Franz-Peter Liebel

Berechnung kausaler Strukturen

PABST SCIENCE PUBLISHERS
Lengerich, Berlin, Bremen, Miami,
Riga, Viernheim, Wien, Zagreb

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Druck: Digital Druck AG, D-96158 Frensdorf

ISBN 3-89967-011-6

Vorwort

Ein großes und gleichzeitig komplexes System ist schwer zu überblicken und zu handhaben. Zur Lösung der dabei auftretenden vielgestaltigen Probleme sind Expertensysteme das geeignete Mittel. Vermutlich ist der wesentlichste Aspekt eines medizinischen Diagnoseexpertensystems die Entwicklung und Bereitstellung neuer Möglichkeiten um Wege der Diagnosefindung zu optimieren. Dieses Buch widmet sich dieser Aufgabe. Sein Wert besteht darin, dass es viel weiter und tiefer geht als nur bis zur bloßen Angabe der Verfahrensweise, wie wichtig diese auch sein mag. Und eben dafür analysiert es im Einzelnen, wie ein medizinisches Diagnoseexpertensystem unter Verwendung kausaler Netze aufzubauen ist.

Dieses Buch wird deshalb von besonderem Interesse sein für graduierte Studenten und Wissenschaftler, aber auch für Praktiker, die den Bereichen angewandte Mathematik, Computerwissenschaft, Medizin und Theorie der Expertensysteme angehören.

28. Februar 2002

Prof. Dr. Philippe Blanchard
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

Vorwort

Es gibt nur wenige medizinische Diagnose-Expertensysteme, die sich im praktischen Einsatz befinden. Als ein Beispiel sei ein Expertensystem genannt, das im Fall eines Schlaganfalls zwischen den Alternativen Thrombose oder Hämorrhagie entscheidet.

An diesem Beispiel ist der oft sehr enge Anwendungsbereich der praktisch genutzten Expertensystem zu erkennen. Im Gegensatz dazu hat die bei der vorliegenden Konzeption verwendete Kausalstruktur keine Einschränkung - Kürzungen und Erweiterungen sind jederzeit erlaubt, ebenso die Anknüpfung an bereits bestehende Kausalnetze. Darüber hinaus ist der Nutzer in der Lage, auch das fertig implementierte System an besondere Gegebenheiten anzupassen, so kann er u.a. Symptome hinzufügen oder entfernen und so einen echten Dialog zwischen Mensch und Maschine führen.

Es ist eine vielversprechende Aussicht, ein solches universelles und leistungsfähiges System zur Verfügung zu haben. Der tägliche Streß durch Diagnosen, die in vielen Fällen mehrfach nachgebessert werden müssen, ließe sich entscheidend mindern. Eine baldige Realisierung, auch wenn zu Beginn noch nicht die volle Leistungsfähigkeit erreicht wird, wäre mehr als wünschenswert.

März 2002

Prof. Dr. E. Zimmermann
Institut für Sportmedizin – Training und Gesundheit
Universität Bielefeld

BERECHNUNG KAUSALER STRUKTUREN

Aus dem Institut für Sportmedizin – Training und Gesundheit
der Universität Bielefeld
(Leitung: Prof. Dr. med. E. Zimmermann)

Dr. F.-P. Liebel

Inhalt

Berechnung kausaler Strukturen

Aus dem Institut für Sportmedizin – Training und Gesundheit
der Universität Bielefeld
(Leitung: o.Prof. Dr.med. E. Zimmermann)

Dr. F.-P. Liebel

Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren vorgestellt, das für eine vorgegebene Symptommenge die Wahrscheinlichkeiten des Vorliegens der in Frage kommenden Ursachen zu berechnen vermag. Hierzu wird ein Kausalnetz verwendet, das Ereignisse mit bekannten, sowie Ereignisse mit unbekannten Wahrscheinlichkeiten enthält. Für jede der unbekannten Wahrscheinlichkeiten stellt man eine Bestimmungsgleichung auf und erhält so bei x Unbekannten ein System von x nicht-linearen Gleichungen.

Mit der Einführung von Voraussetzungen, die z.B. im Fall einer medizinischen Anwendung gut zu erfüllen sind, können die in den Gleichungen erscheinenden bedingten Wahrscheinlichkeiten so vereinfacht werden, daß die jeweiligen Bedingungen im allgemeinen nur noch ein mit $p = 1$ vorliegendes Ereignis aufweisen. Dadurch wird die Erstellung von Stichproben zur Ermittlung der entsprechenden Zahlenwerte problemlos.

Einleitung

Es besteht die Aufgabe, für komplexe biologische oder technische Systeme anhand einer vorgegebenen Menge von Symptomen oder Merkmalen die Wahrscheinlichkeiten der als Ursachen in Betracht zu ziehenden Systemzustände zu ermitteln.

Betrachtet man einen lebenden Organismus oder ein aus zahlreichen, teilweise selbständig arbeitenden Komponenten zusammengesetztes technisches System, so lassen sich an beliebig wählbaren Punkten Betriebszustände feststellen, die durch Regelmechanismen innerhalb definierter Intervalle gehalten werden. Jeder zeitlich andauernde Betriebszustand außerhalb des jeweiligen Normintervalls stellt eine nicht regulierbare Störung dar. Eine solche Störung ist verursacht durch Einflüsse innerhalb oder außerhalb des Systems, und sie ist als irregulärer Zustand im allgemeinen selbst wieder Ursache für nachfolgende irreguläre Zustände.

Man verwendet die fehlerhaften Betriebszustände, um mit der Kenntnis ihres Vorliegens die Wahrscheinlichkeiten übergeordneter Ursachen zu berechnen.

Zur Vorbereitung auf die anstehende Problematik seien die Verhältnisse an einem einfachen Beispiel erläutert. Gegeben sei die Symptommenge $\{F_1, ..., F_5\}$, die in einer kausalen Ordnung Folge-Ereignisse darstellen sollen. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten derjenigen Ereignisse, die als Ursachen für die vorgegebenen $\{F_1, ..., F_5\}$ möglich sind.

Es bietet sich unmittelbar eine Lösung an: bezeichnet H eine der gesuchten Ursachen, so ist $p(H \mid F_1 ... F_5)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß H und $(F_1 ... F_5)$ gemeinsam auftreten.

Es ist jedoch wenig aussichtsreich, derartig umfangreiche bedingte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe einer Stichprobe ermitteln zu wollen; auch ist eine Faktorisierungsmöglichkeit nicht unmittelbar erkennbar, da die $F_1, ..., F_5$ infolge gemeinsamer Ursachen per definitionem stochastisch abhängig sind.

Ist etwa zusätzlich zu H auch K_1 eine mögliche Ursache für die Ereignisse in $\{F_1,..., F_5\}$, so wird (unter der Bedingung eines gemeinsamen Folge-Ereignisses) die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens von H durch das Ereignis K_1 beeinflußt, und die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens von K_1 wiederum durch H.
Außerdem ist offensichtlich, daß die ausschließliche Berücksichtigung von lediglich Folge-Ereignissen $\{F_1,..., F_5\}$ dem Ziel nicht gerecht werden kann, unter Nutzung des gesamten verfügbaren Wissens die Wahrscheinlichkeiten von H und K_1 zu bestimmen.

Notiz

Wir unterscheiden zwischen den folgenden Wahrscheinlichkeiten, die für das beliebig gewählte Ereignis H formuliert sind:

$p(H)$ a-priori-Wahrscheinlichkeit von H.

$p(H \mid F_1...F_5)$ a-posteriori-Wahrscheinlichkeit von H; die Bedingung enthält eine beliebige Auswahl an Ereignissen.

$p(H \mid H')$ ap-Wahrscheinlichkeit von H. Spezialfall einer a-posteriori-Wahrscheinlichkeit von H; in der Bedingung sind *alle* Ereignisse des betrachteten Kausalnetzes berücksichtigt, die Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens von H besitzen. Eine Definition erfolgt in Kapitel 1 zusammen mit der Definition der '-Ereignisse.

Es läßt sich erkennen, daß die einfach formulierte Aufgabe eine Anzahl unbeantworteter Fragen birgt:

a) Gibt es z.B. für $p(H \mid F_1...F_5)$ eine Faktorisierungsmöglichkeit; welche Voraussetzungen sind hierfür erforderlich, und nach welchen Grundsätzen überhaupt ist eine solche Faktorisierung auszuführen?
b) Wie kann berücksichtigt werden, daß sich die ap-Wahrscheinlichkeiten von kausal verknüpften Ereignissen wechselseitig beeinflussen?
c) Welche Ereignisse sind insgesamt für die ap-Wahrscheinlichkeit eines Systemzustands von Bedeutung, und wie ist zu verfahren, wenn das Vorliegen oder Nicht-Vorliegen solcher Ereignisse nicht mit Sicherheit bestimmt ist?

Mit den Fragen a), b) und c) rücken für die gestellte Aufgabe komplexe Probleme in den Vordergrund, für die keine einfache Lösung erwartet werden darf. Dennoch ergeben sich für einzelne Aspekte erstaunlich kompakte und übersichtliche Lösungen. So zeigt es sich, daß

1. der Satz von DUDA (vergl. Glg.3.3) und der sogenannte L-Satz (Glg.4.3) nur Sonderfälle des Allgemeinen Interpolationssatzes (Glg.4.1) sind, daß
2. die Formeln des A→L-Satzes und des A→L-Korollars1 (Glg.7.6 und Glg.8.1) *eine Strukturierung aufweisen, die überraschend einfach ist, und daß*
3. die Frage der wechselseitigen Beeinflussung mit einem Kunstgriff gelöst werden kann, indem man alle ap-Wahrscheinlichkeiten als Funktion der übrigen ap-Wahrscheinlichkeiten darstellt und das so gewonnene nicht-lineare Gleichungssystem berechnet.

Das für die Lösung der Aufgabe vorgestellte Verfahren kann für einen Überblick in die folgenden vier Bereiche aufgeteilt werden:

I.

Das problemrelevante Wissen wird in eine Kausalstruktur eingebracht. In dieser Struktur stehen Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit unbekannt ist, und für die deshalb ap-Wahrscheinlichkeiten zu formulieren sind. Die ap-Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses enthält in der Bedingung die im Netz benachbarten Ereignisse, die unter Umständen ebenfalls eine unbekannte Wahrscheinlichkeit aufweisen. Um diese Problematik zu erfassen, werden zur Stochastik neue Begriffe hinzugefügt, nämlich

- in Kapitel 1, S. 20 die '-Ereignisse und
- in Kapitel 4, S. 54 die Separation von '-Ereignissen.

II.

Um eine ap-Wahrscheinlichkeit als Funktion der übrigen vorhandenen ap-Wahrscheinlichkeiten darstellen zu können sind Interpolationsformeln erforderlich. Die bekannten Sätze der Diskreten Stochastik werden so ergänzt durch

- den Allgemeinen Interpolationssatz, mit den Sonderfällen
- L-Satz und Linearer Interpolationssatz.

III.

Die nach den Interpolationen erreichten bedingten Wahrscheinlichkeiten, die bei nicht-trivialen Kausalnetzen einen entsprechenden Umfang aufweisen, müssen in kleinere Wahrscheinlichkeiten zerlegt, d.h. faktorisiert werden können. Vor allem dazu werden Voraussetzungen eingeführt. Diese Voraussetzungen erlauben dann die Aufstellung des

- A→L-Satzes und des A→L-Korollars 1, sowie der
- Faktorisierungssätze.

Der A→L-Satz und das A→L-Korollar 1 geben neuartige Berechnungen für Übergangswahrscheinlichkeiten an. Die Voraussetzungen, die für diese Satzaussagen benötigt werden, definieren „selbständige" Ursachen, eine eigens eingeführte Eigenschaft für Ursachen-Ereignisse.

IV.

Für jede ap-Wahrscheinlichkeit, die als eine Funktion der übrigen ap-Wahrscheinlichkeiten formuliert ist, wird nach erfolgter Interpolation und anschließender Faktorisierung die Erhebung der benötigten Stichproben vorgenommen. Mit den gewonnenen Zahlenwerten erhält man so bei x ap-Wahrscheinlichkeiten ein nicht-lineares Gleichungssystem in x Unbekannten. Dieses Gleichungssystem wird iterativ oder mit Hilfe eines handelsüblichen Berechnungsprogramms, z.B. mit dem Programm „Maple 6", gelöst.

Die nun zuvorderst zu erledigende Teilaufgabe ist es, eine Kausalstruktur zu entwerfen, die ein möglichst wirklichkeitsgetreues Modell des Geschehens sein soll. Die Struktur soll eine Projektion des Wissens darstellen, sie soll aber auch Erkenntnisse aufnehmen können, die vorläufig lediglich hypothetisch sind. Rückwirkend wiederum soll das Abbild der Geschehnisse für die Denkarbeit eine Führung und Leitung bieten.

Andere Vorgehensweisen, z.B. Diagnose-Expertensysteme auf der Grundlage der Minimierung Gauß'scher Fehlerquadrate, nutzen Kausalnetze nicht. Dadurch entfällt eine Möglichkeit, Wissen übersichtlich darzustellen und zu sortieren, sto-

chastische Abhängigkeiten zu erfassen und die Erkenntnisse permanent an einer Abbildung zu überwachen.
Zu den Vorteilen der im anschließenden Kapitel 1 zur Verwendung vorgeschlagenen Kausalstruktur zählt weiter der modulartige Aufbau und die damit ermöglichte schrittweise Fortsetzung. Als ein Pluspunkt für das Kausalnetz und auch für das gesamte Verfahrens ist zudem die universelle Verwendbarkeit zu werten, da ohne Änderungen an Regeln oder Grundsätzen die kausal strukturierten Geschehensabläufe verschiedenartiger Anwendungsgebiete erfaßt und berechnet werden können.

Die Eigenschaft einer universellen Einsetzbarkeit ist bei Anwendungen in der Medizin unabdingbar, da Gruppierungen hinsichtlich Alter, Geschlecht, Rasse, Klima, genetischer Disposition und beruflicher Belastung erfolgen müssen, wobei stets andere Kausalnetze zugrunde liegen. Bei dem vorliegenden System ist jedoch die Bildung auch zahlreicher Zugehörigkeitsgruppen, und damit die Berücksichtigung zahlreicher Kausalnetze, nicht mit Schwierigkeiten verbunden, da universell stets dieselbe mathematische Basis und dieselbe Vorgehensweise gültig ist.

Für das nachfolgend vorgestellte Verfahren, insbesondere für seine Verwendung als medizinisches Diagnose-Expertensystem, bestehen europäische Patentanmeldungen unter den Anmeldenummern 91104386.7-2201 / 0504457 und 99105884.3-2201 / 1026616.

(99105884.3 nutzt die Priorität einer vorangehenden Anmeldung mit der Nr. 99102275.7.)

1. L-Netz

Im Falle einer Bearbeitung biologischer Systeme ist als Aufgabe festgelegt worden, anhand einer vorgegebenen Menge von Symptomen eine Liste der in Frage kommenden Krankheitsursachen aufzustellen, und diese Krankheitsursachen nach der Wahrscheinlichkeit ihres jeweiligen Vorliegens zu sortieren. In anderen Worten: es sind zu einer festgestellten Menge von Folge-Ereignissen alle hypothetischen Ursachen zu ermitteln, sodann ist die vorgegebene Symptomatik durch Ereignisse zu ergänzen, die Einfluß auf die Wahrscheinlichkeiten des Vorliegens dieser Ursachen besitzen, und schließlich sind dann eben diese Wahrscheinlichkeiten mit Methoden der Stochastik exakt zu berechnen.
Es bietet sich an, die Zusammenhänge zwischen Krankheitshypothesen und den Ereignissen, die unter bestimmten Bedingungen eine stochastische Abhängigkeit gegenüber solchen Hypothesen aufweisen, in einem Kausalnetz zu strukturieren. Es wird eine besondere Kausalstruktur eingeführt, die den Namen *L-Netz* erhält. Dieses Kausalnetz wird so konstruiert, daß es vor allem der Aufgabe gerecht wird, die kausalen Zusammenhänge pathophysiologischer Zustände bei Menschen, Tieren und Pflanzen zu erfassen.
(In entsprechender Weise kann es auch bei komplexen technischen Systemen genutzt werden.)

Definition (Netzknoten)

D1.1. Die Knoten des L-Netzes sind Ereignisse, die den pathophysiologischen Zuständen des betrachteten Systems zugeordnet sind.

D1.2. Ein pathophysiologischer Zustand ist eine Meßgröße bzw. ein Parameter, dessen Wert außerhalb eines festgelegten Normbereichs liegt.

D1.3. Physiologische Normalzustände sind insbesondere keine Knoten des L-Netzes.

D1.4. Ein Knoten des L-Netzes, der eine Negierung trägt, bezeichnet das Nicht-Zutreffen dieses Ereignisses.

D1.5. Jeder Netzknoten besitzt beliebig viele hinführende und beliebig viele wegführende Kausalverweise.

<u>*Definition (Netzkanten)*</u>

D1.6. Ist L ein beliebiges Ereignis, und ist A ein beliebiges Element aus der Menge der L verursachenden Ereignisse, so wird der kausale Vorgang „A erzeugt L" ebenfalls als ein Ereignis aufgefaßt. Das Ereignis „A erzeugt L" wird in der bildlichen Darstellung als

wiedergegeben, in der rechnerischen Darstellung wird A→L verwendet.

D1.7. Für eine graphisch dargestellte Kausalverbindung A→L bzw. das Ereignis mit dem Symbol A→L gilt:

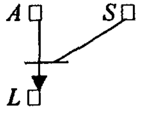
A erzeugt L mit der Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$.

A→L ist ein „Übergang".

<u>*Definition (Inhibitoren)*</u>

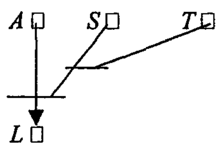
D1.8. Ein Systemzustand S, der die strukturelle Möglichkeit besitzt, unmittelbar die Entstehung eines Ereignisses L aus einer beliebigen Ursache A zu beeinträchtigen, wird als Inhibitor von A→L bezeichnet. Hierbei bedeutet unmittelbar, daß sich zwischen S und dem Beeinträchtigungsmechanismus kein weiterer bekannter Systemzustand befindet.

D1.9. Für einen Inhibitor S von A→L wird folgendes Zeichenschema verwendet:



D1.10. Unter der Bedingung des Vorliegens von A erfolgt der kausale Vorgang A→L mit der Wahrscheinlichkeit Eins, falls es keinen Systemzustand gibt, der A→L inhibitorisch beeinflußt. (Dieser Systemzustand muß nicht notwendigerweise bekannt sein.)

D1.11. Für einen beliebigen Inhibitor S eines beliebigen Ereignisses A→L ist zugelassen, daß der durch S bewirkte Inhibitionsvorgang wiederum inhibiert wird durch einen beliebigen Systemzustand T. Im Schema:

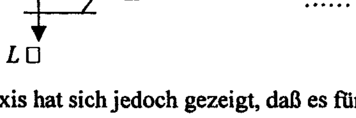


S inhibiert A→L, T wirkt dieser Inhibition entgegen; beide Ereignistypen, d.h. alle Ereignisse mit der Möglichkeit einer Einflußnahme auf kausale Erzeugungsvorgänge, werden als „inhibitorisch wirkende Netzknoten" oder kurz als „Inhibitoren" bezeichnet.

D1.12. Inhibitoren repräsentieren pathophysiologische oder physiologische Zustände des untersuchten Systems.

<u>Erläuterung zur Definition der Inhibitoren</u>

a) Es ist möglich, die Inhibition von Inhibitionsvorgängen auch über das Schema der Definition D1.11. hinaus weiter fortzusetzen, wenn die zugrunde liegenden Inhibitionsmechanismen bekannt sind. Zugelassen ist damit auch:



In der Praxis hat sich jedoch gezeigt, daß es für ein beliebiges A→L genügt, die Ereignisse mit Einfluß auf A→L als inhibitorisch wirkend zu erfassen und nicht zwischen hemmender oder fördernder Eigenschaft zu unterscheiden.

b) Im später eingeführten A→L-Korollar 1 ist es ausreichend, alle inhibitorisch wirkenden Ereignisse zu einem den Übergang $A \to L$ beeinflussenden Ereignisverbund D (synonym: Ereignisprodukt, Ereignisdurchschnitt) zusammenzufassen und als Verbund in die Berechnungen einzubringen.

c) Alle über Inhibitionsmechanismen wirkenden Ereignisse werden so als Inhibitoren behandelt, und ihre Berücksichtigung kann auch dann erfolgen, wenn der Ablauf der Wirkmechanismen nicht bekannt ist. Dieser Vorgehensweise liegt als Modell zugrunde, daß dem Übergang $A \to L$ unter der Voraussetzung eines sicher vorliegenden Ereignisses A stets $p = 1$ zukommt, es sei denn, daß A→L-beeinflussende Ereignisse in gemeinsamem Zusammenwirken ein $p < 1$ bewirken.

d) Sogenannte Akzeleratoren erweisen sich als verzichtbar. Die Erzeugungsvorgänge besitzen eine Wahrscheinlichkeit $p \neq 1$ infolge der einwirkenden Inhibitoren. Erfolgt eine Inhibition eines Inhibitors, so ist dies gleichbedeutend mit der Wirkungsweise eines „Akzelerators".

Der Aufbau des Kausalnetzes beginnt mit der Starthypothese H. Die Hypothese H ist diejenige Krankheitsursache, die als „wahrscheinlichste" Ursache für eine vorgegebene Menge an Folge-Ereignissen festgelegt wird, und die nun bestätigt oder verworfen bzw. in eine nach Wahrscheinlichkeiten geordnete Liste potentieller Ursachen eingeordnet werden soll.

Die Festlegung einer zu Beginn wahrscheinlichsten Ursache erfolgt nach einem Auswahlkriterium. Man wählt ein <u>L</u>eitsymptom L und beginnt mit derjenigen <u>Hy</u>pothese H, für die gilt (vergl. A→L-Satz, Glg.7.6):

$$\frac{p(L \mid H) - p(L \mid \overline{H})}{p(\overline{L} \mid \overline{H})} \geq \frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A})}{p(\overline{L} \mid \overline{A})},$$

wobei A ein beliebiges Element aus der Menge der Ereignisse bezeichnet, die ebenso wie H als Ursachen für L in Frage kommen.

Die Starthypothese H ordnet man in einer Hypothesen-Ebene an, die Folge-Ereignisse in einer Folgen-Ebene. Für eine bildliche Darstellung bezeichnen:

A □ Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1$.

$\bar{A}$ □ Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0$.

A'□ Ereignis A mit bekannter oder unbekannter Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$.

A □ A ist Ursache für L. Das Ereignis L liegt mit Sicherheit vor.
$\downarrow$
L □

A □ A ist Ursache für L. Das Ereignis L liegt mit Sicherheit nicht vor.
$\downarrow$
$\bar{L}$ □

A □ A ist Ursache für L. Die Wahrscheinlichkeit von L ist bekannt oder unbekannt mit $0 < p < 1$.
$\downarrow$
L'□

A □ B □ A und B sind Ursachen für L.
Es gilt: (A erzeugt L) $\vee$ (B erzeugt L).
$\searrow \swarrow$
L □

<u>Hinweis:</u>

Bei der bildlichen Darstellung eines Strukturschemas wird stillschweigend vorausgesetzt, daß weitere, Abhängigkeiten erzeugende Ereignisse nicht existieren. Dies bedeutet <u>nicht</u>, daß auf einen beliebigen, nicht-inhibiert dargestellten Übergang $A \rightarrow L$ keine Inhibitoren einwirken (denn eine Kausalverbindung $A \rightarrow L$ ohne Inhibitoren bedeutet das Zusammenfallen von A und L). Es wird jedoch bei nicht erfolgter Eintragung vorausgesetzt, daß sich z.B. die Inhibitoren von $A \rightarrow L$ in ihrer Wirkung auf $A \rightarrow L$ beschränken, und daß sie nicht etwa gegenüber den Inhibitoren von $B \rightarrow L$ oder gegenüber Ursache-Ereignissen stochastisch abhängig sind. Bestehen solche Abhängigkeiten, und sind sie für die beabsichtigte Aussage von Bedeutung, so sind sie explizit anzuführen.

Mit den eingeführten Bezeichnungen wird an einem Beispiel die Bestimmung einer unbekannten ap-Wahrscheinlichkeit erläutert:

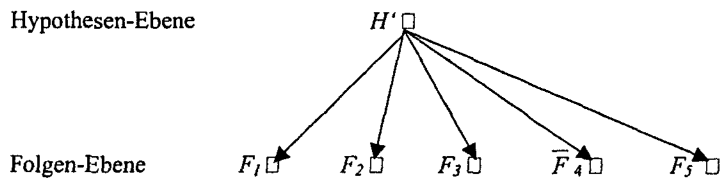


Abb.1.1:

Beispiel einer Kausalstruktur zur Ermittlung der ap-Wahrscheinlichkeit von H' anhand der Folge-Ereignisse F_1 bis F_5.

Es ist legitim, aus der Menge der Folge-Ereignisse beliebige und beliebig viele Ereignisse unberücksichtigt zu lassen. So sind auch in Ab.1.1 die Elemente der Folgen-Ebene willkürlich gewählt, und es sind weitere noch mögliche Folgen ignoriert worden. Somit geht es bei der Bestimmung einer ap-Wahrscheinlichkeit stets um deren Bestimmung unter der Bedingung genau der Ereignisse, die man für eine Berücksichtigung ausgewählt hat.

Bezeichnet $W(H)$ einen Verbund (synonym: Produkt, Durchschnitt), der aus den Ereignissen der Folgen-Ebene in Abb.1.1 besteht, so erhält man mit $p(H \,/\, W(H))$ die ap-Wahrscheinlichkeit von H, d.h. die Wahrscheinlichkeit des Vorliegens von H unter Berücksichtigung aller im Kausalnetz stehender Ereignisse. So besitzt

$$p(H \,/\, W(H)) = p(H \,/\, F_1\, F_2\, F_3\, \overline{F}_4\, F_5) \qquad (1.1)$$

durchaus eine verwendbare Aussage, falls es gelingt, für $p(H \,/\, F_1\, F_2\, F_3\, \overline{F}_4\, F_5)$ einen Zahlenwert zu ermitteln.

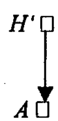
Die Ermittlung eines solchen Zahlenwertes ist jedoch mit Schwierigkeiten verbunden. Man benötigt eine repräsentative Stichprobe, bestehend aus einer Population mit den Eigenschaften F_1 bis F_5, auf der dann die Subpopulation mit der zusätzlichen Eigenschaft H abgezählt wird.

Für Populationen mit mehren zu berücksichtigenden Eigenschaften sind repräsentative Stichproben nur schwer zu realisieren. Besitzt aber die geforderte Wahrscheinlichkeit in der Bedingung nur ein einzelnes, mit $p = 1$ vorliegendes Element, und ist sie zudem von der Form *p(Folge | Ursache)*, so ist die Erstellung einer Stichprobe vergleichsweise unproblematisch. Die Verwendung eben solcher, nach Möglichkeit „einelementig" bedingter Wahrscheinlichkeiten wird im folgenden angestrebt.

Der Aufstellung der Glg.1.1 liegt als Prinzip zugrunde, daß in *W(H)* solche Ereignisse aufgenommen werden, die unter der Bedingung der restlichen Elemente aus *W(H)* gegenüber *H* stochastisch abhängig sind. Da die Abb.1.1 durch weitere Elemente des L-Netzes ergänzt werden kann, besteht die Möglichkeit, weitere Kandidaten für *W(H)* zu gewinnen. Die Entscheidung darüber, ob ein neu zum L-Netz hinzugenommenes Element gegenüber *H* unter der Bedingung des bereits vorliegenden *W(H)* stochastisch abhängig ist, kann anhand der Kausalstruktur getroffen werden. Dazu ist es erforderlich, eine Entsprechung von Kausalstruktur und stochastischer Abhängigkeit zu formulieren. (Vergl. auch Kapitel 5.)

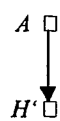
Struktur 1.1

A ist Folge von *H*



Struktur 1.2

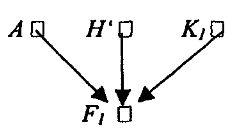
A ist Ursache von *H*



Es gilt Struktur 1.1 $\vee$ 1.2 $\Rightarrow$ H und A sind stochastisch abhängig.

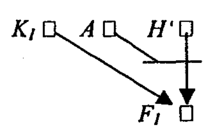
Struktur 1.3

A konkurriert mit *H* bzgl. F_l



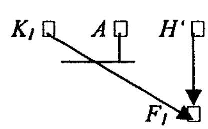
Struktur 1.4

A hemmt $H \rightarrow F_l$



Struktur 1.5

A hemmt $K_l \rightarrow F_l$

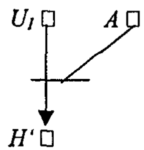


Es gilt Struktur 1.3 $\vee$ 1.4 $\vee$ 1.5 $\Rightarrow$ H und A sind abhängig unter der Bedingung F_l

$$\Rightarrow p(H \,/\, F_l\, A) \neq p(H \,/\, F_l\, \bar{A}).$$

Struktur 1.6

A hemmt die Erzeugung von *H*



Es gilt Struktur 1.6 $\Rightarrow$ *H und A sind stochastisch abhängig unter der Bedingung* U_l

$$\Rightarrow p(H \,/\, U_l A) \neq p(H \,/\, U_l \bar{A}).$$

Die A-Ereignisse aus den Strukturen 1.1 bis 1.6 sind somit Kandidaten für *W(H)*. Hierbei ist es nicht erforderlich, daß sämtliche Ereignisse erfaßt werden, die Einfluß auf die ap-Wahrscheinlichkeit von *H* besitzen; die Art und Anzahl der in das Kausalnetz und damit in das Ereignisprodukt *W(H)* aufgenommenen Ereignisse ist beliebig.

Diese beliebige Auswahl der Ereignisse in *W(H)* wird später eingeschränkt. Um für die Folge-Ereignisse von *H* eine bedingte stochastische Unabhängigkeit zu erhalten, wird gefordert werden müssen, daß alle in Frage kommenden Ursachen solcher Folge-Ereignisse ausnahmslos in *W(H)* enthalten sind. Die Verpflichtung wird dadurch erleichtert, daß die Wahl der Folge-Ereignisse von *H* beliebig bleibt und so auch beliebig eingeschränkt werden kann. Dadurch kann die Anzahl der in Betracht zu ziehenden Ursachen dieser Folge-Ereignisse gering gehalten werden.

Eine bildliche Darstellung des Kausalnetzes wird demnach die Ereignisse enthalten, die gem. Struktur 1.1 bis 1.6 eine bedingte oder nicht-bedingte stochastische Abhängigkeit zu *H* aufweisen. Zusätzlich zu den in Abb.1.1 bereits aufgenommenen Folgen von *H* enthält das Netz dann

- die Ursachen von *H*,
- die mit *H* konkurrierenden Ursachen bzgl. eines beliebigen Folge-Ereignisses von *H*,
- die Inhibitoren der auf *H* gerichteten Übergänge,
- die Inhibitoren der auf Folge-Ereignisse von *H* gerichteten Übergänge.

Mit den neu aufzunehmenden Ereignissen wird Abb.1.1 exemplarisch fortgesetzt:

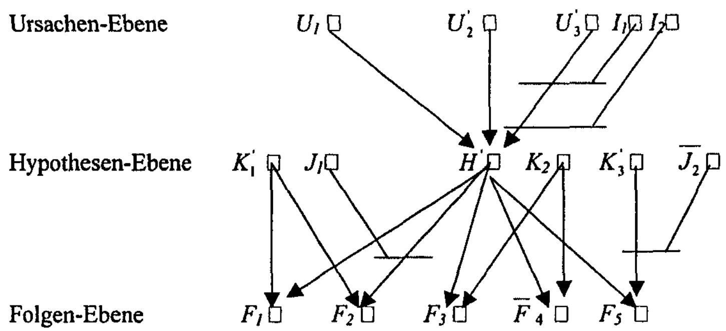


Abb.1.2:
Beispiel einer Kausalstruktur zur Ermittlung der ap-Wahrscheinlichkeit von H' anhand der Ereignisse, die zu H eine bedingte oder eine nicht-bedingte stochastische Abhängigkeit aufweisen.

Es werden folgende Bezeichnungen festgelegt, die für den beliebig gewählten Netzknoten H formuliert sind:

URS(H) Menge der unmittelbaren Ursachen von H.

FOL(H) Menge der unmittelbaren Folgen von H.

DIFF(H) Menge der von H verschiedenen Netzknoten, die unmittelbare Ursache für Elemente aus *FOL(H)* sind.
(*DIFF(H)* umfaßt diejenigen Elemente, die z.B. bei Anwendungen in der Medizin differentialdiagnostisch zu H in Betracht zu ziehen sind.)

INH(Z) Menge der Netzknoten, die über Schaltstellen die auf einen beliebigen Netzknoten Z hinführenden Übergänge inhibitorisch beeinflussen.

WERT(H) Menge aller Netzknoten mit potentiellem Einfluß auf die ap-Wahr-

scheinlichkeit von H (Wertungsumgebung von H).
Mit diesen Bezeichnungen wird zunächst die Vorschrift für den Aufbau des Kausalnetzes formuliert und dann die Definition der Wertungsumgebung vorgenommen.

Aufbauvorschrift L-Netz

Den ersten Netzknoten bildet das Ereignis H', für dessen ap-Wahrscheinlichkeit der höchste Wert erwartet wird. Für H' stehen als Verknüpfungselemente die Ereignisse aus URS(H), FOL(H), DIFF(H), INH(H) und $\bigcup_{Z} INH(Z),\ Z \in FOL(H)$, *zur Verfügung. Jedes dadurch in das Netz aufgenommene Ereignis mit unbekannter Wahrscheinlichkeit kann mit beliebigen Elementen aus seiner eigenen Wertungsumgebung weiter verbunden werden. Der Aufbau wird abgebrochen, wenn sich abschätzen läßt, daß neu eingefügte Ereignisse mit zunehmender Entfernung zu H' nur noch wenig Einfluß auf die ap-Wahrscheinlichkeit von H' besitzen. Alle '-Ereignisse, die in ihrer Wertungsumgebung ebenfalls nur '-Ereignisse aufweisen, werden wieder aus dem Netz entfernt.*
Die Aufbauvorschrift wird im weiteren ergänzt durch zusätzliche Vorschriften, die in Kapitel 6 als Voraussetzungen formuliert sind.

Definition (Wertungsumgebung)
Für ein beliebiges Ereignis H' mit unbekannter Wahrscheinlichkeit wird die Wertungsumgebung von H, kurz: WERT(H), definiert als:

$$WERT(H) := URS(H) \cup FOL(H) \cup DIFF(H) \cup INH(H) \cup \bigcup_{Z \in FOL(H)} INH(Z). \quad (1.2)$$

Der aus den Elementen der Menge *WERT(H)* gebildete Verbund *W(H)* enthält die Ereignisse bei sicherem Vorliegen unnegiert, bei sicherem Nicht-Vorliegen negiert und bei unbekannter Wahrscheinlichkeit '-gekennzeichnet.

Definition ('-Ereignis)

Ein beliebiger Netzknoten H' mit bekannter oder unbekannter Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ wird als '-Ereignis bezeichnet. W(H) sei der aus allen Ereignissen von WERT(H) bestehende Verbund und p(H | W(H)) die ap-Wahrscheinlichkeit von H. Es wird definiert:

p(H | H') := p(H | W(H)) und damit H':= W(H).

a) H':= W(H) ist die Bedeutung von H', falls H' in der Bedingung einer Wahrscheinlichkeit steht, die vor dem Bedingungsstrich das Ereignis H aufweist.

b) Bei allen übrigen Verwendungen des Symbols H', insbesondere falls H' in der Bedingung einer Wahrscheinlichkeit erscheint, die vor dem Bedingungsstrich nicht das Ereignis H aufweist, gilt:
H' bezeichnet ein Ereignis mit einer ap-Wahrscheinlichkeit $0 < p(H \mid H') < 1$, die bekannt ist oder die durch das L-Netz-Berechnungssystem bestimmt wird. Insbesondere kann H' *nicht* *durch W(H) ersetzt werden.*

Erläuterung zur Definition der '-Ereignisse

Für das Beispiel der Abb.1.2 erhält man:

$$p(H \mid H') := p(H \mid W(H))$$
$$= p(H \mid U_1 U_2' U_3' F_1 F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 K_1' K_2 K_3' I_1 I_2 J_1 \overline{J_2}) \qquad (1.3)$$

Nun setzen wir in Glg.1.3 - im Widerspruch zu Ziffer b) der obigen Definition - den Verbund $W(U_2)$ an die Stelle von U_2'. Weil $WERT(U_2) := \{H', U_1, U_3', I_1, I_2\}$ und damit $W(U_2) = (H' U_1 U_3' I_1 I_2)$ gilt, erhält man:

$$p(H \mid H')$$
$$=_{(\text{identisch mit Glg.1.3})} p(H \mid U_1 U_2' U_3' F_1 F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 K_1' K_2 K_3' I_1 I_2 J_1 \overline{J_2})$$
$$=_{(U_2' \text{ ersetzt durch } W(U_2))} p(H \mid U_1 (H' U_1 U_3' I_1 I_2) U_3' F_1 F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 K_1' K_2 K_3' I_1 I_2 J_1 \overline{J_2})$$
$$=_{(\text{zusammengefaßt})} p(H \mid U_1 H' U_3' F_1 F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 K_1' K_2 K_3' I_1 I_2 J_1 \overline{J_2})$$

$=$ *(H' wird durch W(H) ersetzt, da vor der H'-enthaltenden Bedingung das Ereignis H steht)*

$$p(H \mid U_1(U_1U_2'U_3'F_1F_2F_3\overline{F_4}F_5K_1'K_2K_3'I_1I_2J_1\overline{J_2})U_3'F_1F_2F_3\overline{F_4}F_5K_1'K_2K_3'I_1I_2J_1\overline{J_2})$$

$$=_{(zusammengefaßt)}\ p(H \mid (U_1U_2'U_3'F_1F_2F_3\overline{F_4}F_5K_1'K_2K_3'I_1I_2J_1\overline{J_2}))$$

$$= \ p(H \mid H'). \tag{1.4}$$

Die Glg.1.4 zeigt, daß die Ersetzung von U_2' durch den Verbund $W(U_2)$, der erneut das Ereignis H' enthält, keinen Sinn ergibt. Das Erscheinen von U_2' in $W(H)$ und gleichzeitig von H' in $W(U_2)$ ist die mathematische Fixierung des Sachverhalts, daß sich die Wahrscheinlichkeiten der '-Ereignisse wechselseitig beeinflussen.

Der Konflikt der wechselseitigen Beeinflussung, der ein tiefgehendes und bislang ungelöstes Problem darstellt, wird durch die Aufstellung des L-Netz-Berechnungssystems behoben.

Erläuterung zur Definition von WERT(H)

Das L-Netz repräsentiert die Wirklichkeit. Ereignisse außerhalb des Netzes existieren nicht, mit der Ausnahme, daß wir die Existenz unbekannter Inhibitoren zulassen, die auf die kausalen Erzeugungsvorgänge einwirken. Beliebig viele Ereignisse können wir zum Netz hinzufügen oder auch daraus entfernen. Aber wenn das L-Netz zur Aufstellung der Wertungsgleichungen herangezogen wird, ist jedes einzelne Element von Bedeutung. Dennoch sind wir auch hier noch autorisiert, ein Element zu ignorieren und bei der Aufstellung von $W(H)$ nicht zu berücksichtigen, falls dieses Element von H' separiert ist.

Im Vorgriff auf Kapitel 4 geben wir eine Folgerung aus der Separationseigenschaft an. Hierzu sei A ein beliebiges Ereignis des L-Netzes mit $A \notin W(H)$. Ist A ausschließlich über Elemente aus $W(H)$ mit H' verknüft, und sind alle beteiligten ap-Wahrscheinlichkeiten Variable des L-Netz-Berechnungssystems, so ist *H' durch W(H) von A separiert*. (Siehe Kapitel 4, Definition separierter Ereignisse.) Hierzu können die Ereignisse in $W(H)$ negiert, nicht-negiert oder '-markiert vorliegen.

Folgerung

Gegeben sei ein L-Netz und ein beliebig gewählter Netzknoten H' mit unbekannter Wahrscheinlichkeit. W(H) enthalte alle Ereignisse die zur Menge WERT(H) gehören. A bezeichne ein beliebiges Element des L-Netzes mit $A \notin W(H)$. *Dann gilt:*

$$[H' \text{ wird durch } W(H) \text{ von } A \text{ separiert}] \Rightarrow [p(H \mid W(H)) = p(H \mid W(H)\, A)]. \quad (1.5)$$

Hinweis:

Es wird nicht gefordert, daß $p(H \mid W(H)) = p(H \mid W(H)\, A) = p(H \mid W(H)\, \bar{A})$ *gilt, d.h. die Unabhängigkeit von A und H unter der Bedingung W(H) ist verzichtbar.*

Die Beziehung (1.5) hat als Konsequenz, daß für die ap-Wahrscheinlichkeit von *H'* die Verwendung der Bedingung *W(H)* ausreicht, um sämtliche Ereignisse des L-Netzes zu berücksichtigen.

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir die Regel aufgestellt, daß ein Ereignis *A* in *W(H)* aufzunehmen ist, falls *A* und *H* unter der Bedingung *W(H)* stochastische Abhängigkeit aufweisen. Selbstverständlich wird *A* wieder aus *W(H)* entfernt, wenn es sich herausstellt, daß *A* und *H* unter der Bedingung *W(H)* unabhängig sind. Aber wenn auch nur die „schwache" Separationseigenschaft vorliegt, d.h. wenn *H'* durch *W(H)* von *A* separiert wird, so erlaubt dies die Entfernung von *A* aus *W(H)*.

(Die Separationseigenschaft ist „schwach" im Vergleich zur „starken" Unabhängigkeitseigenschaft, da unabhängige Ereignisse immer separiert, separierte Ereignisse im allgemeinen jedoch nicht unabhängig sind. Weitere Informationen gibt Kapitel 4.)

Der Begriff *Verbund* (synonym: Produkt, Durchschnitt) wurde übernommen aus SCHNEEWEISS, W. G.: Zuverlässigkeitssystemtheorie. Datakontext-Verlag Köln 1980, S. 23.

2. Interpolation bei einem einzelnen '-Ereignis

Die Glgn.1.3 und 1.4 verdeutlichen, daß $W(H)$ z.B. U_2' aufweist, daß $W(U_2)$ wiederum H' enthält, und daß somit ein Einfluß von U_2' auf $p(H \mid H')$, aber auch von H' auf $p(U_2 \mid U_2')$ besteht. Für das Problem einer solchen wechselseitigen Beeinflussung besteht bisher keine zufriedenstellende Lösung. Jedoch wird durch die gleichzeitige Erfassung aller ap-Wahrscheinlichkeiten in einem Gleichungssystem, dem methodischen Grundprinzip der weiteren Vorgehensweise, diese Schwierigkeit behoben. Das Prinzip wird deutlich bei dem folgenden, einfachstmöglichen Beispiel:

A' □
$\downarrow$ Inhibitoren von $A \rightarrow H$ sind zugelassen, sie sind jedoch unbekannt.
H' □ Erkenntnisse über weitere Ereignisse liegen nicht vor.

Es ist:

$$p(H \mid H') = p(H \mid W(H)) = p(H \mid A'). \qquad (2.1)$$

$$p(A \mid A') = p(A \mid W(A)) = p(A \mid H'). \qquad (2.2)$$

Die Gleichung (2.1) mit $p(H \mid H') = p(H \mid A')$ bedeutet, daß $p(H \mid H')$ davon abhängt, welche ap-Wahrscheinlichkeit A' besitzt, d.h. welcher Wert $p(A \mid A')$ zukommt. Es werden folgende Forderungen gestellt:

Falls $p(A \mid A') = 1$, *dann* $p(H \mid H') = p(H \mid A)$.

Falls $p(A \mid A') = 0$, *dann* $p(H \mid H') = p(H \mid \overline{A})$.

Falls $p(A \mid A') = p(A)$, *dann* $p(H \mid H') = p(H)$.

Um diese drei Forderungen zu erfüllen, interpoliert man nach Maßgabe des Wertes von $p(A \mid A')$ zwischen den beiden Extremwerten $p(H \mid A)$ und $p(H \mid \overline{A})$.
Man erhält:

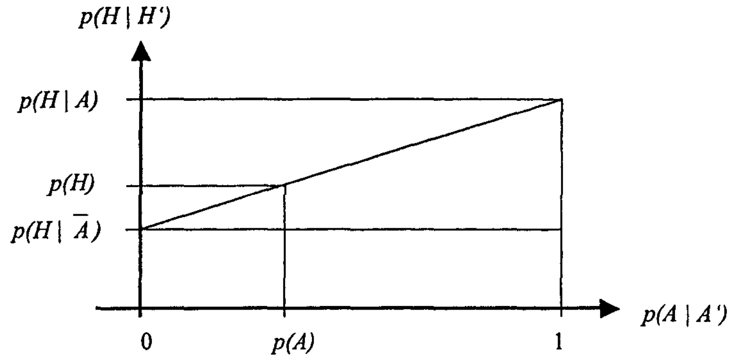


Abb.2.1:

Interpolation zwischen den Extremwerten $p(H \mid H') = p(H \mid A)$ und $p(H \mid H') = p(H \mid \bar{A})$ nach Maßgabe von $p(A \mid A')$.

In Abb.2.1 gilt:

$$\begin{aligned} p(H \mid H') &= p(H \mid \bar{A}) + [p(H \mid A) - p(H \mid \bar{A})]\, p(A \mid A') \\ &= p(H \mid A)\, p(A \mid A') + p(H \mid \bar{A})\, [1 - p(A \mid A')] \\ &= p(H \mid A)\, p(A \mid A') + p(H \mid \bar{A})\, p(\bar{A} \mid A'). \end{aligned} \tag{2.3}$$

<u>Hinweis:</u>

In Abb.2.1 kann entweder der p(A)-Wert auf der p(A |A')-Achse oder der p(H)-Wert auf der p(H | H')-Achse gewählt werden. Eine unabhängige Festlegung von *p(A)* und *p(H)* führt <u>in der Praxis</u> zu inkonsistenten Werten. Ein akutes Problem liegt jedoch nicht vor, da die Interpolation der Glg.2.3 so verwendet wird, daß der vorgegebene p(A | A')-Wert den zugehörigen p(H | H')-Wert bestimmt.

Wegen $p(H \mid H') = p(H \mid A')$ liefert Glg.2.3 die Interpolationsformel für $p(H \mid A')$:

$$p(H \mid A') = p(H \mid A) p(A \mid A') + p(H \mid \bar{A}) p(\bar{A} \mid A'). \tag{2.4}$$

Achtung: *Trotz des Gleichheitszeichens in Glg.2.4 handelt es sich um eine Interpolation und im allgemeinen nicht um eine Gleichheit. (Kriterien für die Erreichung von Gleichheit siehe Kapitel 4, Glg.4.7 und Glg.4.8.)*

Mit einer solchen Interpolation eröffnet sich die Möglichkeit, Beziehungen zwischen den unbekannten Größen $p(H \mid H')$ und $p(A \mid A')$ der Glgn.2.1 und 2.2 aufzustellen. Es folgt:

$$\begin{aligned} p(H \mid H') &= p(H \mid A') \\ &= p(H \mid A)\; p(A \mid A') + p(H \mid \overline{A})\; p(\overline{A} \mid A'). \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} p(A \mid A') &= p(A \mid H') \\ &= p(A \mid H)\; p(H \mid H') + p(A \mid \overline{H})\; p(\overline{H} \mid H'). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Glgn.2.5 und 2.6 bilden ein Gleichungssystem in den Unbekannten $p(H \mid H')$ und $p(A \mid A')$. Der übersichtliche Aufbau des Gleichungssystems läßt unmittelbar erkennen, daß $[p(H \mid H') = p(H)]$ und $[p(A \mid A') = p(A)]$ Lösungen sind.

Die ausführliche Berechnung des Gleichungssystems ergibt kein anderes Ergebnis; dies wird explizit als ein Berechnungsbeispiel vorgeführt.

Bezeichnungen:

$y := p(H \mid H'),$ $\quad a := p(H \mid A),$ $\quad c := p(A \mid H),$

$x := p(A \mid A'),$ $\quad b := p(H \mid \overline{A}),$ $\quad d := p(A \mid \overline{H}).$

Mit den Bezeichnungen ergibt sich aus den Glgn.2.5 und 2.6 ein Gleichungssystem in den üblicherweise verwendeten Unbekannten x und y :

$$y = a\,x + b\,(1 - x). \tag{2.5a}$$

$$x = c\,y + d\,(1 - y). \tag{2.6a}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$y = \frac{(a-b)d + b}{1-(a-b)(c-d)}. \tag{2.5b}$$

$$x = \frac{(c-d)b + d}{1-(a-b)(c-d)}. \tag{2.6b}$$

Nun ist zu zeigen, daß $\frac{(a-b)d+b}{1-(a-b)(c-d)} = p(H)$ gilt. Umformungen ergeben:

$$(a-b) \quad = p(H \mid A) - p(H \mid \overline{A}) = \frac{p(H)p(\overline{A}) - p(H\overline{A})}{p(A)p(\overline{A})}.$$

$$(c-d) \quad = p(A \mid H) - p(A \mid \overline{H}) = \frac{p(A)p(\overline{H}) - p(A\overline{H})}{p(H)p(\overline{H})}.$$

$$(a-b)\,d + b \quad = \frac{p(A \mid \overline{H})p(H) + p(H \mid \overline{A})p(A) - p(H \mid \overline{A})p(A \mid \overline{H})}{p(A)}.$$

$$1-(a-b)\,(c-d) = \frac{p(A \mid \overline{H})p(H) + p(H \mid \overline{A})p(A) - p(H \mid \overline{A})p(A \mid \overline{H})}{p(A)p(H)}.$$

$$\frac{(a-b)d+b}{1-(a-b)(c-d)} = p(H).$$

Analog ergibt sich der Nachweis von $\frac{(c-d)b+d}{1-(a-b)(c-d)} = p(A)$.

Damit ist die Lösung eines Gleichungssystems demonstriert, das demselben Regelwerk folgt wie die im weiteren genutzten Gleichungssysteme, das aber bei nur zwei Unbekannten keine iterative Lösungsmethode erfordert.

Als ein zusätzlicher Gewinn ergibt sich die Bestätigung einer (als nahezu sicher erachteten) Vermutung, die nun formal bewiesen ist:
Ist zwar eine kausale Zuordnung von H' und A' bekannt, bestehen jedoch keine Erkenntnisse hinsichtlich des Vorliegens oder Nicht-Vorliegens von weiteren Ereignissen aus der jeweiligen Wertungsumgebung, so sind die ap-Wahrscheinlichkeiten von H' und A' nicht genauer als die a-priori-Wahrscheinlichkeiten.

3. Eigenschaften von Interpolationen

Die Interpolation gem. Abb.2.1, die für $p(H \mid A')$ formuliert war, wird für eine Wahrscheinlichkeit der Form $p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1})$ umgeschrieben.

Das Symbol H bezeichnet das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit ermittelt werden soll, $\{E_1, ..., E_h\}$ sind mit Sicherheit vorliegende und damit unnegierte bzw. mit Sicherheit nicht vorliegende und damit negierte Ereignisse. Zur Vereinfachung der Formelausdrücke ist die mögliche Negierung der Ereignisse nicht angegeben. E'_{h+1} ist durch seine '-Kennung ausgewiesen als ein Ereignis mit bekannter oder unbekannter ap-Wahrscheinlichkeit $0 < p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) < 1$.

Weiterhin bezeichnet $V_{E'_{h+1}}$ einen auch leer zugelassenen Verbund, der aus dem Verbund $(E_1 ... E_h E'_{h+1})$ dadurch entsteht, daß man E'_{h+1} entfernt, und dann, je nach Wahl, beliebige und beliebig viele weitere Ereignisse ebenfalls entfernt. Der leere Verbund $V_{E'_{h+1}} := \varnothing$ ist zugelassen.

Für die Interpolationsfunktion, die eine Berechnung von $p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1})$ erlaubt, wird gefordert, daß die folgenden drei Interpolationspunkte erfüllt sind:

1. *Interpolationspunkt:*

$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1}) = p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})$ *für* $p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) = 0$.

2. *Interpolationspunkt:*

$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1}) = p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1})$ *für* $p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) = 1$.

3. *Interpolationspunkt:*

$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1}) = p(H \mid E_1 ... E_h)$ *für* $p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) = p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})$ *bei beliebig gewähltem* $V_{E'_{h+1}}$.

Man erhält:

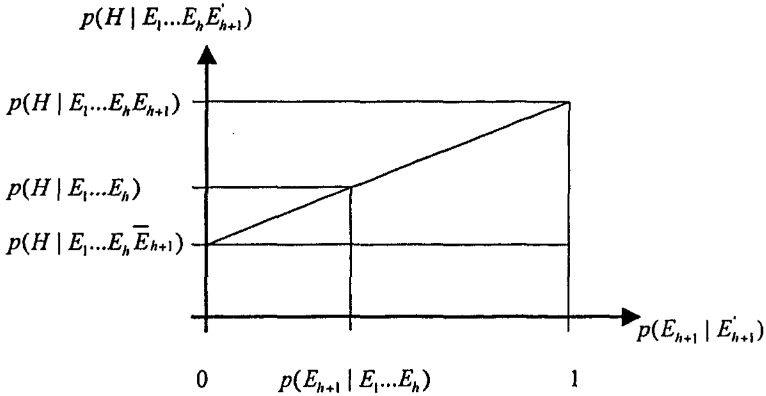


Abb.3.1:

Verlauf der linearen Interpolation von $p(H \mid E_1...E_h E'_{h+1})$ im Fall

$p(H \mid E_1...E_h E_{h+1}) > p(H \mid E_1...E_h \overline{E}_{h+1})$.

__*Lemma*__ __*(Interpolation bei einem einzelnen '- Ereignis)*__

Für $p(H \mid E_1...E_h E'_{h+1})$ *gelte:*

- $E_1, \dots, E_h$ *sind negiert oder unnegiert (beliebig aber fest),*
- E'_{h+1} *besitzt* $0 < p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) < 1$,
- $V_{E'_{h+1}}$ *ist ein beliebiger, auch leer zugelassener Teilverbund von* $(E_1...E_h)$.

Dann genügen folgende Gleichungen den geforderten drei Interpolationspunkten:

$$p(H \mid E_1...E_h E'_{h+1})$$

$$= \frac{p(HE_1...E_h E_{h+1}) \dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})} + p(HE_1...E_h \overline{E}_{h+1}) \dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})}}{p(E_1...E_h E_{h+1}) \dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})} + p(E_1...E_h \overline{E}_{h+1}) \dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})}} \qquad (3.1)$$

__Beweis__: Elementar.

Lemma

Lineare Interpolation bei einem '-Ereignis

Für $V_{E'_{h+1}} := (E_1 ... E_h)$ *erhält man eine lineare Interpolation. Es folgt aus Glg.3.1:*

$$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1})$$

$$= p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) + p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1}) p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1}). \qquad (3.2)$$

Die Glg.3.2 entspricht dem linearen Kurvenverlauf in Abb.3.1.

Bemerkung:

Ist in Glg.3.1 die Menge $\{E_1, ..., E_h\} = \emptyset$, so ist auch $V_{E'_{h+1}} = \emptyset$, und es ergibt sich die Interpolation von DUDA. (Siehe: DUDA, R.O., P.E. HART, N.J. NILSSON: Subjective Bayesian methods for rule-based inference systems. In: WEBER, B.L., N.J. NILSSON (eds.): Readings in artificial intelligence. Tioga Publ., Palo Alto Calif. (1981) S.192 – 199).

In der Diktion von DUDA lautet die Gleichung, die den Beginn des Kalküls mit '-gekennzeichneten Ereignissen markiert:

$$P(H \mid E') = P(H \mid E) P(E \mid E') + P(H \mid \overline{E}) P(\overline{E} \mid E'). \qquad (3.3)$$

Darüber hinausgehende Erkenntnisse, oder Beiträge anderer Autoren zum Kalkül mit '-Ereignissen, sind nicht bekannt.

Um Kriterien für die Wahl des Verbundes $V_{E'_{h+1}}$ zu erhalten, werden die Eigenschaften des Funktionenbündels der Glg.3.1 am Kurvenverlauf untersucht. Zunächst sind die in Abb.3.1 dargestellten Eigenschaften der linearen Interpolation durch eine weitere Darstellung mit $p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) < p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})$ zu ergänzen.

Man erhält analog zu Abb.3.1:

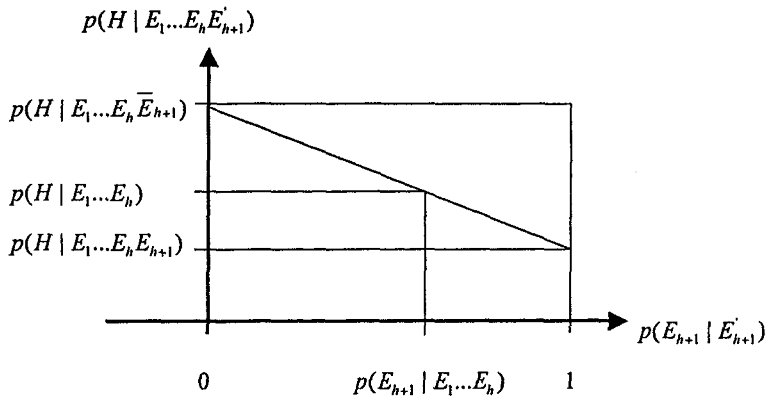


Abb.3.2:

Verlauf der linearen Interpolation von $p(H \mid E_1...E_h E'_{h+1})$ im Fall

$p(H \mid E_1...E_h E_{h+1}) < p(H \mid E_1...E_h \overline{E}_{h+1})$.

Zur Ermittlung des Verlaufs der in Glg.3.1 enthaltenen Funktionen, wird der den Kurvenverlauf verändernde Verbund $V_{E'_{h+1}}$ schrittweise von $\varnothing$ bis zur maximalen Größe $(E_1... E_h)$ variiert.

Es sei:

$$p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1}). \qquad (3.4)$$

$$p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1} \mid E_h). \qquad (3.5)$$

$$p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1} \mid E_h E_{h-1}). \qquad (3.6)$$

$$p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1} \mid E_h E_{h-1} E_{h-2}). \qquad (3.7)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1} \mid E_h...E_1). \qquad (3.8)$$

Ersetzt man in der Glg.3.1 die $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})$ gemäß (3.4) bis (3.8), so können die nicht-bedingten Wahrscheinlichkeiten in bedingte Wahrscheinlichkeiten umgeformt werden. Zum Beispiel ergibt sich bei Wahl der Glg.3.4 aus Glg.3.1:

$$\frac{p(HE_1...E_hE_{h+1})\dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})} + p(HE_1...E_h\overline{E}_{h+1})\dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})}}{p(E_1...E_hE_{h+1})\dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})} + p(E_1...E_h\overline{E}_{h+1})\dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})}}$$

$$= \frac{p(HE_1...E_hE_{h+1})\dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(E_{h+1})} + p(HE_1...E_h\overline{E}_{h+1})\dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1})}}{p(E_1...E_hE_{h+1})\dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(E_{h+1})} + p(E_1...E_h\overline{E}_{h+1})\dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1})}}$$

$$= \frac{p(HE_1...E_h \mid E_{h+1})\dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{1} + p(HE_1...E_h \mid \overline{E}_{h+1})\dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{1}}{p(E_1...E_h \mid E_{h+1})\dfrac{p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})}{1} + p(E_1...E_h \mid \overline{E}_{h+1})\dfrac{p(\overline{E}_{h+1} \mid E'_{h+1})}{1}}.$$

Die entstehenden bedingten Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt bezeichnet:

Bei Wahl der Glg.3.4 : $a_0 := p(HE_1...E_h \mid E_{h+1})$.

$b_0 := p(HE_1...E_h \mid \overline{E}_{h+1})$.

$c_0 := p(E_1...E_h \mid E_{h+1})$.

$d_0 := p(E_1...E_h \mid \overline{E}_{h+1})$.

Bei Wahl der Glg.3.5: $a_1 := p(HE_1...E_{h-1} \mid E_hE_{h+1})$.

$b_1 := p(HE_1...E_{h-1} \mid E_h\overline{E}_{h+1})$.

$c_1 := p(E_1...E_{h-1} \mid E_hE_{h+1})$.

$d_1 := p(E_1...E_{h-1} \mid E_h\overline{E}_{h+1})$.

Bei Wahl der Glg.3.6: $a_2 := p(HE_1...E_{h-2} \mid E_{h-1}E_hE_{h+1})$.

$b_2 := p(HE_1...E_{h-2} \mid E_{h-1}E_h\overline{E}_{h+1})$.

$c_2 := p(E_1...E_{h-2} \mid E_{h-1}E_hE_{h+1})$.

$d_2 := p(E_1...E_{h-2} \mid E_{h-1}E_h\overline{E}_{h+1})$.

Bei Wahl der Glg.3.7: $a_3 := p(HE_1...E_{h-3} \mid E_{h-2}E_{h-1}E_hE_{h+1})$.

$b_3 := p(HE_1...E_{h-3} \mid E_{h-2}E_{h-1}E_h\overline{E}_{h+1})$.

$c_3 := p(E_1...E_{h-3} \mid E_{h-2}E_{h-1}E_hE_{h+1})$.

$d_3 := p(E_1...E_{h-3} \mid E_{h-2}E_{h-1}E_h\overline{E}_{h+1})$.

$\vdots$ $\qquad\qquad\qquad$ $\vdots$

Bei Wahl der Glg.3.8: $a_h := p(H \mid E_1...E_{h+1})$.

$b_h := p(H \mid E_1...\overline{E}_{h+1})$.

$c_h := 1$.

$d_h := 1$.

Zudem werden für Glg.3.1 noch folgende Abkürzungen genutzt:

$p(H \mid E_1...E_hE'_{h+1}) := y.$ $\qquad\qquad$ $p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) := x.$

Mit diesen Bezeichnungen erhält die Glg.3.1 für alle $V_{E'_{h+1}}$, d.h. also für beliebige Indizierung der *a, b, c, d* die Form

$$y = \frac{ax + b(1-x)}{cx + d(1-x)} \tag{3.9}$$

$$= \frac{ax + b - bx}{cx + d - dx}. \tag{3.10}$$

Mit einer einfachen Kurvendiskussion wird der Verlauf des Gleichungsbündels der Glg.3.10 aufgezeigt. Hierzu erhält man aus Glg.3.10 durch Differenzieren:

$$y'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d - dx)^2}. \tag{3.11}$$

$$y''(x) = (-2)\frac{(ad - bc)(c - d)}{(cx + d - dx)^3}. \tag{3.12}$$

Aus Glg.3.11 ergibt sich mit $(ad - bc) \neq 0$:

$y'(x) \neq 0$ für alle x.

y(x) besitzt somit im offenen Intervall]0 , 1[keine Extremwerte und keine Wendepunkte. Weiter folgt:

$$y'_{(x=0)} = \frac{ad - bc}{d^2}\,.$$

$$y'_{(x=1)} = \frac{ad - bc}{c^2}\,.$$

Die Werte bestimmen die Steigung in den Endpunkten.

Es müssen die nachfolgend diskutierten Fälle I bis IV unterschieden werden, d.h. $(a\,d - b\,c) > 0$ und < 0, sowie $(c - d) > 0$ und < 0. Je nach Wahl dieser Terme ergibt sich die Anordnung der Abszissen- und Ordinatenwerte.
Für die Anordnung der Abszissenwerte ist maßgebend:
<u>Behauptung:</u> $(c > d) \Rightarrow p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) > p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})$.

<u>Beweis:</u>
Am Beispiel der Glg.3.4, d.h. am Beispiel $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1})$ sei dargelegt, daß mit $c_0 > d_0$ auch $p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) > p(E_{h+1})$ gilt, wie es nachfolgend in Abb.3.3 eingetragen ist. Es sei

$$c_0 > d_0$$

$$\Rightarrow \quad p(E_1 \ldots E_h \mid E_{h+1}) > p(E_1 \ldots E_h \mid \overline{E}_{h+1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p(E_1 \ldots E_h E_{h+1})}{p(E_{h+1})} > \frac{p(E_1 \ldots E_h \overline{E}_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1})}$$

$$\Rightarrow \quad p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h)\,p(\overline{E}_{h+1}) > p(\overline{E}_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h)\,p(E_{h+1})$$

$$\Rightarrow \quad p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) - p(E_{h+1})\,p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) > p(E_{h+1}) - p(E_{h+1})\,p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h)$$

$$\Rightarrow \quad p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) > p(E_{h+1})\,. \qquad \square$$

Völlig entsprechend gilt für beliebige $V_{E'_{h+1}}$, $V_{\dot{E}_{h+1}}$:

$$(c > d) \;\Rightarrow\; p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) > p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})\,. \tag{3.13}$$

$$(c < d) \;\Rightarrow\; p(E_{h+1} \mid E_1 \ldots E_h) < p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})\,. \tag{3.14}$$

Die Beziehungen (3.13) und (3.14) sind in den Abb.3.3 bis 3.6 für $V_{E'_{h+1}} := \varnothing$ enthalten.

Für die Anordnung der Ordinatenwerte ist die folgende Behauptung bestimmend:

<u>Behauptung:</u> $(a\,d - b\,c) > 0 \Rightarrow p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) > p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})$.

Die Behauptung wird an zwei Beispielen gezeigt.

1.

$$(a_0 d_0 - b_0 c_0)$$

$$= p(HE_1 ... E_h \mid E_{h+1}) p(E_1 ... E_h \mid \overline{E}_{h+1}) - p(HE_1 ... E_h \mid \overline{E}_{h+1}) p(E_1 ... E_h \mid E_{h+1})$$

$$= \frac{p(H \mid E_1 ... E_{h+1}) p(E_1 ... E_{h+1})}{p(E_{h+1})} p(E_1 ... E_h \mid \overline{E}_{h+1})$$

$$- \frac{p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1}) p(E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})}{p(\overline{E}_{h+1})} p(E_1 ... E_h \mid E_{h+1})$$

$$= p(E_1 ... E_h \mid E_{h+1}) p(E_1 ... E_h \mid \overline{E}_{h+1}) [p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) - p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})]$$

$$= c_0 d_0 [p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) - p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})].$$

Aus $(a_0 d_0 - b_0 c_0) > 0$ folgt somit $p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) > p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})$. □

2.

$$(a_1 d_1 - b_1 c_1)$$

$$= p(HE_1 ... E_{h-1} \mid E_h E_{h+1}) p(E_1 ... E_{h-1} \mid E_h \overline{E}_{h+1})$$

$$- p(HE_1 ... E_{h-1} \mid E_h \overline{E}_{h+1}) p(E_1 ... E_{h-1} \mid E_h E_{h+1})$$

$$= \frac{p(H \mid E_1 ... E_{h+1}) p(E_1 ... E_{h+1})}{p(E_h E_{h+1})} p(E_1 ... E_{h-1} \mid E_h \overline{E}_{h+1})$$

$$- \frac{p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1}) p(E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})}{p(E_h \overline{E}_{h+1})} p(E_1 ... E_{h-1} \mid E_h E_{h+1})$$

$$= p(E_1 ... E_{h-1} \mid E_h E_{h+1}) p(E_1 ... E_{h-1} \mid E_h \overline{E}_{h+1})$$

$$\cdot [p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) - p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})]$$

$$= c_1 d_1 [p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) - p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})].$$

Aus $(a_1 d_1 - b_1 c_1) > 0$ folgt somit $p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}) > p(H \mid E_1 ... E_h \overline{E}_{h+1})$. □

Aus den beiden Beispielen ergibt sich außerdem (für eine spätere Verwendung) die Beziehung:

$$\frac{(a_0 d_0 - b_0 c_0)}{(a_1 d_1 - b_1 c_1)} = \frac{c_0 d_0}{c_1 d_1} \ . \qquad (3.15)$$

<u>Fall I:</u>

$(ad - bc) > 0$ und $c > d$.

Damit ergibt sich:

1) $y'_{(x=0)} > 0$ und $y'_{(x=1)} > 0$.

2) $y'_{(x=0)} > y'_{(x=1)}$.

3) $y'' < 0$ für alle x, da $(c-d)x + d > 0$ für alle x.

Die zugehörige Kurve verläuft somit <u>oberhalb</u> der linearen Interpolation von <u>Abb.3.1</u>. (Der in Abb. 3.3 dargestellte Verlauf gilt für $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1})$, d.h. für die Zuweisung (3.4), die als Beispiel dient.)

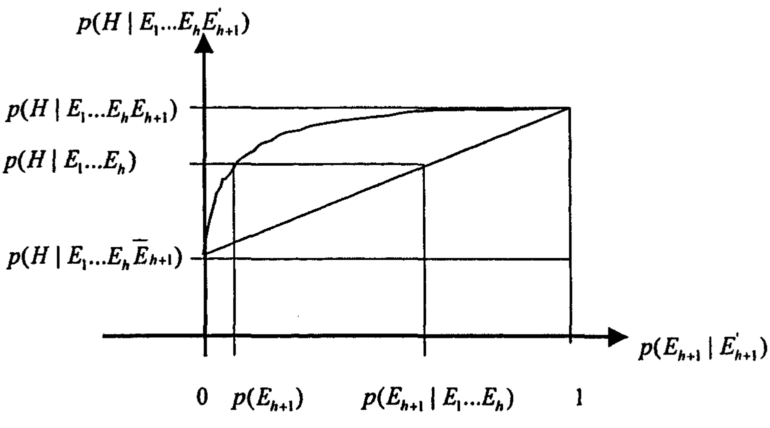


Abb.3.3:

Verlauf der Glg.3.1 für $(ad - bc) > 0$ und $c > d$ (Fall I).

Fall II:

$(ad - bc) > 0$ und $c < d.$

Damit ergibt sich:

1) $y'_{(x=0)} > 0$ und $y'_{(x=1)} > 0$.

2) $y'_{(x=0)} < y'_{(x=1)}$.

3) $y'' > 0$ für alle x.

Die zugehörige Kurve verläuft somit unterhalb der linearen Interpolation von Abb.3.1. (Der in Abb. 3.4 dargestellte Verlauf gilt für $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1})$, d.h. für die Zuweisung (3.4), die als Beispiel dient.)

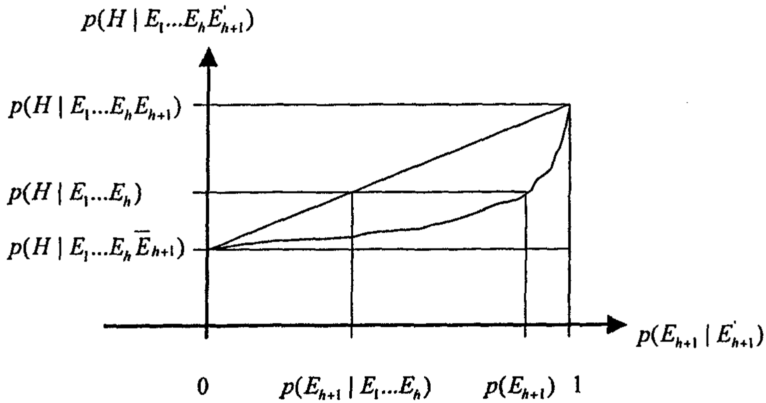


Abb.3.4:

Verlauf der Glg.3.1 für $(ad - bc) > 0$ und $c < d$ (Fall II).

Fall III:

$(ad - bc) < 0$ und $c < d$.

Damit ergibt sich:

1) $y'_{(x=0)} < 0$ und $y'_{(x=1)} < 0$.

2) $y'_{(x=0)} > y'_{(x=1)}$.

3) $y'' < 0$ für alle x.

Die zugehörige Kurve verläuft somit oberhalb der linearen Interpolation von Abb.3.2. (Der in Abb. 3.5 dargestellte Verlauf gilt für $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1})$, d.h. für die Zuweisung (3.4), die als Beispiel dient.)

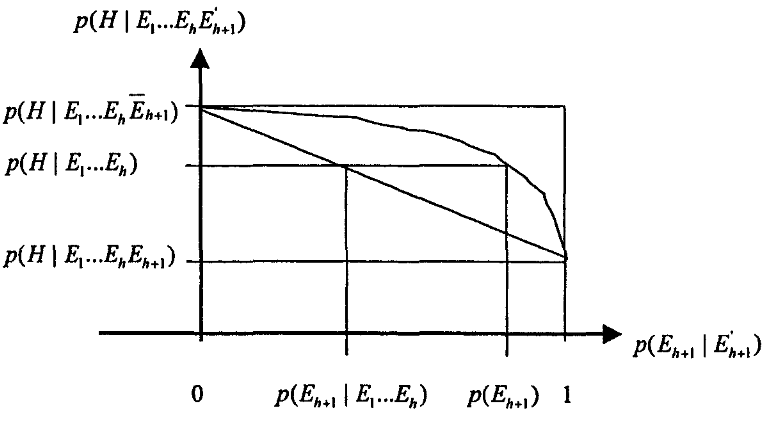


Abb.3.5:

Verlauf der Glg.3.1 für $(ad - bc) < 0$ und $c < d$ (Fall III).

<u>Fall IV:</u>

$(ad - bc) < 0$ und $c > d$.

Damit ergibt sich:

1) $y'_{(x=0)} < 0$ und $y'_{(x=1)} < 0$.

2) $y'_{(x=0)} < y'_{(x=1)}$.

3) $y'' > 0$ für alle x.

Die zugehörige Kurve verläuft somit <u>unterhalb</u> der linearen Interpolation von <u>Abb.3.2</u>. (Der in Abb. 3.6 dargestellte Verlauf gilt für $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1})$, d.h. für die Zuweisung (3.4), die als Beispiel dient.)

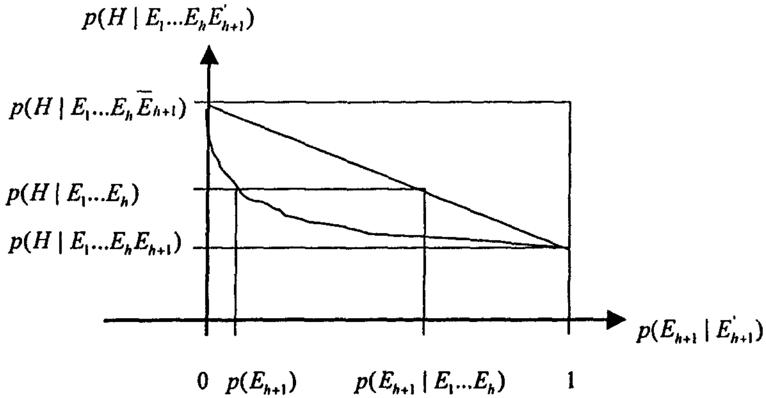


Abb.3.6:

Verlauf der Glg.3.1 für $(ad - bc) < 0$ und $c > d$ (Fall IV).

Es ist noch aufzuklären, welche Schnittpunkte zwei beliebige, aus Glg.3.1 für unterschiedliche $V_{E'_{k+1}}$ erstellte Interpolationskurven besitzen. Hierzu werden aus Glg.3.1 unter Verwendung der eingeführten Abkürzungen a_0, b_0, c_0, d_0 und a_1, b_1, c_1, d_1 zwei Kurven festgelegt, für die eine Differenzfunktion $D(x)$ wie folgt gebildet wird:

$$D(x) = \frac{a_0 x + b_0 - b_0 x}{c_0 x + d_0 - d_0 x} - \frac{a_1 x + b_1 - b_1 x}{c_1 x + d_1 - d_1 x}.$$

Es folgt durch Differenzieren:

$$D'(x) = \frac{a_0 d_0 - b_0 c_0}{(c_0 x + d_0 - d_0 x)^2} - \frac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{(c_1 x + d_1 - d_1 x)^2}.$$

Aus der Gleichsetzung $D'(x) = 0$ erhält man:

$$\sqrt{\frac{a_0 d_0 - b_0 c_0}{a_1 d_1 - b_1 c_1}} = \frac{(c_0 - d_0)x + d_0}{(c_1 - d_1)x + d_1}. \qquad (3.16)$$

Mit Glg.3.15, also $\frac{(a_0 d_0 - b_0 c_0)}{(a_1 d_1 - b_1 c_1)} = \frac{c_0 d_0}{c_1 d_1}$, ergibt sich aus Glg.3.16:

$$\frac{\sqrt{c_0 d_0}}{\sqrt{c_1 d_1}} = \frac{(c_0 - d_0)x + d_0}{(c_1 - d_1)x + d_1}.$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{c_0 d_0}[(c_1 - d_1)x + d_1] = \sqrt{c_1 d_1}[(c_0 - d_0)x + d_0].$$

$$\Rightarrow \qquad x[(c_1 - d_1)\sqrt{c_0 d_0} - (c_0 d_0)\sqrt{c_1 d_1}] = d_0\sqrt{c_1 d_1} - d_1\sqrt{c_0 d_0}.$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{d_0\sqrt{c_1 d_1} - d_1\sqrt{c_0 d_0}}{c_1\sqrt{c_0 d_0} - d_1\sqrt{c_0 d_0} - c_0\sqrt{c_1 d_1} + d_0\sqrt{c_1 d_1}}.$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1 + \frac{c_1\sqrt{c_0 d_0} - c_0\sqrt{c_1 d_1}}{d_0\sqrt{c_1 d_1} - d_1\sqrt{c_0 d_0}}}.$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{1+Q}$$, mit Q gem. obiger Zeile.

Behauptung: $Q \geq 0$.

Beweis:

Annahme: $Q < 0$.

$\Rightarrow$ (Zähler(Q) > 0 und Nenner(Q) < 0) oder (Zähler(Q) < 0 und Nenner(Q) > 0).

Es sei (Zähler(Q) > 0 und Nenner(Q) < 0).

$$\Rightarrow \quad c_0\sqrt{c_1 d_1} < c_1\sqrt{c_0 d_0} \quad \text{und} \quad d_1\sqrt{c_0 d_0} > d_0\sqrt{c_1 d_1}\ .$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{c_0}{c_1})^2 < \frac{d_0}{d_1}\frac{c_0}{c_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_0}{c_1}\frac{d_0}{d_1} > (\frac{d_0}{d_1})^2\ .$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c_0}{c_1} < \frac{d_0}{d_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_0}{c_1} > \frac{d_0}{d_1}\ .$$

$\Rightarrow$ Widerspruch. (Entsprechendes folgt für (Zähler(Q) < 0 und Nenner(Q) > 0).)

$\Rightarrow$ Die Annahme ist falsch.

$\Rightarrow$ $Q \geq 0$. □

Damit ist für die Differenzfunktion $D(x)$ gezeigt, daß sich aus $D'(x) = 0$ der Wert $0 < x \leq 1$ ergibt. $D(x)$ besitzt somit im offenen Intervall $]0\ ,\ 1[$ höchstens einen Extremwert. Daraus folgt, daß zwei beliebige Interpolationsfunktionen des Gleichungsbündels (3.1), die zu einem der aufgezeigten Fälle I bis IV gehören, mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = 1$ keine gemeinsamen Punkte aufweisen.

Für die zusammenfassende Darstellung der $(h+1)$ Interpolationsfunktionen, die man aus Glg.3.1 für die verschiedenen $p(E_{h+1} \mid V_{E_{h+1}^{'}})$ der Glgn.3.4 bis 3.8 erhält, wird exemplarisch der Fall I gewählt. Für das Schaubild wird außerdem die folgende Anordnung festgelegt:

$$p(E_{h+1}) < p(E_{h+1} \mid E_h) < p(E_{h+1} \mid E_h E_{h-1}) < \ldots < p(E_{h+1} \mid E_h \ldots E_1)\ .$$

Damit ergibt sich folgende Übersicht:

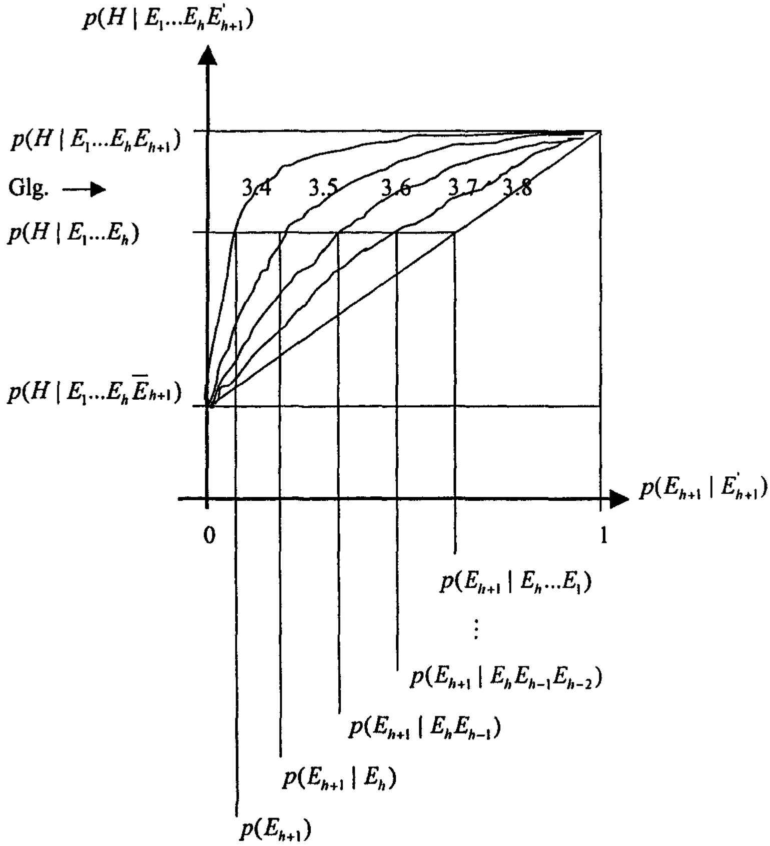


Abb.3.7:

Verlauf des Gleichungsbündels der Glg.3.1 (dargestellt für Fall I).
Es entstehen *(h+1)* Interpolationsfunktionen für die *(h+1)* verschiedenen Zuweisungen von $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})$ gem. Glg.3.4 bis 3.8.

Ergänzung:

Es wird ergänzend angefügt, daß auch unstetige Interpolationsfunktionen für besondere Anwendungen sinnvoll sein können.

Soll also $p(H \mid E_1 \dots E_h)$ infolge E'_{h+1} ein updating erfahren, so kann in Glg.3.1 der Ausdruck $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})$ wie folgt gewählt werden:

$$p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := \begin{cases} p(E_{h+1} \mid \varnothing)\ , \text{falls } p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) < p(E_{h+1}), \\ p(E_{h+1} \mid E_1 \dots E_h), \text{falls } p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}) > p(E_{h+1} \mid E_1 \dots E_h), \\ p(E_{h+1} \mid E'_{h+1}), \text{sonst}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Die Zuweisung (3.17) ergibt (für den exemplarisch gewählten Fall I) das folgende Schaubild:

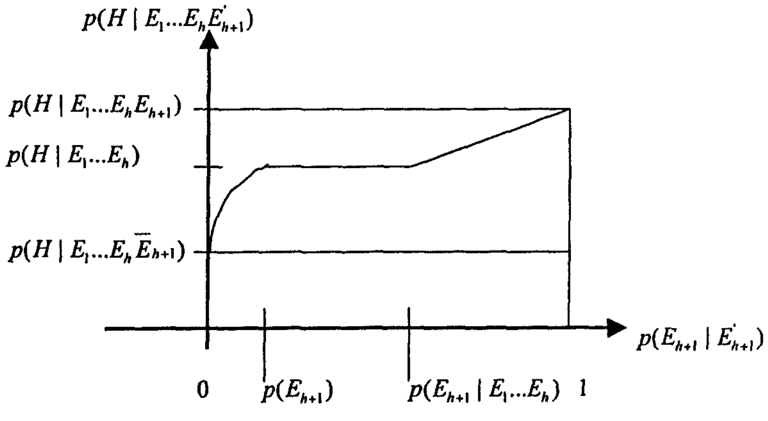


Abb.3.8:

Verlauf der Glg.3.1 für $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}})$ gem. Zuweisung (3.17).

Die unstetige Interpolation gemäß Abb.3.8 ist willkürlich festgelegt.
Sie folgt der Konzeption, daß keine Änderung von $p(H \mid E_1 \dots E_h)$ erfolgen soll, falls die Existenz oder Nicht-Existenz von E_{h+1} in hohem Grade unsicher ist. Deshalb werden die Ordinatenwerte konstant gehalten, falls $p(E_{h+1} \mid E'_{h+1})$ zwischen $p(E_{h+1})$ und $p(E_{h+1} \mid E_1 \dots E_h)$ liegt.
Falls die Existenz von E_{h+1} nahezu sicher ist, und falls diese Tatsache den Erwartungen entspricht, so wird ein leichte, durch das neue Element E'_{h+1} verursachte Zunahme von $p(H \mid E_1 \dots E_h)$ zugelassen. Dies erklärt den linearen und vergleichsweise flachen Anstieg der Ordinatenwerte auf der rechten Seite der Kurve in Abb.3.8. (Vergleiche: Linearer Interpolationssatz.)
Falls aber die Nicht-Existenz von E_{h+1} nahezu sicher ist, und falls diese Tatsache überrascht, so soll eine beträchtliche, durch das neue Element E'_{h+1} verursachte Abnahme von $p(H \mid E_1 \dots E_h)$ realisiert werden. (Vergleiche: Kapitel 4, L-Satz.)

Für praktische Belange wird man zu großen Aufwand vermeiden und das updating von $p(H \mid E_1 \dots E_h)$ infolge E'_{h+1} bevorzugt mit $p(E_{h+1} \mid V_{E'_{h+1}}) := p(E_{h+1} \mid E_1 \dots E_h)$ ausführen.

Teile des anschließenden Kapitels 4, sowie Teile der Kapitel 6 und 10, wurden in einer Kurzfassung veröffentlicht. Vergleiche:
LIEBEL, F.-P.: Diagnostik mit Hilfe nicht-linearer Gleichungssysteme. BiBoS, Forschungszentrum Bielefeld-Bochum-Stochastik, Nr. 755 / 1 / 97, Universität Bielefeld (1997).

4. Interpolation bei beliebig vielen '-Ereignissen

Es werden Formeln zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten der Form $p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_k)$ angegeben, wobei die Ereignisse $E_1, ..., E_h$ mit Sicherheit vorliegen oder nicht vorliegen, während die Ereignisse E'_i, $i = h+1, ..., k$ eine ap-Wahrscheinlichkeit $0 < p(E_i \mid E'_i) < 1$ besitzen.
In den Formeln werden Ausdrücke der Form $p(E_i \mid V_{E'_i})$, $i = h+1, ..., k$ verwendet, wobei $V_{E'_i}$ einen auch leer zugelassenen Verbund bezeichnet, der aus dem Verbund $(E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_k)$ dadurch entsteht, daß man E'_i entfernt, sowie beliebige und beliebig viele weitere Elemente.

Für die Interpolationsfunktionen zur Berechnung von $p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_k)$ wird gefordert, daß für alle $i = h+1, ..., k$ die nachfolgenden drei Interpolationspunkte erfüllt sind:

1. Interpolationspunkt:

$$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_i ... E'_k) = p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... \bar{E}_i ... E'_k) \; \textit{für} \; p(E_i \mid E'_i) = 0 .$$

2. Interpolationspunkt:

$$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_i ... E'_k) = p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E_i ... E'_k) \; \textit{für} \; p(E_i \mid E'_i) = 1 .$$

3. Interpolationspunkt:

$$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_i ... E'_k) = p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_{i-1} E'_{i+1} ... E'_k) \; \textit{für}$$

$$p(E_i \mid E'_i) = p(E_i \mid V_{E'_i}) \; \textit{bei beliebig gewähltem} \; V_{E'_i} .$$

Die Bedeutung des 3. Interpolationspunktes besteht darin, daß genau dann, wenn $p(E_i \mid E'_i)$ den Wert $p(E_i \mid V_{E'_i})$ besitzt, kein updating bzgl. E'_i erfolgt.

Satz

Allgemeiner Interpolationssatz

Für $p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_k)$ *gelte:*

- $E_1, \ldots, E_h$ *sind negiert oder unnegiert (beliebig aber fest).*
- $E'_{h+1}, \ldots, E'_k$ *besitzen* $0 < p(E_i \mid E'_i) < 1,\ i = h+1, \ldots, k.$
- *Es sei* $q_i \in \{0,1\}$, $i = h+1, \ldots, k$ *mit* $E_i^{(q_i)} = \overline{E}_i$ *für* $q_i = 0$ *und* $E_i^{(q_i)} = E_i$ *für* $q_i = 1.$
- $V_{E'_i}$ *ist ein beliebiger, auch leer zugelassener Teilverbund von* $(E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_{i-1} E'_{i+1} ... E'_k)$, $i = h+1, \ldots, k.$

Dann genügen folgende Gleichungen den geforderten drei Interpolationspunkten:

$$p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_k)$$

$$= \frac{\sum\limits_{q_{h+1}, \ldots, q_k = 0,1} p(HE_1 ... E_h E_{h+1}^{(q_{h+1})} ... E_k^{(q_k)}) \prod\limits_{i=h+1}^{k} \dfrac{p(E_i^{(q_i)} \mid E'_i)}{p(E_i^{(q_i)} \mid V_{E'_i})}}{\sum\limits_{q_{h+1}, \ldots, q_k = 0,1} p(E_1 ... E_h E_{h+1}^{(q_{h+1})} ... E_k^{(q_k)}) \prod\limits_{i=h+1}^{k} \dfrac{p(E_i^{(q_i)} \mid E'_i)}{p(E_i^{(q_i)} \mid V_{E'_i})}}, \qquad (4.1)$$

$E_i^{(0)} = \overline{E_i}$ *und* $E_i^{(1)} = E_i$, $i = h+1, \ldots, k.$

Beweis: Elementar.

Die Anwendung der Glg.4.1 oder eines davon abgeleiteten Satzes ist ein updating-Verfahren.

Der 3. Interpolationspunkt bewirkt, daß $p(H \mid H')$ durch das Ereignis E'_i keine Veränderung erfährt, falls $p(E_i \mid E'_i) = p(E_i \mid V_{E'_i})$ gilt. Die Wahl von $V_{E'_i}$ bestimmt somit die Stelle der Invarianz.

Drei Aspekte erläutern diesen Sachverhalt:

a) Ein updating von $p(H \mid H') = p(H \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_{i-1} E'_{i+1} ... E'_k)$ durch E'_i ist möglicherweise unerwünscht, falls der Wert von $p(E_i \mid E'_i)$ durch genau die Ereignisse bestimmt ist, die auch den bisherigen Wert von $p(H \mid H')$ festlegen, d.h. wenn $p(E_i \mid E'_i) = p(E_i \mid E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_{i-1} E'_{i+1} ... E'_k)$ gilt. In diesem Fall wählt man $V_{E'_i} := (E_1 ... E_h E'_{h+1} ... E'_{i-1} E'_{i+1} ... E'_k)$, das maximale $V_{E'_i}$.

b) In praxi wird $V_{E'_i} := (E_1 ... E_h)$ verwendet, um '-Ereignisse zu vermeiden.

c) $V_{E'_i} := \varnothing$ minimiert den Arbeitsaufwand.

Die Handhabung der Glg.4.1 wird am Beispiel $p(U_2 \mid U_1\, I_1\, I_2\, H'\, U_3')$ vorgeführt, wobei $V_{H'} := (U_1 I_1 I_2 U_3')$ und $V_{U'_3} := (U_1 I_1 I_2 H')$ maximal gewählt sind.

$p(U_2 \mid U_1\, I_1\, I_2\, H'\, U_3')$ *(4.2)*

$$= \frac{p(U_2U_1I_1I_2HU_3)\dfrac{p(H \mid H')}{p(H \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(U_3 \mid U_3')}{p(U_3 \mid U_1I_1I_2H')} + }{p(U_1I_1I_2HU_3)\dfrac{p(H \mid H')}{p(H \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(U_3 \mid U_3')}{p(U_3 \mid U_1I_1I_2H')} + } \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{p(U_2U_1I_1I_2H\overline{U_3})\dfrac{p(H \mid H')}{p(H \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(\overline{U_3} \mid U_3')}{p(\overline{U_3} \mid U_1I_1I_2H')} + }{p(U_1I_1I_2H\overline{U_3})\dfrac{p(H \mid H')}{p(H \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(\overline{U_3} \mid U_3')}{p(\overline{U_3} \mid U_1I_1I_2H')} + } \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{p(U_2U_1I_1I_2\overline{H}U_3)\dfrac{p(\overline{H} \mid H')}{p(\overline{H} \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(U_3 \mid U_3')}{p(U_3 \mid U_1I_1I_2H')} + }{p(U_1I_1I_2\overline{H}U_3)\dfrac{p(\overline{H} \mid H')}{p(\overline{H} \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(U_3 \mid U_3')}{p(U_3 \mid U_1I_1I_2H')} + } \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \frac{p(U_2U_1I_1I_2\overline{H}\cdot\overline{U_3})\dfrac{p(\overline{H} \mid H')}{p(\overline{H} \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(\overline{U_3} \mid U_3')}{p(\overline{U_3} \mid U_1I_1I_2H')}}{p(U_1I_1I_2\overline{H}\cdot\overline{U_3})\dfrac{p(\overline{H} \mid H')}{p(\overline{H} \mid U_1I_1I_2U_3')}\dfrac{p(\overline{U_3} \mid U_3')}{p(\overline{U_3} \mid U_1I_1I_2H')}}\,.$$

An dem Beispiel ist auch leicht die Erfüllung der Interpolationspunkte zu sehen.

Aus Glg.4.1 erhält man für $V_{E_i^{'}} := \varnothing$, $i = h+1,..., k$, den nachfolgenden Satz, der im Hinblick auf seine Entstehungsgeschichte (und im Hinblick auf die ursprüngliche Art der Formulierung) als L-Satz bezeichnet wird. Aufgrund der im Vergleich zur früheren Schreibweise stark veränderten Form, wird der L-Satz vollständig angeschrieben.

Satz

L-Satz

(Sonderfall des Allgemeinen Interpolationssatzes für $V_{E_i^{'}} = \varnothing$).

Für $p(H \mid E_1...E_h E_{h+1}^{'}...E_k^{'})$ gelte:

- *$E_1, \ldots, E_h$ sind negiert oder unnegiert (beliebig aber fest).*
- *$E_{h+1}^{'},\ldots,E_k^{'}$ besitzen $0 < p(E_i \mid E_i^{'}) < 1$, $i = h+1,..., k$.*
- *Es sei $q_i \in \{0,1\}$, $i = h + 1,..., k$ mit $E_i^{(q_i)} = \overline{E}_i$ für $q_i = 0$ und $E_i^{(q_i)} = E_i$ für $q_i = 1$.*
- *$V_{E_i^{'}} := \varnothing$, $i = h+1,..., k$.*

Dann genügt folgende Gleichung den geforderten drei Interpolationspunkten:

$$p(H \mid E_1...E_h E_{h+1}^{'}...E_k^{'})$$

$$= \frac{\sum\limits_{q_{h+1},...,q_k=0,1} p(HE_1...E_h E_{h+1}^{(q_{h+1})}...E_k^{(q_k)}) \prod\limits_{i=h+1}^{k} \frac{p(E_i^{(q_i)} \mid E_i^{'})}{p(E_i^{(q_i)})}}{\sum\limits_{q_{h+1},...,q_k=0,1} p(E_1...E_h E_{h+1}^{(q_{h+1})}...E_k^{(q_k)}) \prod\limits_{i=h+1}^{k} \frac{p(E_i^{(q_i)} \mid E_i^{'})}{p(E_i^{(q_i)})}}, \qquad (4.3)$$

$E_i^{(0)} = \overline{E}_i$ *und* $E_i^{(1)} = E_i$, $i = h+1,..., k$.

<u>Beweis</u>: Die Behauptung ergibt sich aus Glg.4.1 für $V_{E_i^{'}} := \varnothing$, $i = h+1,..., k$.

Bei bestimmten Gegebenheiten geht die Glg.4.1 des Allgemeinen Interpolationssatzes in eine lineare Interpolation über, die entschieden einfacher zu handhaben ist, und die deshalb nach Möglichkeit angestrebt wird. Es gilt:

<u>*Satz*</u>

<u>*Linearer Interpolationssatz*</u>

Mit $V_{E_i'} := (E_1 ... E_h)$ *ergibt sich aus Glg.4.1 eine lineare Interpolation, falls zusätzlich a) oder b) gilt:*

a) $(E_{h+2}' ... E_k') = \varnothing$.

b) $\{E_{h+1}, ..., E_k\}$ *sind unter der Bedingung* $(E_1 ..... E_h)$ *stochastisch unabhängig.*

Mit den Voraussetzungen a) oder b) erhält man aus Glg.4.1:

$$p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}' ... E_k') = \sum_{q_{h+1},...,q_k=0,1} p(H \mid E_1 ... E_h E_{h+1}^{(q_{h+1})} ... E_k^{(q_k)}) \prod_{i=h+1}^{k} p(E_i^{(q_i)} \mid E_i'),$$

$$E_i^{(0)} = \overline{E_i} \ \textit{und} \ E_i^{(1)} = E_i, \ i = h+1, \ ..., \ k. \qquad (4.4)$$

<u>Beweis:</u> Die Behauptung ergibt sich aus Glg.4.1 durch elementare Rechnung.

Die Anwendbarkeit des Linearen Interpolationssatzes wird an einem Beispiel gezeigt. Zugleich ergibt sich dabei die Möglichkeit, unter Verwendung der noch zu definierenden Separationseigenschaft die spezifische Festlegung der Menge *WERT* zu begründen.

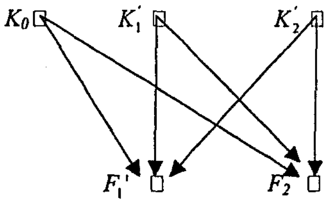


Abb.4.1:

Beispiel zur Erläuterung von Glg.4.4. Gesucht ist die Interpolation der Wahrscheinlichkeit $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$.

Wir zeigen zunächst den Einfluß der für Glg.4.4 geforderten Ziffer b).

Die Anwendung des Allgemeinen Interpolationssatzes (Glg.4.1) auf die zu interpolierende Wahrscheinlichkeit $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$ ergibt:

$$p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'}) \tag{4.4-1}$$

$$= \frac{p(F_1 F_2 K_0 K_1 K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1 \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{p(K_2 \mid F_2 K_0)} + \ldots}{p(F_2 K_0 K_1 K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1 \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{p(K_2 \mid F_2 K_0)} + \ldots}\ldots$$

$$\ldots\frac{p(F_1 F_2 K_0 K_1 \overline{K_2})\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1 \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(\overline{K_2} \mid K_2^{'})}{p(\overline{K_2} \mid F_2 K_0)} + \ldots}{p(F_2 K_0 K_1 \overline{K_2})\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1 \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(\overline{K_2} \mid K_2^{'})}{p(\overline{K_2} \mid F_2 K_0)} + \ldots}\ldots$$

$$\ldots\frac{p(F_1 F_2 K_0 \overline{K_1} K_2)\dfrac{p(\overline{K_1} \mid K_1^{'})}{p(\overline{K_1} \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{p(K_2 \mid F_2 K_0)} + \ldots}{p(F_2 K_0 \overline{K_1} K_2)\dfrac{p(\overline{K_1} \mid K_1^{'})}{p(\overline{K_1} \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{p(K_2 \mid F_2 K_0)} + \ldots}\ldots$$

$$\ldots\frac{p(F_1 F_2 K_0 \overline{K_1} \overline{K_2})\dfrac{p(\overline{K_1} \mid K_1^{'})}{p(\overline{K_1} \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(\overline{K_2} \mid K_2^{'})}{p(\overline{K_2} \mid F_2 K_0)}}{p(F_2 K_0 \overline{K_1} \overline{K_2})\dfrac{p(\overline{K_1} \mid K_1^{'})}{p(\overline{K_1} \mid F_2 K_0)}\dfrac{p(\overline{K_2} \mid K_2^{'})}{p(\overline{K_2} \mid F_2 K_0)}}.$$

Von Glg.4.4-1 weiterführend kann keine lineare Interpolation gemäß Glg.4.4 erreicht werden, da infolge der Konfiguration in Abb.4.1

$p(K_1 \mid F_2 K_0) p(K_2 \mid F_2 K_0) \neq p(K_1 K_2 \mid F_2 K_0)$

gilt, also eine Verletzung der Ziffer b) des Linearen Interpolationssatzes besteht.

Ersetzt man jedoch im L-Netz der Abb.4.1 das Ereignis F_2 durch das negierte Ereignis $\overline{F_2}$, so erhält man:

$$p(F_1 \mid \overline{F_2} K_0 K_1^{'} K_2^{'}) \tag{4.4-2}$$

$$= \frac{p(F_1\overline{F_2}K_0K_1K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1 \mid \overline{F_2}K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{p(K_2 \mid \overline{F_2}K_0)} + ...etc.}{p(\overline{F_2}K_0K_1K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1 \mid \overline{F_2}K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{p(K_2 \mid \overline{F_2}K_0)} + ...etc.} ....$$

Da wegen $p(K_1 \mid \overline{F_2}K_0)p(K_2 \mid \overline{F_2}K_0) = p(K_1K_2 \mid \overline{F_2}K_0)$ [vergl. A→L-Korollar 2, Glg.8.6] die Ziffer b) des Linearen Interpolationssatzes erfüllt ist, folgt weiter:

$$p(F_1 \mid \overline{F_2}K_0K_1^{'}K_2^{'}) = \frac{p(F_1\overline{F_2}K_0K_1K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1K_2 \mid \overline{F_2}K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{1} + ...etc.}{p(\overline{F_2}K_0K_1K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1K_2 \mid \overline{F_2}K_0)}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{1} + ...etc.} ....$$

$$= \frac{p(F_1 \mid \overline{F_2}K_0K_1K_2)\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{1}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{1} + ...etc.}{\dfrac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{1}\dfrac{p(K_2 \mid K_2^{'})}{1} + ...etc.} ....$$

$$= p(F_1 \mid \overline{F_2}K_0K_1K_2)p(K_1 \mid K_1^{'})p(K_2 \mid K_2^{'}) + ...etc.,$$

d.h. eine lineare Interpolation.

Da F_1, F_2 sind unter der Bedingung $(K_0\, K_1\, K_2)$ unabhängig sind, erhält man:

$$p(F_1 \mid \overline{F_2}K_0K_1^{'}K_2^{'}) = p(F_1 \mid K_0K_1K_2)p(K_1 \mid K_1^{'})p(K_2 \mid K_2^{'}) + ...etc.$$

$$= p(F_1 \mid K_0K_1^{'}K_2^{'}). \qquad (4.4\text{-}3)$$

Somit liefert der Lineare Interpolationssatz zwar die Glg.4.4-3, <u>nicht</u> jedoch

$p(F_1 \mid F_2K_0K_1^{'}K_2^{'}) = p(F_1 \mid K_0K_1^{'}K_2^{'})$,

obwohl die Definition der Menge *WERT(F_1)* [vergl. Glg.1.2] eben diese Beziehung vorschreibt, d.h. nach der Definition der Wertungsumgebungen muß gelten:

$$p(F_1 \mid F_1^{'}) = p(F_1 \mid L\text{-}NETZ)$$

$$= p(F_1 \mid F_2K_0K_1^{'}K_2^{'})$$

$$=_{(\text{Definition WERT})} p(F_1 \mid K_0K_1^{'}K_2^{'}).$$

Die vermeintliche Diskrepanz wird aufgeklärt, indem man als nächstes für alle '-Ereignisse der Abb.4.1 die zugehörigen Wertungsgleichungen erstellt. Dies ergibt das folgende Gleichungssystem der Glg.4.4-4 bis 4.4-6:

$$p(K_1 \mid K_1^{'}) = p(K_1 \mid F_1^{'} F_2 K_0 K_2^{'}) . \qquad (4.4\text{-}4)$$

$$p(K_2 \mid K_2^{'}) = p(K_2 \mid F_1^{'} F_2 K_0 K_1^{'}) . \qquad (4.4\text{-}5)$$

$$p(F_1 \mid F_1^{'}) = p(F_1 \mid \cancel{F_2} K_0 K_1^{'} K_2^{'}) = p(F_1 \mid K_0 K_1^{'} K_2^{'}) . \qquad (4.4\text{-}6)$$

(Das durchgekreuzte F_2 soll anzeigen, daß F_2 zwar im L-Netz vorhanden ist, daß es aber für die Wahrscheinlichkeit von F_1 nicht berücksichtigt wird.)

Die Abb.4.1 und das Gleichungssystem (4.4-4) bis (4.4-6) werden verglichen mit der nachfolgenden Abb.4.2 und dem zugehörigen Gleichungssystem (4.4-7) bis (4.4-9).

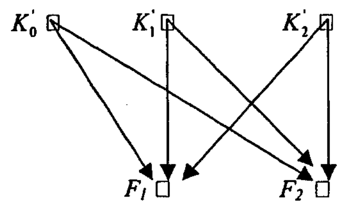


Abb.4.2:

Beispiel, hergeleitet aus Abb.4.1 durch Versetzung des '-Ereignisses von F_1 nach K_0. Es sind die ap-Wahrscheinlichkeiten $p(K_0 \mid K_0^{'})$, $p(K_1 \mid K_1^{'})$ und $p(K_2 \mid K_2^{'})$ zu bestimmen.

Die Wertungsgleichungen für die '-Ereignisse der Abb.4.2 lauten:

$$p(K_1 \mid K_1^{'}) = p(K_1 \mid F_1 F_2 K_0^{'} K_2^{'}) . \qquad (4.4\text{-}7)$$

$$p(K_2 \mid K_2^{'}) = p(K_2 \mid F_1 F_2 K_0^{'} K_1^{'}) . \qquad (4.4\text{-}8)$$

$$p(K_0 \mid K_0^{'}) = p(K_0 \mid F_1 F_2 K_1^{'} K_2^{'}) \qquad (4.4\text{-}9)$$

Die Glg.4.4-9 wird in gleicher Weise wie die Glg.9.1 in Kapitel 9 umgeformt. Es folgt für die Glg.4.4-9:

$$p(K_0 \mid K_0^{'}) = \frac{p(K_0 F_1 F_2 K_1^{'} K_2^{'})}{p(K_0 F_1 F_2 K_1^{'} K_2^{'}) + p(\overline{K_0} F_1 F_2 K_1^{'} K_2^{'})}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{p(\overline{K_0} F_1 F_2 K_1^{'} K_2^{'})}{p(K_0 F_1 F_2 K_1^{'} K_2^{'})}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{p(F_1 F_2 \mid \overline{K_0} K_1^{'} K_2^{'}) p(\overline{K_0} \mid K_1^{'} K_2^{'})}{p(F_1 F_2 \mid K_0 K_1^{'} K_2^{'}) p(K_0 \mid K_1^{'} K_2^{'})}}$$

$$=_{\text{(Kettenregel)}} \frac{1}{1 + \dfrac{p(F_1 \mid F_2 \overline{K_0} K_1^{'} K_2^{'}) p(F_2 \mid \overline{K_0} K_1^{'} K_2^{'}) p(\overline{K_0} \mid K_1^{'} K_2^{'})}{p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'}) p(F_2 \mid K_0 K_1^{'} K_2^{'}) p(K_0 \mid K_1^{'} K_2^{'})}} \cdot$$

Man sieht, daß in Glg.4.4-9 die Wahrscheinlichkeit $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$ erscheint, die ebenso in Glg.4.4-6, d.h. in $p(F_1 \mid F_1^{'}) = p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$, enthalten ist. Zu fragen ist nun nach den Gegebenheiten, die eine Entfernung von F_2 aus der Bedingung von $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$ zulassen. Solche Gegebenheiten liegen im Fall der Glg.4.4-6 vor, nicht aber im Fall der Glg.4.4-9. Die Gründe sind folgende:

I.)

Wenn $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$ der Glg.4.4-9 entstammt, dann sind für diese Wahrscheinlichkeit die zu $K_1^{'}$ und $K_2^{'}$ gehörenden ap-Wahrscheinlichkeiten <u>nicht gegeben</u>, denn es gilt:

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von F_1, nämlich $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$, benötigt die ap-Wahrscheinlichkeiten von $K_1^{'}$ und $K_2^{'}$. Diese ap-Wahrscheinlichkeiten wiederum benötigen die Wahrscheinlichkeit von F_1, die aber nicht verfügbar ist, denn sie soll mittels $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1^{'} K_2^{'})$ gerade ermittelt werden.

Da $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$ <u>nicht</u> zu einer Variablen des L-Netz-Berechnungssystems gehört, ist der Konflikt ungelöst. Somit erreichen F_1 und F_2 unter der Bedingung $(K_0 K_1' K_2')$ keine Unabhängigkeit.

II.)

Die Situation ändert sich im Fall der Glg.4.4-6.

<u>Voraussetzung</u>

$p(K_1 \mid K_1')$, $p(K_2 \mid K_2')$, $p(F_1 \mid F_1')$ sind die Variablen einer L-Netz-Berechnung.

<u>Behauptung</u>

$p(F_1 \mid F_1') = p(F_1 \mid \cancel{F_2} K_0 K_1' K_2') = p(F_1 \mid K_0 K_1' K_2')$. *(identisch mit 4.4-6)*

<u>Beweis</u>

Wenn $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$ zu Glg.4.4-6 gehört, dann ist $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$ der Variablen $p(F_1 \mid F_1')$ zugewiesen, die Teil des L-Netz-Berechnungssystems ist. Die Variablen $p(K_1 \mid K_1')$, $p(K_2 \mid K_2')$ und $p(F_1 \mid F_1')$ werden von Anbeginn als fest durch das L-Netz vorgegebene Größen gehandhabt. Läßt man nun in der Bedingung von $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$ das Ereignis F_2 unberücksichtigt - <u>ohne es aus dem L-Netz zu entfernen</u> - dann erfolgt keine Änderung der Wahrscheinlichkeit von F_1, da F_2 seinen Einfluß auf F_1 nur mit Hilfe von Verbindungswegen ausübt, die über K_1' und K_2' verlaufen. Da $p(K_1 \mid K_1')$ und $p(K_2 \mid K_2')$ bei unverändertem Netz aber unverändert sind, bleibt das Entfernen von F_2 aus $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$ ohne Konsequenzen. Dies ist äquivalent zu einer durch $(K_0 K_1' K_2')$ bewirkten <u>Separation</u> des Ereignisses F_1' von dem Ereignis F_2.

Die obige Behauptung ermöglicht die Aufstellung der Glg.1.2, d.h. die Definition der Menge *WERT(H)*, in der angegebenen Form. Dies bedeutet z.B. für die Abb.1.2, daß das Ereignis H' durch $\{U_1, U_2', U_3'\}$ von allen Ereignissen „oberhalb" der Ursachen-Ebene sowie von allen Elementen aus $FOL(U_1)$, $FOL(U_2)$ und $FOL(U_3)$ separiert wird.

Die Abb.4.1 wird noch verwendet, um an diesem Beispiel den Begriff separierter Ereignisse ohne größeren formellen Aufwand zu definieren.

Definition (Separierte Ereignisse)

Betrachtet wird die beliebig gewählte Abb.4.1.

Das beliebige '-Ereignis F_1' wird durch einen beliebigen Ereignisverbund mit negierten, unnegierten oder '-markierten Ereignissen, z.B. durch $(K_0 K_1' K_2')$, von einem beliebigen Ereignis F_2 separiert, falls

- *die ap-Wahrscheinlichkeiten der beteiligten '-Ereignisse, d.h. $p(F_1 \mid F_1')$, $p(K_1 \mid K_1')$ und $p(K_2 \mid K_2')$, die Variablen einer L-Netz-Berechnung sind,*
- *und falls alle Verbindungen zwischen F_1' und F_2 über die Elemente des separierenden Ereignisverbundes, d.h. über $(K_0 K_1' K_2')$ führen.*

Dann gilt: $p(F_1 \mid F_1') = p(F_1 \mid \cancel{F_2} K_0 K_1' K_2') = p(F_1 \mid K_0 K_1' K_2')$.

Bedeutung separierter Ereignisse

Der Verbund *W(H)*, gleichgültig ob die Ereignisse in *W(H)* negiert, unnegiert oder '-markiert sind, separiert *H'* von jedem Element $A \notin W(H)$, falls die Verbindungen zwischen *H'* und *A* nur aus Pfaden bestehen, die über Elemente aus *W(H)* verlaufen. So kann *p(H | W(H))* klein gehalten werden, da man bei vollzähliger Menge *WERT(H)* und bei Aufnahme aller darin enthaltenen Elemente in *W(H)* keine weiteren Ereignisse beachten muß.

Am Ende des Kapitels 1 haben die obigen Sachverhalte als Vorausblick bereits eine Erwähnung gefunden. Dieser Vorausblick konnte nun unter Zuhilfenahme des Linearen Interpolationssatzes und des Separationskonzepts entsprechend bestätigt werden.

Abschließend zeigen wir die Wirkung der Glg.4.4 und insbesondere die Erfüllung der geforderten drei Interpolationspunkte am Beispiel $p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2' U_3')$. Falls die Ereignisse U_2 und U_3 unter der Bedingung $(U_1\, I_1\, I_2)$ unabhängig sind, d.h. bei Erfüllung der Ziffer b) des Linearen Interpolationssatzes, erhält man mit Glg.4.4:

$$
\begin{aligned}
p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2' U_3') = {} & p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 U_3)\; p(U_2 \mid U_2') p(U_3 \mid U_3') \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 \overline{U_3})\; p(U_2 \mid U_2') p(\overline{U_3} \mid U_3') \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} U_3)\; p(\overline{U_2} \mid U_2') p(U_3 \mid U_3') \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} \cdot \overline{U_3})\; p(\overline{U_2} \mid U_2') p(\overline{U_3} \mid U_3') .
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Es ist ersichtlich, daß die Glg.4.5 den ersten beiden Interpolationspunkten genügt. Der 3. Interpolationspunkt ist so eingerichtet, daß für $p(E_i \mid E_i') = p(E_i \mid V_{E_i'})$ ein beliebig gewähltes $V_{E_i'}$ herangezogen wird. Da jedoch die in Glg.4.4 stehende Forderung $V_{E_i'} := (E_1 ... E_h)$ lautet, ist $V_{U_2'} = V_{U_3'} := (U_1 I_1 I_2)$, so daß gilt:

$$
\begin{aligned}
p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2' U_3') = {} & p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 U_3)\; p(U_2 \mid U_1 I_1 I_2) p(U_3 \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 \overline{U_3})\; p(U_2 \mid U_1 I_1 I_2) p(\overline{U_3} \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} U_3)\; p(\overline{U_2} \mid U_1 I_1 I_2) p(U_3 \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} \cdot \overline{U_3})\; p(\overline{U_2} \mid U_1 I_1 I_2) p(\overline{U_3} \mid U_1 I_1 I_2) \\
= {} & p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 U_3)\; p(U_2 U_3 \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 \overline{U_3})\; p(U_2 \overline{U_3} \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} U_3)\; p(\overline{U_2} U_3 \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} \cdot \overline{U_3})\; p(\overline{U_2} \cdot \overline{U_3} \mid U_1 I_1 I_2) \\
= {} & p(H U_2 U_3 \mid U_1 I_1 I_2) + p(H U_2 \overline{U_3} \mid U_1 I_1 I_2) \\
& + p(H \overline{U_2} U_3 \mid U_1 I_1 I_2) + p(H \overline{U_2} \cdot \overline{U_3} \mid U_1 I_1 I_2) \\
= {} & p(H \mid U_1 I_1 I_2) .
\end{aligned}
$$

Die Erfüllung des 3. Interpolationspunkt ist damit gezeigt.

<u>Exkurs</u>

Es stellt sich die Frage, unter welchen Umständen für die Interpolation nach dem Linearen Interpolationssatz Gleichheit erreicht werden kann.

Die Problematik wird vereinfachend am Beispiel der Abb.1.2 dargestellt. Hierzu wird $p(H \mid U_1\, I_1\, I_2\, U_2'\, U_3')$ gewählt:

$$p(H \mid U_1\, I_1\, I_2\, U_2'\, U_3') =_{\text{(Erweiterung)}} \frac{\sum_{q_2,q_3=0,1} p(HU_1I_1I_2U_2'U_3'U_2^{(q_2)}U_3^{(q_3)})}{\sum_{q_2,q_3=0,1} p(U_1I_1I_2U_2'U_3'U_2^{(q_2)}U_3^{(q_3)})}$$

$$= \frac{p(H \mid U_1I_1I_2U_2'U_3'U_2U_3)\,p(U_2U_3 \mid U_1I_1I_2U_2'U_3') + \dots..}{p(U_2U_3 \mid U_1I_1I_2U_2'U_3') + \dots..} \dots.. \tag{4.6}$$

Um für die Glg.4.6 die Form des Linearen Interpolationssatzes zu erreichen, muß gelten (bei beliebiger Negierung von U_2 und U_3):

$$p(H \mid U_1\, I_1\, I_2\, U_2'\, U_3'\, U_2\, U_3) = p(H \mid U_1\, I_1\, I_2\, U_2\, U_3). \tag{4.7}$$

$$p(U_2\, U_3 \mid U_1\, I_1\, I_2\, U_2'\, U_3') = p(U_2 \mid U_2')\, p(U_3 \mid U_3'). \tag{4.8}$$

Unter Beachtung der Konfiguration des L-Netzes und des Konzepts separierter Ereignisse, ergibt sich:

1.

Glg.4.7 gilt, falls zu U_2' und U_3' nur Ereignisse gehören, die ausschließlich über U_2 und U_3 strukturell mit H verbunden sind, oder die bereits im Bedingungsverbund stehen.

2.

Glg.4.8 gilt, falls U_2 und U_3 unter der Bedingung $(U_1\, I_1\, I_2\, U_2'\, U_3')$ unabhängig sind, d.h. zu U_2' und U_3' dürfen keine Ereignisse gehören, die diese Eigenschaft vereiteln. Eine Aufhebung der stochastischen Unabhängigkeit zweier Ereignisse wird u.a. durch eine gemeinsame, mit $p = 1$ vorliegende Folge bewirkt.

5. Kausale Struktur und stochastische Abhängigkeit

Die Einordnung der Ereignisse in eine kausale Strukturierung bietet die Möglichkeit, stochastische Abhängigkeiten von Ereignissen zu erfassen. Es eröffnet sich weiter die Möglichkeit, unter Umständen eine geeignete Bedingung zu formulieren, um für Ereignisse mit ausgewiesener stochastischer Abhängigkeit eine bedingte stochastische Unabhängigkeit zu erreichen.

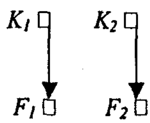
A) Stochastisch abhängige Folge-Ereignisse

Es wird an die Vorbemerkungen zu Abb.1.1 erinnert, die folgendes beinhaltet:

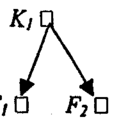
1. Falls ein Strukturschema keine Informationen über die Abhängigkeit zweier Netzknoten oder zweier Inhibitoren enthält, kann für diese Ereignisse stochastische Unabhängigkeit angenommen werden.
2. Falls ein Strukturschema keine Informationen über die Inhibitoren eines Übergangs $A \rightarrow L$ aufweist, dann bedeutet dies nicht die Abwesenheit solcher Inhibitoren. Im Gegenteil: Die Übergänge des L-Netzes werden immer durch Inhibitoren beeinflußt.

Struktur 5.1:

K_1, K_2 seien abhängig.



Spezialfall $K_1 \equiv K_2$.



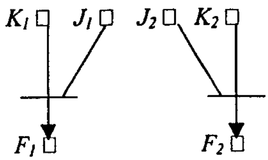
Es gilt Struktur 5.1 $\Rightarrow$ F_1 und F_2 sind stochastisch abhängig.

Struktur 5.2:

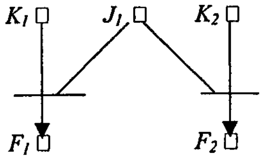
Es seien:

K_1, K_2 unabhängig.

J_1, J_2 abhängig.



Spezialfall $J_1 \equiv J_2$:



Es gilt Struktur 5.2 $\Rightarrow$ *F_1 und F_2 sind stochastisch abhängig.*

Struktur 5.3:

Es seien:

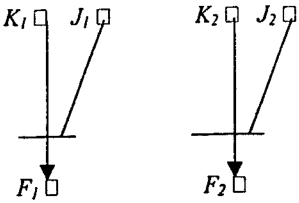
K_1, K_2 unabhängig.

J_1, J_2 unabhängig.

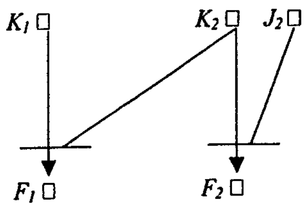
J_1, K_2 abhängig,

oder

J_2, K_1 abhängig.



Spezialfall z.B. $J_1 \equiv K_2$:



Es gilt Struktur 5.3 $\Rightarrow$ *F_1 und F_2 sind stochastisch abhängig.*

Hinreichende Bedingung für stochastische Abhängigkeit von F_1 und F_2

Es gilt Struktur 5.1 ∨ 5.2 ∨ 5.3 ⇒ F_1, F_2 sind stochastisch abhängig. (5.1)

Die Rückrichtung der Beziehung (5.1) gilt im allgemeinen nicht, es sei denn, man hat alle Strukturen benannt, die Abhängigkeit erzeugen. Dann gilt:

Notwendige Bedingung für stochastische Abhängigkeit von F_1 und F_2

Unter der Voraussetzung, daß auf der linken Seite der Beziehung (5.1) sämtliche Strukturen erfaßt sind, die zu stochastischer Abhängigkeit von F_1 und F_2 führen, gilt auch die Rückrichtung, d.h.:

F_1, F_2 sind stochastisch abhängig ⇒ Es gilt Struktur 5.1 ∨ 5.2 ∨ 5.3. (5.2)

B) Aufhebung der Abhängigkeit von Folge-Ereignissen mittels Bedingung

Die stochastische Abhängigkeit von Folge-Ereignissen kann durch eine Bedingung in eine bedingte stochastische Unabhängigkeit überführt werden. Diese Bedingung wird für die Folge-Ereignisse F_1, F_2 der Strukturen 5.1 bis 5.3 definiert.

Aufhebung der Abhängigkeit von F_1, F_2

Es gilt Struktur 5.1 ∨ 5.2 ∨ 5.3

⇒ F_1, F_2 sind unabhängig unter der Bedingung eines Verbundes, der entweder X_k oder Y_k, $k = 1,\dots, 4$, der nachfolgenden Aufzählung enthält:

1) Entweder X_1 aus URS(F_1) oder Y_1 aus URS(F_2), falls X_1 und Y_1 stochastisch abhängig sind.

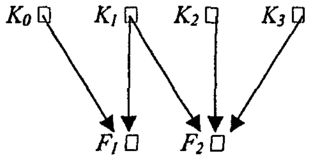
2) Entweder X_2 aus INH(F_1) oder Y_2 aus INH(F_2), falls X_2 und Y_2 stochastisch abhängig sind.

3) Entweder X_3 aus INH(F_1) oder Y_3 aus URS(F_2), falls X_3 und Y_3 stochastisch abhängig sind.

4) Entweder X_4 aus URS(F_1) oder Y_4 aus INH(F_2), falls X_4 und Y_4 stochastisch abhängig sind.

Zu jeder der vier Optionen 1) bis 4), deren Verwendung stochastische Abhängigkeit aufhebt, wird ein Beispiel gegeben.

Zu 1):



$URS(F_1) = \{K_0, K_1\}$,

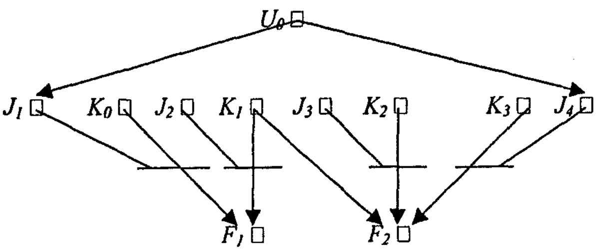
$\updownarrow$

$URS(F_2) = \{K_1, K_2, K_3\}$.

F_1, F_2 sind unabhängig unter der Bedingung K_1.

($\leftrightarrow$ bedeutet: stochastische Abhängigkeit.)

Zu 2):



$URS(F_1) = \{K_0, K_1\}$,

$\updownarrow$

$URS(F_2) = \{K_1, K_2, K_3\}$.

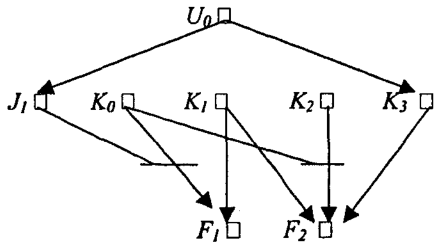
$INH(F_1) = \{J_1, J_2\}$,

$\updownarrow$

$INH(F_2) = \{J_3, J_4\}$.

F_1, F_2 sind unabhängig unter der Bedingung $(K_1\ J_1)$ oder $(K_1\ J_4)$.

Zu 3), 4):



$URS(F_1) = \{K_0, K_1\}$,

$URS(F_2) = \{K_1, K_2, K_3\}$.

$URS(F_1) = \{K_0, K_1\}$,

$INH(F_2) = \{K_0\}$.

$INH(F_1) = \{J_1\}$,

$URS(F_2) = \{K_1, K_2, K_3\}$.

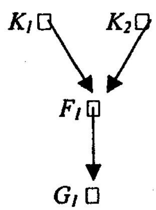
F_1, F_2 sind unabhängig unter der Bedingung (K_1 K_0 J_1) oder (K_1 K_0 K_3).

C) Erzeugung stochastischer Abhängigkeit für Ursache-Ereignisse

Nicht-bedingte stochastisch unabhängige Ursache-Ereignisse können unter spezifischen Bedingungen stochastisch abhängig werden.

Struktur 5.4:

K_1, K_2 seien unabhängig.

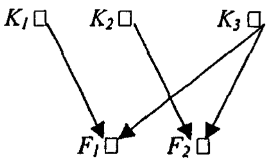


Es gilt Struktur 5.4 $\Rightarrow$ *K_1 und K_2 sind stochastisch abhängig unter der Bedingung F_1 oder G_1.*

Struktur 5.5:

Es seien:

K_1, K_2 unabhängig.



Es gilt Struktur 5.5 $\Rightarrow$ *K_1 und K_2 sind stochastisch abhängig unter der Bedingung $(F_1\ F_2)$.*

D) Aufhebung der bedingten Abhängigkeit von Ursache Ereignissen mittels veränderter Bedingung

Struktur 5.4

Die Ereignisse K_1 und K_2 in Struktur 5.4 verlieren ihre stochastische Unabhängigkeit durch die Bedingung (F_1), sie können aber bei Erfüllung bestimmter Voraussetzungen – falls nämlich K_1 und K_2 selbständige Ursachen von F_1 sind - durch die veränderte Bedingung $(\overline{F_1})$ erneut unabhängig werden (vergleiche hierzu A→L-Korollar 2, Glg.8.6).

Struktur 5.5

Die Ereignisse K_1 und K_2, für die in Struktur 5.5 die Unabhängigkeit durch die Bedingung $(F_1\ F_2)$ verloren geht, können durch die nachfolgend angegebene erweiterte Bedingung erneute Unabhängigkeit erreichen:

Es gilt Struktur 5.5 $\Rightarrow$ *K_1 und K_2 sind stochastisch unabhängig unter der Bedingung $(F_1\ F_2\ K_3)$.*

Bedeutung stochastischer Unabhängigkeit für das vorliegende System

In Abb.1.2 ist festzustellen, daß die Ereignisse F_i, $i = 1,\ldots, 5,$ stochastische Abhängigkeit aufweisen, da diese Ereignisse der F-Ebene gemeinsame, in der H/K-Ebene lokalisierte Ursachen besitzen. Die F_i können deshalb auf keinen Fall als unabhängig postuliert werden.

Führt man allerdings für zwei beliebig gewählte, zur Folgen-Ebene gehörende Ereignisse F_1, F_2 eine Bedingung $(K_1\, K_2\, K_3\, J\, H)$ ein, wobei

- J alle bekannten Inhibitoren enthält, die Einfluß auf die zu F_1 und F_2 hinführenden Übergänge besitzen,
- und wobei $(K_1\, K_2\, K_3\, H)$ alle in Frage kommenden unmittelbaren Ursachen von F_1 und F_2 aufweist,

dann besteht die Möglichkeit, daß

$$p(F_1\, F_2 \mid K_1\, K_2\, K_3\, J\, H) = p(F_1 \mid K_1\, K_2\, K_3\, J\, H)\;\; p(F_2 \mid K_1\, K_2\, K_3\, J\, H). \qquad (5.3)$$

erreicht werden kann.

Glg.5.3 gilt dann mit der zusätzlichen Annahme, daß die unbekannten, zu $INH(F_1)$ zählenden Inhibitoren gegenüber den unbekannten, zu $INH(F_2)$ gehörenden Inhibitoren, unabhängig sind (s. Kapitel 6, Voraussetzung IIc).

Während für F_1 und F_2 infolge gemeinsamer Ursachen das Verbot besteht, eine stochastische Unabhängigkeit dieser Ereignisse anzunehmen, besteht ein solches strukturelles Hindernis für die Elemente in $INH(F_1)$ und $INH(F_2)$ nicht.

Gibt es Erkenntnisse, daß Elemente aus $INH(F_1)$ gegenüber Elementen aus $INH(F_2)$ stochastisch abhängig sind, oder daß Elemente aus $INH(F_1) \cup INH(F_2)$ gegenüber Elementen aus $(K_1\, K_2\, K_3\, H)$ stochastisch abhängig sind, so werden die in Frage kommenden Inhibitoren (die durch die aufgetretenen Abhängigkeiten nunmehr auch bekannt sind) in den Verbund J aufgenommen. Hierbei genügt es, wenn ein Vertreter der paarweisen Abhängigkeit in $(K_1\, K_2\, K_3\, J\, H)$ enthalten ist. Dieses steht in Übereinstimmung mit obiger Ziffer B).

Auf den Entsprechungen von kausaler Strukturierung und stochastischer Unabhängigkeit basieren die im folgenden Kapitel 6 genannten Voraussetzungen.

6. Voraussetzungen

Nach den Ausführungen des Kapitels 5 bewirken die nachstehenden, für die vorgesehenen Berechnungen benötigten Voraussetzungen die Strukturierung des L-Netzes. Umgekehrt ist darauf zu achten, daß die zugrunde gelegte Kausalstruktur, d.h. die Verknüpfungen der pathophysiologischen Zustände, solche Voraussetzungen zulassen. Es gelten Bezeichnungen, die für den beliebigen Knoten *H* am Beispiel der Abb.1.2 formuliert sind:

U Verbund mit Elementen aus *URS(H)*; $U := (U_1\ U_2'\ U_3')$.

F Verbund mit Elementen aus *FOL(H)*; $F := (F_1\ F_2\ F_3\ \overline{F}_4\ F_5)$.

K Verbund mit Elementen aus *DIFF(H)*; $K := (K_1'\ K_2\ K_3')$.
(*K* erinnert an „konkurrierend zu *H*".)

I Verbund mit Elementen aus *INH(H)*; $I := (I_1\ I_2)$.

J Verbund mit Elementen aus $INH(F_1),\ldots, INH(F_5)$; $J := (J_1\ \overline{J}_2\ )$.

Die folgenden, für H formulierten Voraussetzungen I, IIa, IIb, IIc und III, sowie die ergänzenden Voraussetzungen IIa, IIb* und IIc* gelten entsprechend für jeden nicht-inhibitorischen Netzknoten mit unbekannter Wahrscheinlichkeit.*

Voraussetzung I

Die Ereignisse aus F, I und J liegen mit der Wahrscheinlichkeit Null oder Eins vor.

Erläuterung zu Voraussetzung I

Das gestellte Problem ist die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten hypothetischer Ursachen, also der Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse aus der H/K-Ebene, der U-Ebene oder „weiter darüber liegender" Ebenen (vergl. Abb.1.2). Grundlage für eine solche Ermittlung sind Erkenntnisse über Folge-Ereignisse und Inhibitoren, die zugunsten der Ergebnisgenauigkeit nicht unsicher bestimmt sein sollen.

Voraussetzung IIa

Für beliebiges $F_i \in F$ soll die Menge $URS(F_i)$ sämtliche, dieser Menge zugehörigen Ereignisse enthalten.

Erläuterung zu Voraussetzung IIa

Auch bei nicht-computergestützten Verfahren leidet die Diagnose, wenn für einzelne Symptome nicht alle in Frage kommenden Ursachen berücksichtigt sind. Der vornehmliche Grund für die vorliegende Forderung ist jedoch, daß die Ereignisse $F_i \in F$ mit Hilfe einer Bedingung stochastisch unabhängig werden können, wenn diese Bedingung sämtliche Elemente aus $\bigcup_i URS(F_i)$ enthält.

Voraussetzung IIb

Für beliebiges $F_i \in F$ sind die Elemente in $URS(F_i)$ selbständige Ursachen von F_i.

Erläuterung zu Voraussetzung IIb

Die Selbständigkeit von Ursachen ist für den nachfolgend eingeführten A→L-Satz exakt definiert. Anschaulich bedeutet es, daß für einen beliebigen Netzknoten F_l

- die Ereignisse in $URS(F_l)$ stochastisch unabhängig sind, und daß
- ein beliebiger F_l-erzeugender Vorgang nicht durch andere Ursachen oder die Inhibitoren eines weiteren F_l-erzeugenden Vorgangs beeinflußt wird.

Im Fall medizinischer Anwendungen kann die Erfüllung der Voraussetzung IIb angenommen werden, wenn die einzelnen Ursachen als nicht „nahe verwandt" anzusehen sind.

Voraussetzung IIc

$F_{i_0}, F_{i_1} \in F$ sowie K_1, $K_2 \in URS(F_{i_0})$ und $K_3 \in URS(F_{i_1})$ seien beliebig gewählt.

Dann gilt für beliebige Elemente X, Y, Z:

- *$X \in URS(F_{i_0})$ ist unabhängig von $Y \in URS(F_{i_0})$ und $Z \in URS(F_{i_1})$.*
- *$X \in INH(K_1 \rightarrow F_{i_0})$ ist unabhängig von $Y \in INH(K_2 \rightarrow F_{i_0})$ und $Z \in INH(K_3 \rightarrow F_{i_1})$.*
- *$X \in URS(F_{i_0})$ ist unabhängig von $Y \in INH(F_{i_0})$ und $Z \in INH(F_{i_1})$.*

<u>Erläuterung zu Voraussetzung IIc:</u>

1. Um Glg.9.1 zu erreichen, ist die Unabhängigkeit der Ereignisse in *(K J H)* erforderlich.
2. Glg.9.2 benötigt ebenfalls die Unabhängigkeit der Ereignisse in *(K J H)*.
3. Die Glg.9.3 benötigt die bedingte Unabhängigkeit der $F_i \in F$. Dies wird erreicht, falls der Bedingungsverbund alle Ursachen der F_i enthält, und falls zusätzlich für beliebige $F_{i_0}, F_{i_1} \in F$ die Elemente aus $INH(F_{i_0})$ unabhängig sind gegenüber den Elementen aus $INH(F_{i_1})$.

<u>Voraussetzung III</u>

$p(U F K I J \mid H) = p(U I \mid H)\ p(F K J \mid H)$ *für H und* $\overline{H}$.

<u>Erläuterung zu Voraussetzung III</u>

Die Gleichung der Voraussetzung III ist die mathematische Formulierung der durch *H* bewirkten Separation von *(U I)* und *(F K J)*. Daraus ergibt sich für die Kausalstruktur, daß Elemente aus *(U I)* nur über *H* mit den Knoten des „darunter“ liegenden Netzes verknüpft sein dürfen.

Im Vorgriff auf Kapitel 7 untersuchen wir, welche Teile der Voraussetzung IIb in Voraussetzung IIc enthalten ist.

<u>Behauptung</u>

$F_{i_0} \in F$ und K_1, $K_2 \in URS(F_{i_0})$ seien beliebig gewählte Ereignisse.

Falls [Elemente in $URS(F_{i_0})$ sind unabhängig]

$\wedge$ [Elemente in $INH(K_1 \rightarrow F_{i_0})$ sind unabhängig von Elementen in $INH(K_2 \rightarrow F_{i_0})$]

$\wedge$ [Elemente in $URS(F_{i_0})$ sind unabhängig von Elementen in $INH(F_{i_0})$]

$\Rightarrow$

die Elemente in $URS(F_{i_0})$ sind selbständige Ursachen von F_{i_0}, d.h. die Voraussetzungen $1/A \rightarrow L$ bis $4/A \rightarrow L$ (Kapitel 7) gelten für jedes Element aus $URS(F_{i_0})$.

Die voranstehende Behauptung erlaubt die Folgerung:
Voraussetzung IIc $\Rightarrow$ *Voraussetzung IIc /beliebiges* $F_{i_0} \in F \Rightarrow$ *Voraussetzung IIb.*

Wir sind in der Lage, Wahrscheinlichkeiten der Form $p(F \mid K\ J\ H)$ zu bearbeiten (vergl. Glg.9.1), da die dafür nötigen Voraussetzungen eingeführt wurden. Zusätzlich werden Voraussetzungen benötigt, die Umformungen von $p(H \mid U\ I)$ erlauben.
Die Voraussetzungen IIa, IIb und IIc betreffen Ereignisse der F-Ebene und der darüber angeordneten H/K-Ebene. Nun begeben wir uns zum „darüber liegenden Stockwerk" und deklarieren die H/K-Ebene zur neuen Ebene für Folge-Ereignisse, wodurch die oberhalb liegende U-Ebene zur neuen Ebene für Hypothesen wird. Diese Aktion liefert eine weitere Gruppe von Voraussetzungen, die mit IIa*, IIb* und IIc* bezeichnet werden, und die nachstehend angegeben sind.

Ergänzende Voraussetzungen für die Ursachen von H

*Voraussetzung IIa**
Die Menge URS(H) soll sämtliche, der Menge zugehörigen Ereignisse enthalten.

*Voraussetzung IIb**
Die Ereignisse in URS(H) sind selbständige Ursachen von H.

*Voraussetzung IIc**
U_1, U_2 seien beliebig gewählte Ereignisse aus URS(H).
- *U_1, U_2 sind unabhängig.*
- *Elemente in INH($U_1 \rightarrow H$) sind unabhängig von Elementen in INH($U_2 \rightarrow H$).*
- *Elemente in URS(H) sind unabhängig von Elementen in INH(H).*

In Kapitel 9 wird ein Verfahren vorgestellt, um bedingte Wahrscheinlichkeiten auch hinsichtlich der im Bedingungsverbund enthaltenen Inhibitoren aufspalten zu können. Die dafür erforderliche Voraussetzung wird hiermit vorab angegeben.

<u>*Voraussetzung für Inhibitoren*</u>

$K_1 \in URS(F_{i_0})$ ist ein beliebig gewähltes Ereignis. Die Ereignisse $I_1,\ldots, I_r$ sind die Inhibitoren von $K_1 \rightarrow F_{i_0}$.

Unter der Bedingung des Vorliegens von K_1 sind die Inhibitoren $I_1,\ldots, I_r$ selbständige Ursachen des Ereignisses $\overline{(K_1 \rightarrow F_{i_0})}$.

Zusammenfassend ist hervorzuheben, daß diejenigen Voraussetzungen von besonderer Bedeutung für die Struktur des Kausalnetzes sind, die stochastische Unabhängigkeiten oder Separationen fordern:

IIc Unabhängigkeit für zwei beliebig gewählte Elemente, entnommen aus einer oder aus zwei Mengen, die in $\{URS(F_i), INH(F_i) \mid F_i \in F\}$ enthalten sind.

IIc* Unabhängigkeit für zwei beliebig gewählte Elemente, entnommen aus einer oder aus zwei Mengen, die in $\{URS(H), INH(H)\}$ enthalten sind.

III Separation der Elemente in $(U\,I)$ gegenüber den Elementen in $(F\,K\,J)$, bewirkt durch H.

Dies vermittelt den Eindruck, daß erhebliche Unabhängigkeitsforderungen gestellt werden. Tatsächlich geht es im wesentlichen - kurz und ungenau - um die Unabhängigkeit der Ereignisse und Inhibitoren, die auf der H/K-Ebene angesiedelt sind.

a) Es stehen keine grundsätzlichen Erkenntnisse dagegen, die Elemente einer Menge $URS(F_{i_0})$ als unabhängig zu behandeln, denn diese Ereignisse haben im allgemeinen keine gemeinsamen Ursachen. Zudem kann angenommen werden, daß die Kausalpfeile, die auf Elemente aus $URS(F_{i_0})$ hinführen, eine Beeinflussung durch unabhängige Inhibitoren aufweisen. Insgesamt kann man so die zu Abhängigkeiten führenden Strukturen 5.1 bis 5.3 des Kapitels 5 als nicht zutreffend ausschließen.

b) Zeigt es sich dennoch, daß beliebige $A_1, A_2 \in URS(F_{i_0})$ eine stochastische Abhängigkeit aufweisen, so können sie zu einem Ereignis A mit $A := (A_1\, A_2)$

zusammengefaßt werden, wie es auch der A→L-Satz mit der Verwendung des Ereignisses $A := (A_1 \ldots A_k)$ vorsieht (vergl. Kapitel 7).

c) Sind nun die obigen Elemente A_1, $A_2 \in URS(F_{i_0})$ nicht nahe verwandt hinsichtlich gemeinsamer „Vorfahren", dann ist die Annahme naheliegend, daß auch die Inhibitoren des Übergangs $A_1 \rightarrow F_{i_0}$ von den Inhibitoren des Übergangs $A_2 \rightarrow F_{i_0}$ im Hinblick auf ihre „Abstammung" verschieden sind.

d) Da Ursachen stets pathophysiologische Systemzustände sind, die Folge-Ereignisse nach sich ziehen, und da die Inhibitoren solchen Folgen entgegen stehen, wird die Annahme fehlender gemeinsamer Erzeuger für Ursachen und Inhibitoren nicht sehr weit von der Wirklichkeit wegführen.

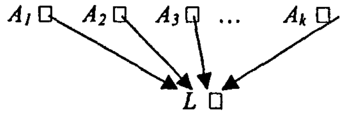
Sind die Ziffern a) bis d) annähernd erfüllt, d.h. sind keine starken Abhängigkeiten zu befürchten, so ergibt sich als Resultat die ungefähre Erfüllung der zu Voraussetzung IIc gehörenden Strichzählungen.

Weiteres Vorgehen:

In Abschnitt 9 werden die Voraussetzungen u.a. dazu verwendet, um Glg.9.1 herzuleiten. Die damit erzielten bedingten Wahrscheinlichkeiten werden in Faktoren zerlegt werden müssen. Dies macht das A→L-Theorem und die A→L-Korollare erforderlich, die in den folgenden Abschnitten 7 und 8 vorgestellt werden.

7. A→L-Satz

Gesucht sind Aussagen über die Wahrscheinlichkeit, mit der ein vorliegendes Ereignis ein Folge-Ereignis erzeugt.
Unter Nutzung der Gegebenheiten im L-Netz wird die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung eines Folgeknotens am Beispiel des Leitsymptomknotens L und der zugehörigen Ursachenmenge *URS(L)* untersucht. Besitzt also der Knoten L genau k Ursachen $A_1, \ldots, A_k$, d.h. liegt der Netzausschnitt



vor, so ist $p(L \mid A_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_k)$ zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von L unter der Bedingung $(A_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_k)$. Da außer A_1 keine weitere Ursache von L existiert, ist $p(L \mid A_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_k)$ zugleich auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter der Bedingung $(A_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_k)$ das Ereignis „A_1 erzeugt L" vorliegt.

Hierbei ist das Ereignis „A_1 erzeugt L" zu verstehen als: „der Systemzustand A_1 zieht den Systemzustand L nach sich", oder „der Systemzustand L entwickelt sich aus dem Systemzustand A_1", oder „ A_1 geht über in L". Man betrachtet dabei die Ursache A_1, die Folge L und den kausalen Erzeugungsvorgang „A_1 erzeugt L" als zusammen auftretende Ereignisse.
Entsprechend ist $p(L \mid A_1A_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_k)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „A_1 erzeugt L oder A_2 erzeugt L". Liegt nun $(A_1A_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_k)$ vor, sind also A_1 und A_2 die einzigen vorhandenen Ursachen von L, so kann der kausale Vorgang [A_1 erzeugt L] durch A_2 und der kausale Vorgang [A_2 erzeugt L] durch A_1 einen hemmenden oder fördernden Einfluß erfahren. In diesem Fall ist mit keinem Mittel der Stochastik zu unterscheiden, welcher Anteil an der Erzeugung von L der Ursache A_1 und welcher Anteil der Ursache A_2 zukommt. Die Wahrscheinlichkeit $p((A_1$ *erzeugt* $L) \mid A_1A_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_k)$ wird dann keinen Zahlenwert erhalten

können; als Ausweg bleibt, A_1 und A_2 als eine zusammengehörende Ursache zu betrachten und somit einen Zahlenwert für $p(\,(A_1\,A_2)$ *erzeugt* $L \mid A_1 A_2 \overline{A}_3 \ldots \overline{A}_k)$ zu ermitteln. Dies gelingt, wenn sichergestellt werden kann, daß kein weiteres Element aus *URS(L)* an der Erzeugung von *L* aus $(A_1\,A_2)$ beteiligt ist, und daß umgekehrt $(A_1\,A_2)$ keinen hemmenden oder fördernden Einfluß ausübt hinsichtlich der Erzeugung von *L* aus einer anderen Ursache.

Ist *L* ein beliebiges Ereignis, und ist *A* ein beliebiges Ereignis aus der Menge der *L* verursachenden Ereignisse, so wird der kausale Vorgang „*A* erzeugt *L*" ebenfalls als ein Ereignis aufgefaßt. Schreibt man für „*A* erzeugt *L*" kurz $A \to L$, so soll die Möglichkeit geschaffen werden, $p(A \to L \mid A)$ zu ermitteln.

Hinweis:
Die früher verwendete Bezeichnung ist A.L.
A.L und A→L sind Synonyme.

Aufgrund der Definition von $A \to L$ gilt:

1. Ist *A* ein *L* erzeugendes Ereignis, so ist $\overline{A}$ kein derartiges Ereignis, d.h. $\overline{A} \to L = \emptyset$.
2. Falls $(A \to L)$, dann existieren A und L.
3. Falls $\overline{A}$ oder $\overline{L}$, dann existiert $(\overline{A \to L})$.

Daher gelten die folgenden Gleichungen:

$$p(A \to L) = p(A\,(A \to L)) = p(A\,(A \to L)\,L). \qquad (7.1)$$

$$p(A \to L \mid \overline{A}\,) = 0. \qquad (7.2)$$

$$p(A \to L \mid A\,\overline{L}) = 0. \qquad (7.3)$$

Ist *A* ein Verbund von *L* erzeugenden Ereignissen, so wird die nachfolgende Definition zugrunde gelegt.

<u>*Definition*</u> *($(A_1...A_k)$ erzeugt L))*

Für $A := (A_1 ... A_k)$ *und* $A \to L := (A_1 ... A_k) \to L$ *wird definiert:*

$p((A_1 ... A_k) \to L \mid A_1 ... A_k) = p(A_1 \to L \vee ... \vee A_k \to L \mid A_1 ... A_k)$, *und somit*

$$p(\overline{(A_1...A_k) \to L} \mid A_1...A_k) \quad = p(\overline{A_1 \to L} \wedge .... \wedge \overline{A_k \to L} \mid A_1...A_k).$$

Mit dieser Definition gilt entsprechend zu den Glgn.7.2 und 7.3:

$$p((A_1 ... A_k) \to L \mid \overline{A}_1....\overline{A}_k) \quad = 0. \qquad (7.4)$$

$$p((A_1 ... A_k) \to L \mid A_1 ... A_k \overline{L}) = 0. \qquad (7.5)$$

Das Vorliegen oder Nicht-Vorliegen von Übergängen kann im allgemeinen infolge der Komplexität des Geschehens nicht durch unmittelbares Messen oder Beobachten festgestellt werden. Als Aufgabe ergibt sich deshalb, die Wahrscheinlichkeit des Übergangs *(A→L)* unter der Bedingung *A*, d.h. *p(A→L | A)*, aus den Informationen abzuleiten, die mit dem Kausalnetz und den darin enthaltenen Wahrscheinlichkeiten der sicher bestimmten Netzknoten zur Verfügung stehen.
Es werden die Bezeichnungen des nachfolgend skizzierten Schemas eingesetzt:

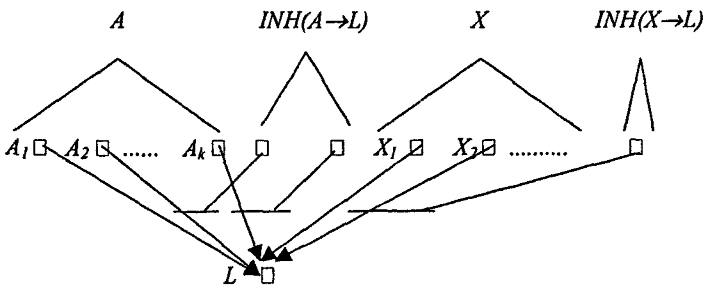


Abb. 7.1

Schema der Bezeichnungen für den A→L– Satz.

Bezeichnungen:

$URS(L)$	Menge der Ursachen des beliebigen Ereignisses L.
A	Beliebig gewählter, aber feststehender Verbund aus unnegierten Ereignissen von $URS(L)$ mit $A := (A_1 \dots A_k)$.
X	Beliebiger Verbund mit negierten oder unnegierten Ereignissen aus $URS(L) \setminus \{Elemente\ in\ A\}$.
$A \to L$	Übergang, d.h. kausaler Vorgang „A erzeugt L". Ist $A := (A_1 \dots A_k)$, so bedeutet $A \to L$: „A_1 erzeugt L" $\vee \dots \vee$ „A_k erzeugt L".
$INH(A \to L)$	Menge der Ereignisse, die auf $A_1 \to L, \dots, A_k \to L$ inhibitorisch wirken.
$INH(L)$	Menge der Ereignisse, die auf L hinführende Übergänge inhibieren bzw. die Inhibitionmechanismen dieser Übergänge verstärken oder abschwächen.

Es wird gefordert, daß für alle X gilt:

Voraussetzung 1/$A \to L$:

$$p((A \to L)(X \to L) \mid A\,X) = p(A \to L \mid A\,X)\, p(X \to L \mid A\,X).$$

Voraussetzung 2/$A \to L$:

$$p(A \to L \mid A\,X) = p(A \to L \mid A).$$

Voraussetzung 3/$A \to L$:

$$p(X \to L \mid A\,X) = p(X \to L \mid \overline{A}_1 \dots \overline{A}_k X).$$

Voraussetzung 4/$A \to L$:

$$p(X \mid A) = p(X \mid \overline{A}_1 \dots \overline{A}_k).$$

Definition (Selbständigkeit)

A heißt selbständige Ursache von L, falls A für alle X die Voraussetzungen 1/$A \to L$ bis 4/$A \to L$ erfüllt.

Die Voraussetzungen 1/ A→L bis 4/ A→L sind in Kapitel 6 als Voraussetzung IIb bereits gefordert worden. Es wird, mit der oben eingeführten neuen Bezeichnungsweise, die in Kapitel 6 formulierte Behauptung wiederholt:

L sei ein beliebiges Ereignis, A und X seien beliebige Ereignisse bzw. Ereignisverbunde aus URS(L).
Falls [Elemente in URS(L) sind unabhängig]
∧ [Elemente in INH(A→L) sind unabhängig von Elementen in INH(X→L)]
∧ [Elemente in URS(L) sind unabhängig von Elementen in INH(L)]
$\Rightarrow$
die Elemente in URS(L) sind selbständige Ursachen von L, d.h. die Voraussetzungen 1/A→L bis 4/A→L gelten für jedes Element aus URS(L)].

<u>*Satz*</u>
<u>*A→L-Satz*</u> *(Bedingte Übergangswahrscheinlichkeit)*
Unter der Voraussetzung, daß A eine selbständige Ursache von L ist, gilt mit $A := (A_1 \ldots A_k)$:

$$p(A \to L \mid A) = \frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k)}{p(\overline{L} \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k)}. \tag{7.6}$$

$$p(A \to L \mid A\, L) = \frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k)}{p(L \mid A) \cdot p(\overline{L} \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k)}. \tag{7.7}$$

<u>Beweis:</u>

1.

Aus den Voraussetzungen 1/A→L und 3/A→L ergibt sich für beliebiges X:

$$\left.\begin{aligned} p(X \to L \mid AX) &= p(X \to L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k X). \\ p(X \to L \mid AX\overline{(A \to L)}) &= p(X \to L \mid A\,X). \end{aligned}\right\rangle$$

$\Rightarrow$

$$p(X \to L \mid AX\overline{(A \to L)}) = p(X \to L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k X).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p((X \to L)AX(\overline{A \to L}))}{p(AX(\overline{A \to L}))} = \frac{p((X \to L)\overline{A}_1 ... \overline{A}_k X)}{p(\overline{A}_1 ... \overline{A}_k X)}.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p(X(X \to L) \mid A(\overline{A \to L}))}{p(X \mid A(\overline{A \to L}))} = \frac{p(X(X \to L) \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}{p(X \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}. \qquad (*)$$

Aus der Voraussetzung 2/A→L erhält man:

$p(\overline{A \to L} \mid AX) = p(\overline{A \to L} \mid A)$.

$\Rightarrow$

$$\frac{p((\overline{A \to L})AX)}{p(AX)} = \frac{p((\overline{A \to L})A)}{p(A)}.$$

$\Rightarrow$

$p(X \mid A(\overline{A \to L})) = p(X \mid A)$.

$\Rightarrow$

(wegen Voraussetzung 4/A→L)

$$p(X \mid A(\overline{A \to L})) = p(X \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k). \qquad (**)$$

Aus Glg.(*) ergibt sich mit Glg.(**) für alle X:

$$p(X(X \to L) \mid A(\overline{A \to L})) = p(X(X \to L) \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k). \qquad (***)$$

Da die Glg.(***) für alle *X* gilt, da nur *X* das Ereignis *L* erzeugen kann, und da die Wahrscheinlichkeit von *(X(X→L))* unter den Bedingungen $(A(\overline{A \to L}))$ bzw. $(\overline{A}_1 ... \overline{A}_k)$ gleich groß ist, erhält man:

$p(L \mid A(\overline{A \to L})) = p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)$.

2.

Ohne weiteren Einsatz von Voraussetzungen erhält man durch Erweitern und Umformen mit dem Resultat des 1. Teils:

$$p(LA) \;=\; p(LA(A\to L)) + p(LA(\overline{A\to L})).$$

$\Rightarrow$

$$p(L\,A) = p(L \mid A\,(A\to L))\;p(A\,(A\to L)\,) + p(L \mid A(\overline{A\to L}))\;p(\,A(\overline{A\to L})\,)$$

$\Rightarrow$

(wegen $p(L \mid A(A\to L)) = 1$ und $p(L \mid A(\overline{A\to L})) \;=\; p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)$)

$$p(LA) \;=\; p(A(A\to L)) + p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)\,p(A(\overline{A\to L})).$$

$\Rightarrow$

$$p(LA) =$$

$$p(A\to L \mid A)p(A) + p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)p(A) - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)p(A\to L \mid A)p(A).$$

$\Rightarrow$

$$p(LA) = \;p(A\to L \mid A)\;[\;p(A) - p(A)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)\;] + \;p(A)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k).$$

$\Rightarrow$

$$p(A\to L \mid A) \;=\; \frac{p(LA) - p(A)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}{p(A) - p(A)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}.$$

$\Rightarrow$

$$p(A\to L \mid A) \;=\; \frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}{p(\overline{L} \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}.$$

Die Glg.7.7 als zweite Gleichung des A→L-Satzes gilt wegen:

$$\begin{aligned} p(A\to L \mid AL) \;&=\; \frac{p((A\to L)AL)}{p(AL)} \\ &= \frac{p((A\to L)A)}{p(AL)} \\ &= \frac{p(A\to L \mid A)}{p(L \mid A)}. \end{aligned}$$ □

<u>Ergänzung zu Glg.7.6:</u>

<u>Behauptung</u>: $0 \le p(A\to L \mid A) \le 1$.

Beweis:

1.) Annahme: $p(A \to L \mid A) > 1$.

$\Rightarrow$

$$\frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}{1 - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)} > 1.$$

$\Rightarrow$

$$p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k) \; > \; 1 - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k).$$

$\Rightarrow$

$$p(L \mid A) \; > \; 1.$$

$\Rightarrow$

Widerspruch. Die Annahme ist falsch. Es gilt $p(A \to L \mid A) \leq 1$.

2.) Annahme: $p(A \to L \mid A) < 0$.

$\Rightarrow$

$$\frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)}{1 - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k)} \; < \; 0.$$

$\Rightarrow$

$$p(L \mid A) \; < \; p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k).$$

$\Rightarrow$

Widerspruch, da $A_1, ..., A_k$ als L-erzeugende Ereignisse vorausgesetzt sind.

$\Rightarrow$

Die Annahme ist falsch. Es gilt $p(A \to L \mid A) \geq 0$. □

Folgerung aus dem A→L-Satz

Liegen zwei Ereignisse *A* und *L* vor, so erlaubt der A→L-Satz keine Unterscheidung, ob *A* Ursache für *L*, oder ob umgekehrt *L* Ursache für *A* ist. Mit anderen Worten: Bei Vorliegen der Ereignisse *A* und *L*, also bei Gültigkeit des Verbundes *(A L)*, ist das Ereignis *A→L* ebenso wahrscheinlich wie das Ereignis *L→A*. Es gilt somit $[p(A \to L \mid A\,L) = p(L \to A \mid L\,A)]$, d.h. die nachfolgende sog. L-Regel.

In Analogie zur Multiplikationsregel wird die L-Regel formuliert.

<u>*Multiplikationsregel:*</u> $p(A \mid L)\, p(L) = p(L \mid A)\, p(A).$

<u>*L-Regel:*</u> $p\,(A \to L \mid A\,L) = p(L \to A \mid L\,A).$

In anderer Schreibweise:

<u>*Multiplikationsregel:*</u> $p(A\,L) = p(A \mid L)\, p(L) = p(L \mid A)\, p(A).$

<u>*L-Regel:*</u> $\dfrac{p(AL) - p(A)p(L)}{p(AL)p(\overline{A} \cdot \overline{L})} = p\,(A \to L \mid A\,L) = p(L \to A \mid L\,A).$

<u>Beweis der L-Regel:</u>

$$
\begin{aligned}
p(A \to L \mid AL) &= \frac{p(L \mid A) - p(L \mid \overline{A})}{p(L \mid A) \cdot p(\overline{L} \mid \overline{A})} \\
&= \frac{p(LA)p(\overline{A}) - p(L\overline{A})p(A)}{p(LA)p(\overline{L} \cdot \overline{A})} \\
&= \frac{p(LA) - p(LA)p(A) - p(L\overline{A})p(A)}{p(LA)p(\overline{L} \cdot \overline{A})} \\
&= \frac{p(LA) - p(A)[p(LA) + p(L\overline{A})]}{p(LA)p(\overline{L} \cdot \overline{A})} \\
&= \frac{p(LA) - p(A)p(L)}{p(LA)p(\overline{L} \cdot \overline{A})} \\
&= \frac{p(AL) - p(L)[p(LA) + p(\overline{L}A)]}{p(AL)p(\overline{A} \cdot \overline{L})} \\
&= \frac{p(AL) - p(AL)p(L) - p(A\overline{L})p(L)}{p(AL)p(\overline{A} \cdot \overline{L})} \\
&= \frac{p(AL)p(\overline{L}) - p(A\overline{L})p(L)}{p(AL)p(\overline{A} \cdot \overline{L})} \\
&= \frac{p(A \mid L) - p(A \mid \overline{L})}{p(A \mid L)p(\overline{A} \mid \overline{L})} \\
&= p(L \to A \mid LA)\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Bei zusammen vorliegenden Ereignisse *A* und *L* erlaubt der A→L-Satz eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis *A* das Ereignis *L* erzeugt, sowie eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, daß umgekehrt das Ereignis *L* das Ereignis *A* erzeugt. Die L-Regel zeigt, daß beide Erzeugungsvorgänge gleichwahrscheinlich sind.

Die nahezu sichere Vermutung, daß bei Existenz der kausal verknüpften Ereignisse A und L die Richtung des Übergangs nicht aus stochastischen Erhebungen abgeleitet werden kann, ist mit der L-Regel auch formal bewiesen.

Die Vorgeschichte des hier dargestellten Diagnose-Expertensystems, dessen eigentliche Entwicklung 1990 im Rahmen einer an der Universität Bielefeld erstellten Dissertation begann, hat die Verwendung des Symbols L als Charakteristikum mit sich gebracht. Der Buchstabe L stand ursprünglich nur für „Leitsymptom".

8. Ergänzungssätze zum A→L-Satz

Der A→L-Satz erfordert die Voraussetzungen 1/A→L bis 4/A→L, die bei Vorliegen der Voraussetzung IIc erfüllt sind. Unter Umständen kann die Voraussetzung IIc, d.h. die Unabhängigkeit der Ereignisse in *URS(L)* und *INH(L)*, sowie die Unabhängigkeit der Ereignisse in *URS(L)* gegenüber den Ereignissen in *INH(L)*, nicht immer erreicht werden. Dann besteht die Möglichkeit, die gestellte Unabhängigkeitsforderung dadurch zu mildern, daß man für die Elemente definierter Teilmengen eine stochastische Abhängigkeit zuläßt.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

A Beliebig gewählter, aber feststehender Verbund mit unnegierten Elementen aus *URS(L)*.

B Verbund mit beliebigen unnegierten Elementen aus *URS(L) \ {Elemente in A}*.

C Verbund mit beliebigen negierten Elementen aus *URS(L) \ {Elemente in (A B)}*.

D Verbund mit beliebigen negierten oder unnegierten Elementen aus *INH(A→L)*.

$\hat{X}$ Verbund mit beliebigen negierten oder unnegierten Elementen aus *URS(L) \ {Elemente in (A B C)}*.

Voraussetzungen des A→L-Korollars 1 (Kor.1)

Für beliebig gewähltes A mit A := (A₁...Aₖ) und alle $\hat{X}$ gilt:

1/Kor.1: $p((A \to L)((B\hat{X}) \to L) \mid ABCD\hat{X})$

$$= p(A \to L) \mid ABCD\hat{X})p((B\hat{X}) \to L \mid ABCD\hat{X}).$$

2/Kor.1: $p(A \to L \mid ABCD\hat{X}) = p(A \to L \mid ABCD)$.

3/Kor.1: $p((B\hat{X}) \to L \mid ABCD\hat{X}) = p((B\hat{X}) \to L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k BCD\hat{X})$.

4/Kor.1: $p(\hat{X} \mid ABCD) = p(\hat{X} \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k BCD)$.

Ein Vergleich mit der Voraussetzung IIc zeigt, daß stochastische Unabhängigkeit statt für *URS(L)* nur noch für *URS(L) \ {Elemente in (B C)}* gefordert wird, und statt für *INH(L)* nur noch für *INH(L) \ (INH(C→L) ∪ {Elemente in D})*. Es folgt:

- Falls *URS(L)* zwei Elemente enthält, die stochastische Abhängigkeit besitzen, so wird eines der Elemente *B* oder *C* zugewiesen.
- Falls *INH(A→L)* ein Element enthält, das gegenüber einem Element aus *INH((B* $\hat{X}$ *)→L)* stochastisch abhängig ist, so genügt es - nach den Richtlinien des Kapitels 5 / Ziffer B) - eines dieser Elemente in *D* aufzunehmen, um die Unabhängigkeit von *A→L* und *(B* $\hat{X}$ *)→L* unter der Bedingung $(ABCD\hat{X})$ zu erhalten.

Man muß jedoch den Nachteil in Kauf nehmen, daß die Formeln des A→L-Korollars 1 um so umfangreicher werden, je umfangreicher die Verbunde *B, C, D* sind.

<u>*Behauptung:*</u>

K_1, K_2 ∈ URS(L) seien beliebig gewählte Ereignisse.

Falls [Elemente in URS(L) \ {Elemente in (B C)} sind unabhängig]

∧ [Elemente in INH(K_1→L) \ (INH(C→L) ∪ {Elemente in D}) sind unabhängig von Elementen in INH(K_2→L) \ (INH(C→L) ∪ {Elemente in D})]

∧ [Elemente in URS(L) \ {Elemente in (B C) } sind unabhängig von Elementen in INH(L) \ (INH(C→L) ∪ {Elemente in D})]

⇒

für alle Elemente in URS(L) sind 1/Kor.1 bis 4/Kor.1 erfüllt.

<u>*Definition (Bedingte Selbständigkeit)*</u>

Ein aus unnegierten Elementen von URS(L) bestehender Verbund A heißt selbständige Ursache von L unter der Bedingung (B C D), falls A die Voraussetzungen 1/Kor.1 bis 4/Kor.1 erfüllt.

Zum A→L-Satz wird das A→L-Korollar 1 angegeben, dessen Voraussetzungen, wie oben aufgezeigt, weniger fordern als die des A→L-Satzes. Man erhält:

<u>Satz</u>

<u>A→L-Korollar 1</u>

A ist eine selbständige Ursache von L unter der Bedingung (B C D). Dann gilt:

$$p(A \to L \mid ABCD) = \frac{p(L \mid ABCD) - p(L \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD)}{p(\bar{L} \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD)}. \qquad (8.1)$$

$$p(A \to L \mid ABCDL) = \frac{p(L \mid ABCD) - p(L \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD)}{p(L \mid ABCD) \cdot p(\bar{L} \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD)}. \qquad (8.2)$$

<u>Beweis:</u>

1.

Aus 1/Kor.1 und 3/Kor.1 folgt für alle $\hat{X}$:

$$p((B\hat{X}) \to L \mid ABCD\hat{X}) = p((B\hat{X}) \to L \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD\hat{X}).$$

$$p((B\hat{X}) \to L \mid ABCD\hat{X}(\overline{A \to L})) = p((B\hat{X}) \to L \mid ABCD\hat{X}).$$

$\Rightarrow$

$$p((B\hat{X}) \to L \mid ABCD\hat{X}(\overline{A \to L})) = p((B\hat{X}) \to L \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD\hat{X}).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p([(B\hat{X}) \to L]ABCD\hat{X}(\overline{A \to L}))}{p(ABCD\hat{X}(\overline{A \to L}))} = \frac{p([(B\hat{X}) \to L]\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD\hat{X})}{p(\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD\hat{X})}.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p(\hat{X}[(B\hat{X}) \to L] \mid ABCD(\overline{A \to L}))}{p(\hat{X} \mid ABCD(\overline{A \to L}))} = \frac{p(\hat{X}[(B\hat{X}) \to L] \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD)}{p(\hat{X} \mid \bar{A}_1 \ldots \bar{A}_k BCD)}. \qquad (*)$$

Mit 2/Kor.1 gilt für alle $\hat{X}$:

$$p(\overline{A \to L} \mid ABCD\hat{X}) = p(\overline{A \to L} \mid ABCD).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p((\overline{A.L})ABCD\hat{X})}{p(ABCD\hat{X})} = \frac{p((\overline{A.L})ABCD)}{p(ABCD)}.$$

$\Rightarrow$

$$p(\hat{X} \mid ABCD(\overline{A \to L})) = p(\hat{X} \mid ABCD).$$

$\Rightarrow$

(wegen 4/Kor.1)

$$p(\hat{X} \mid ABCD(\overline{A \to L})) = p(\hat{X} \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD). \qquad (**)$$

Aus Glg.(*) ergibt sich mit Glg.(**) für alle $\hat{X}$:

$$p(\hat{X}[(B\hat{X}) \to L] \mid ABCD(\overline{A \to L})) = p(\hat{X}[(B\hat{X}) \to L] \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD) \qquad (***)$$

$\Rightarrow$

$$p(L \mid ABCD(\overline{A \to L})) = p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD).$$

Der letzte Schritt ergibt sich , da die Glg.(***) für alle $\hat{X}$ gilt, da nur (B $\hat{X}$) das Ereignis L erzeugen kann, und da die Wahrscheinlichkeit von $(\hat{X}(B\hat{X}) \to L)$ unter den Bedingungen $(ABCD(\overline{A \to L}))$ bzw. $(\overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)$ gleich groß sind.

2.

Ohne weiteren Einsatz von Voraussetzungen erhält man durch Erweitern und Umformen mit dem Resultat des 1. Teils:

$$p(LABCD) = p(LABCD(A \to L)) + p(LABCD(\overline{A \to L})).$$

$\Rightarrow$

$$p(LABCD) = p(L \mid ABCD(A \to L))p(ABCD(A \to L))$$
$$+ p(L \mid ABCD(\overline{A \to L}))p(ABCD(\overline{A \to L}))$$

$\Rightarrow$

(wegen $p(L \mid ABCD(A \to L)) = 1$ und

$p(L \mid ABCD(\overline{A \to L})) = p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)$)

$$p(LABCD) = p(ABCD(A \to L)) + p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)p(ABCD(\overline{A \to L})).$$

$\Rightarrow$

$$p(LABCD) = p(A \to L \mid ABCD)p(ABCD) + p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)p(ABCD)$$
$$- p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)p(A \to L \mid ABCD)p(ABCD).$$

$\Rightarrow$

$$p(LABCD) = p(A \to L \mid ABCD) \cdot [\ p(ABCD) - p(ABCD)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)\ ]$$
$$+ \ p(ABCD)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD).$$

$\Rightarrow$

$$p(A \to L \mid ABCD) = \frac{p(LABCD) - p(ABCD)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)}{p(ABCD) - p(ABCD)p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)}.$$

$\Rightarrow$

$$p(A \to L \mid ABCD) = \frac{p(L \mid ABCD) - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)}{p(\overline{L} \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k BCD)}.$$

Die Glg.8.2, die zweite Gleichung des A→L-Korollars1, gilt wegen:

$$p(A \to L \mid ABCDL) = \frac{p((A \to L)ABCDL)}{p(ABCDL)}$$
$$= \frac{p((A \to L)ABCD)}{p(ABCDL)}$$
$$= \frac{p(A \to L \mid ABCD)}{p(L \mid ABCD)}. \qquad \square$$

Mit dem A→L-Korollar 1 können die Unabhängigkeitsforderungen des A→L-Satzes schrittweise vermindert werden. Sind schließlich in *(A B C)* sämtliche Ereignisse aus *URS(L)* enthalten, ist also $\hat{X} := \varnothing$, so erlöschen die Voraussetzungen 2/Kor.1 und 4/Kor.1. Es folgt das A→L-Korollar 1.1:

<u>*Satz*</u>

<u>*A→L-Korollar 1.1*</u>

(A B C) enthält sämtliche Ereignisse von URS(L). Für beliebiges $A := (A_1 ... A_k)$ *gelten die folgenden Voraussetzungen:*

<u>1/Kor.1.1:</u> $p((A \to L)\,(B \to L) \mid A\,B\,C\,D) \;=\; p(A \to L \mid A\,B\,C\,D)\, p(B \to L \mid A\,B\,C\,D)$.

<u>2/Kor.1.1:</u> *entfällt.*

<u>3/Kor.1.1:</u> $p(B \to L \mid A\,B\,C\,D) \;=\; p(B \to L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k\; B\,C\,D)$.

<u>4/Kor.1.1:</u> *entfällt.*

Dann folgt:

$$p(A \to L \mid ABCD) \;=\; \frac{p(L \mid ABCD) - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k BCD)}{p(\overline{L} \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k BCD)}. \tag{8.3}$$

<u>Beweis:</u>

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem A→L-Korollar 1 für $\hat{X} := \varnothing$.

<u>Ergänzung zu Glg.8.3</u>

<u>Behauptung:</u>

Falls [Elemente in INH(A→L) sind unabhängig von Elementen in INH(B→L)]

∧ [Elemente in A sind unabhängig von Elementen in INH(B→L)]

$\Rightarrow$

A erfüllt 1/Kor.1.1 ∧ 3/Kor.1.1.

Aus dem A→L-Korollar 1 ergibt sich ein weiterer Sonderfall, falls mit Ausnahme von A alle Ursachen von L negiert vorliegen. Es folgt das A→L-Korollar 1.2:

<u>Satz</u>

<u>A→L-Korollar 1.2</u>

(A C) enthält sämtliche Ereignisse von URS(L). Damit gilt <u>ohne</u> <u>zusätzliche</u> Voraussetzungen mit den eingeführten Bezeichnngen:

$$\begin{aligned} p(A \to L \mid ACD) \;&=\; \frac{p(L \mid ACD) - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k CD)}{p(\overline{L} \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k CD)} \\ &=\; p(L \mid ACD). \end{aligned} \tag{8.4}$$

<u>Beweis:</u>

Die Behauptung folgt aus dem A→L-Korollar1 mit $p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k CD) = 0$.

Für einige Anwendungen ist die folgende Betrachtung bedeutsam. $A := (A_1 \ldots A_k)$ und $C := (\overline{A}_u \ldots \overline{A}_v)$ seien Verbunde mit allen bekannten Elementen von *URS(L)*, d.h. in A stehen die mit Sicherheit vorliegenden, und in C die mit Sicherheit nicht vorliegenden Ursachen von L. Der Verbund B bestehe aus allen <u>unbekannten</u> Ursachen von L. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei $D := \varnothing$.

Existieren keine Ursachen von L außerhalb von $(A\ C)$, ist B also leer, so wird $p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B) = 0$. Falls jedoch ein Wert $p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B) > 0$ erscheint, muß die Existenz unbekannter Ursachen, also $B \neq \varnothing$, angenommen werden. Nimmt man für $p(L \mid A_1 \ldots A_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)$ willkürlich einen Zahlenwert an, z.B. $p(L \mid A_1 \ldots A_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B) := 0.75$, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den gegebenen Bedingungen der Verbund $(A_1 \ldots A_k)$ das Ereignis L erzeugt, als eine Funktion von $p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)$ darstellen mittels:

$$p(A \to L \mid A_1 \ldots A_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B) = \frac{0.75 - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)}{1 - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)}. \tag{8.5}$$

Wertetabelle:

$p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)$	$\frac{0.75 - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)}{1 - p(L \mid \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_k \overline{A}_u \ldots \overline{A}_v B)}$	$p(A \to L \mid A_1 .. A_k \overline{A}_u .. \overline{A}_v B)$
0.00	0.75 : 1.00	0.7500
0.01	0.74 : 0.99	0.7475
0.02	0.73 : 0.98	0.7449
0.03	0.72 : 0.97	0.7423
0.04	0.71 : 0.96	0.7396
0.05	0.70 : 0.95	0.7368
0.06	0.69 : 0.94	0.7340
0.07	0.68 : 0.93	0.7312
0.08	0.67 : 0.92	0.7283
0.09	0.66 : 0.91	0.7253
0.10	0.65 : 0.90	0.7222

$p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k \overline{A}_u ... \overline{A}_v B)$	$\dfrac{0.75 - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k \overline{A}_u ... \overline{A}_v B)}{1 - p(L \mid \overline{A}_1 ... \overline{A}_k \overline{A}_u ... \overline{A}_v B)}$	$p(A \to L \mid A_1 .. A_k \overline{A}_u .. \overline{A}_v B)$
0.1	0.65 : 0.9	0.72
0.2	0.55 : 0.8	0.69
0.3	0.45 : 0.7	0.64
0.4	0.35 : 0.6	0.58
0.5	0.25 : 0.5	0.50
0.6	0.15 : 0.4	0.38
0.7	0.05 : 0.3	0.17
0.75	0.00 : 0.25	0

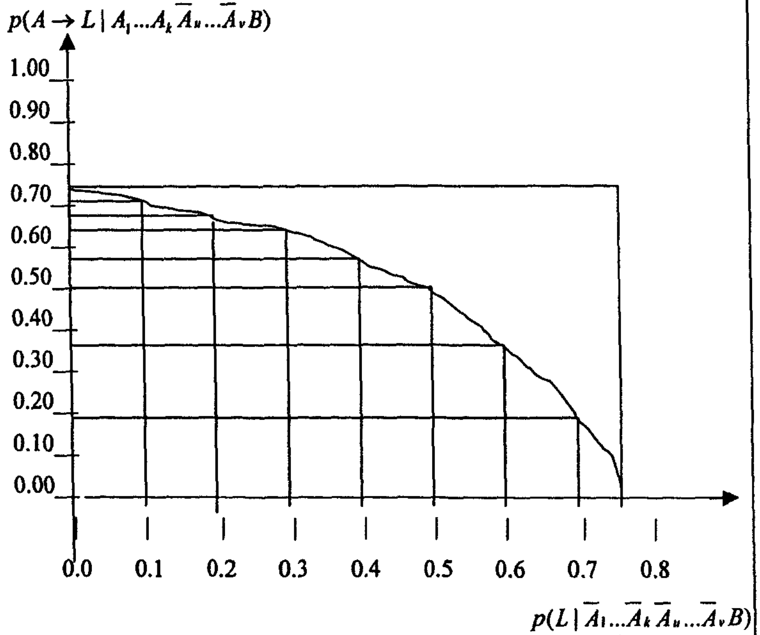


Abb.8.1:

Verlauf der Glg. 8.5.

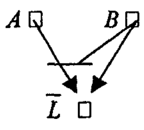
In Worten: Je höher die Wahrscheinlichkeit ist, daß L auch bei nicht vorliegendem A existiert, desto geringer wird bei vorliegendem A die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „A erzeugt L".

Mit den gewonnen Beziehungen kann auch ein bereits in Kapitel 5 genannter Aspekt geklärt werden.

Vermutung

Sind die stochastisch unabhängigen Ereignisse A und B die Ursachen des Ereignisses L, dann wird vermutet: $p(AB \mid \overline{L}) = p(A \mid \overline{L})p(B \mid \overline{L})$.

Diese (nahezu sichere) Vermutung erweist sich leider als falsch, d.h. sie gilt ohne zusätzliche Voraussetzungen im allgemeinen nicht.
Denn bestehen keine weiteren Angaben zu den Gegebenheiten der geäußerten Vermutung, so bedeutet dies, daß die Beschaffenheit der Inhibitoren und ihre Abhängigkeiten offen bleiben. Deshalb ist insbesondere nicht ausgeschlossen, daß die Inhibitoren von *A→L* gegenüber den Inhibitoren von *B→L* stochastisch abhängig sind, oder daß Elemente aus *URS(L)* gegenüber Elementen aus *INH(L)* Abhängigkeit aufweisen. Ist also z.B. das Ereignis *B* ein Inhibitor für *A→L*, so ist - falls weitere Angaben im Wortlaut der Vermutung dies nicht ausschließen - das folgende Strukturschema zugelassen:



Damit ist $p(AB \mid \overline{L}) \neq p(A \mid \overline{L})p(B \mid \overline{L})$, da z.B. $p(A \mid \overline{L})$ abnimmt, wenn die Wahrscheinlichkeit von *B* abnimmt.

Klarheit im Hinblick auf die zu fordernden Voraussetzungen bringt das nachfolgende A→L-Korollar 2.

Satz

A→L-Korollar 2

A und B sind beliebig gewählte Ursachen von L. Dann gilt unter der Voraussetzung, daß A und B selbständige Ursachen von L sind:

$$p(AB \mid \bar{L}) = p(A \mid \bar{L})p(B \mid \bar{L}). \tag{8.6}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} p(\overline{(AB) \to L} \mid AB) &= p(\overline{(A \to L) \vee (B \to L)} \mid AB) \\ &= p((\overline{A \to L})(\overline{B \to L}) \mid AB) \\ &= \text{(wegen Voraussetzung 1/A}\to\text{L)} \\ &\quad\; p(\overline{A \to L} \mid AB)p(\overline{B \to L} \mid AB) \\ &= \text{(wegen Voraussetzungen 2/A}\to\text{L und 3/A}\to\text{L)} \\ &\quad\; p(\overline{A \to L} \mid A)p(\overline{B \to L} \mid B). \end{aligned} \tag{*}$$

Aus der Beziehung (*) folgt nach Anwendung des A→L-Satzes:

$$\frac{p(\bar{L} \mid AB)}{p(\bar{L} \mid \bar{A} \cdot \bar{B})} = \frac{p(\bar{L} \mid A)}{p(\bar{L} \mid \bar{A})}\frac{p(\bar{L} \mid B)}{p(\bar{L} \mid \bar{B})}.$$

$\Rightarrow$ (da A und B stochastisch unabhängig sind)

$$\frac{p(\bar{L}AB)}{p(\bar{L} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B})} = \frac{p(\bar{L}A)}{p(\bar{L} \cdot \bar{A})}\frac{p(\bar{L}B)}{p(\bar{L} \cdot \bar{B})}.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p(AB \mid \bar{L})}{p(\bar{A} \cdot \bar{B} \mid \bar{L})} = \frac{p(A \mid \bar{L})}{p(\bar{A} \mid \bar{L})}\frac{p(B \mid \bar{L})}{p(\bar{B} \mid \bar{L})}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &p(AB \mid \bar{L})\,[1 - p(A \mid \bar{L}) - p(B \mid \bar{L}) + p(A \mid \bar{L})p(B \mid \bar{L})] \\ &\qquad = p(A \mid \bar{L})p(B \mid \bar{L})\,[1 - p(A \mid \bar{L}) - p(B \mid \bar{L}) + p(AB \mid \bar{L})]. \end{aligned} \tag{**}$$

$\Rightarrow$

$$p(AB\,|\,\bar{L})\ [\,1 - p(A\,|\,\bar{L}) - p(B\,|\,\bar{L})\,]$$
$$= p(A\,|\,\bar{L})p(B\,|\,\bar{L})\ [1 - p(A\,|\,\bar{L}) - p(B\,|\,\bar{L})].$$

$\Rightarrow$

$$p(AB\,|\,\bar{L}) = p(A\,|\,\bar{L})p(B\,|\,\bar{L}).$$

Hierbei erfolgt der Schritt zu Glg.(**) wegen:

$$\begin{aligned}
p(\bar{A}\cdot\bar{B}\,|\,\bar{L}) &= 1 - p(\overline{\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}}}\,|\,\bar{L}) \\
&= 1 - p(A \vee B\,|\,\bar{L}) \\
&= 1 - [p(A\,|\,\bar{L}) + p(B\,|\,\bar{L}) - p(AB\,|\,\bar{L})] \\
&= 1 - p(A\,|\,\bar{L}) - p(B\,|\,\bar{L}) + p(AB\,|\,\bar{L}).
\end{aligned}$$ □

Besitzen somit zwei Ereignisse A und B die Eigenschaft, selbständige Ursachen des Ereignisses L zu sein, so verlieren sie zwar unter der Bedingung L ihre stochastische Unabhängigkeit, nicht jedoch unter der Bedingung $\bar{L}$.
Die stochastische Unabhängigkeit von A, B als alleiniger Voraussetzung genügt nicht für die Gültigkeit der Glg.8.6.

Eine unmittelbare Verwendung des A→L-Korollars 2 wird in Kapitel 9 beim Beweis der Glg.9.9 erfolgen:
Bezeichnen I_1 und I_2 zwei Inhibitoren, die auf den Übergang $K_1 \rightarrow F_1$ wirken, und sind weiter I_1 und I_2 selbständige Ursachen des Ereignisses $(\overline{K_1 \rightarrow F_1})$, so erhält man mit Hilfe des A→L-Korollars 2 die Beziehung

$$p(I_1 I_2\,|\,\overline{\overline{K_1 \rightarrow F_1}}) = p(I_1\,|\,\overline{\overline{K_1 \rightarrow F_1}})\ p(I_2\,|\,\overline{\overline{K_1 \rightarrow F_1}}).$$

Der A→L-Satz und das A→L-Korollar 1 wurden 1991 veröffentlicht. Siehe:
LIEBEL, F.-P.: Wahrscheinlichkeit der Entstehung eines Folgezustands aus einer vorhandenen Ursache. In: Österreichische Zeitschrift für Statistik und Informatik (ZSI), 21. Jg. (1991), Heft 3 – 4.

9. Berechnung der ap-Wahrscheinlichkeiten

Zur Berechnung der ap-Wahrscheinlichkeit $p(H \mid H')$ wird die mit (1.3) identische Gleichung $p(H \mid H') = p(H \mid UFKIJ)$ unter Nutzung der getroffenen Voraussetzungen wie folgt umgeformt:

$$
\begin{aligned}
p(H \mid UFKIJ) &= \frac{p(HUFKIJ)}{p(HUFKIJ) + p(\overline{H}UFKIJ)} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{p(UFKIJ \mid \overline{H})\,p(\overline{H})}{p(UFKIJ \mid H)\,p(H)}} \\
&=_{(\text{Vorauss.III})} \frac{1}{1 + \dfrac{p(FKJ \mid \overline{H})\,p(UI \mid \overline{H})\,p(\overline{H})}{p(FKJ \mid H)\,p(UI \mid H)\,p(H)}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{p(FKJ\overline{H})\,p(UI \mid \overline{H})}{p(FKJH)\,p(UI \mid H)}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{p(F \mid KJ\overline{H})\,p(KJ\overline{H})\,p(UI \mid \overline{H})}{p(F \mid KJH)\,p(KJH)\,p(UI \mid H)}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{p(F \mid KJ\overline{H})\,p(\overline{H} \mid KJ)\,p(UI \mid \overline{H})}{p(F \mid KJH)\,p(H \mid KJ)\,p(UI \mid H)}} \\
&=_{(\text{Vorauss.IIc})} \frac{1}{1 + \dfrac{p(F \mid KJ\overline{H})\,p(\overline{H})\,p(UI \mid \overline{H})}{p(F \mid KJH)\,p(H)\,p(UI \mid H)}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{p(F \mid KJ\overline{H})\,p(UI\overline{H})}{p(F \mid KJH)\,p(UIH)}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{p(F \mid KJ\overline{H})\,p(\overline{H} \mid UI)}{p(F \mid KJH)\,p(H \mid UI)}}\,. \qquad (9.1)
\end{aligned}
$$

Der nächste Arbeitsschritt betrifft die Bearbeitung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(F \mid K\,J\,H)$ und $p(H \mid U\,I)$, die Teil der Glg.9.1 sind. Da diese Wahrscheinlichkeiten im allgemeinen '-Ereignisse aufweisen, wird im Verlaufe der Berechnung auch eine Interpolation anzuwenden sein. (Zu Beginn des Kapitels 6 sind die in den Bedingungsverbunden erscheinenden Symbole definiert worden als $K := (K_1^{'}K_2K_3^{'})$ und $U := (U_1U_2^{'}U_3^{'})$.)

Zunächst wird $p(F \mid K\,J\,H)$ einer Betrachtung unterzogen. Die zu $(K\,J\,H)$ gehörenden Elemente, d.h. die Ereignisse $\{K_1, K_2, K_3, J_1, J_2, H\}$, sind gemäß Voraussetzung IIc stochastisch unabhängig. Da also für K_1 und K_3 unter der Bedingung $(K_2\,J\,H)$ Unabhängigkeit besteht, kann der Lineare Interpolationssatz wie folgt eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
& p(F_1F_2...F_5 \mid K_1^{'}K_2K_3^{'}JH) \\
= \; & p(F_1F_2...F_5 \mid K_1K_2K_3JH)p(K_1 \mid K_1^{'})p(K_3 \mid K_3^{'}) \qquad (*) \\
& + p(F_1F_2...F_5 \mid K_1K_2\overline{K_3}JH)p(K_1 \mid K_1^{'})p(\overline{K_3} \mid K_3^{'}) \\
& + p(F_1F_2...F_5 \mid \overline{K_1}K_2K_3JH)p(\overline{K_1} \mid K_1^{'})p(K_3 \mid K_3^{'}) \\
& + p(F_1F_2...F_5 \mid \overline{K_1}K_2\overline{K_3}JH)p(\overline{K_1} \mid K_1^{'})p(\overline{K_3} \mid K_3^{'}).
\end{aligned}
$$

Um die Glg.(*) zu erreichen, kann auch ein anderer Weg beschritten werden, der den Linearen Interpolationssatz nicht direkt nutzt, der aber für seinen letzten Berechnungsschritt ebenfalls die Unabhängigkeit der Elemente in $(K\,J\,H)$ benötigen wird.

Wir nutzen die sogenannte Kettenregel und führen folgende Umformung durch:

$$
\begin{aligned}
p(F \mid KJH) &= p(F_1...F_5 \mid K\,J\,H) \\
&= p(F_1 \mid F_2...F_5K\,J\,H) \qquad (**) \\
&\quad \cdot p(F_2 \mid F_3...F_5\,K\,J\,H) \\
&\quad \cdot p(F_3 \mid \overline{F}_4\;F_5K\,J\,H) \\
&\quad \cdot p(\overline{F}_4 \mid F_5\,K\,J\,H) \\
&\quad \cdot p(F_5 \mid K\,J\,H).
\end{aligned}
$$

Nun wird der L-Satz (Glg.4.3) 5-fach auf die rechte Seite der Glg.(**) angesetzt:

$$p(F_1F_2...F_5 \mid K_1^{'}K_2K_3^{'}JH)$$

$$= \frac{p(F_1F_2...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(F_2...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

$$\cdot \frac{p(F_2F_3...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(F_3...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

$$\cdot \frac{p(F_3\overline{F_4}...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(\overline{F_4}...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F_4}F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

$$\cdot \frac{p(F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

$$= \frac{p(F_1F_2...F_5K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(K_1K_2K_3JH)\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

$$= \frac{p(F_1F_2...F_5K_1K_2K_3JH)\cdot\frac{1}{p(K_2JH)}\cdot\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc.}{p(K_1K_2K_3JH)\cdot\frac{1}{p(K_2JH)}\cdot\frac{p(K_1 \mid K_1^{'})}{p(K_1)}\frac{p(K_3 \mid K_3^{'})}{p(K_3)} + ...etc}$$

= (da die Elemente in *(K J H)* unabhängig sind)

$$p(F_1F_2...F_5 \mid K_1K_2K_3JH)p(K_1 \mid K_1^{'})p(K_3 \mid K_3^{'}) + ...etc.$$

Hinweis:

Es ist zulässig, auf die linke Seite der Glg.(**) den Linearen Interpolationssatz anzuwenden, da die dafür erforderliche Ziffer b) erfüllt ist. Nicht zulässig ist dagegen eine solche Anwendung auf alle Faktoren der rechten Seite von Glg.(**), da nur der letzte Faktor $p(F_5 \mid K\,J\,H)$ der Ziffer b) des Linearen Interpolationssatzes genügt.

Zu klären ist jedoch die Frage, ob auf der rechten Seite der Glg.(**) z.B. für den den ersten Faktor $p(F_1 \mid F_2 ... F_5\,K\,J\,H) \neq p(F_1 \mid K\,J\,H)$ gilt.
Diese Problematik hat sich in Kapitel 4 im Zusammenhang mit der Glg.4.4-9 ergeben. Dort wurde die Ungleichung $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2') \neq p(F_1 \mid K_0 K_1' K_2')$ zur Aufklärung dieser Verhältnisse herangezogen. Es wurde festgestellt, daß unter der Bedingung $(K_0 K_1' K_2')$ das Ereignis F_1 nicht gegenüber dem Ereignis F_2 separiert ist, da $p(F_1 \mid F_2 K_0 K_1' K_2')$ keiner Variablen der L-Netz-Berechnung zugeordnet ist. Dieselben Argumente gelten für $p(F_1 \mid F_2 ... F_5\,K\,J\,H)$, so daß unter der Bedingung $(K_1' K_2 K_3' JH)$ für F_1 gegenüber $(F_2 \dots F_5)$ keine Separation besteht.
Dies führt zu folgender Schlußfolgerung:

- *Es ist nicht zulässig, die Wahrscheinlichkeit* $p(F_1 \dots F_5 \mid K_1' K_2 K_3' JH)$ *in die Faktoren* $p(F_1 \mid K_1' K_2 K_3' JH), p(F_2 \mid K_1' K_2 K_3' JH), \dots, p(F_5 \mid K_1' K_2 K_3' JH)$ *zu zerlegen.*
- *Es ist vielmehr erforderlich, daß zuerst der Lineare Interpolationssatz (oder ein anderes Interpolationsverfahren) auf* $p(F_1 F_2 \dots F_5 \mid K_1' K_2 K_3' JH)$ *angewendet wird, und daß erst dann die Zerlegung*
  $p(F_1 F_2 \dots F_5 \mid K_1 K_2 K_3 JH) = p(F_1 \mid K_1 K_2 K_3 JH) \cdot \dots \cdot p(F_5 \mid K_1 K_2 K_3 JH)$
  erfolgt (falls hierfür die Voraussetzungen IIa und IIc erfüllt sind).

Diese Schlußfolgerung findet ihren Ausdruck in den folgenden Glgn.9.2 und 9.3.

Der Lineare Interpolationssatz (oder wie gezeigt auch der L-Satz) ergibt im Fall von n '-Ereignissen $K_1',\dots,K_n'$, und bei Erfüllung der dort genannten Ziffer b):

$$p(F \mid K_1' \dots K_n' JH) = \sum_{q_1,\dots,q_n=0,1} p(F \mid K_1^{(q_1)} \dots K_n^{(q_n)} JH)\, p(K_1^{(q_1)} \mid K_1') \cdot \dots \cdot p(K_n^{(q_n)} \mid K_n') . \tag{9.2}$$

Die Glg.9.2 enthält Wahrscheinlichkeiten der Form $p(F \mid K_1^{(q_1)} \dots K_n^{(q_n)} JH)$, die keine '-Ereignisse mehr aufweisen. Da der Bedingungsverbund alle Ursachen der zu F gehörenden Folge-Ereignisse umfaßt, siehe Voraussetzung IIa, und da für beliebige $F_{i_0}, F_{i_1} \in F$ die Elemente in $INH(F_{i_0})$ unabhängig sind gegenüber den Elementen in $INH(F_{i_1})$, siehe Voraussetzung IIc, erhält man:

$$p(F \mid K_1^{(q_1)} \dots K_n^{(q_n)} JH) = \prod_{F_i \in F} p(F_i \mid K_1^{(q_1)} \dots K_n^{(q_n)} JH) . \tag{9.3}$$

Die Glg.9.3 enthält die Wahrscheinlichkeiten $p(F_i \mid K_1 \dots K_n J H)$, $F_i \in F$. Um für Wahrscheinlichkeiten dieser Art unmittelbar die Zerlegung in Faktoren anschreiben zu können, werden die Faktorisierungssätze T-9.4 und T-9.12 aufgestellt (das Symbol T steht für Theorem).

Der Faktorisierungssatz T-9.4 liefert bedingte Wahrscheinlichkeiten, in deren Bedingungsverbunden jeweils nur noch ein Ursache-Ereignis mit p = 1 steht. Die Inhibitoren verbleiben zunächst unverändert.

Dann stellt der Faktorisierungssatz T-9.12 das benötigte Mittel bereit, um zusätzlich auch im Hinblick auf die Inhibitoren eine Zerlegung ausführen zu können.

Satz

Faktorisierungssatz (T-9.4) (Faktorisierung hinsichtlich der Ursachen)

{H, $K_1,\dots, K_n$} bezeichnet die Menge aller Ursachen für ein beliebig gewähltes Ereignis F_1, alle Elemente in {H, $K_1,\dots, K_n$} sind selbständige Ursachen von F_1.

Exemplarisch seien

(nächste Seite)

$I_1, \ldots, I_r$ die Inhibitoren von $K_1 \to F_1$ und

$J_1, \ldots, J_s$ die Inhibitoren von $K_2 \to F_1$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(\overline{F}_1 \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s) = \; & p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_1 \ldots I_r) \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 \ldots \overline{K}_n J_1 \ldots J_s) \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 \ldots \overline{K}_n) \\ & \quad \vdots \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n)\,. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Insbesondere ist:

$$\begin{aligned} & p(\overline{F}_1 \mid HK_1 \ldots K_n) \\ & = p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) \cdot \ldots\ldots \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Zusatz:

Ist in der Bedingung ($H\,K_1 \ldots K_n$) ein Ereignis negiert, liegt z.B. $(HK_1 \ldots \overline{K}_3 \ldots K_n)$ vor, so wird in (9.4) und (9.5) ein Term mit ausschließlich negierten Ursachen durch Eins ersetzt.

(9.6)

Beweis:

$$p(F_1 \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s)$$

$$= p[(H \to F_1) \vee (K_1 \to F_1) \vee \ldots \vee (K_n \to F_1) \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s] \tag{9.7}$$

$$= 1 - p[(\overline{H \to F_1}) \wedge (\overline{K_1 \to F_1}) \wedge \ldots \wedge (\overline{K_n \to F_1}) \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s]$$

$$\begin{aligned} = 1 - & [1 - p(H \to F_1 \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s)] \\ & \cdot [1 - p(K_1 \to F_1 \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s)] \\ & \vdots \\ & \cdot [1 - p(K_n \to F_1 \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s)] \end{aligned}$$

= (da Selbständigkeit vorliegt)

(nächste Seite)

$$
\begin{aligned}
&= 1 - [\,1 - p(H \to F_1 \mid H\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)\,] && (9.7a)\\
&\quad \cdot [\,1 - p(K_1 \to F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_1 \ldots I_r)\,]\\
&\quad \cdot [\,1 - p(K_2 \to F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 \ldots \overline{K}_n J_1 \ldots J_s)\,]\\
&\quad \cdot [\,1 - p(K_3 \to F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 \ldots \overline{K}_n)\,]\\
&\quad\ \ \vdots\\
&\quad \cdot [\,1 - p(K_n \to F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n)\,]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - [\,1 - \frac{p(F_1 \mid H\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\,] && \text{(A}\to\text{L-Satz / Korollar 1)}\\
&\quad \cdot [\,1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_1 \ldots I_r) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n I_1 \ldots I_r)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n I_1 \ldots I_r)}\,]\\
&\quad \cdot [\,1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 \ldots \overline{K}_n J_1 \ldots J_s) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n J_1 \ldots J_s)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n J_1 \ldots J_s)}\,]\\
&\quad \cdot [\,1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\,]\\
&\quad\ \ \vdots\\
&\quad \cdot [\,1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\,].
\end{aligned}
$$

Die Fortsetzung des Beweises wird für den letzten Faktor gezeigt:

$$
\begin{aligned}
&1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\\
&= \frac{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n) + p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\\
&= \frac{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\\
&= \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}\,.
\end{aligned}
$$

Mit diesem Ergebnis folgt weiter:

$$p(F_1 \mid HK_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s)$$

$$= 1 - \frac{p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_1 \ldots I_r)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 \ldots \overline{K}_n J_1 \ldots J_s)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 \ldots \overline{K}_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}$$

$$\vdots$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)} .$$

Mit $p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) = 1$ ergibt sich Glg.9.4.

Glg.9.5 stellt einen Spezialfall dar, der wegen seiner einprägsamen Form eigens dargestellt wurde. Die Aussage (9.6) ergibt sich aus Glg.9.7, da für eine negierte Ursache von F_1, z.B. für $\overline{K}_3$ die Beziehung $\overline{K}_3 \rightarrow F_1 = \varnothing$ gilt. □

Der Faktorisierungssatz T-9.4 erweist sich als außerordentlich praktisch, denn eine Faktorisierung der Wahrscheinlichkeit $p(\overline{F}_1 \mid H K_1 \ldots K_n)$ kann unmittelbar angeschrieben werden.

Beachtenswert ist auch die Strukturierung der einzelnen Faktoren des Produkts

$$p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) \cdot \ldots\ldots \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n).$$

Jeder Bedingungsverbund der enthaltenen Wahrscheinlichkeiten besitzt genau eine mit $p = 1$ vorliegende Ursache. Dadurch werden repräsentative Stichproben zur Ermittlung der jeweils zugehörigen relativen Häufigkeiten sehr vereinfacht. Im Fall der ersten Wahrscheinlichkeit bedeutet es, daß man eine Population mit der Eigenschaft H heranzieht und dabei sicherstellt, daß alle weiteren Ursachen K_1 bis

K_n nicht vorliegen. Sodann sind auf dieser Population die Fälle mit dem Folge-Ereignis F_l abzuzählen, und abschließend ist nur noch die relative Häufigkeit $1\text{-}h(F_1 \mid H\overline{K}_1...\overline{K}_n)$ zu bilden.

Ein erneuter Blick auf Glg.9.4 zeigt, daß Faktoren wie $p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_1...I_r)$ und $p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_nJ_1...J_s)$ enthalten sind, die zahlreiche nicht-negierte Inhibitoren aufweisen können. Es ist möglich, für diese Wahrscheinlichkeiten eine weitere Zerlegung in Faktoren anzugeben, wobei jetzt im Hinblick auf die Inhibitoren zerlegt wird.

Die Bezeichnungen des Faktorisierungssatzes T-9.4 werden beibehalten, d.h. F_l ist ein beliebiger Netzknoten, K_l ist ein beliebig gewähltes Element aus $URS(F_l)$, und die Ereignisse $I_1,..., I_r$ sind die Inhibitoren von $K_l \rightarrow F_l$.

Die nachstehende Voraussetzung, die bereits in Kapitel 6 genannt wurde, ist erforderlich.

Selbständigkeitsvoraussetzung für Inhibitoren

Für einen beliebigen Übergang $K_l \rightarrow F_l$ gilt: Falls K_l existiert, dann sind die auf $K_l \rightarrow F_l$ wirkenden Inhibitoren $I_1,..., I_r$ selbständige Ursachen des Ereignisses $\overline{(K_1 \rightarrow F_1)}$.

Erläuterung zur Voraussetzung für Inhibitoren

Für die $I_1,..., I_r$, die im Falle der Existenz von K_l selbständige Ursachen des Ereignisses $\overline{(K_1 \rightarrow F_1)}$ sind, gilt das A→L-Korollar 2 des Kapitels 8 unverändert. Für die dort verwendeten Symbole gelten folgende Entsprechungen:

	A→L-Korollar 2	Voraussetzung für Inhibitoren
Folge-Ereignis	$\overline{L}$	$\overline{(K_1 \rightarrow F_1)}$
Ursachenmenge	$\{A, B\}$	$\{I_1,..., I_r\}$

Die $I_1,\dots, I_r$ sind mit der getroffenen Voraussetzung stochastisch unabhängig unter der Bedingung K_1.

Nach dem A→L-Korollar 2 des Kapitels 8 wird die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse I_1 und I_2 durch ein bedingendes, negiertes, gemeinsames Folge-Ereignis nicht aufgehoben; nicht aufgehoben in diesem Fall also durch das doppelt negierte Ereignis $\overline{\overline{(K_1 \to F_1)}} = (K_1 \to F_1)$. Die unter der Bedingung K_1 unabhängigen Ereignisse $I_1,\dots, I_r$ sind also auch unter der Bedingung $(K_1\ (K_1 \to F_1))$ unabhängig.

Die Unabhängigkeit von $I_1,\dots, I_r$ unter der Bedingung $(K_1\ (K_1 \to F_1))$ wird genutzt, um den Satz T-9.9 aufzustellen, der dann für die Entwicklung des Satzes T-9.12 dient.

<u>Satz</u>

<u>Faktorisierungssatz T-9.9</u> (Faktorisierung hinsichtlich der Inhibitoren)

F_1 ist ein beliebiger Netzknoten, K_1 ist eine selbständige Ursache von F_1, und $I_1,\dots,I_r$ sind die Inhibitoren von $K_1 \to F_1$.

Die Selbständigkeitsvoraussetzung für Inhibitoren sei erfüllt.

Dann gilt:

$p(K_1 \to F_1 \mid K_1\, I_1 \dots I_r) =$

$$p(K_1 \to F_1 \mid K_1) \cdot \frac{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 I_1)}{p(K_1 \to F_1 \mid K_1)} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 I_r)}{p(K_1 \to F_1 \mid K_1)} \; . \qquad (9.8)$$

Bezeichnen zusätzlich

$$i_1 := \frac{p(F_1 \mid K_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \dots \overline{K}_n)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \dots \overline{K}_n)}, \dots, i_r := \frac{p(F_1 \mid K_1 I_r \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \dots \overline{K}_n)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \dots \overline{K}_n)}, \textit{ dann ist:}$$

$$p(K_1 \to F_1 \mid K_1\, I_1 \dots I_r) = p(K_1 \to F_1 \mid K_1) \cdot i_1 \cdot \ldots \cdot i_r \, . \qquad (9.9)$$

<u>Beweis:</u>

Das A→L-Korollar 2 sagt aus, daß zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B, die selbständige Ursachen eines Ereignisses L sind, unter der Bedingung $\overline{L}$

unabhängig bleiben. Damit sind die $I_1,\ldots, I_r$ unter der Bedingung $\overline{\overline{(K_1 \to F_1)}}$, also auch unter der Bedingung $(K_1\,(K_1 \to F_1))$ stochastisch unabhängig. Es folgt:

$$p(K_1 \to F_1 \mid K_1\, I_1 \ldots I_r)$$

$$= \frac{p(I_1 \ldots I_r \mid K_1(K_1 \to F_1)) \cdot p(K_1(K_1 \to F_1))}{p(K_1)p(I_1)\cdot \ldots \cdot p(I_r)}$$

$$= \frac{p(I_1 \mid K_1(K_1 \to F_1))}{p(I_1)} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{p(I_r \mid K_1(K_1 \to F_1))}{p(I_r)} \cdot p(K_1 \to F_1 \mid K_1)$$

$$= \frac{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 I_1)}{p(K_1 \to F_1 \mid K_1)} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 I_r)}{p(K_1 \to F_1 \mid K_1)} \cdot p(K_1 \to F_1 \mid K_1).$$

Damit ist die Glg.9.8 bewiesen.

Die Gültigkeit der Glg.9.9 wird exemplarisch für den ersten Quotienten gezeigt:

$$\frac{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 I_1)}{p(K_1 \to F_1 \mid K_1)}$$

$$=_{\text{(wg. Selbständigkeit)}} \frac{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}{p(K_1 \to F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}$$

$$=_{(\text{A}\to\text{L-Satz})} \frac{p(F_1 \mid K_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{K}_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{K}_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{K}_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{K}_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}$$

$= [$ wegen $p(F_1 \mid \overline{K}_1\, I_1) = p(F_1 \mid \overline{K}_1)]$

$$\frac{p(F_1 \mid K_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)} \tag{9.10}$$

$= [$ wegen $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) = 0]$

$$\frac{p(F_1 \mid K_1 I_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}. \tag{9.11}$$

□

__*Satz*__

__*Kombinierter Faktorisierungssatz T-9.12*__

$\{H, K_1, K_2,..., K_n\}$ bezeichnet die Menge aller Ursachen für ein beliebig gewähltes Ereignis F_1, alle Elemente in $\{H, K_1, K_2,...,K_n\}$ sind selbständige Ursachen von F_1. Exemplarisch seien $I_1,..., I_r$ die Inhibitoren von $K_1 \to F_1$ und $J_1,..., J_s$ die Inhibitoren von $K_2 \to F_1$.

Die Selbständigkeitsvoraussetzung für Inhibitoren sei erfüllt.

Zusätzlich zu den Symbolen des Faktorisierungssatzes T-9.9 bezeichnen

$$j_1 := \frac{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n J_1)}{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n)}, ..., j_s := \frac{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n J_s)}{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n)}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(\overline{F}_1 \mid H K_1 ... K_n I_1 ... I_r J_1 ... J_s) = \; & p(\overline{F}_1 \mid H \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) \qquad (9.12) \\ & \cdot [\, 1 - p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 ... \overline{K}_n) \cdot i_1 ... i_r \,] \\ & \cdot [\, 1 - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n) \cdot j_1 ... j_s \,] \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 ... \overline{K}_n) \\ & \vdots \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n). \end{aligned}$$

__Beweis:__

Die Behauptung folgt unmittelbar durch die Anwendung der Glg.9.9 auf Glg.9.7a.

Die Glg.9.1 enthält außer *$p(F \mid K\, J\, H)$* noch *$p(H \mid U\, I)$*. Da es gelungen ist, beiden Wahrscheinlichkeiten die Form *p(Folgen | Ursachen $\wedge$ Inhibitoren)* zu geben, können *$p(F \mid K\, J\, H)$* und *$p(H \mid U\, I)$* auf dieselbe Weise interpoliert und faktorisiert werden. Die für *$p(H \mid U\, I)$* erforderlichen Voraussetzungen wurden in Kapitel 6 mit einem *-Symbol gekennzeichnet.

Man erreicht eine Minderung des Aufwands, wie im anschließenden Kapitel 10 gezeigt wird, falls in dem Verbund *U* nur ein '-Ereignis steht. Beschränkt man sich zudem auf wenige Ereignisse für *(U I)*, so erübrigt sich die Faktorisierung (und die Gruppe der dazu verwendeten *-markierten Voraussetzungen).

10. Berechnung eines L-Netzes

Eine Kausalstruktur wie in Abb.1.2 wird über die '-gekennzeichneten Ereignisse der H/K-Ebene fortgesetzt. Das kann so erfolgen, daß für jedes dieser Ereignisse modulartig ein L-Netz erstellt wird, wie es mit dem Beispiel der Abb.1.2 für H demonstriert ist. Die einzelnen Module sind übersichtlich, und sie können bei Bedarf zu einer Gesamt-Kausalstruktur zusammengesetzt werden.

Diese Prozedur ist nicht obligatorisch, d.h. man kann zum Beispiel $p(K_1 \mid K_1')$ mit Hilfe der Abb.1.2 ermitteln, ohne daß weitere Informationen herangezogen werden. Aber die ap-Wahrscheinlichkeit von H, der unser primäres Interesse gilt, ist ungenau, falls nur unzureichende Anstrengungen unternommen werden, um auch die ap-Wahrscheinlichkeiten der übrigen zur H/K-Ebene gehörenden Ereignisse möglichst genau zu bestimmen. Zudem sind diese Ereignisse der H/K-Ebene auch deshalb von besonderem Interesse, da sie Konkurrenten zu H sind. Deshalb ist es nahezu unumgänglich, das für die Primärhypothese erstellte L-Netz bis zu einem gewissen Grad durch weitere L-Netz-Module zu ergänzen..

Das Beispiel der Abb.1.2 wird fortgesetzt durch zwei zu K_1' bzw. K_3' gehörende L-Netz-Module, die wie folgt gewählt sind:

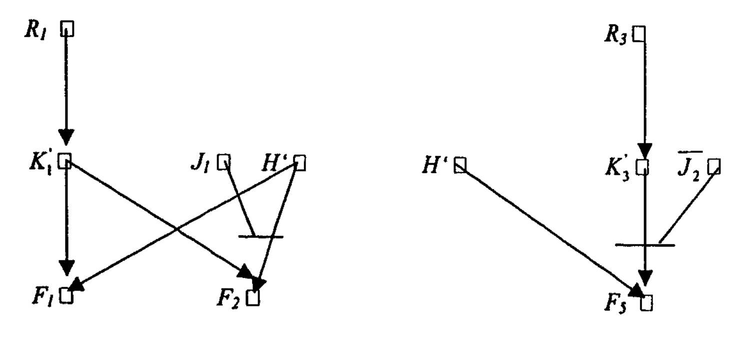


Abb.10.0:

Beispiel für zwei L-Netz-Module zur Fortsetzung von Abb.1.2. Die Module bestimmen die Wertungsumgebungen für K_1' bzw. K_3'.

Das Anfügen der obigen L-Netz-Module an das bereits existierende L-Netz der Abb.1.2 ergibt:

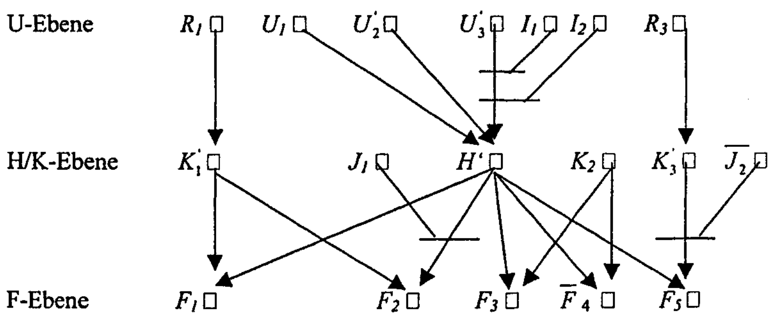


Abb.10.1:

Beispiel für ein vervollständigtes L-Netz zur Bestimmung der ap-Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse der H/K-Ebene. Entwickelt aus Abb.1.2.

<u>Schritt 1</u>

Das L-Netz-Modul für die Primärhypothese H' enthält die Ereignismengen, die zu *WERT(H)* gehören, d.h. *URS(H), FOL(H), DIFF(H), INH(H)* und $\bigcup_{Z \in FOL(H)} INH(Z)$.

Die Menge *DIFF(H)* muß in jedem Fall vollzählig sein (Voraussetzung IIa), für die Menge *URS(H)* ist Vollzähligkeit (Voraussetzung IIa*) nur im Bedarfsfall zu fordern, z.B. um die Glg.9.4 oder 9.12 anwenden zu können.

Maßgebend für die Strukturierung des L-Netzes sind die in Kapitel 6 benannten Kriterien. Es interessieren die ap-Wahrscheinlichkeiten der '-Ereignisse in der H/K-Ebene.

<u>Schritt 2</u>

Für jedes '-gekennzeichnete Ereignis des Kausalnetzes wird unter Verwendung der Glg.1.2 eine sogenannte Wertungsgleichung erstellt. Man erhält das folgende Gleichungssystem der Glgn. 10.1 bis 10.5:

$$
\begin{aligned}
p(H \mid H') &= p(H \mid W(H)) \qquad \textit{(identisch mit Glg. 1.3)} \\
&= p(H \mid U\,F\,K\,I\,J) \\
&= p(H \mid U_1 U_2' U_3' F_1 F_2 F_3 \overline{F_4} F_5 K_1' K_2 K_3' I_1 I_2 J_1 \overline{J_2}) . \qquad (10.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(K_1 \mid K_1') &= p(K_1 \mid W(K_1)) \\
&= p(K_1 \mid F_1 F_2 H' J_1 R_1) . \qquad (10.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(K_3 \mid K_3') &= p(K_3 \mid W(K_3)) \\
&= p(K_3 \mid F_5 H' \overline{J_2} R_3) . \qquad (10.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(U_2 \mid U_2') &= p(U_2 \mid W(U_2)) \\
&= p(U_2 \mid H' U_1 U_3' I_1 I_2) \qquad (10.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(U_3 \mid U_3') &= p(U_3 \mid W(U_3)) \\
&= p(U_3 \mid H' U_1 U_2' I_1 I_2) \qquad (10.5)
\end{aligned}
$$

Vorteil gegenüber anderen Systemen

Nicht zufriedenstellend gelöst war bisher das Problem, daß sich die ap-Wahrscheinlichkeiten der '-gekennzeichneten Ereignisse eines Kausalnetzes wechselseitig beeinflussen. Durch die gleichzeitige Erfassung aller unbekannten ap-Wahrscheinlichkeiten in einem Gleichungssystem ist diese Schwierigkeit behoben.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, jede ap-Wahrscheinlichkeit als Funktion der übrigen ap-Wahrscheinlichkeiten darzustellen. Solche Funktionen stellen nach Einführung der Interpolationssätze keine Schwierigkeit mehr dar.

Schritt 3

Die Anwendung des Allgemeinen Interpolationssatzes oder des Linearen Interpolationssatzes auf das Gleichungssystem der Glgn.10.1 bis 10.5 führt zum Gleichungssystem der Glgn.10.1a bis 10.5a:

$$p(H \mid H') =_{(Glg.9.1)} \frac{1}{1+\dfrac{p(F_1...F_5 \mid K_1'K_2K_3'J_1\bar{J}_2\bar{H})p(\bar{H} \mid UI)}{p(F_1...F_5 \mid K_1'K_2K_3'J_1\bar{J}_2H)p(H \mid UI)}}. \qquad (10.1a)$$

In Glg.10.1a ist gemäß Glg.9.2:

$$p(F_1...F_5 \mid K_1'K_2K_3'J_1\bar{J}_2H)$$

$$= \sum_{q_1,q_3=0,1} p(F_1...F_5 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H)p(K_1^{(q_1)} \mid K_1')p(K_3^{(q_3)} \mid K_3').$$

In dieser Gleichung wiederum ist gemäß Glg.9.3

$$p(F_1...F_5 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H) = \prod_{i=1}^{5} p(F_i \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H),$$

wobei gilt:

$$p(F_1 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H) = p(F_1 \mid K_1^{(q_1)}H),$$

$$p(F_2 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H) = p(F_2 \mid K_1^{(q_1)}J_1H),$$

$$p(F_3 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H) = p(F_3 \mid K_2H),$$

$$p(\bar{F}_4 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H) = p(\bar{F}_4 \mid K_2H),$$

$$p(F_5 \mid K_1^{(q_1)}K_2K_3^{(q_3)}J_1\bar{J}_2H) = p(F_5 \mid K_3^{(q_3)}\bar{J}_2H).$$

Zudem ist in Glg.10.1a:

$$p(H \mid UI) = p(H \mid U_1 U_2' U_3' I_1 I_2)$$

$$= \text{(identisch mit Glg.4.5).}$$

$$p(K_1 \mid K_1') =_{(Glg.9.1)} \frac{1}{1+\dfrac{p(F_1F_2 \mid H'J_1\bar{K}_1)p(\bar{K}_1 \mid R_1)}{p(F_1F_2 \mid H'J_1K_1)p(K_1 \mid R_1)}}. \qquad (10.2a)$$

(Berechnungen analog zu Glg.10.1a.)

$$p(K_3 \mid K_3') =_{(Glg.9.1)} \frac{1}{1+\dfrac{p(F_5 \mid H'\bar{J}_2\bar{K}_3)p(\bar{K}_3 \mid R_3)}{p(F_5 \mid H'\bar{J}_2K_3)p(K_3 \mid R_3)}}. \qquad (10.3a)$$

$p(U_2 \mid U_2') =_{(Glg.4.1)}$ *(identisch mitGlg.4.2).* *(10.4a)*

$p(U_3 \mid U_3') =_{(Glg.4.1)}$ *(wie Glg.10.4a; U_2, U_3 vertauscht).* *(10.5a)*

Schritt 4

Wir wählen, um das Beispiel übersichtlich zu halten, willkürlich $p(U_3 \mid U_3^{'}) := 1$ und führen folgende Abkürzungen ein:

$x := p(H \mid H^{'})$,

$y := p(K_1 \mid K_1^{'})$,

$z := p(K_3 \mid K_3^{'})$,

$u := p(U_2 \mid U_2^{'})$.

Die Glg.10.1a bis 10.5a enthalten '-Ereignisse, die mit Glg.4.4 (Linearer Interpolationssatz) bzw. mit Glg.9.2 entfernt werden, und die das Gleichungssystem in folgende Form überführen:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{a_0 yz + a_1 y \cdot \overline{z} + a_2 \overline{y} \cdot z + a_3 \overline{y} \cdot \overline{z}}{b_0 yz + b_1 y \cdot \overline{z} + b_2 \overline{y} \cdot z + b_3 \overline{y} \cdot \overline{z}} \cdot \left(\frac{1}{c_0 u + c_1 \overline{u}} - 1 \right)}, \qquad (10.1b)$$

wobei für die verwendeten Symbole gilt:

$a_0 := p(F_1 ... F_5 \mid K_1 K_2 K_3 J_1 \overline{J_2} \cdot \overline{H})$,

$a_1 := p(F_1 ... F_5 \mid K_1 K_2 \overline{K_3} J_1 \overline{J_2} \cdot \overline{H})$,

$a_2 := p(F_1 ... F_5 \mid \overline{K_1} K_2 K_3 J_1 \overline{J_2} \cdot \overline{H})$,

$a_3 := p(F_1 ... F_5 \mid \overline{K_1} K_2 \overline{K_3} J_1 \overline{J_2} \cdot \overline{H})$,

$b_0 := p(F_1 ... F_5 \mid K_1 K_2 K_3 J_1 \overline{J_2} H)$,

$b_1 := p(F_1 ... F_5 \mid K_1 K_2 \overline{K_3} J_1 \overline{J_2} H)$,

$b_2 := p(F_1 ... F_5 \mid \overline{K_1} K_2 K_3 J_1 \overline{J_2} H)$,

$b_3 := p(F_1 ... F_5 \mid \overline{K_1} K_2 \overline{K_3} J_1 \overline{J_2} H)$,

$c_0 := p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 U_3)$,

$c_1 := p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} U_3)$.

$$y = \frac{1}{1 + \frac{d_0 x + d_1 \bar{x}}{e_0 x + e_1 \bar{x}} \cdot \left(\frac{1}{f_0} - 1 \right)} , \qquad (10.2b)$$

wobei für die verwendeten Symbole gilt:

$d_0 := p(F_1 F_2 \mid H J_1 \overline{K_1})$,

$d_1 := p(F_1 F_2 \mid \overline{H} J_1 \overline{K_1})$,

$e_0 := p(F_1 F_2 \mid H J_1 K_1)$,

$e_1 := p(F_1 F_2 \mid \overline{H} J_1 K_1)$,

$f_0 := p(K_1 \mid R_1)$.

$$z = \frac{1}{1 + \frac{g_0 x + g_1 \bar{x}}{h_0 x + h_1 \bar{x}} \cdot \left(\frac{1}{k_0} - 1 \right)} \qquad (10.3b)$$

wobei für die verwendeten Symbole gilt:

$g_0 := p(F_5 \mid H \overline{J_2} \cdot \overline{K_3})$,

$g_1 := p(F_5 \mid \overline{H} \cdot \overline{J_2} \cdot \overline{K_3})$,

$h_0 := p(F_5 \mid H \overline{J_2} K_3)$,

$h_1 := p(F_5 \mid \overline{H} \cdot \overline{J_2} K_3)$,

$k_0 := p(K_3 \mid R_3)$.

$$u = l_0 x + l_1 \bar{x} \qquad (10.4b)$$

wobei für die verwendeten Symbole gilt:

$l_0 := p(U_2 \mid U_1 I_1 I_2 H U_3)$,

$l_1 := p(U_2 \mid U_1 I_1 I_2 \overline{H} U_3)$.

$$v := p(U_3 \mid U_3') := 1. \qquad (10.5b)$$

($p(U_3 \mid U_3') := 1$ wurde willkürlich festgesetzt.)

Schritt 5

Wir zerlegen in Faktoren (siehe Glg.9.3) und weisen willkürlich gewählte Zahlenwerte zu:

$$\begin{aligned}
a_0 := p(F_1...F_5 \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) &= p(F_1 \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) \\
&\quad \cdot p(F_2 \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) \\
&\quad \cdot p(F_3 \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) \\
&\quad \cdot p(\overline{F_4} \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) \\
&\quad \cdot p(F_5 \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) \\
&= p(F_1 \mid K_1\overline{H}) && := 0.2 \\
&\quad \cdot p(F_2 \mid K_1J_1\overline{H}) && := 0.2 \\
&\quad \cdot p(F_3 \mid K_2\overline{H}) && := 0.2 \\
&\quad \cdot p(\overline{F_4} \mid K_2\overline{H}) && := 0.8 \\
&\quad \cdot p(F_5 \mid K_3\overline{J_2}\cdot\overline{H}) && := 0.1 \\
&= 0.2\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.8\cdot 0.1 \\
&= 0.00064.
\end{aligned}$$

$$a_1 := p(F_1...F_5 \mid K_1K_2\overline{K_3}J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) := 0.$$

$$a_2 := p(F_1...F_5 \mid \overline{K_1}K_2K_3J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) := 0.$$

$$a_3 := p(F_1...F_5 \mid \overline{K_1}K_2\overline{K_3}J_1\overline{J_2}\cdot\overline{H}) := 0.$$

$$\begin{aligned}
b_0 := p(F_1...F_5 \mid K_1K_2K_3J_1\overline{J_2}H) &= p(F_1 \mid K_1H) && := 0.5 \\
&\quad \cdot p(F_2 \mid K_1J_1H) && := 0.4 \\
&\quad \cdot p(F_3 \mid K_2H) && := 0.5 \\
&\quad \cdot p(\overline{F_4} \mid K_2H) && := 0.5 \\
&\quad \cdot p(F_5 \mid K_3\overline{J_2}H) && := 0.5 \\
&= 0.5\cdot 0.4\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 0.5 \\
&= 0.025.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_1 := p(F_1 ... F_5 \mid K_1 K_2 \overline{K_3} J_1 \overline{J_2} H) &= p(F_1 \mid K_1 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_2 \mid K_1 J_1 H) && := 0.4 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_3 \mid K_2 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(\overline{F_4} \mid K_2 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_5 \mid \overline{K_3} \cdot \overline{J_2} H) && := 0.1\\
&= 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.1\\
&= 0.005.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 := p(F_1 ... F_5 \mid \overline{K_1} K_2 K_3 J_1 \overline{J_2} H) &= p(F_1 \mid \overline{K_1} H) && := 0.2\\
&\quad \cdot p(F_2 \mid \overline{K_1} J_1 H) && := 0.2\\
&\quad \cdot p(F_3 \mid K_2 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(\overline{F_4} \mid K_2 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_5 \mid K_3 \overline{J_2} H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&= 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5\\
&= 0.005.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_3 := p(F_1 ... F_5 \mid \overline{K_1} K_2 \overline{K_3} J_1 \overline{J_2} H) &= p(F_1 \mid \overline{K_1} H) && := 0.2 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_2 \mid \overline{K_1} J_1 H) && := 0.2 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_3 \mid K_2 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(\overline{F_4} \mid K_2 H) && := 0.5 \text{ (wie oben)}\\
&\quad \cdot p(F_5 \mid \overline{K_3} \cdot \overline{J_2} H) && := 0.1 \text{ (wie oben)}\\
&= 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.1\\
&= 0.001.
\end{aligned}
$$

$c_0 := p(H \mid U_1 I_1 I_2 U_2 U_3) := 0.8.$

$c_1 := p(H \mid U_1 I_1 I_2 \overline{U_2} U_3) := 0.4.$

Diese Zuweisungen ergeben:

$$
x = \frac{1}{1 + \frac{0.0064yz}{0.025yz + 0.005y \cdot \bar{z} + 0.005\bar{y} \cdot z + 0.001\bar{y} \cdot \bar{z}} \cdot \left(\frac{1}{0.8u + 0.4\bar{u}} - 1 \right)}. \qquad (10.1c)
$$

$$d_0 := p(F_1F_2 \mid HJ_1\overline{K_1}) = p(F_1 \mid HJ_1\overline{K_1})$$
$$\cdot p(F_2 \mid HJ_1\overline{K_1})$$
$$= p(F_1 \mid H\overline{K_1}) \qquad := 0.2 \text{ (wie oben)}$$
$$\cdot p(F_2 \mid HJ_1\overline{K_1}) \qquad := 0.2 \text{ (wie oben)}$$
$$= 0.2 \cdot 0.2 = 0.04.$$

$$d_1 := p(F_1F_2 \mid \overline{H}J_1\overline{K_1}) := 0.$$

$$e_0 := p(F_1F_2 \mid HJ_1K_1) = p(F_1 \mid HJ_1K_1)$$
$$\cdot p(F_2 \mid HJ_1K_1)$$
$$= p(F_1 \mid HK_1) \qquad := 0.5 \text{ (wie oben)}$$
$$\cdot p(F_2 \mid HJ_1K_1) \qquad := 0.4 \text{ (wie oben)}$$
$$= 0.5 \cdot 0.4 = 0.2.$$

$$e_1 := p(F_1F_2 \mid \overline{H}J_1K_1) = p(F_1 \mid \overline{H}K_1) \qquad := 0.2 \text{ (wie oben)}$$
$$\cdot p(F_2 \mid \overline{H}J_1K_1) \qquad := 0.2 \text{ (wie oben)}$$
$$= 0.2 \cdot 0.2 = 0.04.$$

$f_0 := p(K_1 \mid R_1) := 0.6.$ Diese Zuweisungen ergeben:

$$y = \frac{1}{1 + \frac{0.04x}{0.2x + 0.04\overline{x}} \cdot \left(\frac{1}{0.6} - 1\right)}. \tag{10.2c}$$

$$g_0 := p(F_5 \mid H\overline{J_2} \cdot \overline{K_3}) := 0.1 \text{ (wie oben).}$$

$$g_1 := p(F_5 \mid \overline{H} \cdot \overline{J_2} \cdot \overline{K_3}) := 0.$$

$$h_0 := p(F_5 \mid H\overline{J_2}K_3) := 0.5 \text{ (wie oben).}$$

$$h_1 := p(F_5 \mid \overline{H} \cdot \overline{J_2}K_3) := 0.1 \text{ (wie oben).}$$

$k_0 := p(K_3 \mid R_3) := 0.7.$ Diese Zuweisungen ergeben:

$$z = \frac{1}{1 + \frac{0.1x}{0.5x + 0.1\overline{x}} \cdot \left(\frac{1}{0.7} - 1\right)}. \tag{10.3c}$$

$l_0 := p(U_2 \mid U_1 I_1 I_2 H U_3) := 0.6$

$l_1 := p(U_2 \mid U_1 I_1 I_2 \overline{H} U_3) := 0.1.$

Diese Zuweisungen ergeben:

$$u = 0.6x + 0.1\overline{x} \qquad (10.4c)$$

Insgesamt wurde folgendes Gleichungssystem erreicht:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{0.0064yz}{0.025yz + 0.005y \cdot \overline{z} + 0.005\overline{y} \cdot z + 0.001\overline{y} \cdot \overline{z}} \cdot \left(\frac{1}{0.8u + 0.4\overline{u}} - 1\right)}. \qquad (10.1c)$$

$$y = \frac{1}{1 + \frac{0.04x}{0.2x + 0.04\overline{x}} \cdot \left(\frac{1}{0.6} - 1\right)}. \qquad (10.2c)$$

$$z = \frac{1}{1 + \frac{0.1x}{0.5x + 0.1\overline{x}} \cdot \left(\frac{1}{0.7} - 1\right)}. \qquad (10.3c)$$

$$u = 0.6x + 0.1\overline{x}. \qquad (10.4c)$$

<u>Schritt 6</u>

Um das aufgestellte Gleichungssystem der Glg.10.1c bis 10.4c zu berechnen, wird das handelsübliche Berechnungsprogramm "Maple 6" angewendet, wodurch sich folgendes ergibt:

eqn1:=x=1/(1+(((0.00064*y*z)/((0.025*y*z)+(0.005*y*(1-z))+(0.005*(1-y)*z)+(0.001*(1-y)*(1-z))))*((1/((0.8*u)+(0.4*(1-u))))-1)));

$$eqn1 := x = \frac{1}{1 + \frac{.00064\, y\, z \left(\frac{1}{.4\, u + .4} - 1\right)}{.025\, y\, z + .005\, y\,(1 - z) + .005\,(1 - y)\, z + .001\,(1 - y)(1 - z)}}$$

eqn2:=y=1/(1+(((0.04*x)/((0.20*x)+(0.04*(1-x))))*((1/0.6)-1)));

$$eqn2 := y = \frac{1}{1 + \frac{.02666666668\,x}{.16\,x + .04}}$$

eqn3:=z=1/(1+(((0.1*x)/((0.5*x)+(0.1*(1-x))))*((1/0.7)-1)));

$$eqn3 := z = \frac{1}{1 + \frac{.0428571429\,x}{.4\,x + .1}}$$

eqn4:=u=(0.6*x)+(0.1*(1-x));

$$eqn4 := u = .5\,x + .1$$

solve ({eqn1,eqn2,eqn3,eqn4},{x,y,z,u});

$\{u = -1.042618895, z = .8926149951, y = .8423611317, x = -2.285237791\},$
$\{x = -.2446786040, y = -.1500744630, u = -.02233930198, z = -.2546833095\},$
$\{z = -.4372489087, y = -.2431224964, x = -.2421083162, u = -.02105415808\},$
$\{x = .9862353880, z = .9212550827, y = .8826419881, u = .5931176940\}$

Damit gilt als Endergebnis:

$p(H \mid H') = 98.6\%.$

$p(K_1 \mid K_1') = 88.3\%.$

$p(K_3 \mid K_3') = 92.1\%.$

$p(U_2 \mid U_2') = 59.3\%.$

Hinweis:

Falls keine verdeckten Ursachen zu berücksichtigen sind, kann man mit Hilfe des Faktorisierungssatzes T-9.4 folgende Zerlegungen ausführen:

$p(F_1 \mid H K_1) = 1 - p(\overline{F}_1 \mid H \overline{K}_1)p(\overline{F}_1 \mid K_1 \overline{H}).$

$p(F_2 \mid K_1 J_1 H) = 1 - p(\overline{F}_2 \mid H J_1 \overline{K}_1)p(\overline{F}_2 \mid K_1 \overline{H}).$

$p(F_3 \mid K_2 H) = 1 - p(\overline{F}_3 \mid H \overline{K}_2)p(\overline{F}_3 \mid K_2 \overline{H}).$

$$p(\overline{F}_4 \mid K_2 H) = 1 - p(F_4 \mid K_2 H)$$
$$= 1 - [\, 1 - p(\overline{F}_4 \mid H\overline{K}_2)p(\overline{F}_4 \mid K_2\overline{H})\,]$$
$$= p(\overline{F}_4 \mid H\overline{K}_2)p(\overline{F}_4 \mid K_2\overline{H}).$$
$$p(F_5 \mid K_3\overline{J}_2 H) = 1 - p(\overline{F}_5 \mid H\overline{K}_3)p(\overline{F}_5 \mid K_3\overline{J}_2\overline{H}).$$

Um für das angegebene Beispiel auch hier eine klare Übersichtlichkeit zu bewahren, wurden diese Zerlegungen nicht ausgeführt, sondern es wurden die Zahlenwerte unmittelbar den nicht zerlegten Wahrscheinlichkeiten zugewiesen.
In praxi liefern jedoch erst die Faktorisierungssätze T-9.4 und T-9.12 solche Wahrscheinlichkeiten, deren relative Häufigkeiten anhand von Stichproben auch ermittelt werden können, die also die Aufstellung genügend guter repräsentativer Stichproben ermöglichen.

Abschlußbemerkung

Es ist problematisch, die im Verlauf eines medizinischen Diagnoseprozesses angehäuften Daten und Meßwerte ohne Hilfsmittel überblicken und werten zu wollen. Ein Diagnose-Expertensystem, aufgebaut nach den Grundsätzen des hier vorgestellten Verfahrens, das kausale Strukturen berechnet und für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten konkrete Zahlenwerte ermittelt, kann eine entscheidende Hilfe geben.

11. Anhang

Verdeckte Ursachen

Bei Anwendung der Faktorisierungssätze T-9.4 und T-9.12 wird stets vorausgesetzt, daß keine verdeckten und damit unberücksichtigten Ursachen existieren. Ist jedoch (in der Terminologie der vorangehenden Sätze) $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) > 0$, und wendet man dennoch die Faktorisierungssätze an, so ist das erreichte Ergebnis als eine Näherung anzusehen. Mit vertretbarem Aufwand kann jedoch die Differenz ermittelt werden, die sich bei Anwendung der Faktorisierungssätze im Fall $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) = 0$ und im Fall $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) > 0$ ergibt.

Satz

Faktorisierungssatz T-11.1 *(Glg.9.4 bei verdeckten Ursachen)*

$\{H, K_1, ..., K_n\}$ sei die Menge der bekannten Ursachen eines beliebigen Ereignisses F_1. Es existieren unbekannte Ursachen von F_1, die unter der Bezeichnung K_y zusammengefaßt werden. Alle Ursachen sind selbständige Ursachen von F_1. Exemplarisch seien $I_1,..., I_r$ die Inhibitoren von $K_1 \rightarrow F_1$ und $J_1,..., J_s$ die Inhibitoren von $K_2 \rightarrow F_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(\overline{F}_1 \mid H K_1 ... K_n I_1 ... I_r J_1 ... J_s) = \; & p(\overline{F}_1 \mid H \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) \qquad (11.1) \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 ... \overline{K}_n I_1 ... I_r) \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n J_1 ... J_s) \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 ... \overline{K}_n) \\ & \vdots \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n) \cdot f, \end{aligned}$$

mit $f = \dfrac{1}{\left(p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)\right)^{m-1}}$ *und* $m :=$ *Anzahl der Elemente in* $\{H, K_1,...,K_n\}$.

Der Wert von $p(\overline{F}_1 \mid H K_1 ... K_n I_1 ... I_r J_1 ... J_s)$ für $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) > 0$ beträgt das f-fache des Ergebnisses von Glg.9.4, $f \geq 1$.

<u>*Beweis:*</u>

$$p(F_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)$$

$$= p[(H \to F_1) \vee (K_1 \to F_1) \vee .. \vee (K_n \to F_1) \vee (K_y \to F_1) \mid HK_1...K_nI_1..I_rJ_1..J_s]$$

$$= 1 - p[\overline{(H \to F_1)} \wedge ... \wedge \overline{(K_n \to F_1)} \wedge \overline{(K_y \to F_1)} \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s]$$

$$= 1 - [\, 1 - p(H \to F_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)\,]$$

$$\cdot[\, 1 - p(K_1 \to F_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)\,]$$

$$\vdots$$

$$\cdot[\, 1 - p(K_n \to F_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)\,]$$

$$\cdot[\, 1 - p(K_y \to F_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)\,]. \qquad (*)$$

Der letzte Faktor wird wie folgt umgeformt:

$$1 - p(K_y \to F_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)$$

$$= \; 1 - p(K_y \to F_1) \qquad \text{(}K_y\text{ ist selbständige Ursache)}$$

$$= 1 - p[(K_y \to F_1) \wedge p(K_y)] \qquad \text{(wegen Glg.7.1)}$$

$$= 1 - p(K_y \to F_1 \mid K_y)p(K_y)$$

$$= 1 - p(K_y \to F_1 \mid K_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)p(K_y)$$

$$= 1 - \frac{p(F_1 \mid K_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{K}_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{K}_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)}\, p(K_y) \qquad \text{(A}\to\text{L-Satz)}$$

$$= 1 - p(F_1 \mid K_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)p(K_y)$$

Behauptung: $p(F_1 \mid K_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)p(K_y) = p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)$.

Beweis: Falls F_1 existiert, dann ist $p(K_y \mid F_1\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n) = 1$.

$$\Rightarrow \qquad p(K_y) = \frac{p(K_y)}{p(K_y \mid F_1\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)}$$

$$= \frac{p(K_y \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(K_y \mid F_1\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)} \qquad \text{(Selbständigkeit)}$$

$$= \frac{p(K_y\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)p(F_1\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(K_yF_1\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)p(\overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)}$$

(nächste Seite)

$$= \frac{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}{p(F_1 \mid K_y \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}, \text{ d.h. die Behauptung.}$$

Mit diesem Ergebnis wird Glg.(*) wie folgt fortgesetzt:

$$= 1 - [\, 1 - p(H \to F_1 \mid H\overline{K}_1 ... \overline{K}_n)\,]$$

$$\cdot [\, 1 - p(K_1 \to F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 ... \overline{K}_n I_1 ... I_r)\,]$$

$$\cdot [\, 1 - p(K_2 \to F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n J_1 ... J_s)\,]$$

$$\cdot [\, 1 - p(K_3 \to F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 ... \overline{K}_n)\,]$$

$$\vdots$$

$$\cdot [\, 1 - p(K_n \to F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n)\,] \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \cdot ... \cdot \overline{K}_n)$$

$$= 1 - \frac{p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}$$ (siehe Beweis zu Satz T-9.4)

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 ... \overline{K}_n I_1 ... I_r)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n J_1 ... J_s)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 ... \overline{K}_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}$$

$$\vdots$$

$$\cdot \frac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)} \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \cdot ... \cdot \overline{K}_n)$$

$$= 1 - p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1 ... \overline{K}_n)$$

$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2 ... \overline{K}_n I_1 ... I_r)$$

$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 ... \overline{K}_n J_1 ... J_s)$$

$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 ... \overline{K}_n)$$

$$\vdots$$

$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n) \cdot \frac{1}{\left(p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)\right)^{n-1}}.$$ □

Der Satz T-11.1 sagt aus, daß der Gebrauch der Glg.11.1 anstelle der Glg.9.4 den Wert von $p(\overline{F}_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)$ um den Faktor f erhöht.

Als ein Beispiel wählen wir $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n) := 0.01$ und $m := 11$, wodurch sich $f = [p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n)]^{-10} = 0.99^{-10} = 1.1057$ ergibt. Das bedeutet, daß der Wert von $p(\overline{F}_1 \mid HK_1...K_nI_1...I_rJ_1...J_s)$ um 10.6% zunimmt, falls man bei Gültigkeit von $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n) := 0.01$ die Glg.11.1 und nicht die Glg.9.4 verwendet.

Satz

Faktorisierungssatz T-11.2 (Glg.9.12 bei verdeckten Ursachen)

$\{H, K_1, ..., K_n\}$ bezeichnet die Menge der bekannten Ursachen eines beliebigen Ereignisses F_1. Es existieren unbekannte Ursachen, die $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_n) > 0$ nach sich ziehen.

Alle F_1-erzeugenden Ereignisse sind selbständige Ursachen.

$I_1, ..., I_r$ sind die Inhibitoren von $K_1 \to F_1$ und $J_1, ..., J_s$ sind die Inhibitoren von $K_2 \to F_1$. Die Selbständigkeitsvoraussetzung für Inhibitoren sei erfüllt.

Folgende Symbole werden verwendet:

$$\mathrm{i}_1 := \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}, ..., \quad \mathrm{i}_r := \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_r)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)},$$

$$\mathrm{j}_1 := \frac{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_nJ_1)}{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_n)}, ..., \mathrm{j}_s := \frac{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_nJ_s)}{p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_n)}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(\overline{F}_1 \mid H K_1 ... K_n I_1 ... I_r J_1 ... J_s) = \; & p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1...\overline{K}_n) \\ & \cdot [1 - p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) \cdot i_1...i_r]^* \\ & \cdot [1 - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_n) \cdot j_1...j_s]^* \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1\overline{K}_2K_3\overline{K}_4...\overline{K}_n) \\ & \vdots \\ & \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1...\overline{K}_{n-1}K_n) \cdot f^*. \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Hierbei bedeuten:

[1 - $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r]^*$ *erhält man aus*

[1 - $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r]$ *durch die folgenden Ersetzungen:*

$$p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) \text{ ersetzt durch } \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)},$$

$$i_1 := \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)} \text{ ersetzt durch } \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}.$$

$i_2,...,i_r$ *entsprechend.*

[1 - $p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1K_2\overline{K}_3...\overline{K}_n)\cdot j_1...j_s]^*$ *erhält man mit einer analogen Prozedur.*

$$f^* = \frac{1}{\left(p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)\right)^{m^*-1}} \text{ mit } m^* := \text{Anzahl der Faktoren in Glg. 11.2 ohne [ ].}$$

<u>Beweis:</u>

Die Ersetzung von $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)$ ergibt sich aus dem A→L-Satz,

die Ersetzung von $i_1 := \dfrac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n)}$ folgt aus Glg.9.10,

der Faktor f^* folgt aus Glg.11.1. □

Wegen

$$p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) > \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)} \tag{11.2a}$$

und

$$\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n)} > \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)} \tag{11.2b}$$

ist [1 - $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r$] < [1 - $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r]^*$. Dies gilt, da $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)$ und $i_1,..., i_r$ stets durch kleinere Werte ersetzt werden.

Selbstverständlich ist der Faktorisierungssatz T-11.2 ausgesprochen unhandlich. Deshalb folgen die Näherungen T-11.3 und T-11.4.

Satz

Faktorisierungssatz T-11.3 (Näherung für T-11.2)

Es gelten dieselben Bezeichnungen wie im Faktorisierungssatz T-11.2. Dann kann Glg.11.2 wie folgt approximiert werden:

$$p(\overline{F}_1 \mid H K_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s) \approx p(\overline{F}_1 \mid H \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) \qquad (11.3)$$
$$\cdot [1 - p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) \cdot i_1 \ldots i_r \cdot f_{K_1}]$$
$$\cdot [1 - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 K_2 \overline{K}_3 \ldots \overline{K}_n) \cdot j_1 \ldots j_s \cdot f_{K_2}]$$
$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \overline{K}_2 K_3 \overline{K}_4 \ldots \overline{K}_n)$$
$$\vdots$$
$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_{n-1} K_n) \cdot f^*.$$

Der erste Ausdruck in eckigen Klammern, der ausgeschrieben

$$[1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}{1} \frac{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_1)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)} \cdots \frac{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_r)}{p(F_1 \mid K_1 \overline{H} \cdot \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)} f_{K_1}]$$

lautet, enthält den Faktor

$$f_{K_1} := \prod_{\lambda} \left(\frac{num(q_\lambda) - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{num(q_\lambda)} \right),$$

wobei $num(q_\lambda)$ den Zähler (engl.: numerator) des λ-ten Quotienten bezeichnet. Alle weiteren Ausdrücke in eckigen Klammern erhalten ihren Faktor auf entsprechende Weise.

Beweis:

Der Ausdruck

$$[1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}{1} \frac{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_1)}{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)} \cdots\cdots \frac{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n I_r)}{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)}]$$

enthält die Wahrscheinlichkeit $p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n)$, die im Fall verdeckter Ursachen durch $\dfrac{p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n)}$ ersetzt wird.

Wir setzen $p(F_1 \mid \overline{H} K_1 \overline{K}_2 \ldots \overline{K}_n) := 0.75$, $p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 \ldots \overline{K}_n) := x$ und betrachten

$$y_1 = \frac{0.75 - x}{1 - x} \text{ sowie } y_2 = 0.75 - x\ .$$

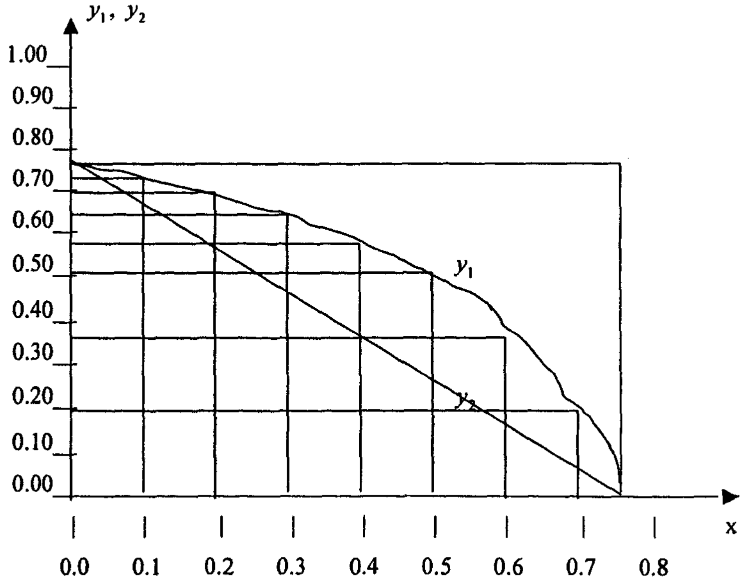


Abb.11.1:

Näherung von $y_1 = \dfrac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}$ durch

$$y_2 = p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n).$$

Wegen (11.2a) und Abb.11.1 gilt:

$$p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) > \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}$$

$$> p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n).$$

Deshalb vergrößert sich

$$[1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}{1} \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)} \cdots\cdots \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_r)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}],$$

falls $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)$ durch $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)$ ersetzt wird.

Diese Ersetzung ist gleichwertig zu einer Multiplikation von $p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)$ mit dem Faktor $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}$, da gilt:

$$p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)$$

$$= p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\ \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}.$$

Der Faktor $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}$ selbst kann in der Form

$\frac{num(q_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{num(q_1)}$ geschrieben werden.

Wir untersuchen nun $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n I_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}$, das die nächste Ersetzung bildet. Um ein ähnliches Beispiel wie in Abb.11.1 zu geben, setzen wir

$p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n) := 0.75,$

$p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n) := x,$

$p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1) := 0.5$

und betrachten $y_1 = \frac{0.5-x}{0.75-x}$ sowie $y_2 = \frac{0.5-x}{0.75}$.

Wertetabelle:

x	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
y_1	0.67	0.62	0.55	0.44	0.29	0.00

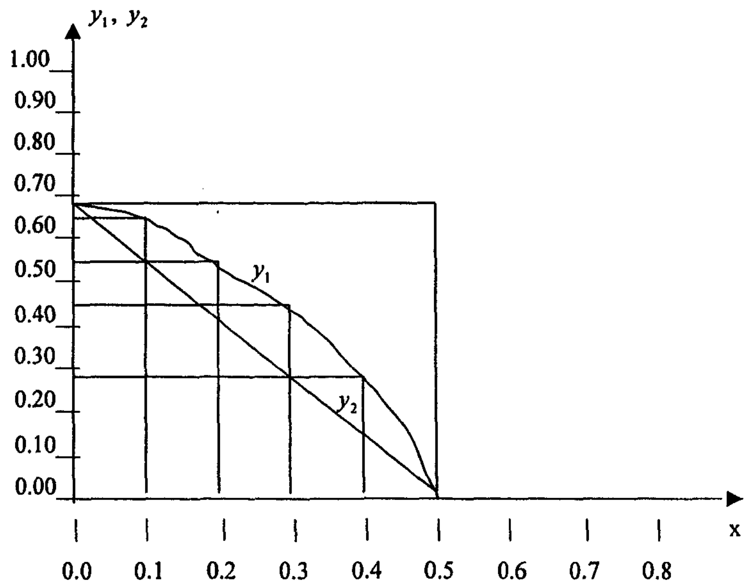


Abb.11.2:

Näherung von $y_1 = \dfrac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}$ durch

$$y_2 = \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n)}.$$

Wegen (11.2b) und Abb.11.2 gilt:

$$\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)} > \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}$$

$$> \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_nI_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n)}.$$

Deshalb vergrößert sich

$$[1 - \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}{1}\,\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}\;.....\;\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_nI_r)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}],$$

falls $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}$ durch $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n I_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n)}$ ersetzt wird.

Die Ersetzung ist gleichwertig zu einer Multiplikation von $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)}$

mit dem Faktor $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}$, da gilt:

$$\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n I_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1..\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2..\overline{K}_n)}$$

$$= \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)} \frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}.$$

Der Faktor $\frac{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n I_1)}$ selbst kann in der Form

$\frac{num(q_2) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{num(q_2)}$ geschrieben werden. □

Satz

Faktorisierungssatz T-11.4 (Näherung für T-11.3)

Es gelten dieselben Bezeichnungen wie in T-11.2 und T-11.3. Dann gilt für Glg. 11.3 folgende Näherung:

$$p(\overline{F}_1 \mid H K_1 \ldots K_n I_1 \ldots I_r J_1 \ldots J_s) \approx p(\overline{F}_1 \mid H\overline{K}_1...\overline{K}_n) \qquad (11.4)$$

$$\cdot [1 - p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r]$$

$$\cdot [1 - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1 K_2\overline{K}_3...\overline{K}_n)\cdot j_1...j_s]$$

$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1\overline{K}_2 K_3\overline{K}_4...\overline{K}_n)$$

$$\vdots$$

$$\cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_{n-1}K_n)\cdot\frac{f^*}{f_{K_1}\cdot f_{K_2}}.$$

Beweis:

Die Glg.11.3 enthält den Ausdruck $[\ 1 - p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r \cdot f_{K_1}]$, der in die Form $[1 - a\cdot f]$ umgeschrieben wird, mit den Abkürzungen

$a := p(F_1 \mid \overline{H}K_1\overline{K}_2...\overline{K}_n)\cdot i_1...i_r$,

$f := f_{K_1}$.

Wir betrachten die Funktionen $y_1 = 1 - a\cdot f$, $y_2 = \frac{1-a}{f}$, $y_3 = \frac{1-a}{f^{\frac{1}{2}}}$ mit a:= 0.5.

Wertetabelle:

f	$f^{\frac{1}{2}}$	$y_1 = 1 - a\cdot f$	$y_2 = \frac{1-a}{f}$	$y_3 = \frac{1-a}{f^{\frac{1}{2}}}$
1	1	0.50	0.5000	0.5000
0.98	0.9899	0.51	0.5102	0.5051
0.96	0.9798	0.52	0.5208	0.5103
0.94	0.9695	0.53	0.5314	0.5157
0.92	0.9592	0.54	0.5435	0.5213
0.90	0.9487	0.55	0.5556	0.5270
0.88	0.9381	0.56	0.5682	0.5330
0.86	0.9274	0.57	0.5814	0.5391
0.84	0.9165	0.58	0.5952	0.5456
0.82	0.9055	0.59	0.6098	0.5522
0.80	0.8944	0.60	0.6250	0.5590

Wir werden $[1 - a\cdot f\,]$ durch $[\frac{1-a}{f}]$ ersetzen; $[\frac{1-a}{f^{\frac{1}{2}}}]$ bleibt ungenutzt.

Die nachfolgende Abbildung gibt einen Überblick.

Es gilt $f \le 1$; f liegt nahe bei 1, da $f_{K_1} := \prod_{\lambda}\left(\frac{num(q_\lambda) - p(F_1 \mid \overline{H}\cdot\overline{K}_1...\overline{K}_n)}{num(q_\lambda)}\right)$.

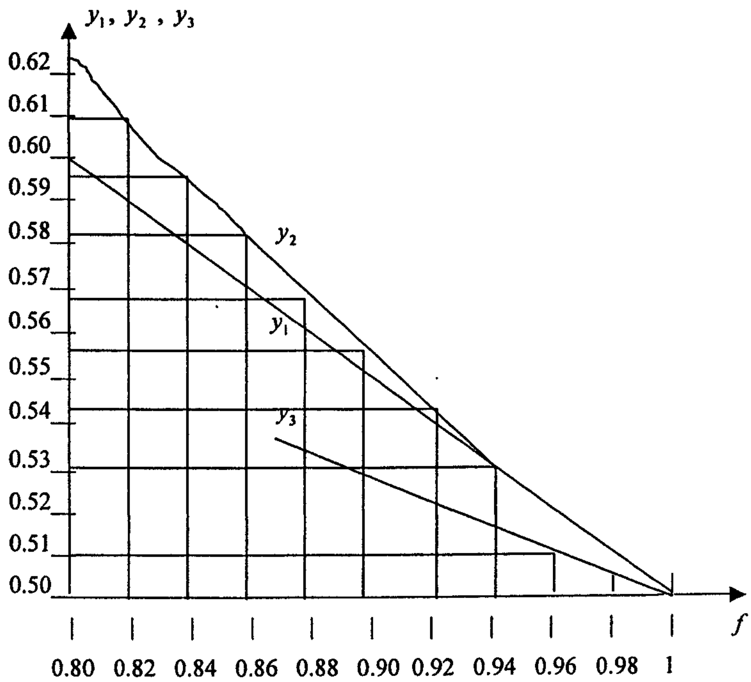


Abb.11.3:

Näherung von $y_1 = 1 - a \cdot f$ durch $y_2 = \frac{1-a}{f}$ oder $y_3 = \frac{1-a}{f^{\frac{1}{2}}}$ für a:= 0.5.

Die Ersetzung von $[1 - a \cdot f]$ durch $[\frac{1-a}{f}]$ ist eine von mehreren Wahlmöglichkeiten. Man kann Ausdrücke der allgemeineren Form $[\frac{1-a}{f^t}]$ verwenden, um $[1 - a \cdot f]$ zu ersetzen. Die hier für t getroffene Wahl ist $t := 1$. □

Zusammenstellung der Bezeichnungen

A	Einzelereignis, oder auch: beliebig gewählter, aber feststehender Verbund aus unnegierten Ereignissen mit $A := (A_1 \dots A_k)$.
$\overline{A}$	Negiertes Ereignis. Das Ereignis A liegt mit Sicherheit nicht vor.
A'	'–Ereignis; siehe Definition in Kapitel 1, S. 20.
ap	ap-Wahrscheinlichkeit ist die Bezeichnung für den Spezialfall einer a-posteriori-Wahrscheinlichkeit, in deren Bedingung alle Ereignisse des betrachteten L-Netzes berücksichtigt sind. Die ap-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A' ist $p(A \mid A') := p(A \mid W(A)$.
$A \rightarrow L$	Kausaler Vorgang „A erzeugt L“. Ist $A := (A_1 \dots A_k)$, so bedeutet $[(A_1 \dots A_k) \rightarrow L]$: „$A_1$ erzeugt L“ $\vee \dots \vee$ „A_k erzeugt L“. Synonym: Übergang.
$A.L$	Früher verwendete Bezeichnung für $A \rightarrow L$.
B	Verbund mit beliebigen unnegierten Elementen aus $URS(L) \setminus \{Elemente\ in\ A\}$.
C	Verbund mit beliebigen negierten Elementen aus $URS(L) \setminus \{Elemente\ in\ (A\ B)\}$.
D	Verbund mit beliebigen negierten oder unnegierten Elementen aus $INH(A \rightarrow L) \setminus URS(L)$.
$DIFF(H)$	Menge der von H verschiedenen Netzknoten, die unmittelbare Ursache für Elemente aus $FOL(H)$ sind. ($DIFF(H)$ umfaßt diejenigen Elemente, die z.B. bei Anwendungen in der Medizin differentialdiagnostisch zu H in Betracht zu ziehen sind.)
E_i	Ereignisse (evidences).
F	Verbund mit Elementen aus $FOL(H)$.
F_i	Ereignisse aus F.
$FOL(H)$	Menge der unmittelbaren Folgen von H.
H	Hypothese. H ist die zu Beginn wahrscheinlichste Ursache für eine vorgegebene Menge von Folge-Ereignissen.
h	Relative Häufigkeit.

I	Verbund mit Elementen aus $INH(Z)$.
$INH(A \to L)$	Menge der Ereignisse, die auf $A_1 \to L, \ldots, A_k \to L$ inhibitorisch wirken.
$INH(Z)$	Menge der Netzknoten, die über Schaltstellen die auf einen beliebigen Netzknoten Z hinführenden Kausalverbindungen inhibitorisch beeinflussen.
J	Verbund mit Elementen aus $\bigcup_{F_i \in F} INH(F_i)$.
K	Verbund mit Elementen aus $DIFF(H)$. (K erinnert an „konkurrierend zu H".)
K_1	Ereignis aus K.
L	Beliebiges Ereignis (Leitsymptom).
$p(A \mid A')$	ap-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A'.
$p(A \to L \mid A)$	Wahrscheinlichkeit des Übergangs $A \to L$ unter der Bedingung A.
q_i	Variable, die den Wert 0 oder 1 annehmen kann.
R_1, R_3	Ereignisse aus $URS(K_1)$ bzw. $URS(K_3)$. (Repräsentanten.)
U	Verbund mit Elementen aus $URS(H)$.
$URS(H)$	Menge der unmittelbaren Ursachen des beliebigen Ereignisses H.
$V_{E_i'}$	Verbund, der aus $(E_1 \ldots E_h E_{h+1}' \ldots E_i' \ldots E_k')$ dadurch entsteht, daß man E_i' sowie beliebige weitere Elemente entfernt, $i \in N$.
$WERT(H)$	Menge aller Ereignisse mit potentiellem Einfluß auf die ap-Wahrscheinlichkeit von H (Wertungsumgebung von H).
$W(H)$	Verbund aus den Elementen von $WERT(H)$.
X	Beliebiger Verbund mit negierten oder unnegierten Ereignissen aus $URS(L) \setminus \{Elemente\ in\ A\}$.
$\hat{X}$	Beliebiger Verbund mit beliebigen negierten oder unnegierten Ele- aus $URS(L) \setminus \{Elemente\ in\ (A\ B\ C)\}$.

LITERATUR *(In chronologischer Reihenfolge)*

[DHN81] ***DUDA, R.O.; P.E. HART; N.J. NILSSON: Subjective Bayesian methods for rule-based inference systems. In: WEBER, B.L.; N.J. NILSSON (eds.): Readings in artificial intelligence. Tioga Publ., Palo Alto Calif. (1981), pp. 192 - 199.***

Einige Autoren kritisieren, daß die Gleichung (ebd. S. 194)

$$P(H \mid E') = P(H \mid E,E')P(E \mid E') + P(H \mid \overline{E},E')P(\overline{E} \mid E')$$

nur dann die Form

$$P(H \mid E') = P(H \mid E)P(E \mid E') + P(H \mid \overline{E})P(\overline{E} \mid E') \qquad (*)$$

erreicht, falls H and E' unter der Bedingung E unabhängig sind. Dieser Einwand ist gerechtfertigt. Es wurde zudem mit Glg.4.7 in Kapitel 4 gezeigt, daß

$p(H \mid U_1\ I_1\ I_2\ U_2'\ U_3'\ U_2\ U_3) \ = \ p(H \mid U_1\ I_1\ I_2\ U_2\ U_3)$

nur gilt, falls H und $(U_2'\ U_3')$ bei vorliegendem $(U_1\ I_1\ I_2\ U_2\ U_3)$ unabhängig sind. Die Kritik verliert jedoch ihre Berechtigung unter dem Aspekt, daß keine Gleichheit sondern lediglich eine Interpolation gefordert wird. Dann also kann man sich auf (*) beziehen, nicht zuletzt weil auch bewiesen werden konnte, daß (*) im Allgemeinen Interpolationstheorem als Sonderfall enthalten ist (Glg.4.1).

[BS84] ***BUCHANAN, B.G.; E.H. SHORTLIFFE: Rule-based inference systems. Addison-Wesley, Massachusetts (1984).***

Dieses Buch ist eine der frühesten Publikationen zur Problematik der Diagnose-Epertensysteme. Es zeigt sehr klar, daß eine Fortsetzung der Diskreten Stochastik nahezu unumgänglich ist, falls bessere Hilfsmittel als nur das Bayes-Theorem eingesetzt werden sollen. Von dieser Aufgabe haben wir uns inspirieren lassen und ebenfalls versucht, zur Diskreten Stochastik einige Aussagen hinzuzufügen.

Die folgende Veröffentlichung [Ada84] zeigt auf, daß die Autoren nicht allzu erfolgreich waren, eine Fortsetzung der Diskreten Stochastik zu bewerkstelligen. In

In [Ada84, p.270] gibt J. Barclay Adams das folgende Statement:

“The fact that in trying to create an alternative to probability theory or reasoning

Shortliffe and Buchanan duplicated the use of standard theory demonstrates the difficulty of creating a useful and internally consistent system that is not isomorphic to a portion of probability theory".

[Ada84] ***ADAMS, J.B.: A probability model of medical reasoning and the MYCIN model. In [BS84, Chapter 12].***

Die Aussagen von J. Barclay Adams im Hinblick auf das MYCIN Modell sind klar und detailliert. Leider gibt er jedoch an keiner Stelle einen Hinweis, wie das Modell zu verbessern wäre.

[Pea86] ***PEARL, J.: Fusion, propagation and structuring in belief networks. Artificial Intelligence $\underline{29}$ (1986), pp. 241 – 287.***

Der Autor betrachtet ein Tripel x_1, x_2, x_3, wobei x_1 über x_2 mit x_3 verbunden ist (ebd. S. 248). "The two links, connecting the pairs (x_1, x_2) and (x_2, x_3), can join at the midpoint, x_2, in one of three possible ways

(1) $x_1 \leftarrow x_2 \rightarrow x_3$,

(2) $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$ or $x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3$,

(3) $x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow x_3$."

Diese Konfigurationen werden im Hinblick auf die Unabhängigkeit von x_1 und x_3 bei gegebenem x_2 diskutiert. Dadurch steht die Notwendigkeit einer eingehenden Betrachtung der Äquivalenz von Kausalität und Unabhängigkeit außer Frage. (Diesem Thema haben wir ein gesondertes Kapitel gewidmet (Kapitel 5).)
Auf S. 248 behandelt der Autor separierte Ereignisse und gibt so einen weiteren Beitrag hinsichtlich "a graphical criterion for testing conditional independence". Das Pearl-Buch befaßt sich jedoch leider nicht mit Netzknoten unbekannter Wahrscheinlichkeit. (Wir berücksichtigen Ereignisse mit bekannter sowie unbekannter Wahrscheinlichkeit, und im Verlauf des Kapitels 4 erfolgt die Diskussion der zugehörigen Separationsmechanismen.)
Der Autor benennt auch eine „screening neighbourhood" (ebd. S. 249). Sie besteht aus "direct parents, direct successors and all direct parents of the latter." Nach unserer Meinung ist dies nicht die vollständige Menge der Wertungsumge-

bung. Zum Beispiel ist unabweisbar, daß eine kausale Zuordnung $A \rightarrow B$ durch ein Ereignis C beeinflußt werden kann, wenn C einen Inhibitor von $A \rightarrow B$ bezeichnet. C ist jedoch kein Element der oben genannten „screening neighbourhood".
Beginnend mit S. 250 enthält das Buch eine Beschreibung von „belief propagation in belief trees". Wir sind dieser Methode nicht gefolgt, sondern haben eine algebraische Lösung unter Anwendung nicht-linearer Gleichungssystem favorisiert.

[BS96] ***BAXT, W.G.; J. SKORA: Prospective validation of artificial neural network trained to identify acute myocardial infarction. Lancet 347 (1996), pp. 12 – 15.***
Diese Veröffentlichung beschreibt eines der wenigen medizinischen Diagnose-Expertensysteme, die sich in praktischem Einsatz befinden. Die verwendete Methode ist die Gauß'sche Minimierung der Fehlerquadrate, die sich von unserem Ansatz gänzlich unterscheidet, und die deshalb nicht adoptiert wurde.

[Lie91] ***LIEBEL, F.-P.: Wahrscheinlichkeit der Entstehung eines Folgezustands aus einer vorhandenen Ursache. In: Österreichische Zeitschrift für Statistik und Informatik (ZSI), 21. Jg. (1991), Heft 3 – 4, S. 125 – 146.***
Originalpublikation des A→L-Satzes und des A→L-Korollars 1.

[Lie99-Pat] ***LIEBEL, F.-P.: Verfahren zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten pathophysiologischer Zustände als Zwischenergebnisse der Diagnosefindung. European Patent Office, Patent Application No. 99105884.3–2201/ 1026616, date of receipt March 24, 1999.***
Für das Expertensystem „Berechnung kausaler Strukturen" bestehen die europäischen Patentanmeldungen 91104386.7 (1991) und 99105884.3 (1999).

[Lie99-Eng] ***LIEBEL, F.-P.: Computation of Causal Networks. Pabst Verlag Köln (2002).***
Die englische Übersetzung des Buches.

Der Autor

Dipl. Inform. Dr. phil. Franz-Peter Liebel.
Geboren und aufgewachsen in Stuttgart.
Studium der Mathematik und Informatik in Göttingen, Frankfurt/Main, München, Köln, Hagen und Bielefeld.
Promotion zum Dr. phil. mit dem hier vorgestellten Thema, das der Theoretischen Informatik oder der Bioinformatik zugeordnet werden kann.
Derzeitiges Arbeitsgebiet: Stoffwechselerkrankungen, kausale Strukturierung pathophysiologischer Prozesse.
In Bielefeld seit 1990.

Postanschrift

Institut für Sportmedizin – Training und Gesundheit –
der Universität Bielefeld
c/o Prof. Dr. E. Zimmermann
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld

Danksagung

Mein Dank gilt Frau Prof. Dr. E. Zimmermann, die den Anstoß zu diesem Buch gegeben hat, und durch deren organisatorische Mitwirkung die Erstellung erheblich beschleunigt wurde.

Besonders danke ich Herrn Prof. Dr. Ph. Blanchard, Universität Bielefeld, für die von Anbeginn wohlwollende Haltung zu dem Projekt und für die veranlaßte Herausgabe eines Preprints durch das Forschungszentrum Bielefeld-Bochum-Stochastik.

Herrn Dr. W. Meyer, Kernforschungszentrum Jülich, danke ich für die Durchsicht einer frühen Version und für die Hinweise bei unklaren mathematischen Formulierungen.

Bielefeld, 15. März 2002

Dr. F.-P. Liebel

Errata

Berechnung kausaler Strukturen

Deutsche Fassung

ISBN 3-89967-011-6

Seite 116, Zeile 13:

Streiche: $= 1 - p[(K_y \rightarrow F_1)p(K_y)]$

Setze: $= 1 - p[(K_y \rightarrow F_1)(K_y)]$

Seite 116, Zeile 18:

Streiche: Behauptung: $1 - p(F_1 \mid K_y \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) p(K_y) = p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)$.

Setze: Behauptung: $p(F_1 \mid K_y \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n) p(K_y) = p(F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)$.

Seite 117, Zeile 8:

Streiche: $\cdot [1 - p(K_n \rightarrow F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n)]$

Setze: $\cdot [1 - p(K_n \rightarrow F_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n)] \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)$.

Seite 117, Zeile 14:

Streiche: $\cdot \dfrac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)}$

Setze: $\cdot \dfrac{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_{n-1} K_n)}{p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)} \cdot p(\overline{F}_1 \mid \overline{H} \cdot \overline{K}_1 ... \overline{K}_n)$.

Die Berichtigungen ermöglichen es, auf Seite 117, Zeile 20 den korrekten Wert für f unmittelbar nachvollziehen zu können.