matchings der Wilsonloops

Das Verfahren, von dem in dieser Arbeit ausgegangen wird, wurde 1988 von G. Burgers, F. Karsch, A. Nakamura und I.O. Stamatescu benutzt um $\xi(\gamma)$ bei großen Werten für γ zu bestimmen [9]. Es beruht auf dem *Matching der Wilsonloops*. Wie im Abschnitt 2.2 erläutert, läßt sich die Anisotropie im Gitterabstand ξ durch das Anpassen von Observablen bestimmen, die in Raum- und Zeitrichtung gemessen wurden.

Betrachten wir die Kopplungen der Wirkung auf einem anisotropen Gitter (2.2),

$$g_\sigma^{-2}(\xi) = \frac{\xi}{2N} \frac{\beta(\xi)}{\gamma(\xi)}, \quad g_\tau^{-2}(\xi) = \frac{1}{2N\xi} \beta(\xi)\gamma(\xi). \quad (2.16)$$

Wir leiten sie nach ξ ab,

$$\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2N} \frac{\beta}{\gamma} \left(1 + \frac{\xi}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} - \frac{\xi}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right), \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{1}{2\beta} \frac{\partial \beta^2}{\partial \xi} = \frac{(2N)^2}{2\beta} \left(g_\sigma^{-2} \frac{\partial g_\tau^{-2}}{\partial \xi} + g_\tau^{-2} \frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial \xi} \right), \quad (2.17b)$$

$$\left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = \frac{\beta}{2N} \left(1 - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial \xi} + \frac{\partial g_\tau^{-2}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}. \quad (2.17c)$$

Für den zweiten Summanden in (2.17c) benutzen wir die Relation,

$$\frac{a}{2} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} = - \left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial \xi} + \frac{\partial g_\tau^{-2}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}. \quad (2.18)$$

Um diese Gleichung zu erhalten, behandelt man den Druck (2.1) wie die Energiedichte im letzten Abschnitt 2.3. Für die Summe erhält man,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon + p}{T^4} &= 2N 4N_\tau^4 \left[\left(g^{-2} - \frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial \xi} - \frac{a}{4} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} \right) \langle P_\sigma - P_\tau \rangle \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial \xi} + \frac{\partial g_\tau^{-2}}{\partial \xi} \right) + \frac{a}{2} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} \right) \langle P_\tau \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Auf dem symmetrischen ($N_\sigma = N_\tau$), isotropen ($\xi = 1$) Gitter ist $\epsilon = 0$ und $p = 0$, weil $\langle P_0 \rangle = \langle P_\sigma \rangle = \langle P_\tau \rangle$, so erhalten wir die Relation (2.18).

Wir benutzen für die Bestimmung von c_σ und c_τ die Gleichungen,

$$c_\sigma(a) = \left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = \frac{\beta}{6} \left(1 - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} - \frac{a}{4} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a}, \quad (2.20a)$$

$$c_\tau(a) = \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}(a, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -\frac{\beta}{6} \left(1 - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} - \frac{a}{4} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a}, \quad (2.20b)$$

das heißt wir brauchen die Funktion $\gamma(\xi)$, oder alternativ $\xi(\gamma)$. Es gilt bei gegebener Anisotropie in den Kopplungen das Gitter zu vermessen.

Die Aufgabe, c_σ und c_τ zu bestimmen, entspricht also im wesentlichen, bis auf das zusätzliche Bestimmen der β -Funktion, dem Auffinden der Anisotropie des Gitters bei der Verwendung einer anisotropen Wirkung.

Mittels der Saitenspannung

Alternativ zu dem direkten Matching der Wilsonloops wäre es auch denkbar, aus den Wilsonloops physikalische Observablen, wie die Saitenspannung σ , zu extrahieren. Das statische Potential zwischen einem Quark-Antiquark-Paar wird durch

$$V(r) = V_0 + \sigma r - \alpha/r \quad (2.21)$$

beschrieben. Für die Bestimmung der Anisotropie des Gitters würde man das Potential in Raum- und in Zeitrichtung messen. Durch das Matching der Potentiale $V(r) = V(t)$ folgt die Anisotropie $\xi = t/r$. Der Nachteil dieser Methode liegt in der Bestimmung der Potentiale, in die sich leicht systematische Fehler einschleichen können. Schmierparameter und Startpunkt des Fits (2.21) müssen passend gewählt werden, siehe dazu Abschnitt 5.3.2 und [10]. Für die Bestimmung von c_σ und c_τ ist aber eine präzise Bestimmung der Anisotropie notwendig. Es liegt deshalb nahe, Wilsonloops oder deren Verhältnisse direkt zu benutzen.

Mittels der Integration der Plaquetten

Um thermodynamische Größen nicht-störungstheoretisch ohne Kenntnis der Koeffizienten c_σ und c_τ zu bestimmen, entwickelten J. Engels et al. die Methode der Integration der Plaquettdifferenzen [5]. Die *freie* Energiedichte

$$f = -\frac{T}{V} \ln Z \quad (2.22)$$

ist durch die Zustandssumme gegeben, welche wir zwar nicht direkt berechnen können, aber wir kennen die Ableitung der Zustandssumme nach der inversen Kopplung,

$$-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \langle S \rangle = N_\sigma^3 N_\tau (\langle P_\sigma \rangle + \langle P_\tau \rangle) . \quad (2.23)$$

Integrieren wir nun die Wirkung ohne den Vakuumsbeitrag ab einem β_0 , welches ausreichend unter dem Phasenübergang bei β_c liegt,

$$f/T^4 \Big|_{\beta_0}^\beta = -3N_\tau^4 \int_{\beta_0}^\beta d\tilde{\beta} \left[2 \langle P_0 \rangle_{\tilde{\beta}} - (\langle P_\sigma \rangle_{\tilde{\beta}} + \langle P_\tau \rangle_{\tilde{\beta}}) \right] . \quad (2.24)$$

Für ausreichend große Systeme mit isotroper Wechselwirkung gilt die Homogenitätsrelation, damit erhalten wir den Druck als negative freie Energie,

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \Big|_T = \frac{\ln Z}{V} \Rightarrow p = -f . \quad (2.25)$$

Aus der Gleichung (2.1) erhält man,

$$\frac{p}{T^4} = NN_\tau^4 \left[(2g^{-2} - (c_\sigma - c_\tau)) \langle P_\sigma - P_\tau \rangle - 3(c_\sigma + c_\tau) (2\langle P_0 \rangle - \langle P_\sigma + P_\tau \rangle) \right] \quad (2.26)$$

Nun können wir (2.26) und (2.18) nach c_σ und c_τ auflösen,

$$c_\sigma = g^{-2} - \frac{a}{4} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} + \frac{1}{\langle P_\sigma - P_\tau \rangle} \left[-\frac{1}{2NN_\tau^4} \frac{p}{T^4} + \frac{3a}{4} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} (2\langle P_0 \rangle - \langle P_\sigma + P_\tau \rangle) \right], \quad (2.27a)$$

$$c_\tau = -c_\sigma - \frac{a}{2} \frac{\partial g^{-2}}{\partial a}. \quad (2.27b)$$

Wie bei dem Matching der Wilsonloops benötigen wir die β -Funktion.

2.5 Die Bestimmung der β -Funktion

Der wesentliche interne Parameter der reinen Eichtheorie ist die inverse Kopplung β . Durch die β -Funktion, nicht zu verwechseln mit der inversen Kopplung β , läßt sich die inverse Kopplung in physikalische Abstände $a = a(\beta)$ umrechnen. Als physikalischen Maßstab benutzt man in der reinen Eichtheorie gewöhnlicherweise die Saitenspannung σ [10], siehe auch Abschnitt 5.3.2. Wir betrachten hier die Wurzel der Saitenspannung, die inverse Längeneinheit besitzt, $\sqrt{\hat{\sigma}} = \sqrt{\sigma a}$.¹

Auf einem hinreichend großen, symmetrischen Gitter mit man bei mehreren Werten der inversen Kopplung β die Saitenspannung. Die Ergebnisse interpoliert man mit einem Spline oder fittet sie mit einer Exponentialfunktion,

$$\sqrt{\sigma a} = \sqrt{\hat{\sigma}(\beta)} = c_1 \exp(-c_2\beta + c_3/\beta + c_4/\beta^2 + c_5/\beta^3 + \dots). \quad (2.28)$$

Der Ansatz für den Fit enthält das Hochtemperaturverhalten $\exp(-c_2\beta)$ der β -Funktion, sowie Korrekturen, welche für hohe Temperaturen verschwinden. Den Spline oder die Funktion leitet man nach β ab,

$$\frac{\partial \sqrt{\sigma a}}{\partial \beta} = \sqrt{\sigma} \frac{\partial a}{\partial \beta} \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial a} = \sqrt{\sigma} \left(\frac{\partial \sqrt{\sigma a}}{\partial \beta} \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Den zweiten Summanden von c_σ und c_τ (2.20a,b) berechnen wir aus

$$a \frac{\partial g^{-2}(a)}{\partial a} = \frac{a}{2N} \frac{\partial \beta}{\partial a} = \frac{1}{2N} \sqrt{\hat{\sigma}(\beta)} \left(\frac{\partial \sqrt{\hat{\sigma}(\beta)}}{\partial \beta} \right)^{-1}. \quad (2.30)$$

Wir teilen die Funktion durch ihre Ableitung. Das ist etwas problematisch bei der Verwendung eines Splines. Da die gemessenen Saitenspannungen nicht ganz auf einer

¹Groen auf dem Gitter werden mit dem Hut gekennzeichnet.

glatten Kurve liegen, schwankt die Ableitung stark. Es ist deshalb angebracht, die Stützstellen der Interpolation *innerhalb der Fehlerbalken* der Meßwerte so zu verschieben, daß auch die Ableitung durch eine glatte Kurve beschrieben wird. Das physikalische Ergebnis wird damit nicht verfälscht, da die Ableitung nur lokal geglättet wird, über größere Bereiche aber ihre Werte behält.

Bei der Verwendung des Fits muß man beachten, daß die Krümmung des Fits bei hohen β -Werte groß genug ist, sonst gewinnt man fälschlicherweise den Eindruck, daß $c_\sigma + c_\tau$ bei hohen β -Werte ansteigt, anstatt sich dem störungstheoretischem Wert zu nähern.

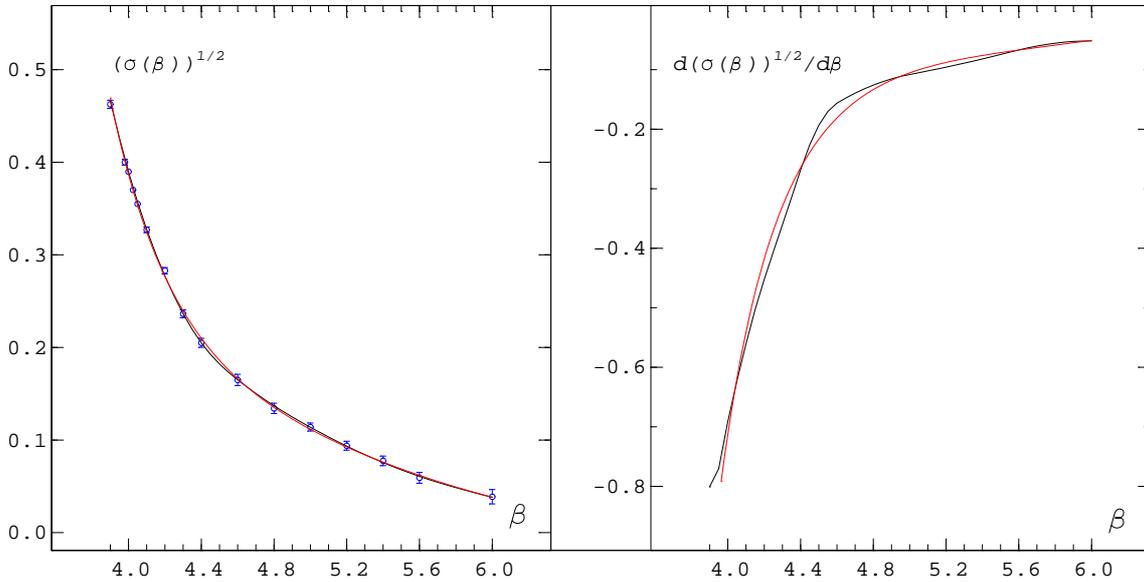


Abbildung 2.1: Bestimmung der β -Funktion für die Quadratische Symanzikwirkung auf einem 24^4 -Gitter. In der linken Grafik ist $\sqrt{\hat{\sigma}(\beta)}$ mit einem Spline interpoliert (schwarz) und mit dem Ansatz $\sqrt{\hat{\sigma}(\beta)} = c_1 \exp(-c_2\beta + c_3/\beta + c_4/\beta^2 + c_5/\beta^3)$ (2.28) gefittet (rot). Auf der rechten Seite ist die Ableitung dargestellt. Die Korrekturterme c_{n+2}/β^n erzeugen die Krümmung in der Mitte und den flachen Verlauf auf der rechten Seite.

2.6 Das Matching der Wilsonloops

Zu dem Zweck der Ermittlung der Anisotropie des Gitters eignen sich Wilsonloops, weil sie von ihrer physikalischen Ausdehnung abhängen. Für das Verhalten der Wilsonloops betrachten wir den Ansatz zur Beschreibung des Potentials zwischen einem schweren Quark-Antiquark-Paar,

$$W(x, t) = c \exp(\sigma r t + \alpha(r + t) + V_0(a_\sigma, a_\tau)) . \quad (2.31)$$

Die Wilsonloops zeigen ein Flächenverhalten $\sigma r t$ und ein Umfangverhalten $\alpha(r + t)$. Das Flächenverhalten dominiert für kleine Werte von β und verschwindet für große

Werte von β . Das Umfangverhalten und V_0 enthalten die Beiträge der Selbstenergie. Wir fassen den von der Ausdehnung unabhängigen Term $V_0(a_\sigma, a_\tau)$ mit dem Vorfaktor c zusammen.

$$W_\sigma(x, z) = k_{\sigma\sigma}(a_\sigma, a_\sigma) \exp(\sigma r z + \alpha(r + z)) . \quad (2.31b)$$

$$W_\tau(x, t) = k_{\sigma\tau}(a_\sigma, a_\tau) \exp(\sigma r t + \alpha(r + t)) . \quad (2.32b)$$

Wir messen räumliche Wilsonloops W_σ der Größe $x \times z$ und zeitliche Wilsonloops W_τ der Größe $x \times t$ auf einem (in etwa) symmetrischem Gitter ($T = 0$). Für $\gamma \approx \xi \approx 1$ wählen wir ein 16^4 -Gitter und für $\gamma \in [1.2, 2]$, das entspricht in etwa $\xi \in [1.4, 2.5]$, ein $16^3 \times 32$ -Gitter. Die Wilsonloops enthalten zwei physikalische Größen, den Wert des Potentials beim Abstand $x a_\sigma$ und die zeitliche Länge der Propagation $t a_\tau$. Wir betrachten bei festem Wert des Potentials die Länge der Propagation und fordern, daß die Länge der Propagation zwischen den Quarks unabhängig von der Anisotropie des Gitters sein soll,

$$W_\sigma(x, z) = \frac{k_{\sigma\sigma}}{k_{\sigma\tau}} W_\tau(x, t = \xi z) . \quad (2.33)$$

Diese Gleichung bestimmt ein gemeinsames $\xi = t/z$ für alle Größen von Wilsonloops. Der Faktor $k \equiv k_{\sigma\sigma}/k_{\sigma\tau}$ weicht geringfügig von 1 ab, da die Selbstenergiebeiträge von a_σ und a_τ abhängen, also unterschiedlich groß für die verschiedenen Richtungen sind. Die Abweichungen betragen etwa 1%.

Das Matching der Wilsonloops läßt sich übersichtlich darstellen, wenn man den Logarithmus der Wilsonloops logarithmisch über ihrer zeitlichen Größe aufträgt. Diese Darstellungsweise hat zwei Vorteile. Der Erwartungswert der Wilsonloops fällt exponentiell mit der Größe ab und man kann die Faktoren k und ξ als Verschiebung ablesen [9].

Die Abbildung 2.2 wurde mit einem Programm erzeugt, das für einen gegebenen Satz von Wilsonloops ein optimales ξ findet. Da wir für den Prozeß des Matchings keine Annahme über die Abhängigkeit des Erwartungswertes der Wilsonloops von ihrer Größe machen wollten, interpolierten wir die Wilsonloops mit Splines. Für $\gamma > 1$, wie in der Abbildung 2.2, werden die zeitlichen Wilsonloops mit Splines verbunden. Die räumlichen Wilsonloops werden vertikal um k und horizontal um ξ verschoben. Die Verschiebung wird so gewählt, daß die quadratische Abweichung χ^2 der blauen Symbole, gewichtet mit ihrem Fehler, von den roten Linien minimal ist.

Für $\gamma < 1$ werden entsprechend die räumlichen Wilsonloops interpoliert und die zeitlichen Wilsonloops verschoben. Mit dieser Fallunterscheidung wird sichergestellt, daß durch eine größere Überdeckungslänge die vorhandene Information besser genutzt wird. Zur Überprüfung der Konsistenz wurde auch umgekehrt verfahren mit ähnlichem Ergebnis.

Der Fehler der Schätzung von ξ wurde mit Hilfe einer Tabelle der χ^2 -Verteilung ermittelt. Die Tabelle gibt eine relative Vergrößerung der quadratischen Abweichung $\chi^2(\xi \pm \Delta\xi)$ so an, daß das korrekte ξ' mit 95% Wahrscheinlichkeit in dem Bereich $[\xi - \Delta\xi, \xi + \Delta\xi]$ liegt. Die Vergrößerung von χ^2 hängt von der Anzahl der Freiheitsgrade

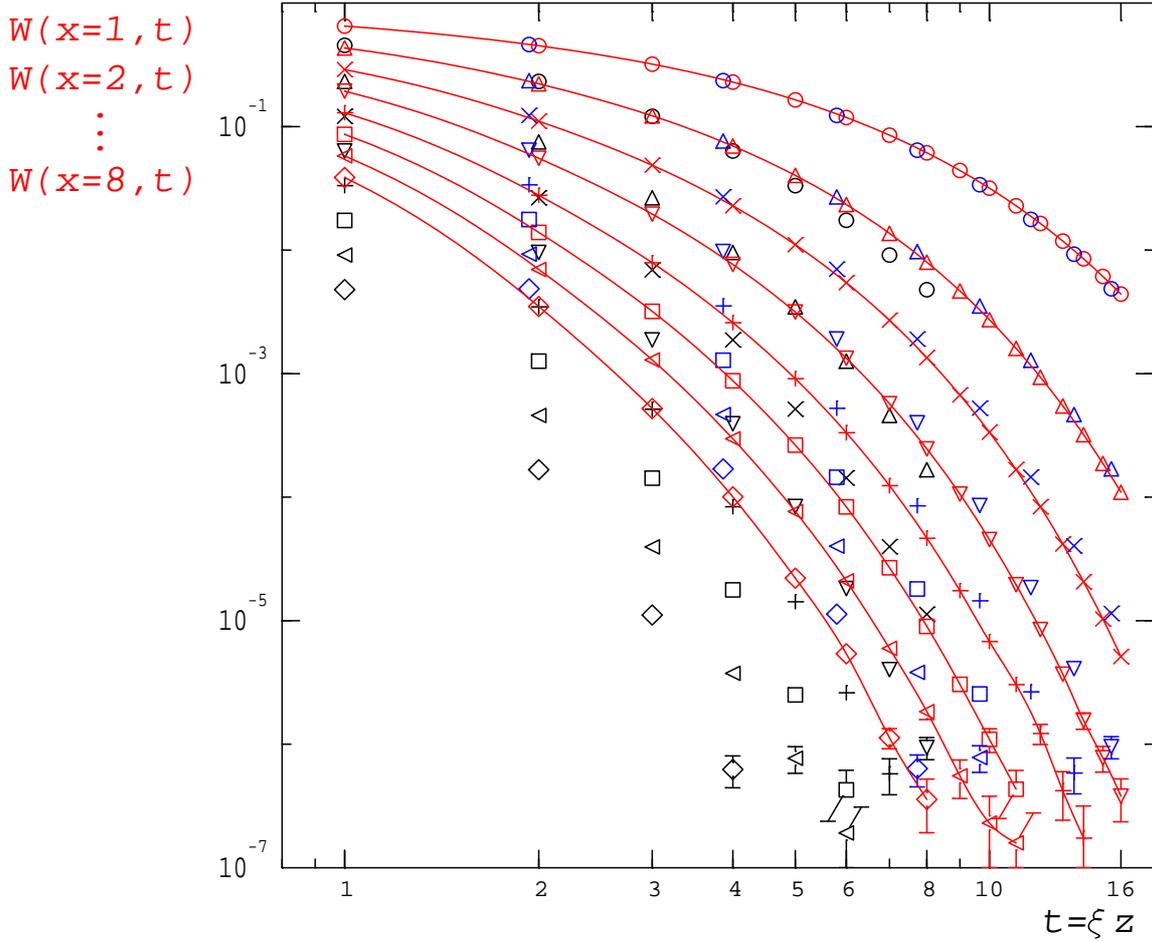


Abbildung 2.2: Matching der Wilsonloops für die Wilson-Wirkung bei $\beta=5.7$ und $\gamma=1.5$ auf dem $16^3 \times 32$ -Gitter. Die zeitlichen Wilsonloops $W_\tau(x, t)$ für festes $x = 1, \dots, 8$ sind durch Splines verbunden und über ihre zeitlichen Ausdehnung t aufgetragen. Die räumlichen Wilsonloops $W_\sigma(x, z)$ (schwarz) werden um den Faktor $k = 1.02$ nach oben und um den Faktor $\xi = 1.93(4)$ nach rechts verschoben (blaue Symbole nach dem Verschieben).

ab, das sind hier die Anzahl der verschobenen Wilsonloops minus zwei. Für die optimale Kombination für k und ξ variiert χ^2 am geringsten bei der Verschiebung der Symbole entlang der Splines. Um den Fehler zu finden, werden in dieser Richtung k und ξ so lange verändert, bis ein χ^2 , wie in der Tabelle vorgegeben, erreicht ist.

In der Abbildung 2.2 erkennt man, daß die Matching-Bedingung nur unzureichend erfüllt werden kann, wenn man alle Wilsonloops in das Matching mit einbezieht. Kleine Wilsonloops tendieren zu einem größerem ξ als große Wilsonloops. Aufgrund ihrer geringeren Fehler dominieren kleine Wilsonloops das Matching. Gerade sie enthalten aber im besonderen Maße unphysikalische Beiträge, sogenannte „*self-masses*“ und „*corner contributions*“. Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten die physikalischen Beiträge zu extrahieren. Man kann entweder nur Wilsonloops ab einer gewissen Größe verwenden, oder man kann Verhältnisse bilden, die sogenannten *Creutz-Ratios*, bei denen sich die unphysikalische Beiträge aufheben.

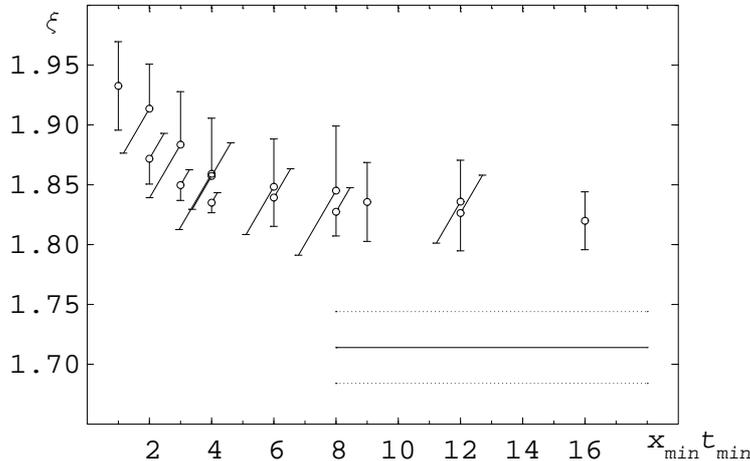


Abbildung 2.3: Einfluß von x_{\min} , t_{\min} auf das Matching der Wilsonloops (Wilson-Wirkung bei $\beta = 5.7$ und $\gamma = 1.5$). Der erste Punkt von links ist das Ergebnis vom Matching von Abbildung 2.2. Bei den folgenden Punkten wurden x_{\min} und t_{\min} als 1, 2, 3 oder 4 gewählt. Die Linie mit dem Fehlerband gibt das Ergebnis bei der Verwendung von Verhältnissen von Wilsonloops an, das im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

Um den Einfluß der Wahl des kleinsten beitragenden Wilsonloops zu untersuchen, wiederholen wir das Matching, wobei nur Wilsonloops mit einer minimalen räumlichen und zeitlichen Größe zur Bestimmung von ξ beitragen. Setzen wir beispielsweise $x_{\min} = 2$, $t_{\min} = 2$, so verzichten wir auf den obersten Spline $W(x = 1, t)$ und auf die räumlichen Wilsonloops $W(x, z = 1)$. Die zeitlichen Wilsonloops $W(x, t = 1)$ werden weiterhin benutzt, um die Form des Splines zu bestimmen. Der optische Eindruck der Grafik, die der Abbildung 2.2 entspricht, verbessert sich wesentlich. Es scheint, daß eine passende Verschiebung ξ für alle Wilsonloops simultan gefunden werden kann, aber der Eindruck täuscht. Läßt man immer mehr Wilsonloops aus dem Matching heraus, so sollte sich eine Konvergenz zu einem Wert

von ξ einstellen. Diese Konvergenz kann man auf Gittern der Größe $N_\sigma = 16$ aber nicht feststellen. In der Abbildung 2.3 erkennt man eine monotone Abnahme von ξ mit der Fläche des kleinsten beitragenden Wilsonloops. Betrachten wir deshalb die Verhältnisse der Wilsonloops.

2.7 Das Matching der Ratios

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, führte M. Creutz [11] Verhältnisse (engl. *ratios*) von Wilsonloops ein, um die ultravioletten Beiträge der Ecken und das Umfangverhalten zu eliminieren. Für das Matching werden hier folgende Ratios benutzt,

$$R_1(x, t) = \frac{W(x+1, t)}{W(x, t)} \quad , \quad R_2(x, t) = \frac{W(x, t)}{W(x+1, t)} = R_1^{-1}(x, t) \quad , \quad (2.34a)$$

$$R_3(x, t) = \frac{W(x+1, t)W(x-1, t)}{W(x, t)^2} \quad . \quad (2.34b)$$

Diese Ratios enthalten nur Wilsonloops mit gleicher Größe in Zeitrichtung, so daß die Matching-Bedingung,

$$R_\sigma(x, z) = \frac{k_{\sigma\sigma}}{k_{\sigma\tau}} R_\tau(x, t = \xi z) \quad , \quad (2.35)$$

weiterhin gilt.

Betrachten wir nun die Bestimmung von ξ mittels des Verfahrens aus dem letzten Abschnitt, nur ersetzen wir die Wilsonloops durch die Ratios. Die Splines durch die Ratios haben im Gegensatz zu den Wilsonloops alle etwa die gleichen Werte. Für die Übersichtlichkeit der Darstellung ist es vorteilhaft, die Splines wie in Abbildung 2.4 versetzt aufzutragen.

Vergleicht man Abbildung 2.2 und 2.4, so erkennt man, daß es bei dem Matching der Ratios nicht zu einem sichtbaren Konflikt zwischen kleinen und großen Ratios kommt, wie beim Matching der Wilsonloops. Innerhalb der Fehlerbalken liegen die Symbolen auf den Linien.

Betrachten wir wieder den Einfluß der Wahl einer minimalen räumlichen und zeitlichen Größe auf das Ergebnis. In der Abbildung 2.5 finden wir eine Konvergenz gegen $\xi = 1.71(3)$. Das Ergebnis erhalten wir aus einem Konstanten-Fit ab $x_{\min} = 2$, $t_{\min} = 2$. Der Fehler ist anhand der Streuung der Ergebnisse geschätzt.

Die Ratios $R_1(x, t)$ und $R_2(x, t)$ geben ähnliche Ergebnisse. Diese einfachen Ratios haben gegenüber $R_3(x, t)$ den Vorteil, daß man das Matching mit einem Spline mehr durchführen kann. Es geht weniger Information verloren. Bei $R_3(x, t)$ ist die Wahl von x_{\min} stärker beschränkt. Die Verwendung von $R_3(x, t)$ hat den Vorteil, daß sich die Beiträge durch den Umfang besser aufheben. Auch fallen die Ratios $R_3(x, t)$ recht steil mit t ab, so daß sich ξ besser bestimmen läßt, siehe Abbildung 2.6.

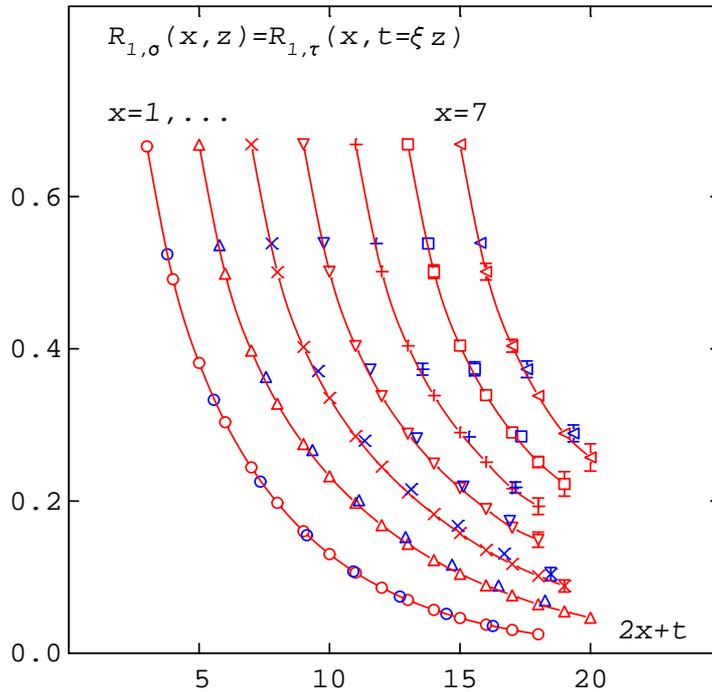


Abbildung 2.4: Matching der Ratios für die Wilson-Wirkung bei $\beta = 5.7$, und $\gamma = 1.5$ auf dem $16^3 \times 32$ -Gitter. Die zeitlichen Ratios $R_{1,\tau}(x, t)$ für festes $x = 1, \dots, 7$ sind durch Splines verbunden und über ihre zeitliche Ausdehnung t plus einem Versatz von $2x$ aufgetragen. Die räumlichen Ratios $R_{1,\sigma}(x, z)$ werden um den Faktor $k = 1.03$ nach oben und um den Faktor $\xi = 1.78(4)$ nach rechts verschoben (blaue Symbole). Hier werden alle Wilsonloops benutzt.

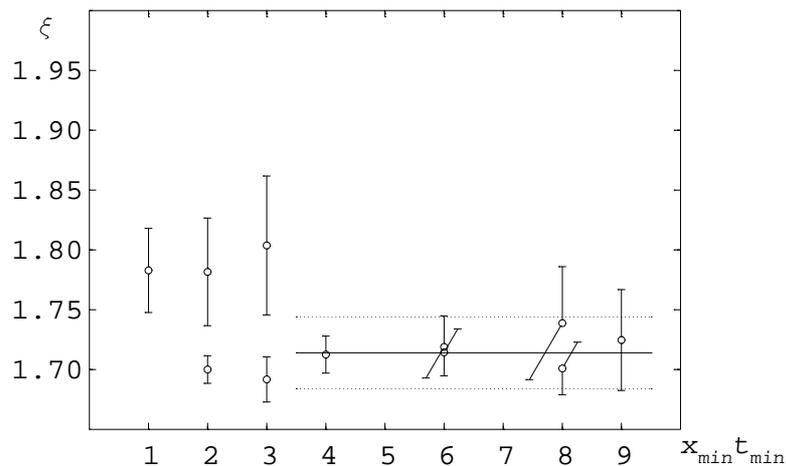


Abbildung 2.5: Einfluß von x_{\min}, t_{\min} auf das Matching der Ratios für die Wilson-Wirkung bei $\beta = 5.7$ und $\gamma = 1.5$, vergleiche Abbildung 2.3.

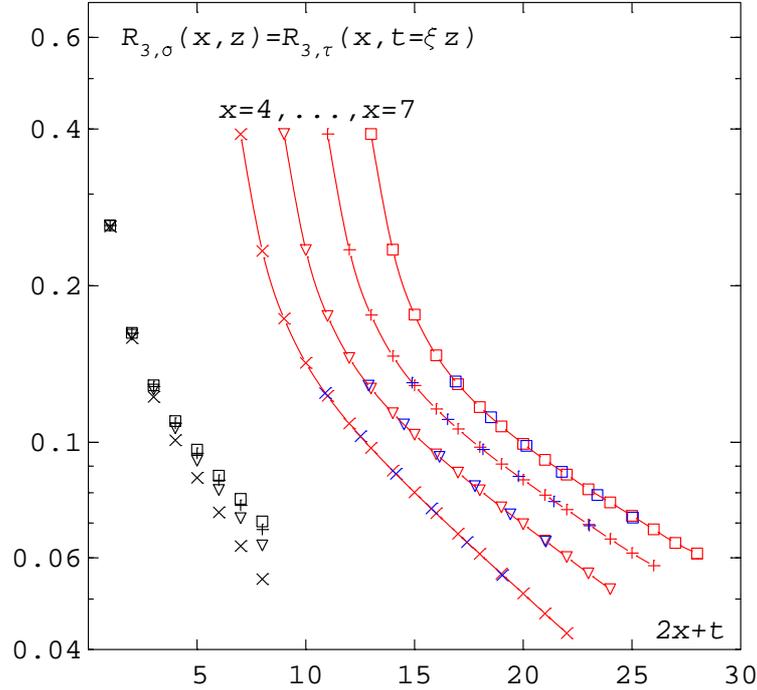


Abbildung 2.6: Matching der Ratios für die Wilson-Wirkung bei $\beta = 6.3$, und $\gamma = 1.5$ auf dem $16^3 \times 32$ -Gitter, $x_{\min}, t_{\min} = 3, 3$. Aus 36 von 64 Wilsonloops wurden 24 Ratios gebildet. Die zeitlichen Ratios $R_{3,\tau}(x, t)$ für festes $x = 4, \dots, 7$ sind durch Splines verbunden und über ihre zeitliche Ausdehnung t plus einem Versatz von $2x$ aufgetragen. Die räumlichen Ratios $R_{3,\sigma}(x, z)$ (schwarz, aufgetragen über t) werden um den Faktor $\xi = 1.63(1)$ nach rechts und $k = 1.02$ nach oben verschoben. (blaue Symbole).

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Bildung von Linearkombinationen der Ratios. Wir haben aus R_1 und R_3 den Ratio R_α gebildet,

$$R_\alpha(x, t) = R_1(x, t) + \alpha R_3(x, t) = \frac{W(x+1, t)}{W(x, t)} + \alpha \frac{W(x+1, t)W(x-1, t)}{W(x, t)^2}. \quad (2.36)$$

Anstelle von zwei Parametern wurden drei Parameter so optimiert, daß die Abweichung χ^2 minimal wurde. Der Parameter α variierte von Datensatz zu Datensatz über viele Größenordnungen. Die Ergebnisse der Ratios R_1 und R_3 sind konsistent, so daß α recht willkürlich gewählt werden kann. Anhand von α lassen sich keine Aussagen über die Qualität des Matchings oder über die Anisotropie ξ machen.

Abbildung 2.6 zeigt, daß sich durch das Verwenden der Ratios und den Verzicht auf kleine Wilsonloops die Matching-Bedingung (2.35) gut erfüllen läßt. ξ kann auf 1% genau bestimmt werden.

2.8 Die Bestimmung der Ableitung $(\partial\xi/\partial\gamma)_{\gamma=1}$

Für die Bestimmung der Funktion $\xi(\gamma)$ wählen wir eine Reihe von γ -Werten, welche wir fitten. Es zeigt sich, daß ξ linear von γ abhängt. Den linearen Zusammenhang beobachten wir bei allen untersuchten Wirkungen, bei allen β -Werten und unabhängig von der Wahl von x_{\min} und t_{\min} .

Die Wahl der γ -Werte wird durch zwei sich widersprechende Vorgaben bestimmt. Man ist an der Bestimmung der Ableitung bei $\gamma = \xi = 1$ interessiert, so liegt es nahe $\gamma \approx 1$ zu wählen. Aber je dichter man γ bei 1 wählt, um so schwieriger wird es, einen signifikanten Unterschied zwischen räumlichen und zeitlichen Wilsonloops zu messen. Entfernt man sich von $\gamma \approx 1$, so verbessert sich das Signal-Rausch-Verhältnis, aber man muß eine Annahme über die Funktion $\xi(\gamma)$ machen.

Für die Wilson-Wirkung bei $\beta = 5.7$ wurden zu Beginn des Projekts 81 γ -Werte, $\gamma \in [0.96, 1.04]$, $\Delta\gamma = 0.001$, so gewählt, daß die Erwartungswerte der Wilsonloops mit der Ferrenberg-Swendsen-Methode interpoliert werden konnten. Mit diesen Ergebnissen ließ sich aber $\xi(\gamma)$ nicht ausreichend genau bestimmen. Für eine sinnvolle Wahl von x_{\min} und t_{\min} schwankten die Kurve der Interpolation von $\xi(\gamma)$ zu stark. An so vielen Stützstellen ließen sich die Wilsonloops mit vertretbarem Aufwand nicht bestimmen.

Erfolgreicher erweist sich die Wahl weniger γ -Werte, bei denen die Wilsonloops mit hoher Statistik bestimmt werden können. Für die Wilson-Wirkung bei $\beta = 5.7$ wurde auch eine Simulation bei $\gamma = 3$ auf einem $16^3 \times 48$ -Gitter durchgeführt, um einen Eindruck von der Form von $\xi(\gamma)$ über einen großen γ -Bereich zu erhalten. Wie man in Abbildung 2.7 erkennt, läßt sich ein linearer Fit sehr gut durch die Punkte legen.

Wie im letzten Abschnitt diskutiert, ist es notwendig, kleine Wilsonloops aus der Auswertung heraus zu lassen. Betrachten wir die Abhängigkeit der Qualität der Fits von der Wahl des kleinsten verwendeten Wilsonloops. Abbildung 2.8 zeigt eine zu große Steigung bei der Verwendung von allen Wilsonloops. Die drei anderen Fits liefern ein konsistentes Ergebnis. Natürlich vergrößert sich der Fehler der Fits mit zunehmendem x_{\min} und t_{\min} . Die Steigungen bei $\gamma = 1$ der linearen Fits (Kreise) sind in der Abbildung 2.9 dargestellt. Zum Vergleich wurden die Daten auch mit einer kubischen Parabel gefittet (Kreuze). Beide Fits geben konsistente Ergebnisse, allerdings sind die Fits mit der kubischen Parabel mit großen Fehlern behaftet, welche der Übersichtlichkeit halber nicht mit eingezeichnet sind. Im folgendem wird immer ein linearer Fit benutzt.

Schritte der Auswertung

Die Auswertung der Ergebnisse fand in folgenden Schritten statt. Ein Programm las alle gemessenen Wilsonloops eines β -Wertes ein und berechnete die Mittelwerte, Fehler und Autokorrelationszeiten. Die Berechnung der Autokorrelationszeiten wurde nicht nur für die Bestimmung des Fehlers gebraucht, sondern diente auch zur Kontrolle, ob die Konfigurationen ausreichend thermalisiert waren.

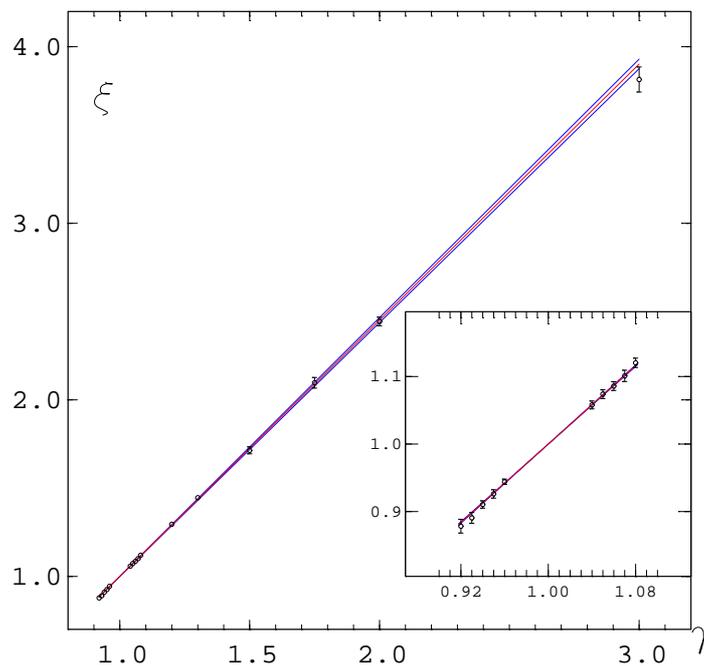


Abbildung 2.7: Ergebnisse für $\xi(\gamma)$ für die Wilson-Wirkung bei $\beta = 5.7$, Ratio R_1 , $x_{\min} = 2$, $t_{\min} = 3$. Die Punkte sind durch einen Geradenfit mit Fehlerband verbunden.

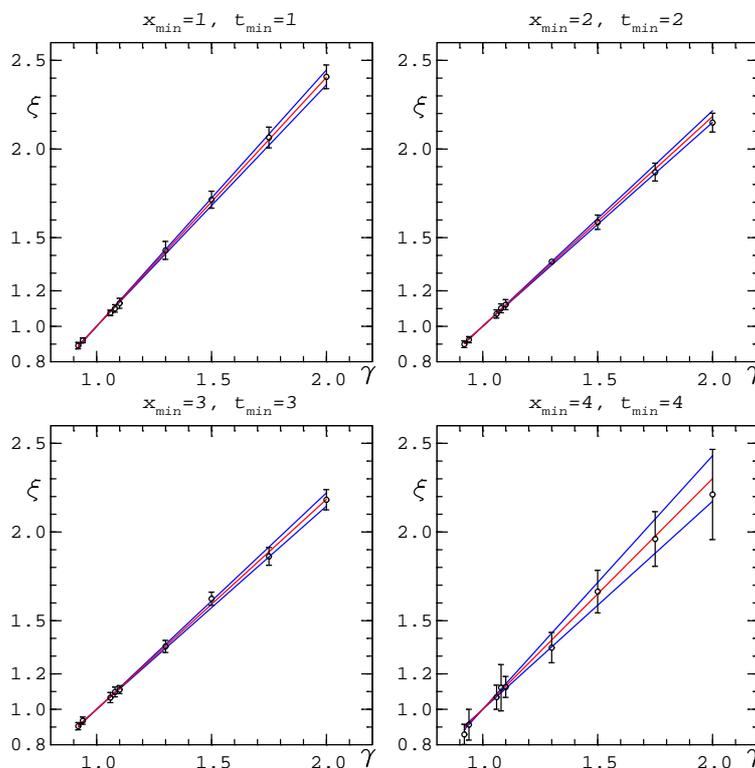


Abbildung 2.8: Geradenfits von $\xi(\gamma)$ in Abhängigkeit von x_{\min} und t_{\min} für die 2×2 -Wirkung bei $\beta = 5.0$, Ratio R_1 . Die vier Fits haben die Steigungen $(\partial\xi/\partial\gamma)_{\gamma=1} = 1.404(42)$, $1.183(32)$, $1.184(38)$, $1.301(130)$.

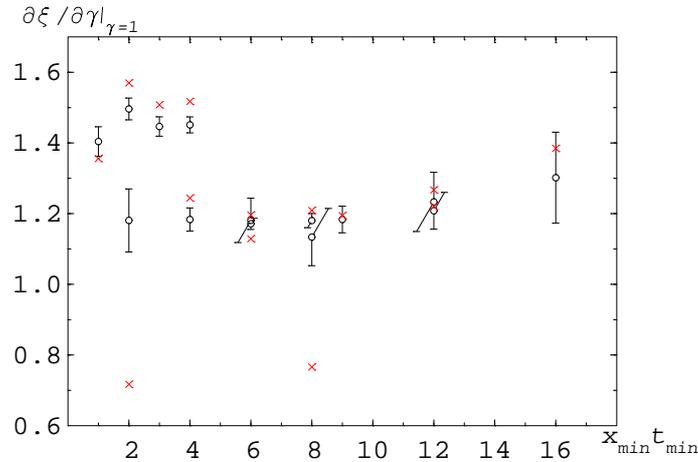


Abbildung 2.9: Die Ergebnisse der Fits von $\xi(\gamma)$ bei $\gamma = 1$ in Abhängigkeit von $x_{\min} \cdot t_{\min}$ für die 2×2 -Wirkung bei $\beta = 5.0$, Ratio R_1 . Die linearen Fits (\circ) und die Fits mit einer kubischen Parabel (\times , ohne Fehler) geben konsistente Ergebnisse.

Mit dem Matching-Programm wurden dann für einige Kombinationen von γ , x_{\min} und t_{\min} Grafiken wie Abbildung 2.4 erstellt. Anhand des optischen Eindrucks wurde die Paßgenauigkeit, sowie die ausreichende Anzahl, Länge und Glätte der Splines geprüft. Für alle x_{\min} und t_{\min} , für die die Daten die ausreichende Qualität besaßen, wurden Fits wie in Abbildung 2.8 gemacht. Es wurde geprüft, ob die Fits im Bereich $\gamma \in [0.9, 1.1]$ konsistent mit den Fits im Bereich $\gamma \in [0.9, 2.0]$ waren. Die Steigung und ihr Fehler wurde dann aus dem gesamten γ -Bereich gewonnen. Das Fitprogramm berechnet c_σ und c_τ nach (2.20a,b).

Kapitel 3

Verbesserte Meßmethoden

In diesem Abschnitt werden der Multi-Wärmebad-Algorithmus und die Linkintegration erläutert. Diese Methoden ermöglichen es, den statistischen Fehler mit wenigen Messungen innerhalb kurzer Zeit zu reduzieren. Ohne diese Methoden wäre aufgrund der statistischen Fluktuationen kein signifikantes Ergebnis erkennbar gewesen.

3.1 Multi-Wärmebad-Algorithmus

Parisi et al. [12] stellten 1983 eine „sehr einfache Idee“ vor. Die Observable \mathcal{O} wird durch die Observable \mathcal{O}' ersetzt, welche den gleichen Erwartungswert hat, aber mit einem kleineren statistischen Fehler behaftet ist,

$$\langle \mathcal{O}' \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle \quad , \quad \langle \mathcal{O}'^2 \rangle - \langle \mathcal{O}' \rangle^2 < \langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2 \quad . \quad (3.1)$$

Die Observablen in der reinen Eichtheorie sind Spuren von geschlossene Schleifen aus Links. Ziel ist es, möglichst viele Links einer Observablen durch *verbesserte* Links zu ersetzen. Für jeden dieser verbesserten Links soll (3.1) gelten, hierzu wird ein Link durch seinen Erwartungswert ersetzt. Der Erwartungswert ist durch die Umgebung des Links bestimmt. Der Link wird in seiner Umgebung integriert,

$$\bar{U} = \frac{\int DU U \exp(-\beta H)}{\int DU \exp(-\beta H)} \quad . \quad (3.2)$$

Parisi et al. approximierten das Integral (3.2) mit dem Multi-Wärmebad-Algorithmus. Mit dem gegebenen Staple erzeugt man eine Reihe (etwa 15 bis 20) weiterer Links. \bar{U} ergibt sich als Mittelwert der Links.

3.2 Linkintegration

R. Brower [13] zeigte schon 1981, wie man das achtdimensionale Ein-Link-Integral als eindimensionales Konturintegral mit Hilfe von modifizierten Besselfunktionen ausdrücken kann.

Das $SU(N)$ Ein-Link-Integral läßt sich als Integral über die maximale Abelsche Untergruppe $U(1)^{N-1}$ ausdrücken. So wird aus dem achtdimensionalen $SU(3)$ -Ein-Link-Integral ein Integral über zwei Winkel (die zwei unabhängigen Eigenwerte), oder mittels der symmetrischen Invarianten¹ ein zweidimensionales Konturintegral. Eine Dimension läßt sich analytisch ausintegrieren, so daß ein eindimensionales Konturintegral über eine modifizierte Besselfunktion verbleibt. R. Brower [13] zeigte dieses schon 1981, er hatte dabei mehr die Störungstheorie mit äußerem Feld als die Gittertheorie im Auge, so daß sein Ergebnis erst 1985 von Ph. de Forcrand [14] für die Gittertheorie benutzt wurde.

Das $SU(3)$ -Ein-Link-Integral ist definiert als

$$Z(R) = \int dU \exp(\text{Tr}(RU^\dagger + UR^\dagger)) \quad , \quad (3.3)$$

wobei R der Stapel² des Links U ist. Damit läßt sich der Erwartungswert des Links schreiben als,

$$\bar{U} = \frac{1}{Z} \frac{dZ(R)}{dR^\dagger} = \frac{\int DU U \exp(\text{Tr}(RU^\dagger + UR^\dagger))}{\int DU \exp(\text{Tr}(RU^\dagger + UR^\dagger))} \quad . \quad (3.4)$$

Benutzen wir nun Browsers Ergebnis,

$$Z(R) = \oint \frac{dx}{2\pi i} e^{xQ} \left(\frac{x}{P(x)} \right)^{1/2} I_1 \left(2 \left(\frac{P(x)}{x} \right)^{1/2} \right) \quad , \quad (3.5)$$

mit $Q = 2 \text{Re} \det(R)$,

$$P(x) = 1 + x \text{Tr}(RR^\dagger) + \frac{1}{2} x^2 \left[(\text{Tr}(RR^\dagger))^2 - \text{Tr}((RR^\dagger)^2) \right] + x^3 \det(RR^\dagger) \quad .$$

Für die Ableitung (3.4) brauchen wir die Relation $I_1'(z) = I_2(z) + I_1(z)/z$ der Besselfunktionen [15],

$$\begin{aligned} \frac{dZ(R)}{dR^\dagger} &= \oint \frac{dx}{2\pi i} x e^{xQ} \left(\frac{x}{P(x)} \right)^{1/2} I_1 \left(2 \left(\frac{P(x)}{x} \right)^{1/2} \right) \frac{\partial Q}{\partial R^\dagger} \\ &\quad + \oint \frac{dx}{2\pi i} \frac{e^{xQ}}{P(x)} I_2 \left(2 \left(\frac{P(x)}{x} \right)^{1/2} \right) \frac{\partial P(x)}{\partial R^\dagger} \quad , \end{aligned} \quad (3.6)$$

¹Anstelle der zwei unabhängigen Eigenwerte benutzt man drei Variablen, die die Bedingung $\sum_i \phi_i = 0$ automatisch erfüllen. Das Integral hierüber ist *invariant* unter der Negation der Winkel und kann als Gaußintegral ausgeführt werden.

²Bei den verbesserten Wirkungen ist mit dem Stapel immer der erweiterte Stapel gemeint.

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial R^\dagger} &= (\det R^\dagger) R^{*-1} \quad , \\ \frac{\partial P(x)}{\partial R^\dagger} &= xR + x^2 (R\text{Tr} (RR^\dagger) - RR^\dagger R) + x^3 \det (RR^\dagger) R^{-1} \quad .\end{aligned}$$

Es gilt also die folgende Integrale zu berechnen,

$$\begin{aligned}\oint \frac{dx}{2\pi i} x^n e^{xQ} \frac{1}{z} I_1(2z) \quad , \quad n = 0, 1 \quad , \quad z = \left(\frac{P(x)}{x}\right)^{1/2} \quad , \\ \oint \frac{dx}{2\pi i} x^m e^{xQ} \frac{1}{z^2} I_2(2z) \quad , \quad m = 0, 1, 2 \quad .\end{aligned}\quad (3.7)$$

Die Besselfunktionen wurden durch die asymptotische Entwicklung bis zur 6. Ordnung berechnet[15],

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\mu - 1^2)(\mu - 3^2) \dots (\mu - (2j - 1)^2)}{j! (8z)^j} \quad , \quad (3.8)$$

$$\text{mit } \mu = 4\nu^2 \quad , \quad |z| \gg 1 \quad , \quad |\arg(z)| < \pi/2 \quad .$$

Für das verbleibende eindimensionale Integral benutzen wir die Gauß'sche Integrationsmethode mit 32 Stützstellen, ausreichend für die einfache Genauigkeit der verwendeten Rechner vom Typ Quadrics.

Wir bemerkten, daß die Ergebnisse der fünf komplexen Integrale (3.7) reell sind. So untersuchten wir die Symmetrie des Integrales und fanden, daß die obere Kontur den konjugiert komplexen Wert der unteren Kontur liefert. Da fast die ganze Rechenzeit in der Schleife der Gauß Integration verbraucht wird, spart man mit dieser Feststellung 50% Rechenzeit.

Der Integrationsradius $|x|$ muß auf einem Rechner mit einfacher Genauigkeit wie der Quadrics sorgsam gewählt werden. In dem Integranden befindet sich der exponentielle Term $\exp(xQ + \sqrt{P(x)/x})$. Auf Rechnern mit einfacher Genauigkeit hängt die numerische Stabilität dieses Terms kritisch von der Wahl des Radius ab. Für einen zu großen Radius wird $|xQ + \sqrt{P(x)/x}| > 60$, also $e^{|xQ + \sqrt{P(x)/x}|} > 10^{38}$, so daß ein Überlauf entsteht. Wird der Radius zu klein gewählt, verschwindet der Integrand fast auf der ganzen Kontur. Die verbleibenden Beiträge sind beliebig klein oder sogar Null, daß man letztlich Null durch Null in $\bar{U} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial R^\dagger}$ teilt.

Der Integrand auf der oberen Kontur, beginnend bei $x=1+0i$, wird durch den Faktor $\exp(xQ + \sqrt{P(x)/x})$ schnell gedämpft. Fällt er unter 10^{-8} seines Anfangswertes ab, trägt die verbleibende Kontur nicht mehr zum Integral bei. Es ist daher sinnvoll, das Gebiet der Gauß-Integration auf den beitragenden Bereich zu skalieren, siehe Abbildung 3.1.

Das Ergebnis der Linkintegration ist approximativ bekannt. Die Links einer ausreichend großen Beispielskonfiguration wurden mit 100 Wärmebad Schritten gemittelt. Für verschiedene Radien wurde zuerst der Bereich und die Gewichte der Gauß-Integration skaliert, dann wurde die Linkintegration durchgeführt und die Matrix-2-Norm der Differenz $\|U_{\text{Multi-WB}} - U_{\text{Linkint.}}\|_2$ betrachtet. In einem gewissen Bereich

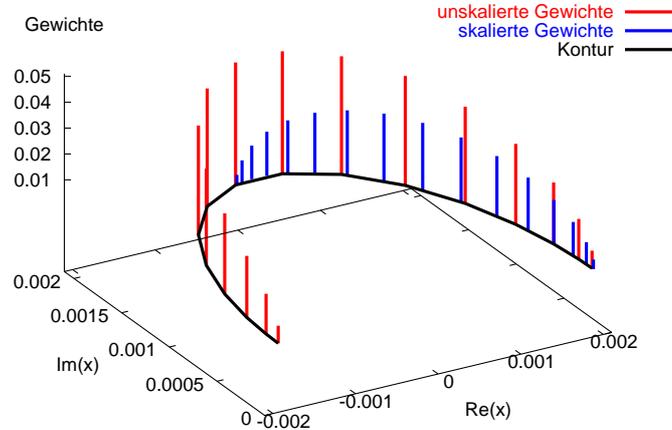


Abbildung 3.1: Reskalierung des Bereiches für die Gauß-Integration

des Radius war die Differenz sehr klein und konstant. In der Mitte des Bereichs liegt der optimale Integrationsradius.

Betrachten wir beispielsweise den zeitlichen Anteil der 2×2 -Wirkung. In der Abbildung 3.2 sind die möglichen Radien für $\beta = 4.4$ und $\beta = 5.0$, jeweils für $\gamma = 1.0, 1.2, \dots, 2.0$, aufgetragen. Man erkennt die potenzartige Abhängigkeit der Radien von $\beta_\tau = \beta * \gamma$. Die möglichen Radien wurden mit dem Ansatz $c_1 \cdot (\beta\gamma)^{c_2}$ gefittet. Mit dieser Funktion werden beim Start des Programms die Radien im Programm gewählt.

Während der zeitliche Staple mit γ multipliziert wird, erhält der räumliche Staple nur den Faktor $(2\gamma + 1/\gamma)/3$. Für $\gamma \in [0.9, 2]$ gilt $(2\gamma + 1/\gamma)/3 = 1 \pm 0.06$. Der Radius für die Integration der räumlichen Links wird mit der gleichen Funktion gewählt, aber mit dem Argument β statt $\beta * \gamma$.

3.3 Konstruktion von verbesserten Observablen

Bei der Zusammensetzung der Observablen aus verbesserten Links, muß man beachten, daß man keine Links einbaut, welche in dem Staple anderer Links enthalten sind. Bei den Wilsonloops in der Abbildung 3.3 ist nur ein Link in der Ecke verbessert. Würde man den zweiten Link in der Ecke eines Wilsonloops verbessern, so würde sich die Umgebung verändern, welche den ersten verbesserten Link definiert. Somit würde man den Erwartungswert des Wilsonloops ändern, also (3.1) verletzen.

Benutzt man die Wilson-Wirkung, so ist dieses keine große Einschränkung, da wir an den Erwartungswerten großer Wilsonloops interessiert sind. Nur vier gewöhnliche

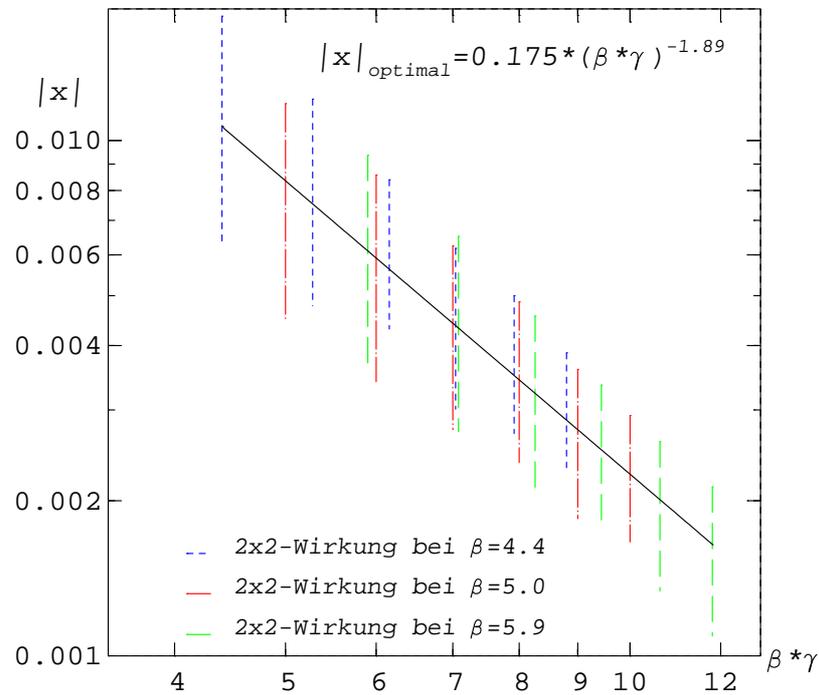


Abbildung 3.2: Mögliche Radien (senkrecht) für die Linkintegration der 2×2 -Wirkung bei $\beta = 4.4$ und $\beta = 5.0$. Die durchgezogene Linie markiert den Fit aller möglichen Radien. Mit dieser Funktion wird im Programm der Radius in Abhängigkeit von $\beta * \gamma$ festgelegt.

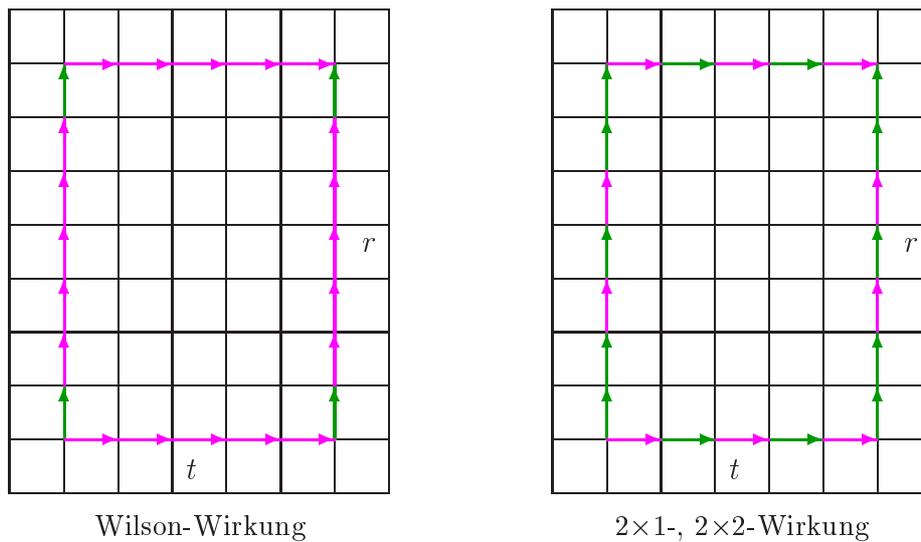


Abbildung 3.3: Verbesserte Wilsonloops; grün: gewöhnliche Links, purpur: verbesserte Links.

Links müssen eingebaut werden. Bei den verbesserten Wirkungen können nur knapp die Hälfte der Links verbessert werden, wie man an der Abbildung 3.3 sieht.

In dem Programm werden vor der Messung verbesserte Links erzeugt und wie eine zweite Konfiguration abgelegt. Bei der Konstruktion der Wilsonloops werden dann entsprechend gewöhnliche und verbesserte Links eingebaut.

Betrachten wir den Effekt der Linkintegration anhand eines mittelgroßen Wilsonloops der Größe 5×5 mit der Wilson-Wirkung bei mittlerem $\beta = 5.7$. In gleicher Rechenzeit erhalten wir einen etwa 16 mal kleineren Fehler. Nach dem „Gesetz der großen Zahl“ halbiert sich der Fehler, wenn man die Anzahl der Messungen vervierfacht. Wir haben also einen **Faktor 250** an Rechenzeit gewonnen! An diesem Beispiel sieht man, daß dieses Projekt ohne die Linkintegration nicht möglich gewesen wäre. Der Vorteil vergrößert sich noch bei kleinerem β , wo die Wilsonloops ein schlechtes Signal/Rausch-Verhältnis besitzen. Bei verbesserten Wirkungen gewinnt man nur eine statt zwei Größenordnungen an Rechenzeit.

3.4 Implementation auf der Quadrics

Auf gewöhnlichen Rechnern besitzt die Linkintegration einen großen Rechenzeitvorteil gegenüber dem Multi-Wärmebad-Algorithmus [14]. Auf der Quadrics ist die Linkintegration nur etwa 2.5 mal schneller als der Multi-Wärmebad-Algorithmus. Während der Multi-Wärmebad-Algorithmus mit über 80% der Spitzenleistung läuft, kommt die Linkintegration nur auf 13%. Konstruktionsbedingt liegt die maximale Leistung beim Rechnen mit komplexen Zahlen bei etwa 16%.

Vor der Beschreibung der Meßroutine finden sich hier zunächst ein paar allgemeine Bemerkungen für das Entwickeln von Routinen auf der Quadrics.

- Im Vergleich mit anderen Rechnern ist der Speicherplatz auf der Quadrics recht begrenzt. Mit der Speicherung von Produkten von Links, die oft verwendet werden, lassen sich viele Multiplikationen sparen. Deshalb gilt es den Speicher *vor* dem Schreiben der Routine gut aufzuteilen, um die Anzahl der Multiplikationen zu minimieren.
- Für eine optimale Auslastung bei der Berechnung von nicht-lokalen Objekten ist es unerlässlich alle benötigte Information lokal auf den Knoten zur Verfügung zu haben. Ein nachträgliches Beschaffen der Information würde die Berechnung fast zum Erliegen bringen. Man muß den Programmablauf so planen, daß nur Zugriffe auf den nächsten Knoten nötig sind.
- Die Quadrics besitzt eine sogenannte *Pipe*. In ihr werden alle Multiplikationen vermerkt, die umgehend ausgeführt werden sollen. Der Programmierer sollte dafür sorgen, daß die Pipe immer gut gefüllt ist. Die Pipe wird durch eine Programmanweisung (`do`, `if`, `where`, ...) unterbrochen. In TAO ist zu diesem Zweck die `for`-Schleife vorgesehen. Die `for`-Schleife ist keine Schleife im

eigentlichen Sinne, der Programmcode wird vom Compiler einfach mehrere Male hintereinander kopiert.

Zur Messung der Auslastung (engl. *performance*) stellt Alenia das Werkzeug *Perg* zur Verfügung, welches für jeden Programmblock die geschätzte Auslastung angibt. Vergleiche mit der Laufzeit von optimierten und nicht-optimierten Routinen zeigten, daß die Schätzung zuträfen.

Für die Bestimmung der Saitenspannung benutzen wir auf der Quadrics die axiale Eichung in Zeitrichtung, um Rechenzeit und Speicherplatz zu sparen. Bei der Verwendung der Linkintegration läßt sich die axiale Eichung nicht mehr durchführen, da die integrierten Links im allgemeinen keine $SU(3)$ -Matrizen sind, die Existenz der Inversen ist nicht garantiert. Auch wäre es nicht möglich, Wilsonloops wie in Abbildung 3.3 mit einer axialen Eichung zu realisieren.

Aufgrund der periodischen Randbedingungen ist es nur sinnvoll Wilsonloops bis zur Größe der halben Gittergröße $N_\sigma/2$, $N_\tau/2$ zu berechnen. Zunächst wurden die Zeitkanten an jedem Punkt der Länge zwei bis $N_\tau/2$ gespeichert. Bei der Standardwirkung wurden nur integrierte Links eingebaut, bei der verbesserten Wirkung abwechselnd integrierte und nicht-integrierte Links.

Für das Speichern aller Raumkanten bietet die Quadrics nicht genug Speicherplatz. Um die Anzahl der Multiplikationen zu minimieren werden die Wilsonloops in Reihenfolge ihrer räumlichen Größe berechnet. Die räumlichen Kanten werden verlängert, durch das Multiplizieren eines Links an die schon bestehende Kante, welche am Ursprung des Wilsonloops gespeichert ist.

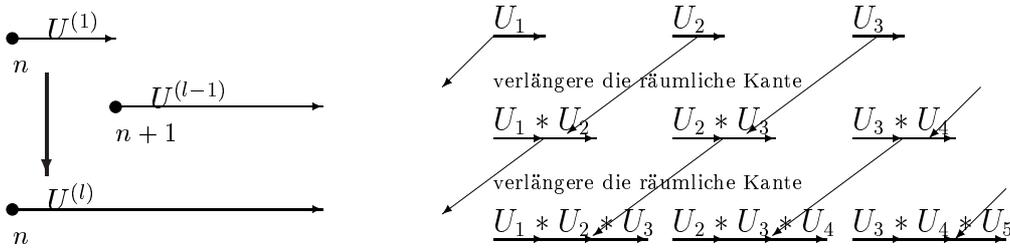


Abbildung 3.4: Eine Kante der Länge l , gespeichert am Ort n , wird konstruiert durch den Link am Ort n und der Kante der Länge $l-1$ am Ort $n+1$.

Die räumliche Kanten der aktuelle Länge liegen immer am Ursprung des Wilsonloops bereit, da es in Zeitrichtung keine Knotengrenzen gibt. Um zeitraubenden Speicherzugriff über die Knotengrenzen in räumlicher Richtung zu vermeiden, wird eine Kopie der zeitlichen Kanten angefertigt. Dieser zweite Satz zeitlicher Kanten wird, entsprechend der Verlängerung der räumlichen Kanten, verschoben. Wenn in der innersten Schleife des Programms der Wilsonloop konstruiert wird, ist alle Information an einem Punkt vorhanden. Es werden nur noch vier Multiplikationen benötigt.

In der Wilsonloop Meßroutine werden zuerst die Wilsonloops gemessen, welche keine verbesserten Links enthalten, also der Größe $(r = 1; t)$ und $(r; t = 1)$ für die Standardwirkung und $(r = 1, 2; t)$ und $(r; t = 1)$ für die verbesserte Wirkung.

Die Berechnung der Wilsonloops der Größe $(r \geq 2; t \geq 2)$ erfolgt für die Standardwirkung nach folgendem Schema:

```
berechne die Zeitkanten der Länge 2 bis  $N_\tau/2$ 
do r=1,  $N_\sigma/2$ 
  verlängere die räumliche Kante um einen gewöhnlichen Link
  verschiebe die zeitliche Kante in r-Richtung
  do t=1,  $N_\tau/2$ 
    setze den Wilsonloop dieser Größe an allen Gitterpunkten zusammen
  enddo
  falls  $r > 1$ , ersetze den letzten gewöhnlichen Link in der räumlichen
    Kante mit einem integrierten Link
enddo
```

Bei der Verwendung der verbesserte Wirkung baut man in die letzte Abfrage noch eine weitere Bedingung ein, um Wilsonloops wie in der Abbildung 3.3 zu erhalten.

Bedenkt man die anfangs erwähnten Schritte, so läßt sich die Quadrics im Gegensatz zu anderen Parallelrechnern mit fast optimaler Auslastung betreiben. In der Tabelle 3.1 ist die Auslastung beim Messen von Wilsonloops ohne Eichung aufgeführt. Zum Vergleich findet sich in Tabelle 3.2 die Auslastung bei der Messung mit Eichung, wie sie für die Bestimmung der Saitenspannung benutzt wurde.

Messung der Wilsonloops für das Matching

	Anteil vom Optimum	Anteil an der Zeit
4× 1 Wärmebad + 4 Overrelaxation	65%	52%
1× Plaquette Messung	88%	2%
1× Linkintegration	13%	22%
1× räumliche Wilsonloop Messung	70%	24%
1× zeitliche Wilsonloop Messung	80%	21%
Plattenzugriffe, etc.	0%	1%
60% Gesamtauslastung		

Tabelle 3.1: Auslastung der Quadrics beim Messen von räumlichen und zeitlichen Wilsonloops mit der Linkintegration in 4 Dimensionen.

Messung der Wilsonloops für die Saitenspannung

	Anteil vom Optimum	Anteil an der Zeit
4× 1 Wärmebad + 4 Overrelexation	65%	61%
1× Plaquette Messung	88%	2%
1× axiale Eichung	68%	1%
1× Schmieren der Konfiguration	57%	4%
1× zeitliche Wilsonloop Messung	80%	31%
Plattenzugriffe, etc.	0%	1%
70% Gesamtauslastung		

Tabelle 3.2: Auslastung der Quadrics beim Messen von zeitlichen Wilsonloops mit der axialen Eichung in 4 Dimensionen.

Kapitel 4

Das Hochtemperaturverhalten der Quadratischen Symanzik-Wirkung

... Daraus erklärt sich, daß Funktionen vom Typ der ζ -Funktion außerordentlich wichtig sind, um Modelle der statistischen Physik exakt behandeln zu können (und nicht nur approximativ auf Supercomputern).

Bronstein, *Taschenbuch der Mathematik* (1996)

In diesem Abschnitt soll das Hochtemperaturverhalten der Quadratischen Symanzik-Wirkung untersucht werden. Im Grenzfall $T \rightarrow \infty$ erreicht die Energiedichte ϵ/T^4 den Wert des masselosen, freien Gluogases, $\epsilon_{\text{SB}}/T^4 = (N^2 - 1)\pi^2/15$, den Stefan-Boltzmann-Limes im Kontinuum. Der Druck des Gluogases strebt gegen $p_{\text{SB}} = \epsilon_{\text{SB}}/3$. Auf dem Gitter mit endlicher N_τ -Ausdehnung zeigt die Wilson-Wirkung durch ultraviolette cut-off Effekte Abweichungen zu ϵ_{SB}/T^4 und p_{SB}/T^4 der Ordnung $\mathcal{O}((aT)^2) = \mathcal{O}(1/N_\tau^2)$. Ziel der verbesserten Wirkungen ist es, diese Effekte zu reduzieren. Dann läßt sich schon auf Gittern mit kleiner zeitlicher Ausdehnung N_τ ein Ergebnis erzielen, das nahe am Kontinuum liegt.

Betrachten wir nun die die Familie der Wirkungen mit folgenden drei Summanden:

$$S^{\text{qs}} = \sum_{x,\nu > \mu} a_{1,1} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \square \right) + a_{1,2} \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Re Tr} \left(\square + \square \right) \right) + a_{2,2} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} \square \right) .(4.1)$$

Diese *überverbesserte* Wirkung wurde vorgeschlagen, um das Verhalten von verbesserten Wirkungen studieren zu können [7]. Die Wirkung (4.1) ist nur $\mathcal{O}(a^2)$ verbessert, obwohl sie drei Summanden enthält. Zum Vergleich, mit einer Kombination der 1×1 -, 2×2 - und 3×3 -Plaquette läßt sich eine $\mathcal{O}(a^4)$ verbesserte Wirkung konstruieren [6]. Die Überverbesserung drückt sich in einem freien Parameter aus. Für alle $y \in \mathbb{R}$ erhält man mit

$$a_{1,1} = y, \quad a_{1,2} = 2/3 - y/2, \quad a_{2,2} = y/16 - 5/48, \quad (4.2)$$

eine $\mathcal{O}(a^2)$ verbesserte Wirkung. Für $y = 5/3$ erhält man die Symanzik-Wirkung, für $y = 4/3$ die 2×2 -Wirkung aus [6]. Andererseits läßt sich für die Familie der Wirkungen, gegeben durch

$$a_{1,1} = 1/(1 + 4z)^2, \quad a_{1,2} = 2za_{1,1}, \quad a_{2,2} = z^2a_{1,1}, \quad (4.3)$$

der Propagator diagonalisieren. Für $z = 0$ erhält man die Wilson-Wirkung und für $y = 16/9 \hat{=} z = -1/16$ eine $\mathcal{O}(a^2)$ verbesserte Wirkung, deren Propagator sich diagonalisieren läßt – die Quadratische Symanzik-Wirkung.

4.1 Die Energiedichte in der Hochtemperaturphase

Betrachten wir zunächst ganz allgemein die Energiedichte für eine beliebige Wirkung. Die folgende Rechnung wird in niedrigster Ordnung in g (also für $g^2=0$) durchgeführt. Auf dieser klassischen Ebene reduziert sich für die Linkvariablen die Baker-Hausdorff-Formel auf $e^A e^B = e^{(A+B)}$, was die Rechnung wesentlich vereinfacht.

In dieser Ordnung entfällt der zweite Term in der Energiedichte (2.10). Die Energiedichte läßt sich in der Hochtemperaturphase ausrechnen durch die Differenz der Entwicklungskoeffizienten des räumlichen und des zeitlichen Anteils der Wirkung,

$$\begin{aligned} \epsilon/T^4 &= \frac{6N}{g^2} N_\tau^4 \left(\langle S_\sigma \rangle - \langle S_\tau \rangle \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad , \\ &= \frac{3}{2} (N^2 - 1) N_\tau^4 \left(S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} \right) + \mathcal{O}(g^2) \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

$S_\sigma^{(2)}$ und $S_\tau^{(2)}$ bezeichnen die Entwicklungskoeffizienten in $\mathcal{O}(g^2)$ der Wirkungsanteile [16],

$$\begin{aligned} \langle S_\sigma \rangle &\equiv \frac{1}{3N_\sigma^3 N_\tau} \left\langle \sum_x \sum_{\mu < \nu < 4} S_{\mu,\nu}(x) \right\rangle = g^2 \frac{N^2 - 1}{4N} S_\sigma^{(2)} + \mathcal{O}(g^4) \\ \langle S_\tau \rangle &\equiv \frac{1}{3N_\sigma^3 N_\tau} \left\langle \sum_x \sum_{\mu=1}^3 S_{\mu,4}(x) \right\rangle = g^2 \frac{N^2 - 1}{4N} S_\tau^{(2)} + \mathcal{O}(g^4) \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Anteile der Wirkung lassen sich als Summe über die verschiedenen Plaquetterme (Wilson-Loops der Größe $k \times \ell$) schreiben

$$\begin{aligned} S_\sigma^{(2)} &= \frac{1}{3} \sum_{\mu < \nu < 4} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,\ell} S_{\mu,\nu}^{(k,\ell)} \quad , \\ S_\tau^{(2)} &= \frac{1}{3} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,\ell} S_{\mu,4}^{(k,\ell)} \quad . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Mit Hilfe des inversen Propagators

$$\Delta_{\mu,\nu}(p) = D_\mu(p) \delta_{\mu,\nu} - E_{\mu,\nu}(p) + \xi g_\mu(p) g_\nu(p) \quad (4.7)$$

findet man die Entwicklungskoeffizienten eines Wilson-Loops [6],

$$S_{\mu,\nu}^{(k,\ell)} = \int d^4p \left(N_{\mu,\nu}^{k,\ell} \cdot \Delta_{\mu,\mu}^{-1} + N_{\nu,\mu}^{k,\ell} \cdot \Delta_{\nu,\nu}^{-1} - 2M_{\mu,\nu}^{k,\ell} \cdot \Delta_{\mu,\nu}^{-1} \right), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } N_{\mu,\nu}^{k,\ell}(p) &= \left(2 \left[k + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) \cos(jp_\mu) \right] \sin^2(\ell p_\nu/2) \right) + (k \leftrightarrow \ell), \\ M_{\mu,\nu}^{k,\ell}(p) &= \left(2 \sum_{j=0}^{k-1} \sin((2j+1)p_\mu/2) \sum_{j=0}^{\ell-1} \sin((2j+1)p_\nu/2) \right) + (k \leftrightarrow \ell), \\ D_\mu(p) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,\ell} \sum_{\nu=1}^4 N_{\mu,\nu}^{k,\ell}(p), \\ E_{\mu,\nu}(p) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,\ell} M_{\mu,\nu}^{k,\ell}(p) \end{aligned} \quad (4.9)$$

und den frei wählbaren Eichfeldern $g_\mu(p)$, sowie dem Eichparameter ξ .

Kommen wir nun zu der Quadratischen Symanzik-Wirkung, für die gilt,

$$a_{1,1} = 16/9, \quad a_{1,2} = -2/9, \quad a_{2,2} = 1/144, \quad \text{restliche } a_{k,\ell} = 0.$$

Hier lautet der nicht-diagonale Teil des inversen Propagators,

$$\begin{aligned} E_{\mu,\nu}^{\text{qs}}(p) &= \frac{256}{36} \sin(p_\mu/2) \sin(p_\nu/2) \\ &- \frac{16}{36} \left[(\sin(p_\mu/2) \sin(p_\nu/2) + \sin(p_\mu/2) \sin(3p_\nu/2)) + (k \leftrightarrow \ell) \right] \\ &+ \frac{1}{36} \left[\sin(p_\mu/2) \sin(p_\nu/2) + \sin(p_\mu/2) \sin(3p_\nu/2) \right. \\ &\quad \left. + \sin(3p_\mu/2) \sin(p_\nu/2) + \sin(3p_\mu/2) \sin(3p_\nu/2) \right] \\ &= \frac{1}{36} \left(15 \sin(p_\mu/2) - \sin(3p_\mu/2) \right) \left(15 \sin(p_\nu/2) - \sin(3p_\nu/2) \right). \end{aligned}$$

Mit der Wahl $g_\mu(p) = \frac{1}{6}(15 \sin(p_\mu/2) - \sin(3p_\mu/2))$, $\xi = 1$ (Feynman-Eichung) wird der inverse Propagator (4.7) diagonal. Definieren wir nun die Abkürzung $s_\mu \equiv \sin(p_\mu/2)$ um D_μ^{qs} und $N_{\mu,\nu}^{\text{qs}}$ einfach aufzuschreiben,

$$\begin{aligned} N_{\mu,\nu}^{\text{qs}}(p) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,\ell} N_{\mu,\nu}^{k,\ell} \\ &= \frac{256}{36} \sin^2(p_\nu/2) - \frac{16}{36} \left(\sin^2(p_\nu) + 2[1 + \cos(p_\mu)] \sin^2(p_\nu/2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{36} \left(2[1 + \cos(p_\mu)] \sin^2(p_\nu) \right) \\ &= \frac{16}{9} \left(4 \sin^2(p_\nu/2) - \frac{1}{4} \sin^2(p_\nu) \right) \left(1 - \frac{1}{4} \cos^2(p_\mu/2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{9} \sin^2(p_\nu/2) \left(3 + \sin^2(p_\nu/2)\right) \left(3 + \sin^2(p_\mu/2)\right) \\
&= \frac{4}{9} s_\nu^2 (3 + s_\nu^2) (3 + s_\mu^2)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\Delta_{\mu,\mu}^{\text{qs}}(p) = \sum_{\nu=1}^4 N_{\mu,\nu}^{\text{qs}}(p) = D_\mu^{\text{qs}}(p) = \frac{4}{9} (3 + s_\mu^2) \sum_{\nu=1}^4 s_\nu^2 (3 + s_\nu^2). \tag{4.11}$$

Man bemerkt, daß sich die μ -Abhängigkeit in $N_{\mu,\nu}^{\text{qs}}/\Delta_{\mu,\mu}^{\text{qs}}$ herauskürzt

$$N_{\mu,\nu}^{\text{qs}}(p)/\Delta_{\mu,\mu}^{\text{qs}}(p) = s_\nu^2 (3 + s_\nu^2) / \sum_{\lambda=1}^4 s_\lambda^2 (3 + s_\lambda^2). \tag{4.12}$$

Aus diesem Grund definieren wir den *reduzierten Propagator* P als:

$$P := \frac{1}{\sum_{\lambda=1}^4 s_\lambda^2 (3 + s_\lambda^2)}$$

Unter Benutzung von (4.8) finden wir für die Differenz der Wirkungsanteile

$$\begin{aligned}
S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} &= \frac{1}{3} \sum_{\mu < \nu < 4} \int d^4p \left(N_{\mu,\nu}^{\text{qs}}(p)/\Delta_{\mu,\mu}^{\text{qs}}(p) + N_{\nu,\mu}^{\text{qs}}(p)/\Delta_{\nu,\nu}^{\text{qs}}(p) \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} \sum_{\mu < \nu=4} \int d^4p \left(N_{\mu,4}^{\text{qs}}(p)/\Delta_{\mu,\mu}^{\text{qs}}(p) + N_{4,\mu}^{\text{qs}}(p)/\Delta_{4,4}^{\text{qs}}(p) \right) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{\mu < \nu < 4} \int d^4p \left(s_\nu^2 (3 + s_\nu^2) + s_\mu^2 (3 + s_\mu^2) \right) P \\
&\quad - \frac{1}{3} \sum_{\mu < \nu=4} \int d^4p \left(s_4^2 (3 + s_4^2) + s_\mu^2 (3 + s_\mu^2) \right) P \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \int d^4p s_i^2 (3 + s_i^2) P - \int d^4p s_4^2 (3 + s_4^2) P
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Der Propagator P läßt sich in eine Summe aus zwei Propagatoren P_+ und P_- zerlegen¹. Mit diesem Trick ist es möglich die bosonische Summe aus dem Anhang von [17] zu benutzen

$$\begin{aligned}
P &= \left(s_4^2 (3 + s_4^2) + \sum_{i=1}^3 s_i^2 (3 + s_i^2) \right)^{-1} \\
&= \left(s_4^4 + 3s_4^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \omega^2 \right)^{-1}
\end{aligned}$$

¹Mein Dank gilt M. García Pérez, die mich auf diese Möglichkeit der Zerlegung aufmerksam gemacht hat.

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(s_4^2 + \frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{9}{4} - \omega^2 \right) \right)^{-1} \\
&= \left(\left(s_4^2 + \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \omega^2} \right) \left(s_4^2 + \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \omega^2} \right) \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{(s_4^2 + \omega_-^2)(s_4^2 + \omega_+^2)} \tag{4.14} \\
&= (\omega_+^2 - \omega_-^2)^{-1} \left(\frac{1}{s_4^2 + \omega_-^2} - \frac{1}{s_4^2 + \omega_+^2} \right) \\
&= \frac{1}{\Omega} (P_- - P_+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{\Omega} (P_- - P_+) \\
\Omega &= \sqrt{9 - 4\omega^2} = \omega_+^2 - \omega_-^2 \\
P_{\pm} &= \frac{1}{\sin^2(p_4/2) + \omega_{\pm}^2} \\
\omega_{\pm}^2 &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \omega^2} \\
\omega^2 &= \sum_{i=1}^3 s_i^2 (3 + s_i^2)
\end{aligned}$$

Die Propagatoren P_+ und P_- haben eine ähnliche Form wie der Propagator der Wilson-Wirkung $P = \left(\sum_{\lambda=1}^4 s_{\lambda}^2 \right)^{-1}$. Auf den zweiten Blick offenbart sich jedoch ein struktureller Unterschied, wenn man die Grenzwerte

$$P_- \xrightarrow{p_{\mu} \rightarrow 0} \infty \quad , \quad P_+ \xrightarrow{p_{\mu} \rightarrow 0} \frac{1}{3} \tag{4.15}$$

betrachtet. Der wesentliche Beitrag zum Integral (4.13) kommt daher aus der Nähe des Ursprungs ($p_{\mu} \rightarrow 0$). Da P_+ allerdings für $p_{\mu} \rightarrow 0$ einen endlichen Wert annimmt, wird das Integral dort exponentiell gedämpft. Der Vollständigkeit halber vernachlässigen wir die Terme $\sim P_+$ aber jetzt noch nicht. Wir können im folgenden p_{μ} und damit auch ω und ω_{\pm} als klein betrachten. Die Wurzel $\sqrt{\frac{9}{4} - \omega^2}$ in ω_{\pm} bleibt in diesem Sinne auch reell.

Wir können die Rechnung verkürzen, indem wir die Differenz der Wirkungsanteile (4.13) umschreiben. Wir addieren und subtrahieren dreimal den ersten Term in (4.13),

$$\begin{aligned}
S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} &= \frac{4}{3} \sum_{i=1}^3 \int d^4p \, s_i^2 (3 + s_i^2) P - \sum_{\mu=1}^4 \int d^4p \, s_\mu^2 (3 + s_\mu^2) P \\
&= \int d^3p \left[\frac{4\omega^2}{3\Omega} \left(\int dp_4 P_- - \int dp_4 P_+ \right) - 1 \right]. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Das Integral $\int dp_4$ wird als diskrete Impulssumme geschrieben, um die explizite Abhängigkeit von N_τ zu erhalten. Für die Berechnung dieser Impulssumme wird der Anhang von [17] verwendet.

$$\begin{aligned}
\int dp_4 P_- &= \frac{1}{N_\tau} \sum_{l=0}^{N_\tau-1} \frac{1}{\sin^2(\pi l/N_\tau) + \omega_-^2} \\
&= \frac{1}{N_\tau} \left(\frac{1}{\omega_-^2} + \sum_{l=1}^{N_\tau-1} \frac{1}{\sin^2(\pi l/N_\tau) + \omega_-^2} \right) \\
&= \frac{1}{N_\tau} \left(\frac{1}{\omega_-^2} + \frac{1}{\omega_-^2} \left[N_\tau \frac{\coth(N_\tau x_-/2)}{\coth(x_-/2)} - 1 \right] \right) \quad \text{nach [17] (A.6)} \\
&= \frac{1}{\omega_-^2} \frac{\coth(N_\tau x_-/2)}{\coth(x_-/2)} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

x_\pm ist definiert durch $\omega_\pm = \sinh\left(\frac{1}{2}x_\pm\right)$ mit $x_\pm \geq 0$. Damit gilt

$$\frac{1}{\coth(x_\pm/2)} = \frac{\sinh(x_\pm/2)}{\sqrt{\sinh^2(x_\pm/2) + 1}} = \frac{\omega_\pm}{\sqrt{1 + \omega_\pm^2}}. \quad (4.18)$$

Analog verfährt man mit dem zweiten Teil $\int dp_4 P_+$,

$$\begin{aligned}
S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} &= \int d^3p \left[\frac{4\omega^2}{3\Omega} \left(\frac{1}{\omega_- \sqrt{1 + \omega_-^2}} \coth\left(\frac{N_\tau x_-}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\omega_+ \sqrt{1 + \omega_+^2}} \coth\left(\frac{N_\tau x_+}{2}\right) \right) - 1 \right]. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle ziehen wir den Beitrag für $T=0$ aus technischen Gründen ab. Für endliche N_σ ist dies nicht nötig bei der Berechnung der Energiedichte in niedrigster Ordnung, da die Energiedichte (4.4) proportional zu der Differenz der Wirkungsanteile ist und so auf dem symmetrischen Gitter verschwindet. Bei dieser Rechnung wird allerdings die Symmetrie von Raum- und Zeitrichtung gebrochen, da wir den Grenzfall eines unendlichen räumlichen Volumens $N_\sigma \rightarrow \infty$ betrachten und die Ausdehnung in Zeitrichtung endlich und diskret bleibt. Die Limes werden nacheinander ausgeführt. Nur so erhält man den Stefan-Boltzmann-Wert. Da durch den Abzug des Limes das Ergebnis nicht verfälscht wird, sich die Rechnung aber vereinfacht, ziehen wir den Limes ab.

Wir berechnen nun den Grenzwert,

$$\lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \left(\coth\left(\frac{N_\tau x_-}{2}\right) \right) = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + e^{-N_\tau x_-}}{1 - e^{-N_\tau x_-}} \right) = 1.$$

$$\begin{aligned} \int dp_4 P_- - \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \int dp_4 P_- &= \frac{1}{\omega_- \sqrt{1 + \omega_-^2}} \left(\coth \left(\frac{N_\tau x_-}{2} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\omega_- \sqrt{1 + \omega_-^2}} \frac{2 \exp(-N_\tau x_-)}{1 - \exp(-N_\tau x_-)} = \frac{1}{\omega_- \sqrt{1 + \omega_-^2}} \frac{2}{\exp(N_\tau x_-) - 1} \end{aligned}$$

$\int dp_4 P_+$ wird ebenso behandelt. Die 1 in (4.19) entfällt beim Abziehen des Limes ebenfalls. Es wurde darauf verzichtet, verschiedene Symbole für die Wirkungsanteile mit und ohne Subtraktion des Anteils des symmetrischen Gitters zu verwenden,

$$\begin{aligned} S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} &= \int d^3 p \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{\Omega} \left(\frac{1}{\omega_- \sqrt{1 + \omega_-^2}} \frac{2}{\exp(N_\tau x_-) - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_+ \sqrt{1 + \omega_+^2}} \frac{2}{\exp(N_\tau x_+) - 1} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Der zweite Teil des Integrals, der von P_+ herrührt, wird exponentiell mit N_τ gedämpft und kann deshalb vernachlässigt werden,

$$\begin{aligned} \omega_\pm^2 = \sinh^2 \left(\frac{1}{2} x_\pm \right) &\Rightarrow x_\pm = 2 \ln \left(\omega_\pm + \sqrt{1 + \omega_\pm^2} \right), \quad (4.21) \\ \omega \rightarrow 0 &\begin{cases} x_- = 2 \ln(1) = 0 \\ x_+ = 2 \ln(\sqrt{3} + 2) \end{cases}, \\ \frac{1}{\exp(N_\tau x_+) - 1} &= \frac{1}{\exp(2N_\tau \ln(\sqrt{3} + 2)) - 1} (1 + \mathcal{O}(\omega^2)) \approx 0. \end{aligned}$$

Um $S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)}$ auf eine kompakte Form zu bringen, sind die Relationen $\omega_-^2 \omega_+^2 = \omega^2$ und $\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(3 \pm \Omega)$ hilfreich,

$$S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} = \int dp^3 8\omega^2 \left[3\Omega\sqrt{3} - \Omega\sqrt{5 - \Omega} \right]^{-1} \frac{2}{\exp(N_\tau x_-) - 1}. \quad (4.22)$$

Um die Abhängigkeit der Energiedichte von N_τ zu untersuchen, entwickeln wir die letzte Gleichung in Potenzen von N_τ . Zuerst entwickeln wir x_- in ω um $\omega = 0$. Wie schon erwähnt, besitzt das Integral den wesentlichen Beitrag in der Nähe des Ursprungs, so ist diese Entwicklung sinnvoll.

$$x_- = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega + \frac{8}{405\sqrt{3}} \omega^5 + \frac{4}{1701\sqrt{3}} \omega^7 + \frac{8}{6561\sqrt{3}} \omega^9 + \mathcal{O}(\omega^{11}) \quad (4.23)$$

An dieser Entwicklung erkennt man die $\mathcal{O}(a^2)$ -Verbesserung der Wirkung, da der ω^3 -Term fehlt, vergleiche auch (4.24). Für den Exponentialterm fand F. Karsch die folgende trickreiche Entwicklung. Definieren wir zuerst mit (4.23) die Funktion g und die Funktion h ,

$$N_\tau x_- = \frac{2}{\sqrt{3}} N_\tau \omega + g, \quad y \equiv N_\tau \omega, \quad h = \frac{1}{e^{2N_\tau \omega / \sqrt{3}} - 1} = \frac{1}{e^{2y/\sqrt{3}} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{N_\tau x_- - 1}} &= \left(e^{2y/\sqrt{3}} e^g - 1 \right)^{-1} \\
&= \left(e^{2y/\sqrt{3}} (1 + e^g - 1) - 1 \right)^{-1} \\
&= \left(e^{2y/\sqrt{3}} - 1 + e^{2y/\sqrt{3}} (e^g - 1) \right)^{-1} \\
&= \left(e^{2y/\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1} \left(1 + \frac{e^{2y/\sqrt{3}}}{e^{2y/\sqrt{3}} - 1} (e^g - 1) \right)^{-1} \\
&= h \frac{1}{1 + (h+1)(e^g - 1)} \\
&\approx h \left(1 - (h+1)(e^g - 1) + (h+1)^2 (e^g - 1)^2 \right) \\
&\approx h \left(1 - (h+1) \left(g + \frac{1}{2} g^2 \right) + (h+1)^2 g^2 \right) \\
&= h - \\
&\quad \left(h^2 + h \right) \left(\frac{8}{405\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^4} y^5 + \frac{4}{1701\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^6} y^7 + \frac{8}{6561\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^8} y^9 \right) \\
&\quad + h \left(-\frac{1}{2} (h+1) + (h+1)^2 \right) \frac{64}{492075} \frac{1}{N_\tau^8} y^{10} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^9} \right) \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Beginnen wir nun mit der endgültigen Berechnung des Integrals.

$$\begin{aligned}
\epsilon/T^4 &= \frac{3}{2} (N^2 - 1) N_\tau^4 \left(S_\sigma^{(2)} - S_\tau^{(2)} \right) \quad (4.25) \\
&= \frac{3}{2} (N^2 - 1) N_\tau^4 \int_0^{2\pi} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} 8\omega^2 \left[3\Omega\sqrt{3} - \Omega\sqrt{5} - \Omega \right]^{-1} \frac{2}{e^{N_\tau x_-} - 1}
\end{aligned}$$

Nun führen wir einige Substitutionen durch. Zuerst nutzen wir die Symmetrie $\omega(p) = \omega(\pi - p)$ aus.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi d^3 p$$

Diese Substitution ist notwendig, damit wir eindeutig zu der neuen Variablen y übergehen können:

$$\begin{aligned}
N_\tau \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sin^2(p_i/2) \left(3 + \sin^2(p_i/2) \right)} &= N_\tau \omega(p) \equiv y = \sqrt{\sum_{i=1}^3 y_i^2} \\
p_i \in [0, \pi] &\hat{=} y_i \in [0, 2N_\tau]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_i &= 2 \arcsin \left(\sqrt{-\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^2 + \frac{9}{4}}} \right) \quad \text{um } y_i/N_\tau = 0 \text{ entwickelt} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{y_i}{N_\tau} + \frac{8}{405\sqrt{3}} \left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^5 + \frac{4}{1701\sqrt{3}} \left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^7 + \frac{8}{6561\sqrt{3}} \left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^9 \\
&\quad + \mathcal{O} \left(\left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^{11} \right) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dy_i} &= \frac{1}{N_\tau} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{8}{81\sqrt{3}} \left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^4 + \frac{4}{243\sqrt{3}} \left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^6 + \frac{8}{729\sqrt{3}} \left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^8 \right) \\ &\quad + \mathcal{O} \left(\left(\frac{y_i}{N_\tau} \right)^{10} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Interessanterweise sind die Entwicklungen (4.23) und (4.26) aufgrund der Struktur der Doppelwurzel identisch. Setzen wir nun $\frac{dp_i}{dy_i}$ ein und benutzen dann $y = |y|$,

$$\frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi d^3 p \rightarrow \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2N_\tau} d^3 y \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{dy_i} \rightarrow \frac{1}{8\pi^3} \int_{-2N_\tau}^{2N_\tau} d^3 y \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{dy_i}.$$

Wir können die Grenzen des Integrals gegen Unendlich gehen lassen, da der Integrand für große Wert exponentiell gedämpft wird. Dann entwickeln wir $[3\Omega\sqrt{3 - \Omega}\sqrt{5 - \Omega}]^{-1}$ ebenfalls in y/N_τ um 0 und setzen die Entwicklungen (4.24) und (4.27) ein.

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{T^4} &= 3(N^2 - 1) N_\tau^4 \frac{1}{8\pi^3} \int_{-2N_\tau}^{2N_\tau} d^3 y \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{dy_i} \times 8\omega^2 [3\Omega\sqrt{3 - \Omega}\sqrt{5 - \Omega}]^{-1} \times \frac{1}{e^{N_\tau x_-} - 1} \\ &= 3(N^2 - 1) N_\tau^4 \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y \prod_{i=1}^3 \frac{dp_i}{dy_i} \times 8\omega^2 [3\Omega\sqrt{3 - \Omega}\sqrt{5 - \Omega}]^{-1} \times \frac{1}{e^{N_\tau x_-} - 1} \\ &\quad + \mathcal{O}(e^{-2N_\tau}) \\ &= 3(N^2 - 1) N_\tau^4 \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y \left\{ \right. \\ &\quad \frac{1}{N_\tau^3} \left(\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{N_\tau^4} \frac{32}{243\sqrt{3}} (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) - \frac{1}{N_\tau^6} \frac{16}{729\sqrt{3}} (y_1^6 + y_2^6 + y_3^6) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N_\tau^8} \frac{32}{2187\sqrt{3}} (y_1^8 + y_2^8 + y_3^8 + \frac{4}{9} (y_1^4 y_2^4 + y_1^4 y_3^4 + y_2^4 y_3^4)) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \right) \\ &\quad \times \frac{1}{N_\tau} \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} y + \frac{16}{243\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^4} y^5 + \frac{8}{729\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^6} y^7 + \frac{16}{2187\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^8} y^9 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \right) \\ &\quad \times \left(h - (h^2 + h) \left(\frac{8}{405\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^4} y^5 + \frac{4}{1701\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^6} y^7 + \frac{8}{6561\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^8} y^9 \right) \right. \\ &\quad \left. + (2h^3 + 3h^2 + h) \frac{32}{492075} \frac{1}{N_\tau^8} y^{10} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \right) \left. \right\} \\ &= (N^2 - 1) \frac{3}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 y \left\{ \frac{2^5}{3^3} y h \right. \\ &\quad + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\frac{2^7}{3^7} (y^5 + y (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4)) h - \frac{2^8}{5 \cdot 3^{15/2}} y^6 (h^2 + h) \right) \\ &\quad + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\frac{2^6}{3^8} (y^7 - y (y_1^6 + y_2^6 + y_3^6)) h - \frac{2^7}{7 \cdot 3^{17/2}} y^8 (h^2 + h) \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{2^7}{3^9} (y^9 + \frac{4}{9} y^5 (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y \left(y_1^8 + y_2^8 + y_3^8 + \frac{4}{9} (y_1^4 y_2^4 + y_1^4 y_3^4 + y_2^4 y_3^4) \right) h \\
& - \frac{2^8}{5 \cdot 3^{19/2}} \left(y^{10} + \frac{4}{9} y^6 (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) \right) (h^2 + h) \\
& + \frac{2^{10}}{5^2 \cdot 3^{12}} y^{11} (2h^3 + 3h^2 + h) \Big) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \Big\}
\end{aligned}$$

Für den Übergang auf Kugelkoordinaten benötigen wir folgende Integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} d^3 y \left(y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 \right) &= \frac{12}{5} \pi \int_0^\infty dy y^6 \\
\int_{\mathbf{R}} d^3 y \left(y_1^6 + y_2^6 + y_3^6 \right) &= \frac{12}{7} \pi \int_0^\infty dy y^8 \\
\int_{\mathbf{R}} d^3 y \left(y_1^8 + y_2^8 + y_3^8 + \frac{4}{9} (y_1^4 y_2^4 + y_1^4 y_3^4 + y_2^4 y_3^4) \right) &= \frac{436}{15} \pi \int_0^\infty dy y^{10} \\
\frac{\epsilon}{T^4} &= (N^2 - 1) \frac{3}{8\pi^3} \int_0^\infty dy \left\{ \frac{2^5}{3^3} 4\pi y^3 h \right. \\
& + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\frac{2^7}{3^7} \left(4 + \frac{12}{5} \right) \pi y^7 h - \frac{2^8}{5 \cdot 3^{15/2}} 4\pi y^8 (h^2 + h) \right) \\
& + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\frac{2^6}{3^8} \left(4 - \frac{12}{7} \right) \pi y^9 h - \frac{2^7}{7 \cdot 3^{17/2}} 4\pi y^{10} (h^2 + h) \right) \\
& + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{2^7}{3^9} \left(4 + \frac{16}{15} + \frac{436}{15} \right) \pi y^{11} h \right. \\
& \quad - \frac{2^8}{5 \cdot 3^{19/2}} \left(4 + \frac{16}{15} \right) \pi y^{12} (h^2 + h) \\
& \quad \left. + \frac{2^{10}}{5^2 \cdot 3^{12}} 4\pi y^{13} (2h^3 + 3h^2 + h) \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \Big\}
\end{aligned}$$

Zuletzt substituieren wir das Argument der Exponentialfunktion in $h = (\exp(2y/\sqrt{3}) - 1)^{-1}$ mit $x = 2y/\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{T^4} &= (N^2 - 1) \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dx \left\{ \frac{x^3}{e^x - 1} \right. \\
& + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\frac{8}{180} \frac{x^7}{e^x - 1} - \frac{1}{180} x^8 \left(\frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) \right) \\
& + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\frac{4}{2016} \frac{x^9}{e^x - 1} - \frac{1}{2016} x^{10} \left(\frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) \right) \\
& + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{2032}{315} \frac{x^{11}}{e^x - 1} - \frac{19}{43200} x^{12} \left(\frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{64800} x^{13} \left(\frac{2}{(e^x - 1)^3} + \frac{3}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) \right) \\
& \left. + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Bosonische und fermionische Summen führen auf eine Darstellung der Riemannschen ζ -Funktion (siehe z.B. Abramowitz [15] Kapitel 23.2 oder Bronstein [18] Kapitel 2.7.3.3). Für unsere Zwecke nehmen wir die Formel [15](23.2.7) und führen einige partielle Integrationen durch.

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dx} \frac{x^s}{s} \right) \frac{1}{e^x - 1} dx \\ &= - \int_0^\infty \frac{x^s}{s} \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \int_0^\infty \frac{x^s}{s} \left(\frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) dx \\ \Gamma(s+1)\zeta(s-1) &= \int_0^\infty x^s \left(\frac{2}{(e^x - 1)^3} + \frac{3}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} \right) dx\end{aligned}$$

Hier sind die Werte von $\Gamma(n)\zeta(n)$, die wir benötigen:

n	4	8	10	12
$\Gamma(n)\zeta(n)$	$\frac{1}{15}\pi^4$	$\frac{8}{15}\pi^8$	$\frac{128}{33}\pi^{10}$	$\frac{176\,896}{4\,095}\pi^{12}$

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{T^4} &= (N^2 - 1) \frac{1}{\pi^2} \left\{ \Gamma(4)\zeta(4) + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\frac{8}{180}\Gamma(8)\zeta(8) - \frac{1}{180}8\Gamma(8)\zeta(8) \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\frac{4}{2\,016}\Gamma(10)\zeta(10) - \frac{1}{2\,016}10\Gamma(10)\zeta(10) \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{127}{45\,360}\Gamma(12)\zeta(12) - \frac{19}{43\,200}12\Gamma(12)\zeta(12) + \frac{1}{64\,800}13 \cdot 12\Gamma(12)\zeta(12) \right) \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \\ &= (N^2 - 1) \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{15}\pi^4 + \frac{1}{N_\tau^4}0 - \frac{1}{N_\tau^6}\frac{8}{693}\pi^{10} - \frac{1}{N_\tau^8}\frac{176\,896}{58\,046\,625}\pi^{12} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{T^4} &= (N^2 - 1) \frac{\pi^2}{15} \left(1 - \frac{40}{231} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 - \frac{176\,896}{3\,869\,775} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^8 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \\ &\approx (N^2 - 1) \frac{\pi^2}{15} \left(1 - 0.173 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 - 0.046 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^8 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \quad (4.28)\end{aligned}$$

Überraschenderweise verschwindet die Ordnung $\mathcal{O}(1/N_\tau^4)$ in (4.28). Die Wirkung ist nur $\mathcal{O}(a^2)$ verbessert, die Observable Energiedichte *zufällig* sogar $\mathcal{O}(a^4)$

verbessert. Das macht die Quadratische Symanzik-Wirkung für die Thermodynamik interessant.

Um das Ergebnis (4.28) zu überprüfen wurde das Integral (4.13) zur Berechnung der Energiedichte (4.4) numerisch mit der Gauß-Methode approximiert. Zuerst wurde eine ausreichend große Anzahl Stützstellen zur Diskretisierung des räumlichen Volumens gewählt. Die Anzahl der Stützstellen reichte von $8 \cdot N_\tau$ bis $48 \cdot N_\tau$. Dann wurde die Energiedichte ϵ/T^4 für verschiedene Werte N_τ berechnet.

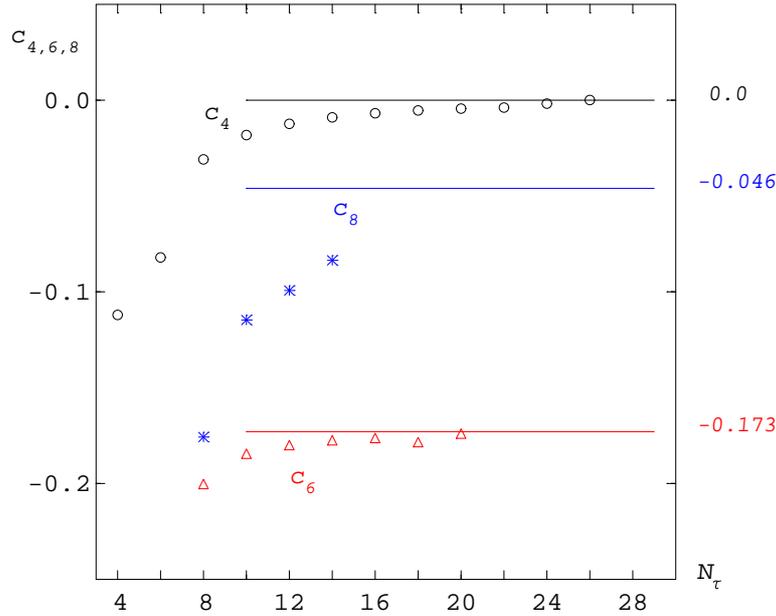


Abbildung 4.1: Die numerische Abschätzung der Koeffizienten c_4 , c_6 , c_8 der Energiedichte.

Zuerst läßt sich der Koeffizient c_4 vor dem Term $(\pi/N_\tau)^4$ bestimmen,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon(N_\tau)}{T^4} &= (N^2 - 1) \frac{\pi^2}{15} \left[1 + c_4 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 + O(N_\tau^{-6}) \right] = \frac{\epsilon_{\text{SB}}}{T^4} \left[1 + c_4 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 + O(N_\tau^{-6}) \right] \\ \Rightarrow \left(\frac{\epsilon(N_\tau)}{\epsilon_{\text{SB}}} - 1 \right) \left(\frac{N_\tau}{\pi} \right)^4 &\xrightarrow{\text{große } N_\tau} c_4 . \end{aligned}$$

Mit der Kenntnis, daß c_4 verschwindet, läßt sich c_6 abschätzen und mit der Kenntnis von $c_6 = -40/231$ auch c_8 ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\epsilon(N_\tau)}{\epsilon_{\text{SB}}} - 1 \right) \left(\frac{N_\tau}{\pi} \right)^6 &\xrightarrow{\text{große } N_\tau} c_6 , \\ \left(\frac{\epsilon(N_\tau)}{\epsilon_{\text{SB}}} - 1 + \frac{40}{231} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 \right) \left(\frac{N_\tau}{\pi} \right)^8 &\xrightarrow{\text{große } N_\tau} c_8 . \end{aligned}$$

4.2 Der Druck in der Hochtemperaturphase

Um den Druck zu berechnen, gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Nach Definition ist

$$p = T \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right|_T .$$

Für homogene Systeme läßt sich der Druck aus der freien Energiedichte f erhalten,

$$p = -f = \frac{T}{V} \ln Z(T, V) .$$

In niedrigster Ordnung g (das heißt $g^2=0$) läßt sich die Zustandssumme recht einfach mit Hilfe des inversen Propagators als Gaußintegral aufschreiben,

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{\mu, p} dA_\mu(p) e^{\frac{1}{2} \int d^4 p \sum_{a=1}^{N^2-1} \sum_{\mu, \nu} A_\mu^a(-p) \Delta_{\mu, \nu}(p) A_\nu^a(p)} \\ &= \prod_p \text{Det} (\Delta_{\mu, \nu}(p))^{-\frac{1}{2}(N^2-1)} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wir dürfen an dieser Stelle nicht die Eichung wie im letzten Abschnitt fixieren um den Propagator zu diagonalisieren. Bei der Berechnung von Erwartungswerten in niedrigster Ordnung fallen die Geistfelder heraus, nicht aber bei der Berechnung von $\ln Z$. Wir berechnen mit Hilfe von Mathematica die Determinante des inversen Propagators

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu, \nu}(p) &= D_\mu(p) \delta_{\mu, \nu} - E_{\mu, \nu}(p) + \xi g_\mu(p) g_\nu(p) \\ &= \left(\frac{4}{9} (3 + s_\mu^2) \sum_{\lambda=1}^4 s_\lambda^2 (3 + s_\lambda^2) \right) \delta_{\mu, \nu} \\ &\quad - \frac{1}{36} (15 \sin(p_\mu/2) - \sin(3p_\mu/2)) (15 \sin(p_\nu/2) - \sin(3p_\nu/2)) \\ &\quad + \xi g_\mu(p) g_\nu(p) . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Geistfelder finden wir im letzte Term der Zustandssumme,

$$\text{Det} (\Delta_{\mu, \nu}(p)) = \prod_\mu (3 + s_\mu^2) \cdot \left(\sum_{\lambda=1}^4 s_\lambda^2 (3 + s_\lambda^2) \right)^2 \cdot \left(\sum_{\lambda=1}^4 g_\lambda(p) s_\lambda^2 \right)^2 .$$

Durch die Einführung der Faddeev-Popov-Determinante werden die Geistfelder eliminiert. Für den Logarithmus der Zustandssumme finden wir,

$$\ln Z = -\frac{N^2-1}{2} \sum_p \left[\sum_\mu \ln (3 + s_\mu^2) + 2 \ln \left(\sum_{\lambda=1}^4 s_\lambda^2 (3 + s_\lambda^2) \right) \right] . \quad (4.31)$$

Betrachten wir zuerst die Teile der freien Energiedichte, um zu erkennen, welche Teile exponentiell gedämpft sind und so für unsere Betrachtung irrelevant. Wir benutzen dazu wieder die Zerlegung des Propagators (4.14) ($V = N_\sigma^3$, $T = N_\tau^{-1}$),

$$f \frac{2}{N^2 - 1} N_\sigma^3 N_\tau = \sum_{\vec{p}} \left[\sum_{\mu} \ln(3 + s_\mu^2) + 2 \ln \left(\sum_{\lambda=1}^4 s_\lambda^2 (3 + s_\lambda^2) \right) \right] \quad (4.32a)$$

$$= \sum_{\vec{p}} \left[\sum_{\mu} \ln(3 + s_\mu^2) + 2 \ln \left((s_4^2 + \omega_-^2) (s_4^2 + \omega_+^2) \right) \right] \quad (4.32b)$$

$$= \sum_{\vec{p}} \sum_j N_\tau \ln(s_j^2 + \omega_0^2) + \sum_{\vec{p}} \sum_{p_4} \ln(s_4^2 + \omega_0^2) \\ + 2 \sum_{\vec{p}} \sum_{p_4} \left(\ln(s_4^2 + \omega_-^2) + \ln(s_4^2 + \omega_+^2) \right) . \quad (4.32c)$$

$$w_0^2 \equiv 3, \quad w_0^2 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega_+^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 0} = 3 \quad (4.33)$$

Bei der Berechnung des Drucks müssen wir den $T=0$ -Beitrag zu f abziehen, um $p(0) = 0$ zu erhalten. Die Zustandssumme ist immer nur bis auf einen Faktor definiert. Der erste Term von (4.32c) verschwindet beim Abzug des $N_\tau \rightarrow \infty$ -Limes. Für die wesentlichen Terme benutzen wir wie im letzten Abschnitt den Anhang von [17](A.11)–(A.14), $s = +, -, 0$,

$$N_\tau \tilde{F}_s := \sum_{\ell=0}^{N_\tau-1} \ln \left(\sin^2(\pi \ell / N_\tau) + \omega_s^2 \right) = 2 \ln \left(\frac{\sinh(N_\tau x_s / 2)}{2^{N_\tau-1} \sinh(x_s / 2)} \right) + \ln(w_s^2) \\ = 2 \ln \left(\frac{1}{2^{N_\tau}} (e^{N_\tau x_s / 2} - e^{-N_\tau x_s / 2}) \right) = -2 N_\tau \ln 2 + 2 \ln (e^{N_\tau x_s / 2} - e^{-N_\tau x_s / 2}) .$$

x_s ist wieder definiert durch $\omega = \sinh(x_s / 2)$. Der $T=0$ -Anteil von \tilde{F}_s ist gegeben durch den Grenzwert,

$$\tilde{F}_s \Big|_{T=0} = -2 \ln 2 + \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{N_\tau} \ln (e^{N_\tau x_s / 2} - e^{-N_\tau x_s / 2}) \\ = -2 \ln 2 + \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \frac{2}{N_\tau} \ln (e^{N_\tau x_s / 2}) = x_s - 2 \ln 2, \\ \tilde{F}_s - \tilde{F}_s \Big|_{T=0} = \frac{2}{N_\tau} \ln \left((e^{N_\tau x_s / 2} - e^{-N_\tau x_s / 2}) \cdot e^{-N_\tau x_s / 2} \right) \\ = \frac{2}{N_\tau} \ln (1 - e^{-N_\tau x_s}) .$$

Der zweite und der letzte Term von (4.32c) werden bei der Integration exponentiell gedämpft, weil $x_{+,0}$ für $\omega \rightarrow 0$ beide endlich bleiben. So verbleibt also nur der dritte Term von (4.32c),

$$p = -f = -\frac{N^2 - 1}{2} \frac{2}{N_\tau} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d^3 p \sum_{\ell=0}^{N_\tau-1} \ln(s_4^2 + \omega_-^2) \\ = -(N^2 - 1) \frac{2}{N_\tau} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d^3 p \ln(1 - e^{-N_\tau x_-}) .$$

Berechnen wir nun die ersten drei Korrekturen zum Druck. Wir setzen die Entwicklung des Maßes ein, gehen auf Kugelkoordinaten über und integrieren partiell, um von $\ln(1 - e^{-N_\tau x_-})$ auf $1/(e^{N_\tau x_-} - 1)$ zu kommen. Dann sortieren wir die Terme nach Potenzen von $1/N_\tau$ und substituieren $x = 2y/\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{2(N^2 - 1)}{N_\tau} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3y \frac{d^3p}{d^3y} \ln(1 - e^{-N_\tau x_-}) + \mathcal{O}(e^{-2N_\tau/\sqrt{3}}) \\
&= -\frac{N^2 - 1}{4N_\tau^4 \pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3y \left(\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{N_\tau^4} \frac{32}{243\sqrt{3}} (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) - \frac{1}{N_\tau^6} \frac{16}{729\sqrt{3}} (y_1^6 + y_2^6 + y_3^6) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{N_\tau^8} \frac{32}{2187\sqrt{3}} (y_1^8 + y_2^8 + y_3^8 + \frac{4}{9} (y_1^4 y_2^4 + y_1^4 y_3^4 + y_2^4 y_3^4)) \right) \times \\
&\quad \times \ln(1 - e^{-N_\tau x_-}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \\
&= -\frac{N^2 - 1}{N_\tau^4 \pi^2} \int_0^\infty dy \left(\frac{8}{3\sqrt{3}} y^2 + \frac{1}{N_\tau^4} \frac{32}{243\sqrt{3}} \frac{3}{5} y^6 - \frac{1}{N_\tau^6} \frac{16}{729\sqrt{3}} \frac{3}{7} y^8 + \frac{1}{N_\tau^8} \frac{32}{2187\sqrt{3}} \frac{109}{315} y^{10} \right) \times \\
&\quad \times \ln\left(1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}y - \frac{8}{405\sqrt{3}}\frac{1}{N_\tau^4}y^5 - \frac{4}{1701\sqrt{3}}\frac{1}{N_\tau^6}y^7 - \frac{8}{6561\sqrt{3}}\frac{1}{N_\tau^8}y^9}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \\
&= \frac{N^2 - 1}{3N_\tau^4 \pi^2} \int_0^\infty dy \left(\frac{2^3}{3^2} y^3 + \frac{1}{N_\tau^4} \frac{2^5}{3^4} \frac{1}{35} y^7 - \frac{1}{N_\tau^6} \frac{2^4}{3^7} \frac{1}{7} y^9 + \frac{1}{N_\tau^8} \frac{2^5}{3^9} \frac{109}{385} y^{11} \right) \times \\
&\quad \times \left(2 + \frac{1}{N_\tau^4} \frac{2^3}{3^4} y^4 + \frac{1}{N_\tau^6} \frac{2^2}{3^5} y^6 + \frac{1}{N_\tau^8} \frac{2^3}{3^6} y^8 \right) \times \\
&\quad \times \left(h - (h^2 + h) \left(\frac{8}{405\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^4} y^5 + \frac{4}{1701\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^6} y^7 + \frac{8}{6561\sqrt{3}} \frac{1}{N_\tau^8} y^9 \right) \right. \\
&\quad \left. + (2h^3 + 3h^2 + h) \frac{32}{492075} \frac{1}{N_\tau^8} y^{10} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \\
&= \frac{N^2 - 1}{3N_\tau^4 \pi^2} \int_0^\infty dy \left\{ \frac{2^4}{3^2} y^3 h + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\left(\frac{2^6}{3^4} \frac{1}{35} + \frac{2^6}{3^6} \right) y^7 h - \frac{2^7}{3^6\sqrt{3}} \frac{1}{5} y^8 (h^2 + h) \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\left(-\frac{2^5}{3^7} \frac{1}{7} + \frac{2^5}{3^7} \right) y^9 h - \frac{2^6}{3^7\sqrt{3}} \frac{1}{7} y^{10} (h^2 + h) \right) \\
&\quad + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{2^8}{3^9} \frac{349}{385} y^{11} h - \frac{2^7}{3^7\sqrt{3}} \frac{13}{175} y^{12} (h^2 + h) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2^9}{3^{11}\sqrt{3}} \frac{1}{25} y^{13} (2h^3 + 3h^2 + h) \right) \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_\tau^{10}}\right) \\
&= \frac{N^2 - 1}{3N_\tau^4 \pi^2} \int_0^\infty dx \left\{ x^3 h + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\frac{1}{3^2} \frac{11}{35} x^7 h - \frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{5} x^8 (h^2 + h) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\frac{1}{2^4} \frac{1}{3} \frac{1}{7} x^9 h - \frac{1}{2^5} \frac{1}{3^2} \frac{1}{7} x^{10} (h^2 + h) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{1}{2^4 3^3} \frac{349}{385} x^{11} h - \frac{1}{2^6 3} \frac{13}{175} x^{12} (h^2 + h) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2^5 3^4} \frac{1}{25} x^{13} (2h^3 + 3h^2 + h) \right) \Bigg\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \\
= & \frac{N^2 - 1}{3N_\tau^4 \pi^2} \left\{ \Gamma(4)\zeta(4) + \frac{1}{N_\tau^4} \left(\frac{11}{35} - \frac{8}{180} \right) \Gamma(8)\zeta(8) + \frac{1}{N_\tau^6} \left(\frac{1}{336} - \frac{1}{2016} \right) \Gamma(10)\zeta(10) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{N_\tau^8} \left(\frac{349}{166\,320} - \frac{156}{33\,600} + \frac{156}{64\,800} \right) \Gamma(12)\zeta(12) \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \\
= & \frac{N^2 - 1}{3N_\tau^4 \pi^2} \left(\frac{1}{15} \pi^4 - \frac{1}{N_\tau^4} \frac{1}{105} \frac{8}{15} \pi^8 - \frac{1}{N_\tau^6} \frac{1}{504} \frac{128}{33} \pi^{10} - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{N_\tau^8} \frac{19}{138\,600} \frac{176\,896}{4\,095} \pi^{12} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{T^4} &= \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{\text{SB}}}{T^4} \left(1 - \frac{8}{105} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 - \frac{80}{693} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 - \frac{420\,128}{4\,729\,725} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^8 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right) \\
&\simeq \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{\text{SB}}}{T^4} \left(1 - 0.076 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 - 0.115 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 - 0.089 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^8 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis für den Druck mit dem Ergebnis für die Energiedichte (4.28). Die Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{N_\tau^4})$ verschwindet beim Druck nicht. Bei $N_\tau = 4$ beträgt die Abweichung des Drucks von p_{SB} nach (4.34) 6.9%, die der Energiedichte nach (4.28) 4.7%. Beim Druck kommen 20% des Beitrages von der Ordnung $1/N_\tau^8$, bei der Energiedichte nur 8%. Wie sich bei der numerischen Berechnung im nächsten Abschnitt zeigt, tragen beim Druck die höheren Ordnungen deutlich bei, so daß sich für p auf dem $N_\tau=4$ -Gitter eine große Abweichung von $\epsilon_{\text{SB}}/3$ zeigt.

Wie im letzten Abschnitt wurden die Koeffizienten zur Kontrolle numerisch approximiert, siehe Abbildung 4.2.

4.3 Vergleich verschiedener Wirkungen

Die analoge Rechnung für die Wilson-Wirkung ergibt für die Energiedichte [3] und den Druck:

$$\frac{\epsilon}{T^4} = (N^2 - 1) \frac{\pi^2}{15} \left(1 + \frac{10}{21} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^2 + \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^6} \right), \tag{4.35a}$$

$$\frac{p}{T^4} = \frac{1}{3} \frac{\epsilon_{\text{SB}}}{T^4} \left(1 + \frac{8}{21} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^2 + \frac{5}{21} \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^6} \right). \tag{4.35b}$$

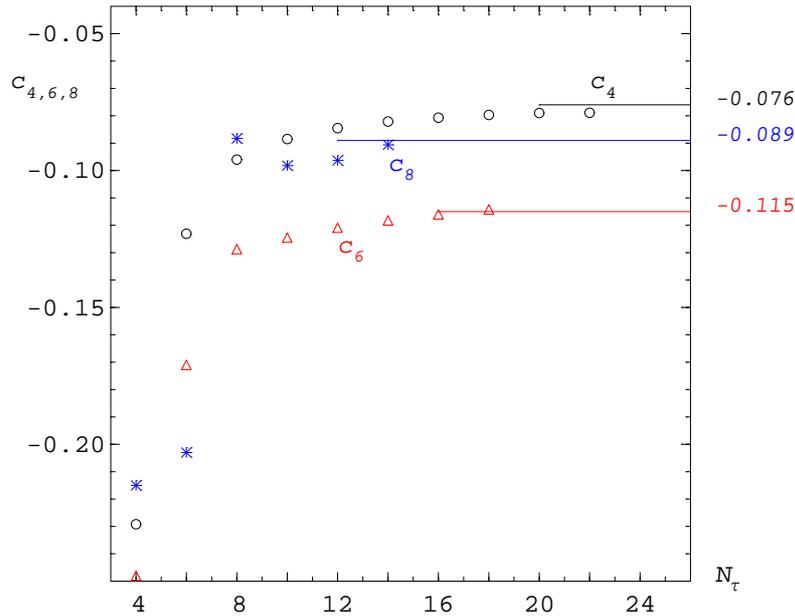


Abbildung 4.2: Die numerische Abschätzung der Koeffizienten c_4 , c_6 , c_8 des Drucks (4.34) $p^{\text{QS}} = \frac{1}{3}\epsilon_{\text{SB}} \left(1 - c_4 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^4 - c_6 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^6 - c_8 \left(\frac{\pi}{N_\tau} \right)^8 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N_\tau^{10}} \right)$.

In der Abbildung 4.3 ist die Energiedichte für verschiedene Wirkungen, sowie der Druck für die Wilson-Wirkung und die Quadratische Symanzik-Wirkung in Abhängigkeit von N_τ aufgetragen. Die durchgezogenen und die gestrichelt-gepunkteten Linien sind die Ergebnisse der Gauß-Integration, wie am Ende von dem Abschnitt 4.2 erläutert.

Die Daten für die die 2×1 -, 2×2 - und 3×3 -Wirkung sind aus [6] entnommen. Für diese Wirkungen ist es nicht möglich, den Propagator zu diagonalisieren, deshalb wurden diese Ergebnisse numerisch mit der Gauß-Integration ermittelt.

Ziel der verbesserten Wirkungen ist die Verwendung eines kleinen Gitters. Betrachten wir deshalb das Verhalten der Wirkungen auf dem $N_\tau=4$ -Gitter. Aus der Abbildung 4.3 entnehmen wir:

Energiedichte der QS-Wirkung Die Beiträge der ersten beiden Ordnungen $\sim a^6$ und $\sim a^8$ bestimmen das Hochtemperaturverhalten. Das Gaußintegral liefert praktisch den gleichen Wert. Die Abweichung vom Stefan-Boltzmann-Grenzwert liegt zwischen dem der 2×1 -Wirkung und dem der 2×2 -Wirkung, sie entspricht dem der 3×3 -Wirkung aber mit anderem Vorzeichen.

Druck der QS-Wirkung Der auffällige Unterschied zwischen dem Ergebnis für die ersten drei Ordnungen und dem der Gaußintegration ist durch Beiträge höherer Ordnungen zu erklären.

Druck und Energie Obwohl wir den Hochtemperaturlimes ($g^2=0$) betrachtet ha-

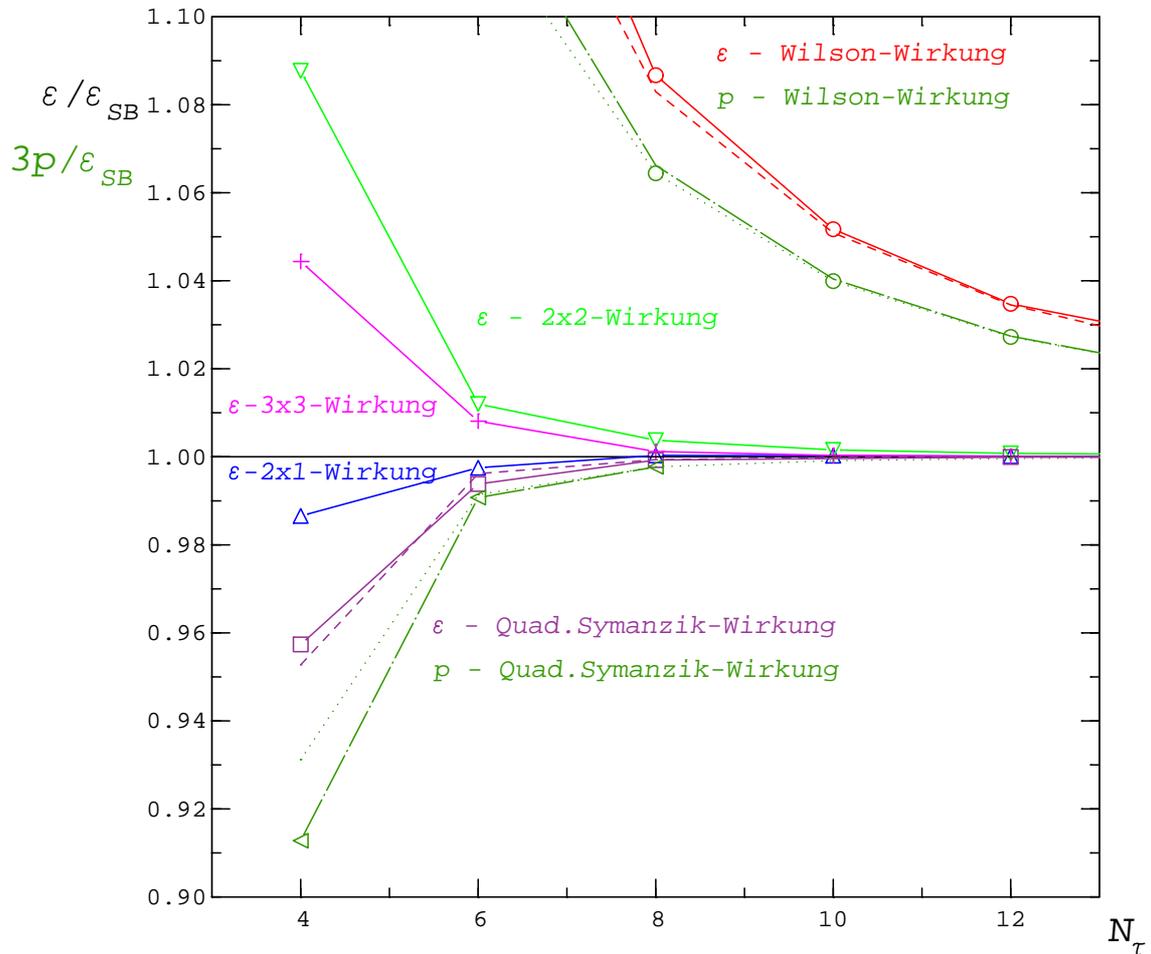


Abbildung 4.3: Die Energiedichte und der Druck verschiedener Wirkungen in Abhängigkeit von N_τ im Hochtemperaturlimes. Die durchgezogenen Linien mit Symbolen zeigen die numerisch berechnete Energiedichte ϵ , die unterbrochenen beinhalten die ersten beiden Ordnungen (4.28), bzw. (4.35a) zur Energiedichte. Der numerisch berechnete Druck ist mit Strich-Punkt-Linien mit Symbolen eingezeichnet, die gepunkteten Linien zeigen die ersten beiden Ordnungen des Drucks der Wilson-Wirkung (4.35b), sowie die ersten drei Ordnungen des Drucks der Quadratischen Symanzik-Wirkung (4.34).

ben, zeigt sich eine überraschende Abweichung der beiden Observablen voneinander bei der Quadratischen Symanzik-Wirkung. Die Energiedichte weicht um 4.3% ab, der Druck aber um 9.5% vom jeweiligen Stefan-Boltzmann-Wert. Bei der Wilson-Wirkung bei $N_\tau = 4$ (nicht mehr in der Abbildung zu sehen) ergibt sich eine Abweichung von 38% beim Druck und 50% bei der Energiedichte.

Es stellt sich die Frage, welcher Grenzwert zur Einschätzung der Konvergenz des Drucks auf dem Gitter gewählt werden sollte.

Die Ergebnisse für die Observablen wurden mittels zweier ganz verschiedener Rechnungen gefunden. Beim Druck berechneten wir die Zustandssumme, bei der Energiedichte Plaquetteerwartungswerte. Aber aus Plaquetteerwartungswerten gewinnen wir den Druck bei der numerischen Berechnung auf dem Gitter.

Bei der Berechnung des Drucks nahmen wir an, daß wir uns im thermodynamischen Grenzfall befinden (keine Oberflächeneffekte) und daß wir ein homogenes System vorliegen haben. Diese Annahmen können wir nicht direkt verifizieren. Hingegen können wir auf dem Gitter beobachten, daß die Differenz $\epsilon - 3p$ bei hohen Temperaturen verschwindet. Aus diesen Gründen erscheint es sinnvoll, ein Drittel des Grenzwerts der Energiedichte als Maß für den Druck in einem wechselwirkungsfreien System zu verwenden.

4.4 Störungstheoretische Berechnung von $c_{\sigma,\tau}$

M. García Pérez und P. van Baal untersuchten kürzlich die Quadratische Symanzik-Wirkung im schwachen Kopplungslimes [19]. Sie berechneten mit der Hintergrundfeldmethode die One-loop Korrekturen zu dem Anisotropiefaktor auf einem Gitter mit endlichen Volumen $N_\sigma^3 \times \infty$ und extrapolierten das Ergebnis für $N \rightarrow \infty$.

Bei der Behandlung des anisotropen Gitter folgten sie F. Karsch [4], und damit der Definition (2.12a,b),

$$g_\sigma^{-2}(a, \xi) = g^{-2}(a) + c_\sigma^w(\xi) + \mathcal{O}(g^2), \quad (4.36a)$$

$$g_\tau^{-2}(a, \xi) = g^{-2}(a) + c_\tau^w(\xi) + \mathcal{O}(g^2). \quad (4.36b)$$

Folgende Größen in Abhängigkeit der Gitteranisotropie ξ sind für uns interessant,

$$\eta_1(\xi) = N(c_\sigma^w(\xi) - c_\tau^w(\xi)), \quad \Lambda(\xi)/\Lambda(1) = \exp\left(-12\pi^2[c_\sigma^w(\xi) + c_\tau^w(\xi)]/11N\right) \quad (4.37)$$

Diese Größen wurden für zahlreiche Werte von ξ berechnet und in Abhängigkeit der Variablen $x = 1 - 1/\xi$ mit einem Polynom gefittet,

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= 0.3851274x - 0.026x^2 + \dots - 0.034x^6, \\ \Lambda(x)/\Lambda(1) &= 1 - (0.2448015x + 0.218x^2 + \dots + 0.299x^6). \end{aligned}$$

Wir lösen (4.37) nach c_σ^w und c_τ^w auf,

$$c_\sigma^w(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \eta_1(\xi) - \frac{33}{12\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda(\xi)}{\Lambda(1)} \right) \right), \quad (4.38a)$$

$$c_\tau^w(\xi) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \eta_1(\xi) - \frac{33}{12\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda(\xi)}{\Lambda(1)} \right) \right). \quad (4.38b)$$

Bei der Ableitung trägt nur der erste Term des Polynoms bei,

$$\left. \frac{\partial x^n}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -\frac{n}{\xi^2} \left(1 - \frac{1}{\xi} \right)^{n-1} \Big|_{\xi=1} = \begin{cases} -1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}, \quad (4.39)$$

$$c_\sigma = \left. \frac{\partial c_\sigma^w}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0.098, \quad c_\tau = \left. \frac{\partial c_\tau^w}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -0.030. \quad (4.40)$$

Allgemein beobachteten die Autoren kleinere Effekte der Anisotropie bei der Quadratischen Symanzik-Wirkung im Vergleich zu der Wilson-Wirkung. Die beiden Koeffizienten sind deutlich kleiner als bei der Wilson-Wirkung, ihre Summe aber, die der β -Funktion entspricht, ist fast gleich. (Für die Wilson-Wirkung ist die Summe gleich 0.07.)

Kapitel 5

Ergebnisse der Gitterrechnungen

5.1 $c_{\sigma,\tau}$ für die Wilson-Wirkung

In diesem Abschnitt vergleichen wir die Ergebnisse für $c_{\sigma,\tau}$, die mittels des Matching der Ratios aus Wilsonloops gewonnen wurden, mit denen, die aus der Integration der Plaquetten stammen. Die Ergebnisse des Matchings werden zur Bestimmung des Drucks und der Energiedichte verwendet. Die beiden thermodynamischen Observablen ϵ und p werden mit den Ergebnissen aus [3] verglichen.

c_σ und c_τ wurden für vier verschiedene β -Werte berechnet. $\beta = 5.4$ liegt unter $\beta_c^{N_\tau=4} = 5.7$, also im dem Bereich, wo c_σ und c_τ mittels der Integration der Plaquette mit den Daten aus [3] nicht bestimmt werden konnten. $\beta = 7.2$ liegt am oberen Ende des Bereichs dieser Daten. Die benötigte β -Funktion wurde ebenfalls aus [3] genommen.

$\beta = 5.4$ liegt außerhalb des Skalenbereiches, im Bereich starker Kopplung. Hier kann keine allgemeine β -Funktion gefunden werden, das heißt die β -Funktion ist nicht mehr unabhängig von der Observablen, aus der sie bestimmt wurde. So konnte die β -Funktion nur bis $\beta = 5.66$ bestimmt werden. Für den Bereich unterhalb wurde die Summe $c_\sigma + c_\tau$ extrapoliert, wie in der Abbildung 5.3 zu sehen. Die Extrapolation erscheint in der Abbildung 5.3 recht trivial. Betrachtet man aber den ungeklärten Verlauf der $\Delta\beta$ -Funktion in diesem Bereich der Kopplung [3], so ist es gut möglich, daß die Extrapolation weit ab von der richtigen Form der Kurve liegt. Von dem Punkt $c_{\sigma,\tau}(\beta = 5.4)$ erhalten wir daher nur einen Eindruck. Außerdem läßt sich dort die Gitteranisotropie aufgrund des schlechten Signal-/Rausch-Verhältnis der Wilsonloops nur schlecht bestimmen.

Betrachten wir zuerst das Signal-/Rauschverhältnis der Wilsonloops in Abhängigkeit von β . In der Abbildung 5.1 ist der relative Fehler der Wilsonloops über ihrer Fläche aufgetragen. Man erkennt den großen Vorteil der Linkintegration. Die Wilsonloops zu einem β -Wert findet man als zwei Folgen gleicher Symbole. Die steiler ansteigenden Folgen von ausgefüllten Symbolen sind die Wilsonloops der Größe $1 \times t$ und $r \times 1$, welche nicht integriert werden konnten. Die flacher ansteigende Folge zeigt die integrierten Wilsonloops. Nicht mit in das Matching einbezogen wur-

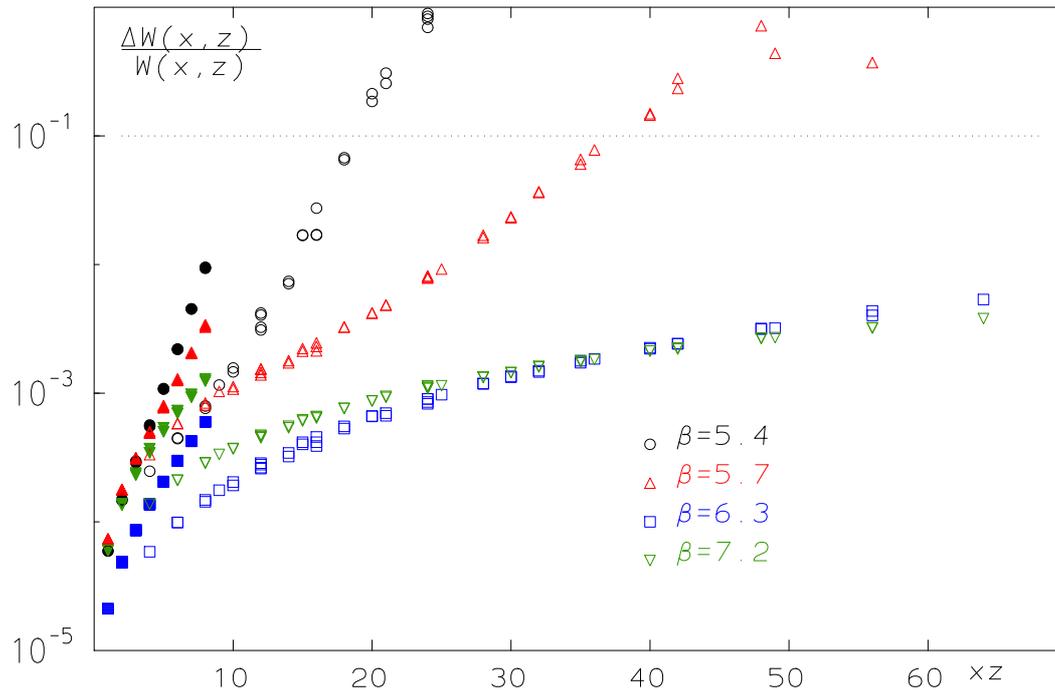


Abbildung 5.1: Relativer Fehler der Wilsonloops als Funktion ihrer Fläche für die Wilson-Wirkung, räumliche Wilsonloops bei $\gamma = 1.06$. Die ausgefüllten Symbole zeigen die nicht-integrierten Wilsonloops, die offenen Symbole die integrierten Wilsonloops.

den Wilsonloops, die mit einem relativen Fehler von mehr als 10% behaftet waren. Man sieht in der Abbildung 5.1, daß es beispielsweise nicht möglich ist, mit der gegenwärtig verfügbaren Leistung der Rechner Wilsonloops mit einer Fläche größer als 4×5 und einem Fehler kleiner als 10% bei $\beta = 5.4$ zu bestimmen. Das Rauschen steigt exponentiell mit der Fläche an, nimmt aber nur mit der Wurzel der Anzahl der unabhängigen Messungen ab.

Bei großen Werten von β erschweren die Autokorrelationen die Erzeugung von unabhängigen Konfigurationen. Ein Update besteht aus vier Overrelaxation-Schritten und einem Wärmebadschritt. Für eine Messung nach vier Updates erhält man typischer Weise folgende integrierte Autokorrelationszeiten τ .

β	5.4	5.7	6.3	7.2
τ	0.5	1.5	3.0	>3.0

Die Autokorrelationszeiten können nur nach unten hin abgeschätzt werden. Die wahren Autokorrelationszeiten treten erst bei einer Stichprobe bestehend aus *sehr vielen* Messungen zu Tage.

Betrachten wir nun die Abhängigkeit von c_σ von der Wahl des kleinsten Wilsonloops. Vergleichen wir die vier Grafiken in Abbildung 5.2.

- Bei $\beta = 5.4$ kann die Fläche des kleinsten beitragenden Wilsonloops höchstens als 6 gewählt werden. Für die beiden Punkte oben links wurde $x_{\min} = 3$ und

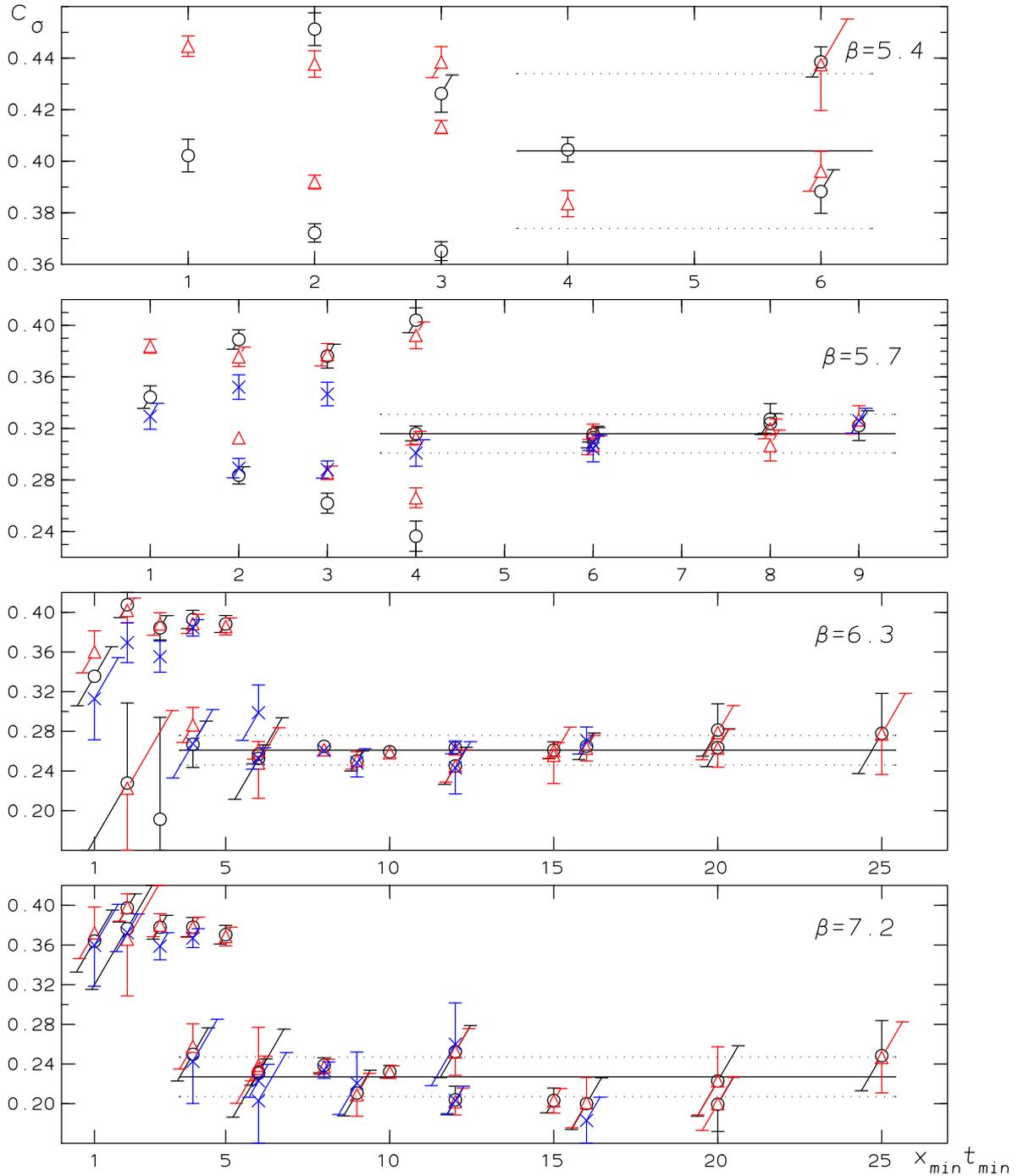


Abbildung 5.2: c_σ in Abhängigkeit des kleinsten Wilsonloops für die Wilson-Wirkung, (o) $R_1(x, t)$, (Δ) $R_2(x, t)$, (\times) $R_3(x, t)$.

$t_{\min} = 2$ gewählt, für die beiden unteren $x_{\min} = 2$ und $t_{\min} = 3$. Aufgrund des schlechten Signals macht es keinen Sinn, das Verhältnis R_3 zu verwenden. Der Mittelwert wird durch einen Konstantenfit der 6 Punkte in dem markierten Bereich bestimmt. Der Fehler von c_σ ist, wie bei den anderen β -Werten auch, aus der Streuung der Ergebnisse geschätzt.

- Bei $\beta = 5.7$ erkennen wir eine gute Konsistenz der Ergebnisse ab einer minimalen Fläche von vier und $x_{\min}, t_{\min} > 1$. Der Startpunkt des Fits kann ohne Änderung des Ergebnisses auch bei sechs oder acht gewählt werden.
- Bei $\beta = 6.3$ lassen sich die besten Ergebnisse erzielen. Eine Wahl der minimalen Fläche zwischen acht und 16 gibt optimale Ergebnisse. Während bei $\beta = 5.4$ und $\beta = 5.7$ die Einbeziehung der kleinen Wilsonloops inkonsistente Werte für c_σ liefert, zeigt sich bei zunehmenden β ein systematisch zu großer Wert für c_σ . Dieses Verhalten beobachteten wir schon bei dem Matching der Wilsonloops in Abbildung 2.3. Die Ratios gebildet aus kleinen Wilsonloops eliminieren das Umfangverhalten nur unzureichend, da die Wilsonloops in Zähler und Nenner einen zu unterschiedlichen Umfang haben. Das Verwenden der Ratios ist nur sinnvoll für Wilsonloops ab einer bestimmten Größe und einer Kantenlänge von mindestens zwei.
- Für zunehmendes β erkennt man den Effekt der Autokorrelationen. Obwohl sich das Signal-/Rauschverhältnis verbessert, schwanken die Werte von c_σ bei $\beta = 7.2$ deutlich um ihren Mittelwert.

Wir erhalten folgenden Ergebnisse:

β	5.4	5.7	6.3	7.2	∞
T/T_c	–	1.0	2.9	9.2	∞
c_σ	0.404(30)	0.316(15)	0.261(15)	0.227(20)	0.202[4]
c_τ	-0.365(30)	-0.277(15)	-0.202(15)	-0.159(20)	-0.132

Zum Vergleich mit den Ergebnissen der anderen Wirkungen wurde die Temperaturskala des $N_\tau=4$ -Gitters in die Tabelle und die Abbildung 5.3 aufgenommen.

Für die Wilson-Wirkung wurden in [3] der Druck p und die Energiedichte ϵ mittels der Integration der Erwartungswerte der Plaquetten berechnet. Mit den Gleichungen (2.27a,b) wurden auch c_σ und c_τ aus dem Druck und der β -Funktion bestimmt. In der Abbildung 5.3 sind diese Ergebnisse neben denen des Matchings dargestellt. Innerhalb der Schwankungen der Linien zeigt sich keine Abhängigkeit von β . Für die drei Werte von N_τ ergeben sich aber verschiedene Funktionen für $c_{\sigma,\tau}(\beta)$. Die gepunktete Linie ist eine Schätzungen aus den drei Funktionen, wobei die des größeren Gitters bevorzugt wurden. Damit ergibt sich eine scheinbare Abhängigkeit von β . Die Ergebnisse des Matchings liegen etwa 20% unter denen dieser Schätzung. Wir finden eine gute Konvergenz gegen die störungstheoretischen Werte.

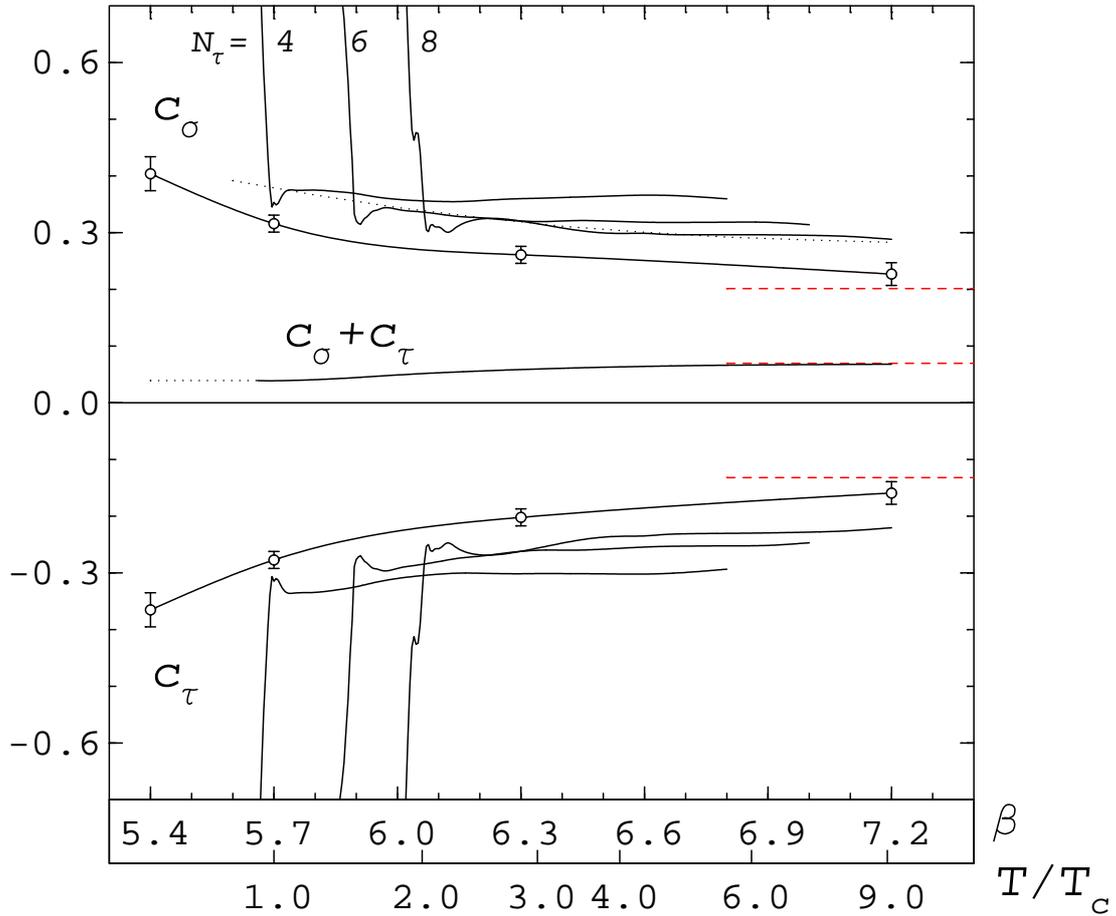


Abbildung 5.3: c_σ und c_τ für die Wilson-Wirkung aufgetragen über β . Die einzelnen Punkte sind die Ergebnisse des Matchings, siehe Abbildung 5.2. Für die Berechnung von Druck und Energie sind die Punkte mit einem Spline interpoliert. Die Linien ohne Symbole sind die Ergebnisse aus der Simulation bei endlicher Temperatur nach (2.27a,b) für $N_\tau = 4, 6, 8$. Die obere gepunktete Linie ist eine Schätzung für c_σ aus den drei Einzelergebnissen. Die Summe $c_\sigma + c_\tau$ entspricht der β -Funktion (2.18). Sie wurde bis $\beta=5.4$ extrapoliert. Die gestrichelten Linien sind die störungstheoretischen Werte aus [4].

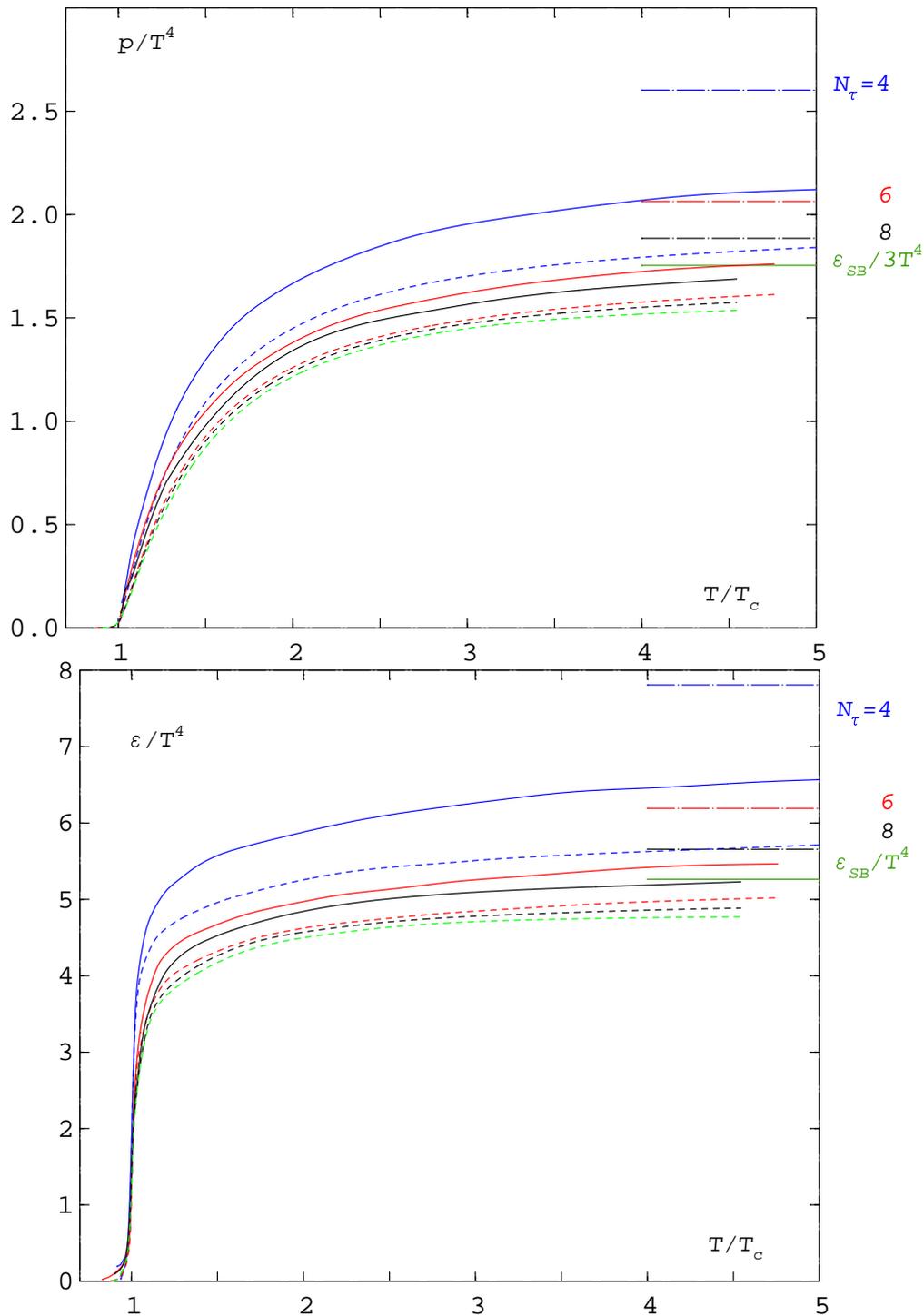


Abbildung 5.4: Druck p/T^4 und Energie ϵ/T^4 des Gluon gases berechnet mit der Wilson-Wirkung auf dem $16^3 \times 4$ -, $32^3 \times 6$ - und $32^3 \times 8$ -Gitter. Die gestrichelten Linien sind die Ergebnisse mittels der Integration der Plaquette und die Kontinuums-Extrapolation (grün), die durchgezogenen Linien die der direkten Berechnung mittels $c_{\sigma,\tau}$ aus dem Matching. Die gepunkteten Linien markieren die Hochtemperaturlimiten nach (4.35a,b), die grüne Linie den Kontinuums limit.

Mit den Werten für c_σ und c_τ aus dem Matching und den Daten für die Plaquetten aus [3] lassen sich Druck (2.26) und Energiedichte (2.9) direkt ausrechnen. Mit den kleineren c_σ und c_τ liegen die beiden thermodynamischen Observablen näher an den störungstheoretischen Werten, siehe Abbildung 5.4.

5.2 $c_{\sigma,\tau}$ für die 2×2 -Wirkung

Die Eignung der 2×2 -Wirkung für thermodynamische Simulationen wurde ausführlich in [6] diskutiert. Da aus dieser Arbeit die Daten für die Plaquetten und die β -Funktion vorliegen, wurden c_σ und c_τ auch für die 2×2 -Wirkung bestimmt.

Wie in dem Kapitel über die verbesserten Meßmethoden erklärt, lassen sich bei der Verwendung der 2×2 -Wirkung nur etwa die Hälfte der Links integrieren. Aufgrund des schlechteren Signals konnte kein β -Wert unterhalb von $\beta_c^{N_\tau=4} = 4.4$ gewählt werden. Aus dem Vergleich der Temperaturskalen bei $N_\tau = 4$ erkennt man, $\beta_{2 \times 2} \approx \beta_{\text{Wilson}} - 1.3$. In diesem Sinne entsprechen die Werte $\beta = 4.4, 5.0, 5.9$ den drei oberen β -Werten der Wilson-Wirkung.

Betrachten wir die Abhängigkeit von c_σ von der Wahl des kleinsten beitragenden Wilsonloops in Abbildung 5.5. Im allgemeinen finden wir ein ähnliches Verhalten wie bei der Wilson-Wirkung. Zusätzlich bemerken wir:

- Die absoluten Fehler von c_σ sind bei allen drei β -Werte auf 0.03 geschätzt. Da die Unsicherheit des Matchings gleich bleibt, ist $c_\sigma(\beta=5.9)$ mit einem doppelt so großen *relativen* Fehler behaftet wie $c_\sigma(\beta=4.4)$.
- Der Ratio R_3 zeigt im Vergleich zu R_1 und R_2 eine kleinere systematische Abweichung nach oben, wenn man Wilsonloops der Kantenlänge 1 bei $\beta = 5.9$ mit einbezieht.

Wir erhalten folgenden Ergebnisse:

β	4.4	5.0	5.9
T/T_c	1.0	2.8	10.7
c_σ	0.226(30)	0.157(30)	0.115(30)
c_τ	-0.190(30)	-0.096(30)	-0.067(30)

Vergleichen wir die Ergebnisse für $c_{\sigma,\tau}$ mit denen der Wilson-Wirkung, siehe Abbildung 5.6:

- Für beide Methoden zur Bestimmung von c_σ und c_τ liegen die Ergebnisse für die 2×2 -Wirkung betragsmäßig etwa 0.1 unter denen der Wilson-Wirkung.
- Analog zu der Wilson-Wirkung ergeben sich auch hier kleinere Werte für c_σ und c_τ aus dem Matching als aus der Schätzung durch das Auflösen der Druckformel. Hier haben wir allerdings nur die Werte des $N_\tau=4$ -Gitters. Die Abstände zwischen den Ergebnissen des Matchings und denen des $N_\tau=4$ -Gitters sind bei beiden Wirkungen etwa gleich groß.

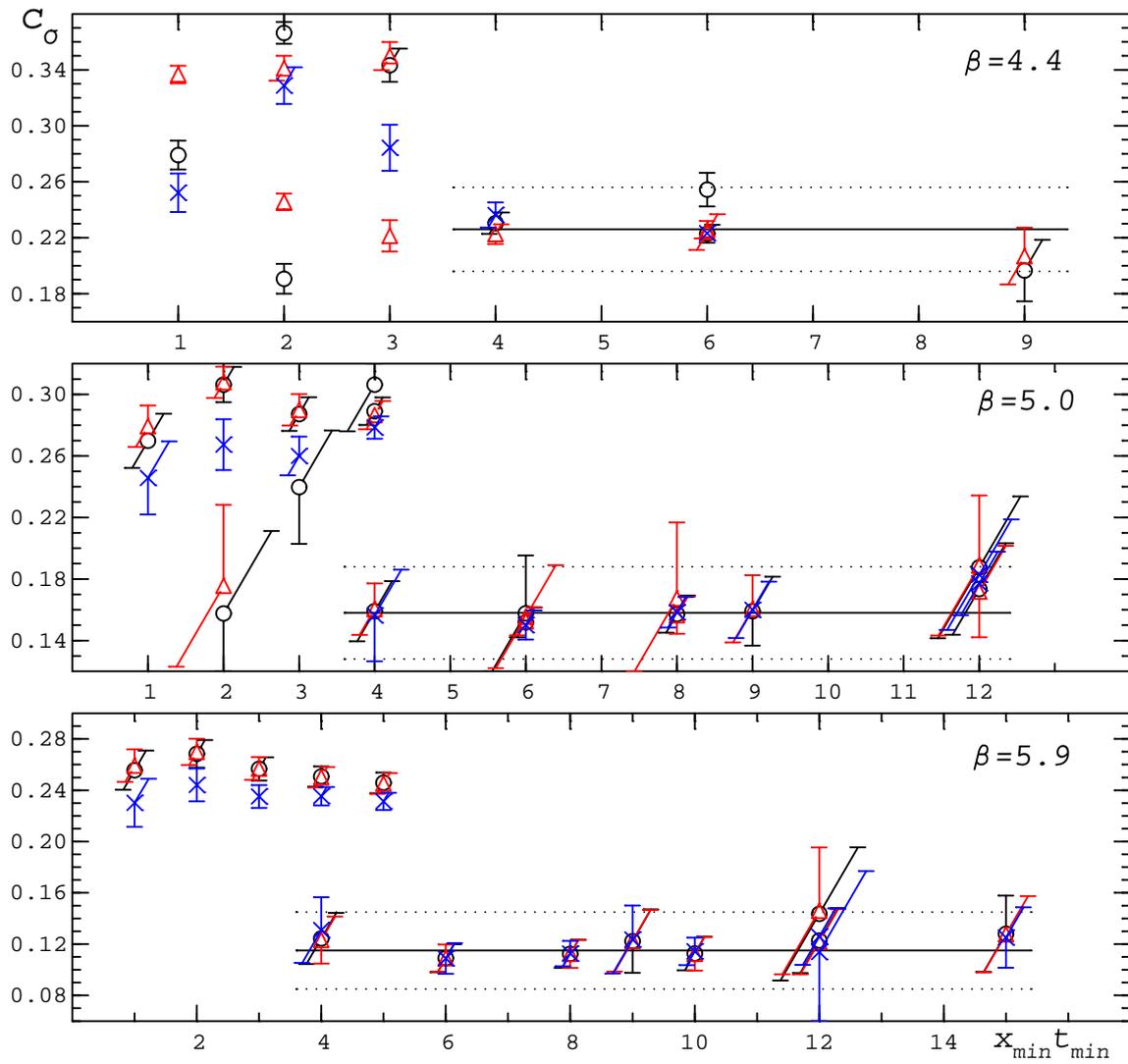


Abbildung 5.5: c_σ in Abhängigkeit des kleinsten Wilsonloops für die 2×2 -Wirkung, (o) $R_1(x, t)$, (Δ) $R_2(x, t)$, (\times) $R_3(x, t)$.

- Es nicht möglich, den Propagator der 2×2 -Wirkung zu diagonalisieren, deshalb können wir keine störungstheoretischen Werte für $c_{\sigma,\tau}$ angeben.

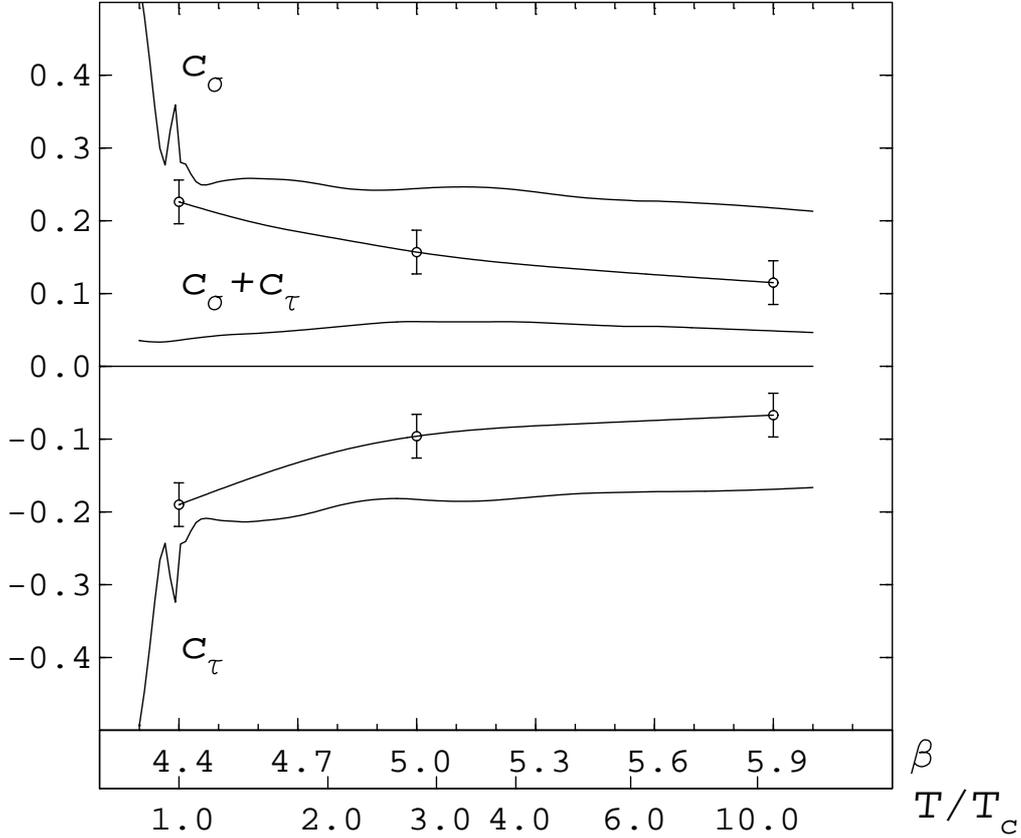


Abbildung 5.6: c_σ und c_τ für die 2×2 -Wirkung über β . Die einzelnen Punkte sind die Ergebnisse des Matchings aus Abbildung 5.5. Mit Hilfe des Kurvenlineals wurde durch die Werte eine glatte Kurve gelegt. Die Linien ohne Symbole sind die Ergebnisse aus der Simulation bei endlicher Temperatur nach (2.27a,b) bei $N_\tau = 4$. Die Summe $c_\sigma + c_\tau$ entspricht der β -Funktion (2.18).

Durch die drei Werte für $c_{\sigma,\tau}$ wurden mit Hilfe eines Kurvenlineals eine glatte Kurve gelegt. Mit dieser Interpolation wurden Druck und Energiedichte berechnet. In der Abbildung 5.7 zeigt die schwarze Linie den Druck nach

$$\frac{P}{T^4} = NN_\tau^4 \left[(2g^{-2} - (c_\sigma - c_\tau)) \langle P_\sigma - P_\tau \rangle - 3(c_\sigma + c_\tau) (2\langle P_0 \rangle - \langle P_\sigma + P_\tau \rangle) \right], \quad (5.1)$$

mit dem Fehler, der von $c_{\sigma,\tau}$ herrührt. Er liegt deutlich höher als der Druck, der aus der Integration der Plaquetten gewonnen wurde. Die beiden Terme des Drucks wurden zusätzlich als lila und blaue Kurve eingezeichnet.

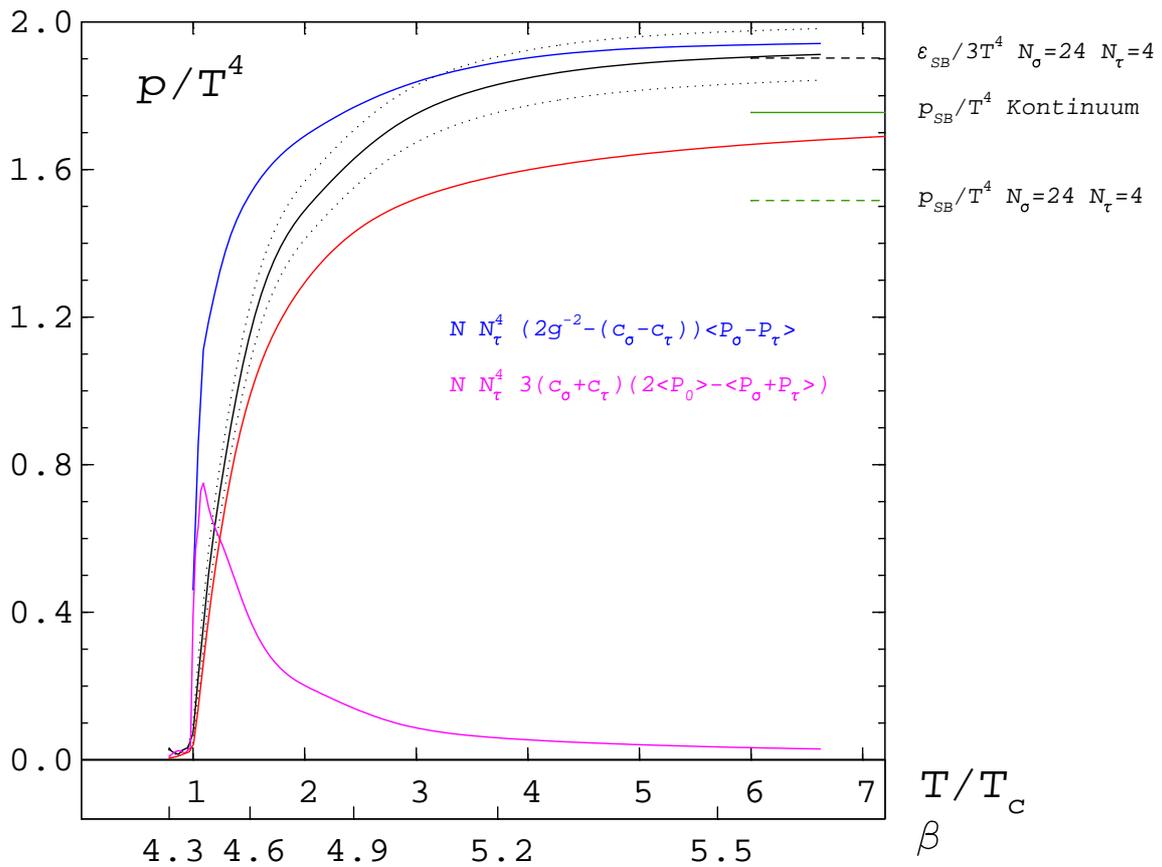


Abbildung 5.7: Druck p/T^4 für die 2×2 -Wirkung auf dem $24^3 \times 4$ -Gitter. Die rote Linie ist das Ergebnis der Integration der Plaquetten aus [6], die schwarze Linie ist der Druck mittels $c_{\sigma,\tau}$ (5.1). Die beiden Terme des Drucks wurden als lila und blaue Linie eingezeichnet. Das Fehlerband resultiert aus dem Fehler von $c_{\sigma,\tau}$.

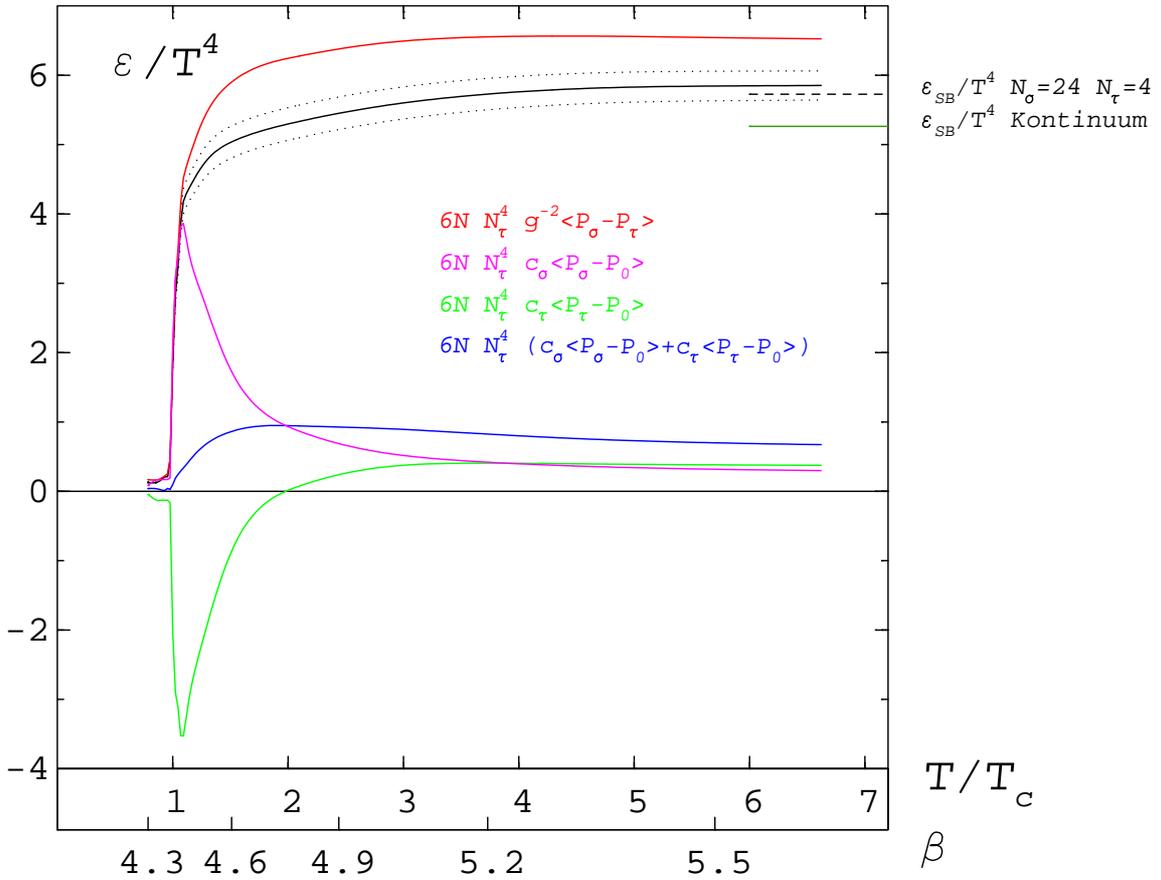


Abbildung 5.8: Energiedichte ϵ/T^4 für die 2×2 -Wirkung auf dem $24^3 \times 4$ -Gitter. Die schwarze Linie ist das Ergebnis mittels $c_{\sigma,\tau}$ (5.2). Das Fehlerband resultiert aus dem Fehler von $c_{\sigma,\tau}$. Die farbigen Linien sind die verschiedenen Terme der Energiedichte.

Die Energiedichte nach

$$\epsilon/T^4 = 6N N_\tau^4 \left(g^{-2} \langle P_\sigma - P_\tau \rangle - (c_\sigma \langle P_\sigma - P_0 \rangle + c_\tau \langle P_\tau - P_0 \rangle) \right), \quad (5.2)$$

ist in der Abbildung 5.8 zu sehen. Zusätzlich sind die Terme der Energiedichte eingezeichnet. Man erkennt, wie sich $c_{\sigma,\tau}$ auf den Verlauf der Energiedichte auswirken.

5.3 Thermodynamik der Quadratischen Symanzik-Wirkung

5.3.1 Bestimmung der kritischen Kopplung β_c

In diesem Abschnitt soll der Punkt des Deconfinement-Phasenübergangs bei Verwendung der Quadratischen Symanzik-Wirkung gefunden werden. Der Ordnungsparameter ist der Erwartungswert des Polyakovloops,

$$L = \frac{1}{N_\sigma^3} \sum_{\vec{x}} \frac{1}{3} \text{Tr} \prod_{t=1}^{N_\tau} U_t(\vec{x}, t). \quad (5.3)$$

Der Erwartungswert des Gittermittels beschreibt die freie Energie eines einzelnen schweren Quarks $\langle L \rangle = e^{-F_q/T}$. In der Confinement-Phase divergiert F_q und $\langle L \rangle$ verschwindet. In der Deconfinement-Phase bleibt F_q endlich und $\langle L \rangle$ strebt langsam gegen 1 für große Temperaturen. Auf einem endlichen Gitter ist $\langle L \rangle$ immer Null, daher benutzen wir statt $\langle L \rangle$ den Pseudo-Ordnungsparameter $\langle |L| \rangle$.

Von dem Deconfinement-Phasenübergang ist bekannt, daß es sich um einen Phasenübergang 1.Ordnung handelt. Auf dem endlichen Gitter gibt es keine Diskontinuität. Wir suchen daher nach einem raschen Anstieg von $\langle |L| \rangle$ mit β , also nach einem Maximum der Suszeptibilität,

$$\chi = N_\sigma^3 (\langle L^2 \rangle - \langle |L| \rangle^2). \quad (5.4)$$

Wir erwarten auf dem $N_\tau=4$ -Gitter bei der Quadratischen Symanzik-Wirkung ein deutlich kleineres β_c als bei der Wilson-Wirkung ($\beta_c^{N_\tau=4}=5.7$) aufgrund des Vorfaktors $16/9 > 1$ des Plaquette-Terms. Mit einer Simulation bei der β von 3.0 auf 5.0 schrittweise erhöht wird, kann man mit 200 Messungen schon feststellen, daß β_c dicht unter $\beta = 4.0$ liegt. Bei drei β -Werten, die so dicht gewählt sind, daß die Wirkungshistogramme sich gut überdecken, wurden dann je 5000-18000 unabhängige Messungen vorgenommen. Mit der Ferrenberg-Swendsen Methode [20] wurde aus den drei Meßpunkten eine glatte Kurve erstellt. Ihr Fehlerband wurde mit der Jackknife Methode geschätzt. Aus der Abbildung 5.9 entnehmen wir,

$$\beta_c^{N_\tau=4} = 3.9820 \left(\begin{smallmatrix} +8 \\ -5 \end{smallmatrix} \right). \quad (5.5)$$

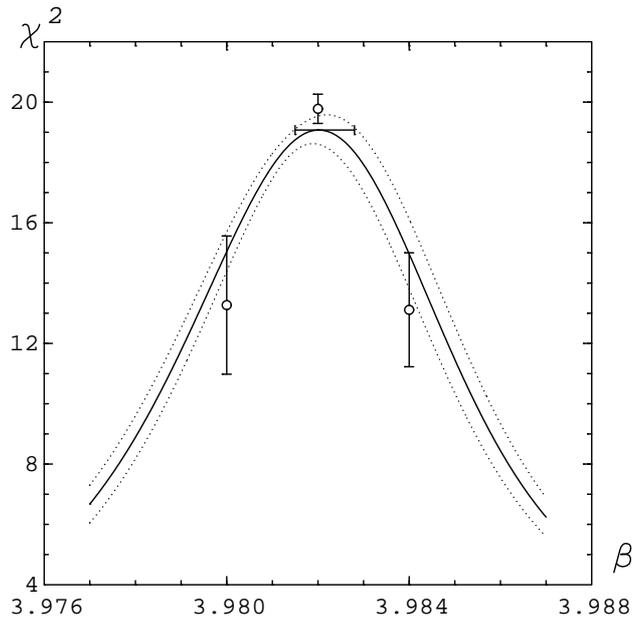


Abbildung 5.9: Suszeptibilität des Polyakovloops der Quadratischen Symanzik-Wirkung auf dem $24^3 \times 4$ -Gitter. Der waagerechte Balken gibt den Fehler von $\beta_c^{N_\tau=4} = 3.9820(\pm \frac{8}{5})$ an.

5.3.2 Bestimmung der Temperaturskala

Wie in dem Abschnitt 2.5 erläutert, ist die inverse Kopplung β nur ein interner Parameter der Gittersimulation. Um von dem Parameter β zu einer physikalischen Temperatur zu kommen, braucht man einen dimensionsbehafteten Maßstab. Wie bei der Bestimmung der β -Funktion benutzen wir hier auch die Wurzel der Saitenspannung $\sqrt{\hat{\sigma}} = \sqrt{\sigma}a$.¹

Die Temperatur auf dem asymmetrischen Gitter ist bei festem N_τ durch den Gitterabstand a gegeben, $T = (N_\tau a)^{-1}$. Die Temperatur in Einheiten der kritischen Temperatur läßt sich aus der Invarianz der Saitenspannung bestimmen,

$$\frac{T}{T_c}(\beta) = \frac{N_\tau a(\beta_c)}{N_\tau a(\beta)} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}(\beta_c)}}{\sqrt{\hat{\sigma}(\beta)}}. \quad (5.6)$$

Die Saitenspannung wurde mit den in [10] diskutierten Methoden ermittelt. Auf einem 24^4 -Gitter wurden Wilsonloops entlang der Achsen bis zur Größe 12×12 und in diagonaler Richtung bis zur Größe $8\sqrt{2} \times 12$ gemessen. Um das Signal des Grundzustandes hervorzuheben, wurden die Links dem „APE-Smearing“ unterzogen. Dabei wird jeder räumliche Link durch die gewichtete Summe aus dem Link selbst und

¹Größen auf dem Gitter werden mit dem Hut gekennzeichnet.

seiner zwei räumlichen Staple ersetzt,

$$U_\mu = U_\mu + \varepsilon \sum_{\nu \neq \mu, \nu < 4} \text{Staple}_\nu[U_\mu] . \quad (5.7)$$

Der neue Link wird anschließend unitarisiert. Diese Prozedur wird für alle Links mehrfach wiederholt. Vor der eigentlichen Simulation wird der Effekt des Schmierens auf die Wilsonloops untersucht. Das Signal der Wilsonloops mit großer räumlicher Ausdehnung und kleiner zeitlicher Ausdehnung dient als Maßstab für den Erfolg des Schmierens, da diese Wilsonloops besonders von den Schmierparametern abhängen. Folgende Schmierparameter wurden dabei benutzt: Anzahl der Schmierschritte: 8, Gewicht des Staples $\varepsilon(\beta) = 0.2 + \beta/10$.

Die lokalen Potentiale

$$\hat{V}_{\hat{t}}(\hat{r}) = \ln \left(\frac{W(\hat{r}, \hat{t})}{W(\hat{r}, \hat{t} + 1)} \right) \quad (5.8)$$

zeigen für kleine Wilsonloops eine Abhängigkeit von \hat{t} . Um diese unphysikalischen Beiträge zu eliminieren, wurden nur lokale Potentiale mit $\hat{t} \geq \hat{t}_{\min}$ in Betracht gezogen, wobei folgende \hat{t}_{\min} in Abhängigkeit von β gewählt wurden.

β	3.9	4.0	4.2	≥ 4.4
\hat{t}_{\min}	2	3	4	5

Die Mittelwerte der lokalen Potentiale wurden mit dem Ansatz,

$$\hat{V}(\hat{r}) = \hat{V}_0 + \hat{\sigma}\hat{r} - \hat{\alpha}/\hat{r} , \quad (5.9)$$

gefittet. Zum Vergleich wurde auch ein zweiparametriger Fit (ohne den Coulomb-Term) durchgeführt. Für die $\beta < 4.2$ und große \hat{r} ergab sich ein konsistentes Ergebnis, für $\beta \geq 4.2$ wurde nur der Ansatz (5.9) betrachtet. Der Fehler der Saitenspannung $\hat{\sigma}$ wurde anhand der Streuung der Ergebnisse ermittelt.

Die Werte von $\hat{\sigma}$ wurden mit einem Spline verbunden und alternativ gefittet, siehe Abbildung 2.1. Invertiert man die Abszisse erhält man nach (5.6) die Temperaturskala, siehe Abbildung 5.10. Die Saitenspannung in Gitterabständen wird für $\beta \gtrsim 5.4$ sehr klein, ohne daß sich der Fehler verringert. So läßt sich auf dem 24^4 -Gitter nur die Temperaturskala bis $6 T_c$ sicher bestimmen.

Der experimentelle Wert der Wurzel der Saitenspannung beträgt $\sqrt{\sigma} = 420(20)$ MeV. Bei β_c beträgt die Saitenspannung $\sqrt{\hat{\sigma}(\beta_c \approx 4.0)} = 0.389(3)$, damit ergibt sich,

$$\frac{T_c}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{N_\tau \sqrt{\hat{\sigma}(\beta_c \approx 4.0)}} = 0.643(4) , \quad T_c = 270(2)(15) \text{ MeV} . \quad (5.10)$$

Arbeiten für andere Wirkungen liefern ein ähnliches Ergebnis [10].

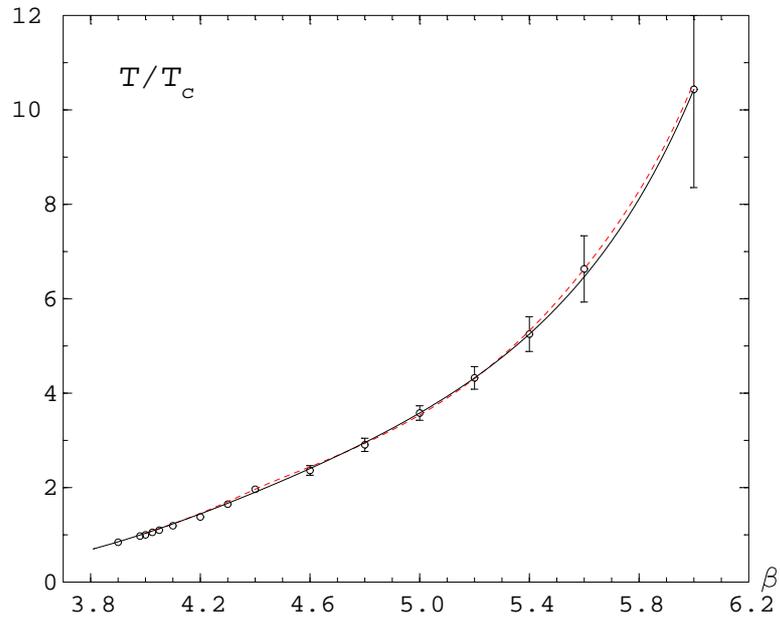


Abbildung 5.10: Temperaturskala für die Quadratische Symanzik-Wirkung nach (5.6). Der Spline (gestrichelt) und der Fit (durchgezogen) geben ein sehr ähnliches Ergebnis.

5.4 $c_{\sigma,\tau}$ für die Quadratische Symanzik-Wirkung

Hier wurden $c_{\sigma,\tau}$ für fünf Werte von β berechnet. Für die Bestimmung von c_σ in Abhängigkeit von β finden wir in Abbildung 5.11 ein Verhalten wie in den beiden vorigen Abschnitten.

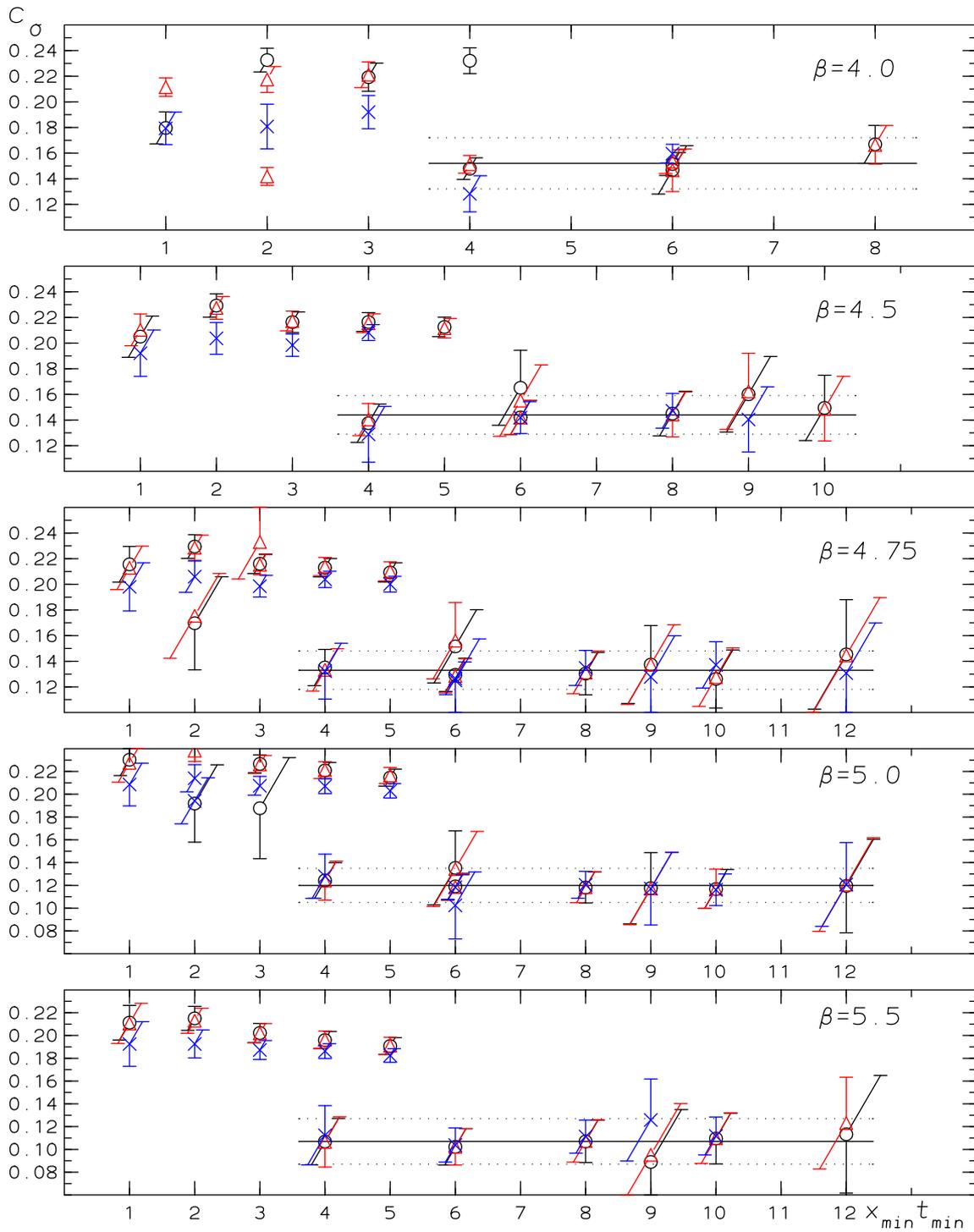


Abbildung 5.11: c_σ in Abhängigkeit des kleinsten Wilsonloops für die QS-Wirkung, (o) $R_1(x, t)$, (Δ) $R_2(x, t)$, (\times) $R_3(x, t)$.

Für $c_{\sigma,\tau}$ finden wir folgende Ergebnisse:

β	4.0	4.5	4.75	5.0	5.5	∞
T/T_c	1.0	2.2	2.8	3.7	5.9	∞
c_σ	0.152(20)	0.144(15)	0.133(15)	0.120(15)	0.107(20)	0.098[19]
c_τ	-0.106(20)	-0.066(15)	-0.043(15)	-0.032(15)	-0.031(20)	-0.030

Die vergleichsweise kleinen Werte für c_σ und c_τ weckten unser Interesse für die Untersuchung der thermodynamischen Observablen der Quadratischen Symanzik-Wirkung. Da für diese Wirkung keine Daten vorlagen, wurden auf dem 24^4 -Gitter Wilsonloops und Plaquette gemessen. Auf einem $24^3 \times 4$ -Gitter wurden bei denselben β -Werten ebenfalls die Plaquetten gemessen. Aus der Differenz der Erwartungswerte (dargestellt in Abbildung 5.12) haben wir nach (2.24) den Druck durch die Integration der Plaquetten bestimmt. Druck und Energiedichte wurden auch mit den aus dem Matching ermittelten $c_{\sigma,\tau}$ berechnet. Die Kurven sind in den Abbildungen 5.14 und 5.15 zu sehen.

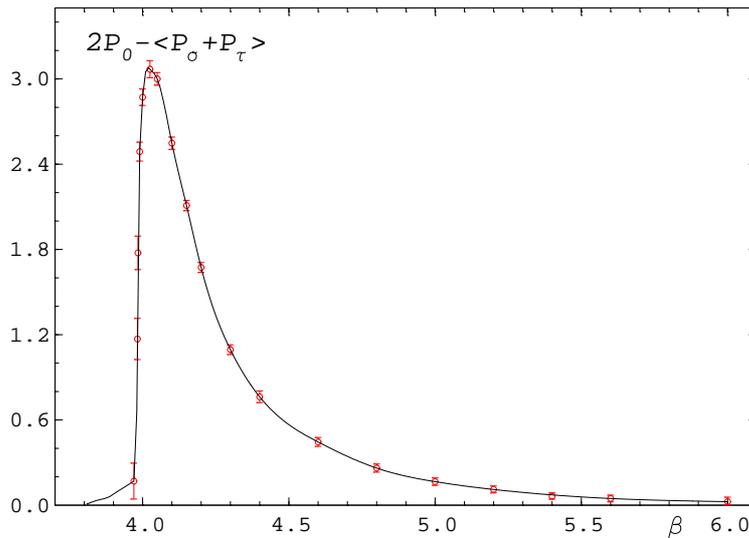


Abbildung 5.12: Differenz der Plaquetteerwartungswerte des 24^4 - und des $24^3 \times 4$ -Gitters für die Quadratische Symanzik-Wirkung.

Wie bei den anderen Wirkungen wurden c_σ und c_τ durch das Auflösen der Formel für den Druck bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.13 zu sehen. Für die beiden kleineren β -Werte liegen die Werte von $c_{\sigma,\tau}$ des Matchings und aus dem Auflösen der Druckformel im gleichen Bereich. Für größeres β konvergieren c_σ und c_τ zu ihrem störungstheoretischen Wert.

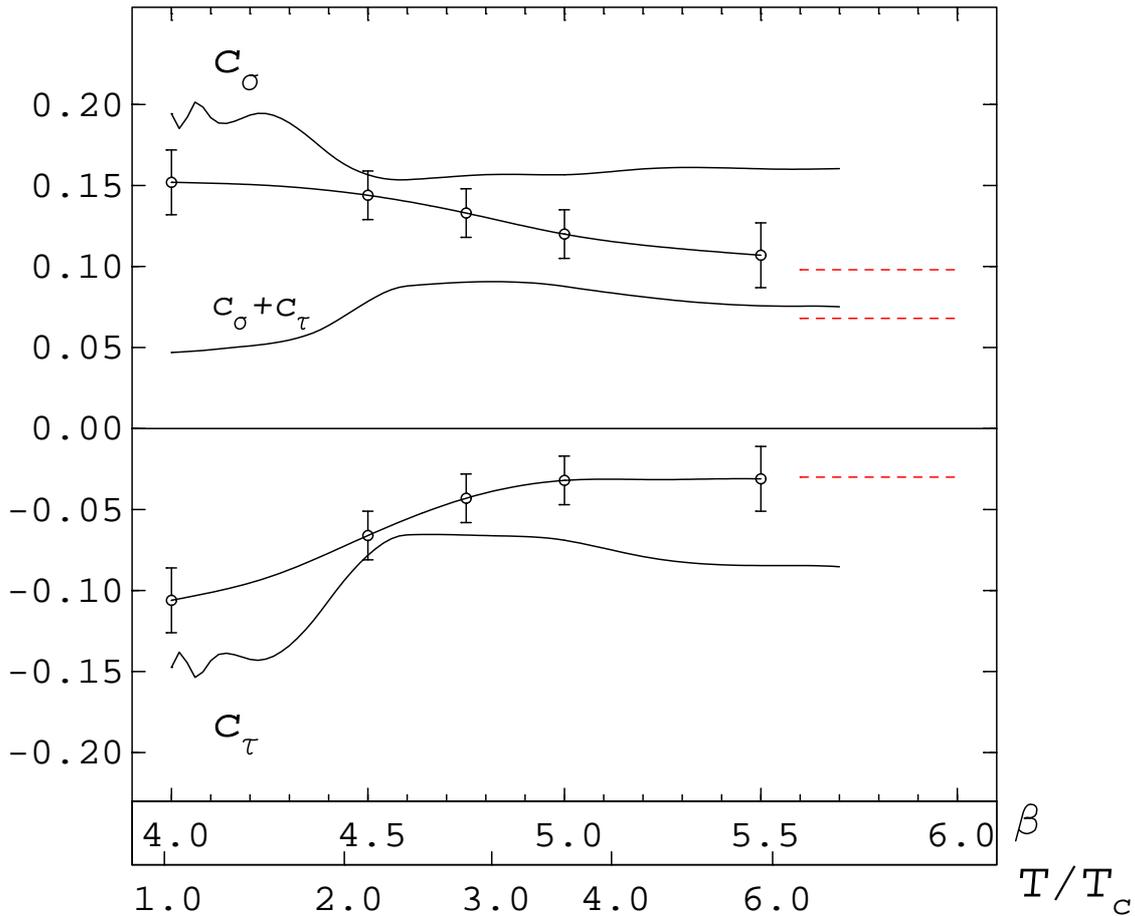


Abbildung 5.13: c_σ und c_τ für die Quadratische Symanzik-Wirkung über β . Die einzelnen Punkte sind die Ergebnisse des Matchings. Für die Berechnung von Druck und Energie sind die Punkte mit einem Spline interpoliert. Die Linien ohne Symbole sind die Ergebnisse aus der Simulation bei endlicher Temperatur nach (2.27a,b) für $N_\tau = 4$. Die gestrichelten Linien sind die störungstheoretischen Werte aus Abschnitt 4.4.

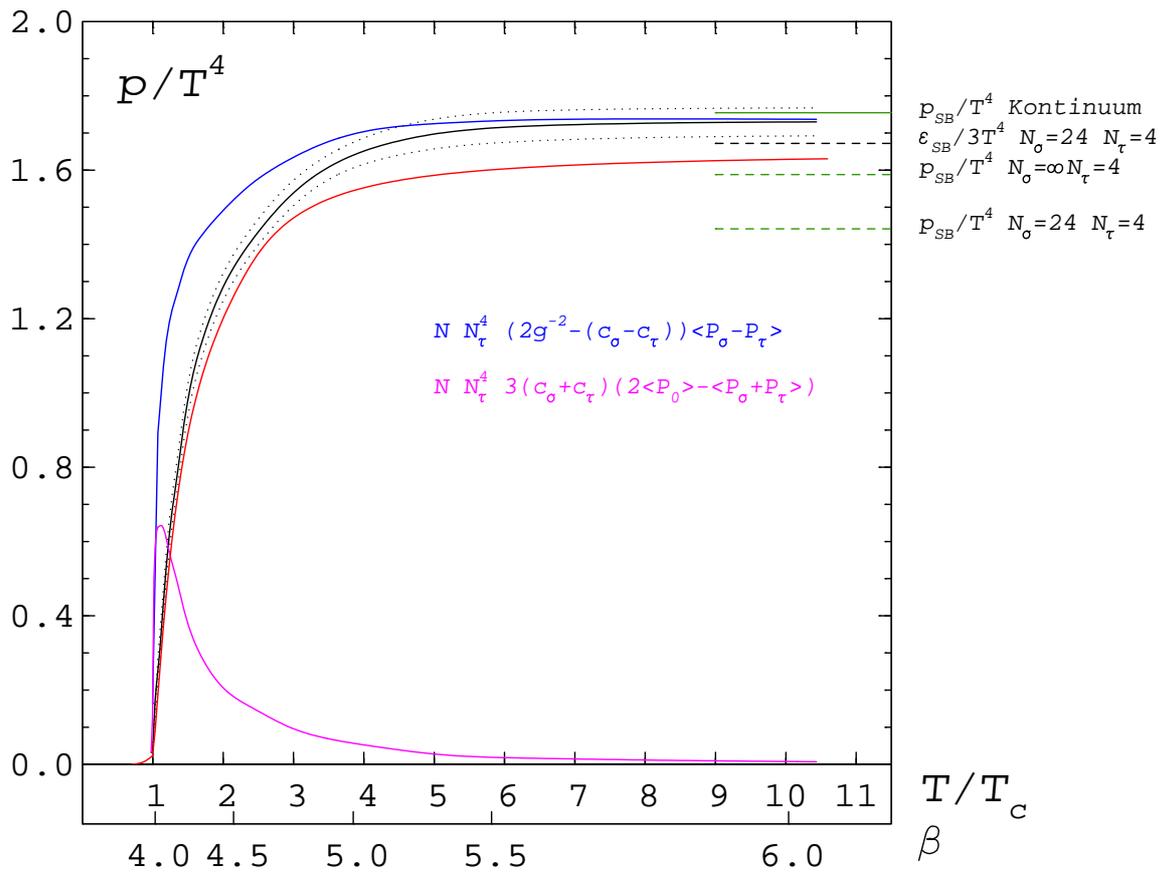


Abbildung 5.14: Der Druck für die Quadratische Symanzik-Wirkung auf dem $24^3 \times 4$ -Gitter. Die rote Linie ist das Ergebnis der Integration der Plaquettes, die schwarze Linie ist der Druck mittels $c_{\sigma,\tau}$ (5.1). Die beiden Terme des Drucks wurden als lila und blaue Linie eingezeichnet. Das Fehlerband resultiert aus dem Fehler von $c_{\sigma,\tau}$.

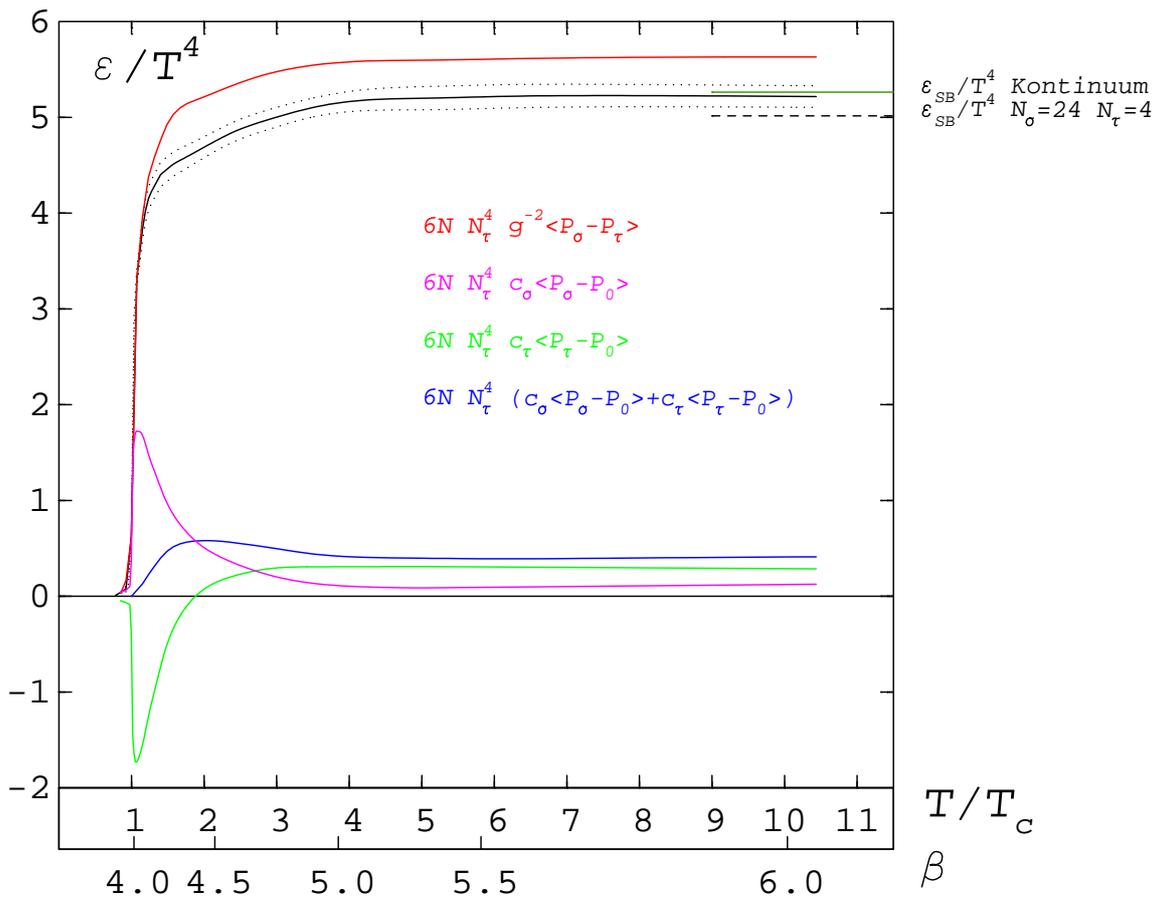


Abbildung 5.15: Die Energie für die Quadratische Symanzik-Wirkung auf dem $24^3 \times 4$ -Gitter. Die schwarze Linie ist das Ergebnis mittels $c_{\sigma,\tau}$ (5.2). Das Fehlerband resultiert aus dem Fehler von $c_{\sigma,\tau}$. Die farbigen Linien sind die verschiedenen Terme der Energiedichte.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Diskussion

6.1 Methodik und Eigenschaften des Matchings

In dieser Arbeit wurden die Funktionen $c_\sigma(g^2)$ und $c_\tau(g^2)$ nicht-störungstheoretisch bestimmt. Der größte Teil dieser Arbeit behandelt eine Methode zur Bestimmung des Anisotropiefaktors ξ mittels des Matchings von Ratios von Wilsonloops. Für diese **Methode** sind folgende Punkte wesentlich:

- Die Wilsonloops müssen mit großer Genauigkeit bestimmt werden, um ξ mit einem Fehler von weniger als 10% zu bestimmen. Hierzu ist das Integrieren der Links der Wilsonloops unerlässlich.
- Mit dem direkten Matching von Wilsonloops lassen sich keine konsistenten Ergebnisse auf Gittern der Größe $16^3 \times 32$ finden. Um die Beiträge der Ecken und die Selbstmassen zu eliminieren, ist es notwendig Ratios von Wilsonloops zu verwenden.
- Unser Matching-Programm machte keine Annahme über die funktionelle Abhängigkeit der Ratios von ihrer zeitlichen Ausdehnung $f_x(t) = R(x, t)$. Die Ratios wurden mit kubischen Splines interpoliert. Die grafische Ausgabe des Programms erlaubte es, den Prozeß des Matchings genau zu beobachten.
- Großen Wert wurde auf die Untersuchung der Ergebnisse in Abhängigkeit von der Größe der verwendeten Wilsonloops gelegt. Kleine Ratios eliminieren die Beiträge der Ecken und die Selbstmassen nur unzureichend. Auf jeden Fall müssen alle Wilsonloops herausgelassen werden, die eine Kante der Länge eins haben. Ist es möglich, auch die großen Wilsonloops mit einem kleinen relativen Fehler zu messen, so empfiehlt es sich, auch Wilsonloops mit einer Kantenlänge von zwei aus dem Matching herauszunehmen.

Betrachten wir die **Eigenschaften** des Matchings:

- Bei allen untersuchten Wirkungen und β -Werten finden wir einen linearen Zusammenhang $\xi(\gamma)$. Für dieses bemerkenswerte Verhalten ist uns kein Grund bekannt. Dank dieses linearen Verhaltens stellte der Fit der Punkte von $\xi(\gamma)$ zur Bestimmung der Ableitung bei $\gamma=1$ kein Problem da.
- Alle drei Ratios geben ein konsistentes Ergebnis, wenn man die Wilsonloops mit der Kantenlänge eins aus der Betrachtung herausläßt. Das Ergebnis ist dann innerhalb der Fehler unabhängig von der Fläche. Wir finden eine universelle Gitteranisotropie ξ .
- Die Ergebnisse für verschiedene minimale Flächen der beitragenden Wilsonloops wurden mit ihrem Fehler gewichtet gemittelt. Der Fehler von $c_{\sigma,\tau}$ wurde anhand der Streuung der Einzelergebnisse geschätzt. Wurde der Startpunkt der Mittelung bei größeren Werten als $x_{\min}=2$, $t_{\min}=2$ gewählt, so erhielten wir das gleiche Ergebnis, vorausgesetzt, es gab ausreichend viele Punkte. Das gleiche Ergebnis für $c_{\sigma,\tau}$ hätten wir auch erhalten, wenn wir immer den Punkt mit dem kleinsten Fehler anstelle des Mittelwertes gewählt hätten.

Die Bestimmung von c_σ und c_τ ist nur eine mögliche Anwendung der Technik des Matchings. Dieses Verfahren ist eine wichtige Technik für alle Rechnungen auf anisotropen Gittern, da dort eine Kalibrierung des Gitters nötig ist.

6.2 Der Hochtemperaturlimes

Vergleichen wir die Hochtemperaturlimites ($g^2 = 0$) von Druck und Energie der drei untersuchten Wirkungen bei $N_\tau = 4$:

$N_\tau = 4$				
	N_σ	Wilson	2×2	Quad.Sym.
p/p_{SB}	24	1.26	0.86	0.78
	∞	1.38	0.99	0.91
$\epsilon/\epsilon_{\text{SB}}$	24	1.492	1.084	0.953
	∞	1.495	1.088	0.957

Bei allen drei Wirkungen finden wir beim Druck eine starke Abhängigkeit vom räumlichen Volumen N_σ^3 . Bei der Energiedichte beobachten wir dieses Verhalten nicht. Bei der störungstheoretischen Berechnung des Drucks nahmen wir bei der Verwendung der Relation $p = -f$ an, daß wir ein homogenes System haben, bei dem Oberflächeneffekte keine Rolle spielen. Offensichtlich ist $V = 24^3$ dafür deutlich zu klein. Ab $V = 96^3$ finden wir nur noch eine geringe Volumenabhängigkeit.

Das Infrarot-Verhalten der Wirkung bestimmt die N_σ -Abhängigkeit der Hochtemperaturlimites. In der Störungstheorie in niedrigster Ordnung machen sich die Infrarot-Effekte stärker als auf dem Gitter bemerkbar, weil hier die Gluonen masselos sind. Hingegen reicht $N_\sigma=24$ für die Simulationen aus, da dort ein zusätzlicher Massenterm im Gluonpropagator die Infrarotdivergenz verhindert.

Obwohl wir den Hochtemperaturlimes ($g^2=0$) betrachtet haben, zeigt sich eine deutliche Abweichung der beiden Observablen voneinander. Die Gleichung $p = \epsilon/3$ wird von den Gitterlimites nicht erfüllt.

Vergleichen wir die numerisch ermittelte Kurve $p(T)/T^4$ mit den verschiedenen Grenzwerten in Abbildungen 5.7 und 5.14. Die Grenzwerte des Drucks für endliches und unendliches Volumen liegen weit unter $p(T)/T^4$. Da wir auf dem Gitter beobachten können, daß die Differenz $\epsilon - 3p$ bei hohen Temperaturen verschwindet, ist es sinnvoll, die numerisch bestimmte Kurve des Druck mit dem Grenzwert von $\epsilon/3$ zu vergleichen.

6.3 Einfluß von $c_{\sigma,\tau}$ auf Druck und Energie

Wilson-Wirkung

Der Druck $p(c_\sigma, c_\tau)/T^4$ und die Energiedichte $\epsilon(c_\sigma, c_\tau)/T^4$, die mittels $c_{\sigma,\tau}$ berechnet wurden, liegen deutlich höher als der Druck und die Energiedichte, die mittels der Integration der Plaquetten berechnet wurden, Abbildungen 5.4. Beide Methoden ergeben jedoch eine Kurve, die weit unter dem Hochtemperaturgrenzwert desselben Gitters zurückbleibt.

Der Unterschied zwischen den beiden Methoden ist bei $N_\tau = 8$ am geringsten. Die Werte aus der thermodynamischen Simulation für $c_{\sigma,\tau}(N_\tau = 8)$ liegen am nächsten an den Werten für $c_{\sigma,\tau}$ aus dem Matching. Betrachten wir in Abbildung 5.3 den Bereich um $\beta = 6.6$, dort finden wir glatte Kurven für $c_{\sigma,\tau}(N_\tau)$. Die Kurven $c_{\sigma,\tau}(N_\tau)$ nähern sich mit wachsendem N_τ der Interpolation von $c_{\sigma,\tau}$ aus dem Matching an. Der Unterschied zwischen der Mittelung der drei Kurven $c_{\sigma,\tau}(N_\tau)$ und der Interpolation von $c_{\sigma,\tau}$ des Matchings ist auf den endlichen Gitterabstand a zurückzuführen, der bei der Wilson-Wirkung einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ induziert.

Wie die Fehler der Diskretisierung genau in das Matching eingehen, wurde nicht untersucht. Hierzu müßte man die Wilsonloops des anisotropen Gitters im schwachen Kopplungslimes als Funktion von (x, t, γ) entwickeln. Damit läßt sich ein Ausdruck für die Ableitung $(\partial\gamma/\partial\xi)_{\xi=1}$ finden. Betrachten wir den Term $g^{-2}(1 - \partial\gamma/\partial\xi)_{\xi=1}$ in den Gleichungen (2.20a,b) zur Bestimmung von $c_{\sigma,\tau}$. Die 1 hebt sich mit der 1 auf, mit der die Entwicklung der Wilsonloops beginnt. Der folgende Term im Ausdruck für die Ableitung ist von der Ordnung g^2 . Interessant wäre zu untersuchen, ob dieser g^2 -Term mit den Diskretisierungsfehlern der Wilson-Wirkung der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ behaftet ist. Falls ja, so würde $c_{\sigma,\tau}$ noch im Hochtemperaturlimes eine g^2 -Abhängigkeit aufweisen. In diesem Fall sollte dann die störungstheoretische Korrektur bei der numerischen Bestimmung von $c_{\sigma,\tau}$ mit berücksichtigt werden.

Die Kurven durch die vier Werte von $c_{\sigma,\tau}$ zeigen, wie die drei Kurven $c_{\sigma,\tau}(N_\tau)$ zu bewerten sind. Es ist nicht möglich $c_{\sigma,\tau}$ mit einer thermodynamischen Simulation über einen weiten Bereich auf *einem* Gitter zu bestimmen. Im Hochtemperaturbereich braucht man ein feines Gitter, um die Fehler der Diskretisierung klein zu halten. Andererseits braucht man ein grobes Gitter, auf dem der Phasenübergang bei kleinen β -Werten stattfindet, da unterhalb des Phasenübergangs die Plaquettdifferenz $\langle P_\sigma - P_\tau \rangle$ verschwindet und $c_{\sigma,\tau}$ divergieren.

Die direkte Bestimmung von $c_{\sigma,\tau}$ mittels des Matchings hat dieses Verhalten der drei Kurven $c_{\sigma,\tau}(N_\tau)$ erklärt und gezeigt, daß die Interpolation der drei Kurven $c_{\sigma,\tau}(N_\tau)$ in [3] eine sinnvolle Schätzung war.

Verbesserte Wirkungen

Aufgrund der schlechteren Statistik war es hier nicht möglich, die Energiedichte durch Integration der Plaquetten zu gewinnen. Der Druck $p(c_\sigma, c_\tau)/T^4$ liegt auch hier über dem Druck, der aus der Integration der Plaquetten gewonnen wurde, Abbildungen 5.7 und 5.14. Bei genauer Betrachtung finden wir, daß $p(c_\sigma, c_\tau)/T^4$ bei $6 T/T_c$ bei der 2×2 -Wirkung und bei $8 T/T_c$ bei der QS-Wirkung langsamer steigt, als der Druck der Integration.

Die Kurven $p(c_\sigma, c_\tau)/T^4$ kreuzen den zugehörigen Hochtemperaturlimes bei $6 T_c$ für die 2×2 -Wirkung und bei $4.5 T_c$ für die QS-Wirkung. Die Energiedichten kreuzen ihren Grenzwert bei $4 T_c$ für die 2×2 -Wirkung und bei $3 T_c$ für die QS-Wirkung.

In [6] wurde für verschiedenen Wirkungen der ersten Term der Energiedichte

$$\epsilon_0/T^4 = 3\beta N_\tau^4 (\langle S_\sigma \rangle - \langle S_\tau \rangle) \quad (6.1)$$

für große β -Werte ($\beta = 6, 10, 15, 20$) störungstheoretisch berechnet, um die Annäherung der Energiedichte an den Stefan-Boltzmann-Limes zu untersuchen. In allen Fällen wird der Grenzwert von oben erreicht.

Die Kurven $p(c_\sigma, c_\tau)/T^4$ und $\epsilon(c_\sigma, c_\tau)/T^4$ lassen sich eigentlich nicht mit den Grenzwerten des 24×4 -Gitter vergleichen. Die „dazugehörigen“ $c_{\sigma,\tau}(N_\tau = 4)$ sind mit anderen Fehlern der Diskretisierung behaftet als die $c_{\sigma,\tau}$ des Matchings. Es wurden die Plaquettdaten des $N_\tau = 4$ -Gitters und die $c_{\sigma,\tau}$ des Matchings ohne konkrete N_τ -Abhängigkeit zusammen verwandt. Als obere Grenze kann höchstens der erste Term der Energiedichte (6.1) angesehen werden. Er ist in den Abbildungen als 5.8 und 5.15 als rote Linie eingezeichnet.

Auch bei den verbesserten Wirkungen wäre es interessant zu untersuchen, wie sich die Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(a^4)$ genau auf c_σ und c_τ auswirken. Zumindest bei der QS-Wirkung wäre das möglich, da sich der Propagator diagonalisieren läßt.

6.4 Eignung der Quadratischen Symanzik-Wirkung für thermodynamische Simulationen

Bei der numerischen Simulation zeigt sich, daß der Druck bei der QS-Wirkung schneller ansteigt als bei der 2×2 -Wirkung. Die 80% Marke wird schon bei $2.5 T_c$ statt $3.0 T_c$ erreicht. Bei $T = 6 T_c$ ist der Druck bei der QS-Wirkung auf 95% des Grenzwerts angewachsen, bei der 2×2 -Wirkung nur auf 87%. Die Kurve der Differenz der Plaquetteerwartungswerte in Abbildung 5.12 ist schmaler als die der 2×2 -Wirkung.

Im Vergleich der störungstheoretisch berechneten Energiedichten ϵ/T^4 für endliche N_τ im Abschnitt 4.3 liegen die Abweichungen der Quadratischen Symanzik-Wirkung vom Kontinuumslimit zwischen denen der 2×1 - und der 2×2 -Wirkung. Von dieser Abweichung aus betrachtet, ist die QS-Wirkung zur Untersuchung der Hochtemperaturphase nicht die optimale Wahl für $N_\tau=4$. Sie besitzt allerdings zwei besondere Eigenschaften, die bei der Untersuchung vorteilhaft sind: der Propagator läßt sich diagonalisieren und die Energiedichte ist $\mathcal{O}(a^4)$ verbessert.

Anhang A

Tabellen

Ergebnisse des 24^4 -Gitters			
β	Iter.	$\langle P_0 \rangle$	$\sqrt{\hat{\sigma}}$
3.900	250	0.624302(35)	0.4626(43)
3.970	250	0.604245(42)	
3.980	250	0.601589(40)	0.4000(31)
3.982	250	0.601019(32)	
3.984	250	0.600535(39)	
3.990	250	0.598996(34)	
4.000	300	0.596445(36)	0.3898(25)
4.025	250	0.590248(35)	0.3701(27)
4.050	250	0.584331(29)	0.3549(28)
4.100	200	0.573162(29)	0.3271(30)
4.150	400	0.562824(23)	0.3041(31)
4.200	400	0.553118(22)	0.2828(35)
4.300	400	0.535339(20)	0.2364(42)
4.400	400	0.519211(20)	0.2049(48)
4.600	400	0.490650(20)	0.1649(60)
4.800	400	0.465682(18)	0.1341(55)
5.000	400	0.443510(16)	0.1140(43)
5.200	400	0.423571(15)	0.0938(47)
5.400	400	0.405493(13)	0.0774(51)
5.600	400	0.389016(15)	0.0591(59)
6.000	200	0.359979(19)	0.0387(77)

Tabelle A.1: Erwartungswerte Plaquetten P_0 und der Wurzel der Saitenspannung $\sqrt{\hat{\sigma}}$ auf dem 24^4 -Gitter für die Quadratische Symanzik-Wirkung.

Ergebnisse des $24^3 \times 4$ -Gitters						
β	T/T_c	Iter.	$\langle L \rangle$	$\langle \chi_L \rangle$	$\langle P_\sigma \rangle$	$\langle P_\tau \rangle$
3.900	0.84	4000	7.692(89)e-3	2.269(39)e-1	0.624232(26)	0.624220(27)
3.970	0.98	4000	1.746(88)e-2	1.92(48)e+0	0.604120(26)	0.604039(32)
3.980	1.00	5500	4.59(19)e-2	1.32(22)e+1	0.601045(88)	0.600845(132)
3.982	1.00	18000	6.58(23)e-2	1.977(48)e+1	0.600064(94)	0.599690(124)
3.984	1.00	18000	8.67(20)e-2	1.31(18)e+1	0.599063(63)	0.598538(87)
3.990	1.02	8000	1.150(23)e-1	2.55(24)e+0	0.596937(25)	0.596195(36)
4.000	1.03	7500	1.3057(25)e-1	1.297(43)e+0	0.594099(20)	0.593182(22)
4.025	1.05	4000	1.5241(29)e-1	7.18(23)e-1	0.587800(24)	0.586704(26)
4.050	1.09	8000	1.66278(76)e-1	5.91(10)e-1	0.582029(16)	0.580774(16)
4.100	1.19	8000	1.87104(76)e-1	4.618(71)e-1	0.571360(15)	0.569988(15)
4.150	1.34	8000	2.03182(56)e-1	4.050(65)e-1	0.561490(14)	0.560039(15)
4.200	1.37	8000	2.17023(41)e-1	3.827(43)e-1	0.552237(14)	0.550733(14)
4.300	1.64	5500	2.4098(100)e-1	3.589(55)e-1	0.535042(16)	0.533498(16)
4.400	1.90	8000	2.62051(49)e-1	3.316(43)e-1	0.519234(13)	0.517699(13)
4.600	2.36	7500	2.98347(56)e-1	3.151(33)e-1	0.490976(12)	0.489455(12)
4.800	2.90	8000	3.29811(32)e-1	2.993(53)e-1	0.466169(11)	0.464685(11)
5.000	3.41	8000	3.57649(74)e-1	2.805(36)e-1	0.444066(11)	0.442630(11)
5.200	4.15	8000	3.82905(53)e-1	2.810(33)e-1	0.424162(10)	0.422763(10)
5.400	5.03	8000	4.05933(47)e-1	2.671(36)e-1	0.406112(99)	0.404750(99)
5.600	6.59	8000	4.26995(53)e-1	2.577(43)e-1	0.389623(97)	0.388318(95)
6.000	10.0	3000	4.6465(106)e-1	2.439(75)e-1	0.360565(14)	0.359344(14)

Tabelle A.2: Erwartungswerte des Polyakovloops L , seiner Suszeptibilität χ_L , sowie der räumlichen und zeitlichen Plaquetten P_σ, P_τ auf dem $24^3 \times 4$ -Gitter für die Quadratische Symanzik-Wirkung.

Wilson-Wirkung						
β	5.4	5.7	6.3	7.2	∞	
T/T_c	–	1.0	2.9	9.2	∞	
c_σ	0.404(30)	0.316(15)	0.261(15)	0.227(20)	0.202[4]	
c_τ	-0.365(30)	-0.277(15)	-0.202(15)	-0.159(20)	-0.132	
2×2-Wirkung						
β	4.4	5.0	5.9			
T/T_c	1.0	2.8	10.7			
c_σ	0.226(30)	0.157(30)	0.115(30)			
c_τ	-0.190(30)	-0.096(30)	-0.067(30)			
Quadratische Symanzik-Wirkung						
β	4.0	4.5	4.75	5.0	5.5	∞
T/T_c	1.0	2.2	2.8	3.7	5.9	∞
c_σ	0.152(20)	0.144(15)	0.133(15)	0.120(15)	0.107(20)	0.098[19]
c_τ	-0.106(20)	-0.066(15)	-0.043(15)	-0.032(15)	-0.031(20)	-0.030

Tabelle A.3: Ergebnisse für c_σ und c_τ für die drei verwendeten Wirkungen.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Satz, *Color Deconfinement and J/ψ Suppression in High-Energy Nuclear Collisions*, School of Subnuclear Physics, Erice, Italien, Sep. 1997, **hep-ph/9711289**.
- [2] E. Braaten, A. Nieto, *Free Energy of QCD at High Temperature* Phys. Rev. **D53** (1996) 3421.
- [3] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lütgemeier, B. Petersson, *Thermodynamics of $SU(3)$ Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. **B469** (1996) 419.
- [4] F. Karsch, *$SU(N)$ Gauge Theory Couplings on Asymmetric Lattices*, Nucl. Phys. **B205** (1982) 285.
- [5] J. Engels, J. Fingberg, F. Karsch, D. Miller, M. Weber, *Nonperturbative Thermodynamics of $SU(N)$ Gauge Theories*, Phys. Lett. **B252** (1990) 625.
- [6] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann *Improved Actions for QCD Thermodynamics on the Lattice*, Nucl. Phys. **B462** (1996) 415.
- [7] M. García Pérez, Jeroen Snippe, Pierre van Baal, *Testing Improved Actions*, 2nd Workshop on Continuous Advances in QCD, Minneapolis, März 1996, **hep-lat/9607007**.
- [8] I. Montvay, E. Pietarinen, *The Stefan-Boltzmann-Law at High Temperature for the Gluon Gas*, Phys. Lett. **110B** (1982) 148.
- [9] G. Burgers, F. Karsch, A. Nakamura, I.O. Stamatescu, *QCD on Anisotropic Lattices*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 587.
- [10] B. Beinlich, C. Legeland, M. Lütgemeier, A. Peikert, T. Scheideler, *The String Tension in $SU(N)$ Gauge Theory from a Careful Analysis of Smearing Parameters*, Proceedings of Lattice 97, Edinburgh, Juli 1997, **hep-lat/9709147**.
- [11] M. Creutz, *Asymptotic-Freedom Scales*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 313.
- [12] G. Parisi, R. Petronzio, F. Rapuano, *A Measurement of the String Tension near the Continuum Limit*, Phys.Lett. **128B** (1983) 418.

- [13] R. Brower, *The External Field Problem for QCD*, Nucl.Phys. **B190** (1981) 699.
- [14] Ph. de Forcrand, C. Roiesnel, *Refined Methods for Measuring Large-Distance Correlations*, Phys.Lett. **151B** (1985) 77.
- [15] Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, Ninth Printing*, Dover Publications, New York (1970)
- [16] U. Heller and F. Karsch, *One Loop Pertubative Calculation of Wilson Loops on Finite Lattices*, Nucl. Phys. **B251** (1985) 254.
- [17] H.T. Elze, K. Kajantie and J. Kapusta, *Screening and Plasmon in QCD on a Finite Lattice*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 832.
- [18] Bronstein und Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Teubner, Stuttgart, Leipzig (1996)
- [19] M. García Pérez, Pierre van Baal, *One-loop Anisotropy for Improved Actions*, Phys. Lett. **B392** (1997) 163
- [20] A.M. Ferrenberg, R.H. Swendsen, *Optimized Monte Carlo Data Analysis*, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 1195.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich für die ausgezeichnete Betreuung meiner Arbeit durch meinen Doktorvater Prof. Dr. J. Engels bedanken. Er stand mir jederzeit für Fragen und Diskussionen zur Verfügung.

Auch möchte ich mich bei Prof. Dr. F. Karsch bedanken, der mich bei den störungstheoretischen Rechnungen angeleitet hat und mir bereitwillig zu jeder Zeit meine Fragen beantwortet hat.

Auch möchte ich mich bei der gesamten Arbeitsgruppe für die angenehme und fruchtbare Atmosphäre bedanken. Mein besonderer Dank gilt M. Lütgemeier für das Bereitstellen seiner Programmpakete USEFIT und USEDAT und B. Beinlich, der mir bei der Berechnung der Determinante des inversen Propagators half.

Mein Dank gilt auch M. García Pérez, die mich auf ihre Arbeit [7] hingewiesen hat, in der die Zerlegung des Propagators der Quadratischen Symanzik-Wirkung erläutert wird.

Ich bedanke mich auch bei der Deutschen Forschungs Gemeinschaft (DFG) für die Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter vom März 1995 bis zum Januar 1998.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Eltern, die mich während des gesamten Studiums finanziell und ideell unterstützt haben.

Hiermit versichere ich, daß ich meine Dissertation selbstständig angefertigt habe und mir keine weiteren Hilfsmittel als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Veröffentlichungen zur Verfügung standen.

Tim Scheideler