Ipke Wachsmuth

Mathematische Fertigkeiten und Mathematikverständnis

verlag franzbecker

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Wachsmuth, Ipke:

Mathematische Fertigkeiten und mathematisches Verständnis / I. Wachsmuth. — Bad Salzdetfurth : Franzbecker, 1985.

ISBN 3-88120-091-6

ISBN 3-88 120-091-6 verlag barbara franzbecker

VORWORT

In den letzten Jahren ist in Nordamerika auf dem Gebiet der mathematisch-naturwissenschaftlichen Erziehung eine verstärkte Diskussion um die Bereiche "Fertigkeiten" (skills), "Verständnis" (understanding) und "Problemlösen" (problem solving) geführt worden, die ihren Niederschlag gefunden hat in Forschungsprogrammen und Curriculumsempfehlungen. Die neuere Lern- und Wissenspsychologie trägt hierzu eine Fülle von Erkenntnissen bei, die für ein besseres Verständnis der Lernvorgänge und des kognitiven Verhaltens von Schülern im Unterricht von Bedeutung sind. Eine Auseinandersetzung mit diesen Dingen im Rahmen der Mathematikdidaktik erscheint sinnvoll und notwendig. Im vorliegenden Buch wurde dabei die Behandlung von "mathematischen Fertigkeiten" und "Mathematikverständnis" mit ihren wechselseitigen Beziehungen in den Vordergrund gestellt.

Das Manuskript zu dem Buch entstand im Verlauf einer einsemestrigen Vorlesung mit Seminarcharakter zu "Speziellen Fragen der Didaktik der Mathematik" im Wintersemester 1983/84 an der Universität Osnabrück. Die Veranstaltung war in erster Linie auf die Bedürfnisse von Gymnasial- und Realschullehrerkandidaten zugeschnitten, jedoch wurde der Rahmen weiter gezogen und zum Teil auch auf angrenzende Themen eingegangen. Es wurde der Versuch unternommen, verschiedene, oft unabhängig vorangetriebene Ansätze mit Bedeutung für die behandelte Thematik zu integrieren. Vieles, was nicht direkt auf mathematische Kontexte zugeschnitten war, wurde fachspezifisch umgesetzt.

Das Buch kann in drei Teile gegliedert werden. In den Abschnitten 1 - 7 liegt das Gewicht auf der Konkretisierung und Diskussion von Gedanken zu mathematischen Fertigkeiten. In Abschnitt 8 beginnt die nähere Auseinandersetzung mit dem Verständnisbegriff in der Mathematik, die bis zur Behandlung der Rolle von Sprache (Abschnitt 13) geführt wird. In den Abschnitten 14 und 15 wird auf zwei Ansätze eingegangen, die sich unter Bezug auf kognitionspsychologische Modellbildungen mit der Schulung von Problemlösefertigkeiten befassen. Im letzten Abschnitt wird schließlich der Versuch unternommen, die gewonnenen Einsichten unter dem Gesichtspunkt ihrer Relevanz für den Schulalltag auszuwerten.

Literaturangaben finden sich jeweils am Ende des Abschnitts ihrer erstmaligen Erwähnung. Sämtliche Literaturzitate wurden vom Verfasser ins Deutsche übertragen. Ein Namensregister wurde angefügt; kursivgedruckte Seitenzahlen verweisen dabei auf angegebene Literaturstellen.

Ich danke den Studenten und Kollegen, die mich zur Niederschrift des Manuskripts ermutigt haben.

Osnabrück, Herbst 1984 Ipke Wachsmuth

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINFÜHRUNG

1.1 Fertigkeiten

Eine Fertigkeit ist, was jemand in der Lage ist zu *tun*, d.h. die Fähigkeit, bestimmte Handlungen oder Folgen von Handlungen (motorische oder kognitive) auszuführen.

Beispiele für Fertigkeiten:

- motorische: Schreibmaschine schreiben
- mechanische: Alphabet aufsagen
- kognitive: Satzbau beim Sprechen

Mathematische Fertigkeiten sind in der Regel spezielle kognitive Fertigkeiten.

Beispiele für mathematische Fertigkeiten:

- Additionsalgorithmus ausführen
- Hauptnenner finden
- Gleichungssystem lösen
- Funktion differenzieren
- Satz beweisen

Wir werden später sehen, daß es verschiedene Arten gibt, solche Fertigkeiten auszuführen: unter bewußter Kontrolle der einzelnen Schritte oder aber mehr oder weniger "automatisch". Dieses wird für eine hier vertretene These über das Zusammenspiel von mathematischen Fertigkeiten und Mathematikverständnis von Bedeutung sein.

1.2 Verständnis

Eine Sache verstehen heißt, vereinfacht ausgedrückt, sie in eigene geistige Kategoriensysteme einordnen zu können. Manche solche Kategoriensysteme sind möglicherweise angeboren, z.B. kann ein weinendes Baby durch geeignete Zusprache beruhigt werden; es "versteht" vermutlich die Lautmelodie als Ausdruck der Geborgenheit. Die meisten Kategoriensysteme sind *erlernt*, d.h. in der

Wechselwirkung des Individuums mit der Welt in die geistige Struktur eingebettet worden.

Beispiele für Kategoriensysteme als Grundlage von Verständnis:

- Kenntnis einer Harmonielehre zum Verstehen eines Musikstücks
- der Energieerhaltungssatz zum Verstehen der Achterbahn
- Kommutativ- und Assoziativgesetz sowie das Stellenwertsystem zum Verstehen des Additionsalgorithmus
- Kenntnis von Dingen der Welt und von der Prozentrechnung zum Verstehen einer Textaufgabe wie der folgenden:

  "Im Schlußverkauf wird ein Paar Stiefel als 30 % reduziert angeboten. Der Ladenpreis war vorher DM 139.- Gerd hat noch "einen Blauen" im Portemonnaie. Kann er sich die Stiefel kaufen?"

Später werden wir den Begriff "Verständnis" bzw. "Verstehen" noch präzisieren. Zum Verständnis der Achterbahn etwa spielt sicherlich eine Rolle, daß man das Trägheitsgesetz und den Energieerhaltungssatz nicht nur mathematisch begriffen, sondern auch "am eigenen Leibe" erfahren hat und im Geist eine Fahrt simulieren kann. Und auch beim Lösen der obigen Textaufgabe kommen verschiedene Arten des Verstehens zum Tragen: Eine beinhaltet das anfängliche Verstehen der Aufgabenstellung, das die Konstruktion einer geistigen Repräsentation erfordert, in der die Problemlösung vorangetrieben werden kann. Eine andere beinhaltet das Verstehen der errechneten Lösung oder das Verstehen der verwendeten Operationen und Verfahren.

1.3 Übungen

1. Überlegen Sie sich fünf weitere (möglichst konkrete) Beispiele für mathematische Fertigkeiten vom Grundschul- bis zum Universitätsniveau.

2. Überlegen Sie, welche der von Ihnen genannten Fertigkeiten Sie automatisch ("im Schlaf") und welche nur unter bewußter Beobachtung Ihres Vorgehens ausführen können.

3. Führen Sie eine Ihrer automatisch beherrschten Fertigkeiten unter bewußter Beobachtung jedes einzelnen Schritts tatsächlich durch und überlegen sich dabei jeweils seine mathematische Begründung.

4. Versuchen Sie, zwei zwanzigstellige Zahlen schriftlich zu multiplizieren und beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.

5. Finden Sie ein Beispiel eines angeborenen Kategoriensystems.

6. Finden Sie drei Beispiele (mindestens ein mathematisches) von erworbenen Kategoriensystemen, die Ihnen ermöglichen, etwas zu verstehen.

7. Lösen Sie die folgende Textaufgabe und beobachten Sie dabei möglichst genau, wie Sie vom Aufbau eines anfänglichen Verständnisses bis zur Lösung vorangehen. Versuchen Sie, Ihre einzelnen Schritte zu beschreiben.

   Aufgabe:

   Auf der Gangsterparty ist Sherlock Humbug, der Welt größter Detektiv, hinter einem Vorhang versteckt. Jemand bringt einen Toast aus, und die Gangster stoßen ihre Sektgläser an, jeder mit jedem einmal. Sherlock hört 105-mal die Gläser klingen. Wieviele Gangster sind auf der Party?

2. DAS ERLERNEN VON MATHEMATISCHEN FERTIGKEITEN

2.1 Forschungsfragen zu mathematischen Fertigkeiten

In diesem Buch soll eine Analyse des Zusammenspiels von mathematischen Fertigkeiten und Mathematikverständnis in Angriff genommen werden. Eine zur Zeit nicht unumstrittene These besagt, daß automatisierte Fertigkeiten zum Verständnis beitragen können. Die Forschung über kognitive Fertigkeiten befindet sich eben erst im Anfangsstadium, und es ist kaum etwas über mathematische Fertigkeiten bekannt, das sich auf eine präzise theoretische Basis stützen kann. Die möglichen Folgerungen bisheriger Ergebnisse für das Mathematiklernen erscheinen jedoch von großer Tragweite.

In 1.1 haben wir gesagt: Eine Fertigkeit ist, was jemand in der Lage ist zu tun. Woher nun kommen Fertigkeiten? Die amerikanischen Autoren Suydam und Dessart (1980) haben eine ausführliche Abhandlung über den Erwerb mathematischer Fertigkeiten veröffentlicht, in der sie schreiben (S.207):

> Fertigkeiten (engl.: "skills") erwachsen aus Begriffen und Prinzipien und bilden eine Grundlage für die Entwicklung anderer Begriffe und Prinzipien. Begriffliches Denken stützt sich zum Teil auf das aus der Entwicklung von Fertigkeiten entstandene Verständnis.

Diese Sicht stellt zunächst verwirrende Zusammenhänge zwischen Begriffen, Prinzipien, Denken und Verständnis her, die näherer Erklärung bedürfen. Tatsächlich ist die Aufklärung der Beziehungen zwischen "Rechenfertigkeit" und mathematischem Verständnis eines der ältesten Anliegen einer Psychologie des Mathematikunterrichts. Resnick und Ford (1981, S.246) schreiben darüber:

> Anstatt sich auf das *Wechselspiel* zwischen Berechnung und Verstehen, zwischen Übung und Einsicht zu konzentrieren, sind Psychologen und Mathematikdidaktiker damit beschäftigt gewesen, die Überlegenheit des einen über das andere zu demonstrieren. (...) Die *Beziehungen* zwischen Fertigkeit und Verständnis sind niemals effektiv aufgeklärt worden.

Suydam und Dessart (1980) haben einige der in den letzten Jahren

über das Lernen und Lehren von Fertigkeiten gestellten Fragen zusammengefaßt (S.228f):

> Sollten Fertigkeiten das Hauptgewicht oder geringeres Gewicht im Mathematikprogramm bekommen? (...) Sollte das Lehren der Grundrechenfertigkeiten auf einem Verständnis der Bedeutung der Schritte aufbauen oder auf mechanischem Üben (...)?
> Sollte das Erlernen der Bedeutung von Fertigkeiten dem Einüben vorangehen, oder sollte erst eingeübt und danach ein Verständnis entwickelt werden? (...)
> Sollten Fertigkeiten isoliert gelehrt werden oder eingebunden in den Zusammenhang? (...) Sollten Fertigkeiten übergelernt werden oder nur bis zu einem bestimmten Punkt und dann Taschenrechner oder Computer eingesetzt werden?

Die Forschung zu diesen Fragen hat sich bisher überwiegend mit dem Erwerb der Rechenfertigkeiten auf Grundschulebene beschäftigt, ohne jedoch abschließende Klärung zu bringen; erst vereinzelt findet man Untersuchungen zu algebraischen Fertigkeiten, in zunehmendem Maße aber schon zum mathematischen Problemlösen.

2.2 Welche mathematischen Fertigkeiten sollen erlernt werden?

Die Verschiebung der Gewichte in der Forschung zu mathematischen Fertigkeiten reflektiert offenbar den Wandel, der sich in den letzten Jahrzehnten in der Auffassung von Schulmathematik vollzogen hat: Für viele Jahre hat Mathematik an der Schule in Wirklichkeit Rechnen und Berechnung bedeutet, bis hin in den Bereich der Sekundarstufe. Mit der "Neuen Mathematik" kam dann (in Deutschland Ende der 60er Jahre) die Entscheidung, mehr und mehr "formale" Mathematik im Primar- und Sekundarcurriculum einzuführen und schon bei sehr jungen Schülern Gewicht auf fundamentale Begriffe wie Mengen, Operationen und Funktionen zu legen. Dieser Anspruch hat sich aus verschiedenen Gründen nicht im gewünschten Umfang verwirklichen lassen; u.a. war das Erreichen der neuen Ziele bei gleichzeitigem Auf- und Ausbau von Rechenfertigkeiten wie bisher ohne Abstriche auf der einen oder anderen Seite kaum möglich.

Noch komplizierter wird die Lage, wenn man einen Unterrichtsansatz diskutiert, der weniger mit den mathematischen Inhalten ("Stoff") befaßt ist als mit Mathematik als einer speziellen Art des Denkens (problemorientierter Unterricht). Faßt man Mathematik als *Denkweise* auf, kommt man nicht umhin, Problemlösen und mathematisches Entdecken nicht eben als *Methode* zum Lehren mathematischer Begriffe, sondern als ein *Hauptziel* der Mathematikerziehung anzusehen. Auf jeden Fall sollten die in der Schule erworbenen mathematischen Grundfertigkeiten mehr umfassen als eine Sammlung von Berechnungsverfahren.

Im Oktober 1975 fand in Euclid im amerikanischen Bundesstaat Ohio eine Tagung über mathematische Grundfertigkeiten und Lernen ("Conference on Basic Mathematical Skills and Learning") statt, in deren Folge eine Gruppe von führenden Mathematikern und Mathematikerziehern zehn Gebiete identifizierte, auf denen *alle* Schüler *Grundfertigkeiten* erwerben sollen: Problemlösen; Anwenden von Mathematik auf Alltagssituationen; Wachsamkeit in Hinsicht auf die Vernünftigkeit von erhaltenen Resultaten; Schätzung und Näherung; "angemessene" Rechenfertigkeiten; Geometrie; Messen und Meßverfahren; Lesen, Interpretieren und Konstruieren von Tabellen, Diagrammen und Graphen; Gebrauch von Mathematik für Vorhersagen; Erfahrung mit dem Computer.

Die amerikanische Dachorganisation für Mathematiklehrer (National Council of Teachers of Mathematics) hat auf gleicher Linie Empfehlungen für das Mathematikcurriculum der 80er Jahre ausgearbeitet, in denen die neue Sicht von mathematischen Grundfertigkeiten kennzeichnend ist. Vorsicht ist jedoch insofern geboten, als in der vorgenommenen Eingrenzung von Gebieten keine klare Unterscheidung zwischen *Fertigkeit* und *Verständnis* getroffen ist. Wir wollen im folgenden scharf zwischen diesen beiden Begriffen trennen, da möglicherweise verschiedene Lernmechanismen zugrunde liegen. So hätte es besser geheißen, daß die genannten Gebiete Kompetenz in bestimmten Fertigkeiten erfordern, eingebettet in ein geeignetes System von Begriffskategorien, die ein Verständnis dieser Fertigkeiten und des Umgangs mit ihnen ermöglichen.

2.3 *Ein Modell zum Erlernen von Fertigkeiten*

Aus dem oben Gesagten folgt, daß beim Erlernen von Fertigkeiten der Aufbau von entsprechenden Kategoriensystemen beachtet werden muß. Der Psychologe John Anderson (1980, S.226) gibt eine Folge von drei Schritten an, in der das Erlernen einer Fertigkeit erfolgen kann (es wird nicht gesagt: muß):

(1) Die *kognitive Stufe*, in der eine Beschreibung der Fertigkeit gelernt wird mit dem Anliegen, das Verfahren zu verstehen;

(2) die *assoziative Stufe*, in der die Beschreibung der Fertigkeit in eine Prozedur, d.h. eine Methode zum Ausführen der Fertigkeit überführt wird;

(3) die *autonome Stufe*, in der die Fertigkeit durch Üben mehr und mehr "eingeschliffen" wird; eine in Gedanken zunächst auftretende Begleitung des Tuns durch Worte verschwindet dabei häufig (tatsächlich kann die Fähigkeit des Verbalisierens einer Fertigkeit völlig verloren gehen).

Dieses Modell zum Fertigkeitserwerb beinhaltet eine ausdrückliche Unterscheidung zwischen *Kenntnis* und *Können*: Es sind offenbar zwei verschiedene Dinge, ein Verfahren zu kennen und die Abfolge seiner Schritte beschreiben und erklären zu können gegenüber dem Ausführen, dem Tunkönnen des Verfahrens - eine ganz andere Art von "Wissen". Man vermutet - bestärkt durch die Tatsache, daß die Fähigkeit zum Verbalisieren von Fertigkeiten in bestimmten Fällen völlig verloren gehen kann - daß diese unterschiedlichen Arten von Wissen auch in verschiedener Weise im Gedächtnis repräsentiert sind. Bevor wir uns näher damit beschäftigen, wird es erforderlich sein, theoretische Überlegungen zur Wissensrepräsentation anzusprechen.

2.4 *Literatur*

Folgende Schriften liegen diesem Abschnitt zugrunde und können zur weiteren Lektüre empfohlen werden:

Anderson, J.R. (1980). *Cognitive Psychology and Its Implications*. San Francisco, Cal.: Freeman.

Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Suydam, M.N. & Dessart, D.J. (1980). Skill Learning. In R.J. Shumway (Ed.): *Research in Mathematics Education*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position Paper on Basic Mathematical Skills* (erhältlich beim ERIC document reproduction service, No. ED 139654).

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action - Recommendations for School Mathematics of the 1980's*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

2.5 *Übungen*

1. Nehmen Sie Stellung zu den am Schluß von 2.1 zitierten Fragen über das Lernen und Lehren von Fertigkeiten, um sich über Ihren augenblicklichen Standpunkt dazu klarzuwerden.

2. Zu den in 2.2 genannten zehn Gebieten von Grundfertigkeiten: Überlegen Sie, in welchen Gebieten Sie selbst Grundfertigkeiten haben bzw. als Schüler hatten.

3. Skizzieren Sie in einem Entwurf, wie Sie nach den von Anderson genannten Stufen eine Fertigkeit in der Schule lehren würden:

   a) für die Fertigkeit, quadratische Ergänzungen auszuführen;
   b) für eine beliebige andere Fertigkeit.

3. DIE REPRÄSENTATION UND VERARBEITUNG VON WISSEN IM GEDÄCHTNIS

3.1 *Zur Arbeitsweise des Gedächtnisses*

Für unsere Zwecke wird es hilfreich sein, die Sichtweise der modernen Informationsverarbeitungspsychologie (Information Processing Psychology; Anderson, 1980, Resnick & Ford, 1981) aufzugreifen: Sie sieht das menschliche Verhalten insgesamt als Resultat des geistigen Verarbeitens von Daten (Information) an. Die Daten selbst können von "innen" wie von "außen" stammen, d.h. bereits im Gedächtnis gespeichert sein oder aber als Sinnesreize aus der Umgebung aufgenommen werden. Dazu ein einfaches Beispiel.

Problem: Benzinverbrauch des Autos überprüfen

interne Daten: Formel für Verbrauch auf 100 km; Schranken für gute und schlechte Verbrauchswerte; kleines Einmaleins etc.

externe Daten: Kilometerstand beim Tanken; Tankuhr-Anzeige

Ergebnis der Informationsverarbeitung: Verbrauch 15 l / 100 km; Verbrauch zu hoch

Resultierendes Verhalten: Werkstatt aufsuchen

Obwohl es viele Unterschiede im Detail gibt, beziehen sich so gut wie alle Psychologen, die mit dem Information-Processing-Ansatz arbeiten, auf eine gleiche Annahme über die "Architektur" des menschlichen Geistes: daß nämlich die Information in einem System von "Speichern" verarbeitet wird. Jeder dieser Speicher ist fähig zu bestimmten Arten der Informationsspeicherung und -verarbeitung, und jeder unterliegt ganz spezifischen Beschränkungen. Zusammengenommen stellen diese Speicher das "Informationsverarbeitungssystem" dar.

Der Vergleich mit einem Computer ist naheliegend und nicht zufällig: Auf der einen Seite sind derartige Vorstellungen im Rahmen der Künstliche-Intelligenz-Forschung an Computern präzisiert worden, auf der anderen werden als methodisches Mittel der exakten Beschreibung von menschlichem Verhalten immer häufiger Computer zur Simulation benutzt. Das soll nicht heißen, daß der Mensch insgesamt wie ein Computer funktioniert. Für bestimmte Aspekte menschlicher Informationsverarbeitung hat sich dieser Ansatz jedoch als außerordentlich hilfreich erwiesen und wird es uns ermöglichen, unsere Überlegungen in einem klaren und konkreten sprachlichen Rahmen zu führen; Vereinfachungen nehmen wir in Kauf.

Hier eine knappe Darstellung der Arbeitsweise des menschlichen Informationsverarbeitungssystems: Von außen angebotene Information gelangt durch ein sog. sensorisches Einlaßregister - man spricht auch vom ikonischen Gedächtnis - in das System. Dieser erste Speicher kann sicht-, hör- und fühlbare Information direkt aus der Umgebung empfangen, in großer Menge gleichzeitig. Jedoch kann diese Information nur kurzfristig dort aufbewahrt werden, sie "verblaßt" nach weniger als einer Sekunde. Um weiterverarbeitet zu werden, muß sie innerhalb dieser Zeit von einem sog. *Arbeitsspeicher* (auch Kurzzeitgedächtnis genannt) übernommen werden. Dieser zweite Speicher ist der Ort, wo das eigentliche Denken geschieht, d.h. wo die Information verarbeitet wird. Die dritte Komponente des Systems ist ein Langzeitspeicher oder *Langzeitgedächtnis*, in dem alles, was man weiß, gespeichert ist.

Zwei Bereiche werden uns näher interessieren: Die Prinzipien und prinzipiellen Beschränkungen in der Arbeitsweise des Kurzzeitgedächtnisses (des Arbeitsspeichers also) und die Strukturierung und Organisation des Langzeitgedächtnisses. Der erste Bereich betrifft im wesentlichen die geistige Verarbeitung von Information, der zweite die Speicherung (Repräsentation) von Wissen im Gedächtnis.

3.2 Das Kurzzeitgedächtnis

Das Kurzzeitgedächtnis spielt eine wichtige Rolle in der menschlichen Informationsverarbeitung. Nur Information, die hier verarbeitet worden ist, kann von den Sinnen ins Langzeitgedächtnis gelangen. Umgekehrt kann über die im Langzeitgedächtnis gespeicherte Information nur dann im bewußten Denken verfügt werden, wenn sie vorher ins Arbeitsgedächtnis geholt wird. Eine wichtige, heute grundsätzlich anerkannte Einsicht ist, daß das Arbeitsgedächtnis *beschränkt* ist, und zwar in seiner *Kapazität für die zu gleicher Zeit handhabbare Information.* Niemand weiß genau, wieviele "Stücke" Information in den Arbeitsspeicher hineinpassen, jedoch nimmt man seit langer Zeit an, daß es bei Erwachsenen um die sieben Stücke (plusminus zwei) sind (Miller, 1956).

Dies ist eine erstaunliche Tatsache - bedenkt man das Leistungs-

vermögen der menschlichen Wissensverarbeitung. Bei zu großer Auffüllung des Arbeitsspeichers geht in der Regel die "älteste", d.h. am längsten nicht in den Denkprozeß einbezogene Information verloren. Wenn man die Information von Zeit zu Zeit im Geiste zu sich selbst wiederholt, kann dies zwar verhindert werden. Jedoch kann die grundsätzliche Beschränkung in der Kapazität des gleichzeitig bewußt beobachtbaren Wissens dadurch nicht überschritten werden!

Es sind diese Beschränkungen des Arbeitsgedächtnisses, auf die sich unsere weiteren Überlegungen zum Wechselspiel von mathematischen Fertigkeiten und Mathematikverständnis wesentlich beziehen werden. Genauer gesagt werden wir vermutete Mechanismen besprechen, durch die die begrenzten Möglichkeiten des Arbeitsgedächtnisses "ausgetrickst" werden können.

Die Anzahl der Stücke, die in den Arbeitsspeicher passen, m.a.W. die Anzahl seiner Speicherplätze kann zwar nicht erhöht werden. Es kann jedoch kann die Verarbeitungskapazität durch die *Beschaffenheit* der Stücke vergrößert werden, indem nämlich Mengen von Informationseinheiten zu "Brocken" (engl.: chunks) zusammengefaßt werden, die für sich jeweils nur einen Speicherplatz beanspruchen. Dieses Phänomen wird als "chunking" bezeichnet. Je größer die chunks, desto mehr Information kann das Arbeitsgedächtnis gleichzeitig bewältigen. Eine andere Möglichkeit, die Kapazitätsbeschränkung des Arbeitsgedächtnisses zu überwinden, ist das Automatisieren von Fertigkeiten. Auf beides werden wir an späterer Stelle zurückkommen.

3.3 Langzeitgedächtnis: Deklaratives und prozedurales Wissen

Das als Ergebnis von Lernprozessen im Langzeitgedächtnis gespeicherte Wissen ist in vielfacher Weise strukturiert und unterliegt sehr unterschiedlichen Organisationsprinzipien. Als erstes wesentliches Unterscheidungsmerkmal soll hier die Klassifikation von Wissen als "deklarativ" und "prozedural" besprochen werden.

Als *deklaratives Wissen* bezeichnet man solches Wissen, das in vom Lerner für sich selbst verbalisierten Aussagen formuliert ist und auch verbal anderen Personen mitgeteilt werden kann. Beispiele solchen Wissens sind die folgenden Aussagen:

"$3 + 5 = 8$"

und "$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$"

und "Eine Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen ist die quadratische Ergänzung."

Nach der in der modernen Kognitionspsychologie getroffenen Einteilung ist dieser Wissenstyp innerhalb des Langzeitgedächtnisses im sog. semantischen oder faktischen Gedächtnis gespeichert.

Die Fertigkeiten, die eine Person in der Lage ist auszuführen, bezeichnet man als *prozedurales Wissen* (dieser Person). Die kognitive Fertigkeit, beliebige quadratische Gleichungen mit einer quadratischen Ergänzung zu lösen, ist also ein Beispiel für prozedurales Wissen. Ein anderes Beispiel ist die Fertigkeit, den Additionsalgorithmus auszuführen. Auch diese Art von Wissen ist im Langzeitgedächtnis gespeichert, jedoch nicht in Form von Aussagen, sondern in Form von Handlungen, die bei Bedarf ausgeführt werden. Zur Unterscheidung vom faktischen Gedächtnis wird dieser Bereich des Langzeitgedächtnisses manchmal prozedurales Gedächtnis genannt.

Wie wichtig diese Unterscheidung von deklarativem und prozeduralem Wissen ist, soll am Beispiel des Erlernens einer Fremdsprache verdeutlicht werden: In deklarativer Manier lernt man, wie die Sätze der Sprache strukturiert sind: die Grammatik. Solches Wissen kann dann benutzt werden, um Sätze in der Fremdsprache zu erzeugen: durch Formen von Wortketten, die den grammatischen Regeln genügen. Allerdings erfordert dieser Prozeß bewußte Aufmerksamkeit. Wenn man seine Gedanken in der Fremdsprache ausdrükken will und dabei noch gleichzeitig Aufmerksamkeit auf die Satzkonstruktion verwenden muß, kann dies den Gesamtprozeß erheblich beeinträchtigen. Flüssiges Sprechen einer Fremdsprache hat dagegen die Eigenschaft, daß keine Aufmerksamkeit auf die Satzbildung verwendet werden muß, da die Regeln zur Erzeugung von Sätzen als automatische Fertigkeiten "verinnerlicht", d.h. prozedurales Wissen geworden sind. Umgekehrt beinhaltet das sofortige Verstehen (d.h. die Bedeutungsentnahme) während des Hörens oder Lesens eines fremdsprachlichen Textes, daß man automatisierte Fertigkeiten im Verständnis der Satzstruktur hat, so daß man die volle Aufmerksamkeit dem Textinhalt zuwenden kann. Die beste Gesamtleistung wird jedoch offenbar erreicht, wenn man über beide Wissenstypen - deklaratives und prozedurales - verfügt.

Die in der kognitiven Lernpsychologie getroffene Unterscheidung von deklarativem und prozeduralem Wissen liefert einen nachdrücklichen Hinweis dafür, daß der Erwerb von Wissen und von Können zwei Aspekte in jedem Lernprozeß sind, die eigene Aufmerksamkeit erfordern. Dies hat Implikationen für das Lernen und Lehren von Mathematik. Der Ansatz des verstehenden Lernens ("learning with understanding") in der heutigen Mathematikdidaktik hat - überspitzt ausgedrückt - zu der folgenden Sicht geführt: Der Lernende soll Mathematik betreiben als Anwendung von deklarativem Wissen (etwa sollen Fehler beim Ausführen der Rechenalgorithmen durch ein Verständnis für die Bedeutung der Stellenwerte vermieden werden). Jedoch, wie beim flüssigen Sprechen einer Fremdsprache, scheint zuverlässige Leistung in hohem Maße von angemessenem prozeduralem Wissen abzuhängen.

3.4 Übungen

1. Überlegen Sie sich fünf Beispiele für mathematisches Wissen, das Sie in deklarativer Form besitzen.

2. Überlegen Sie sich fünf Beispiele für mathematisches Wissen, das Sie in prozeduraler Form besitzen.

3. Zu den in 2.3 besprochenen Stufen des Fertigkeitenlernens: Wo ist deklaratives, wo prozedurales Wissen im Spiel?

4a. Können Sie sich vorstellen, deklaratives Wissen ohne prozedurales Gegenstück zu besitzen? Oder prozedurales Wissen ohne deklaratives Gegenstück? Beispiele!

b. Diskutieren Sie Vorteile des Besitzes von beiden Arten von Wissen an einem mathematischen Beispiel.

Die folgenden Übungen sollen Ihre Aufmerksamkeit wieder auf die in Ihnen selbst ablaufende Informationsverarbeitung lenken. Beobachten Sie dabei die Benutzung von Einlaßregister, Kurz- und Langzeitgedächtnis, sowie den Einsatz von deklarativem und prozeduralem Wissen.

5. Der folgende Term ist soweit wie möglich zu vereinfachen:

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$$

6. $\int \cos^2 x \, dx = ?$

7. Ersetzen Sie die Buchstaben durch Ziffern:

$$\begin{array}{r} \text{T H R E E} \\ +\quad \text{F O U R} \\ \hline \text{S E V E N} \end{array}$$

4. AUTOMATISCHE FERTIGKEITEN

Nachdem wir einige elementare Dinge zur Wissensrepräsentation und -verarbeitung kennengelernt haben, wollen wir jetzt die Überlegungen zu mathematischen Fertigkeiten fortsetzen. Kognitive Mechanismen zur Überwindung der begrenzten Arbeitsspeicherkapazität sollen besprochen werden.

4.1 Die Effekte des "Drillens" von Fertigkeiten

Die Qualität des Beherrschens einer Fertigkeit wird i.a. dadurch charakterisiert, wie akkurat und wie schnell sie ausgeführt werden kann. Dies gelingt umso besser, je mehr man die Fertigkeit einübt ("drillt"). In bezug auf mathematische Fertigkeiten ist sehr umstritten, wieviel Gewicht auf das Üben gelegt werden soll. Zahlreiche Argumente sind gegen den Drill als hauptsächliche Unterrichtsmethode angeführt worden. Bei den Rechenfertigkeiten etwa führt ausschließliches Üben nicht zur Entwicklung von quantitativem Denken, d.h. einem Verständnis für die Größe von Zahlen; die Rechenfertigkeiten stehen isoliert (Resnick & Ford, 1981). Ebenso wird das reine Einüben des Differenzierens von Funktionen noch kein Verständnis für die allgemeine Ableitung erbringen.

Eine theoretische Rechtfertigung für "drillendes" Üben bieten die modernen (Information Processing) Gedächtnistheorien: Die durch Üben erreichbare *Automatisierung* von Fertigkeiten könnte die Gedächtnisarbeit effizienter machen. Resnick und Ford halten eine präzisere Untersuchung der Effekte und des Werts des drillenden Übens von Fertigkeiten für den Mathematikunterricht für unerläßlich.

Suydam und Dessart (1980) bemerken, daß beherrschte Fertigkeiten relativ wenig Nachdenken erfordern, da sie zu "Reflexen" werden, die auf unterbewußter Ebene ausgeführt werden, "ohne zu denken", wie der englische Philosoph und Mathematiker Whitehead einmal gesagt haben soll. Über automatisierte Fertigkeiten bemerkt Norman (1982), daß sie weniger geistige Ermüdung verursachen als nicht-automatisierte. Durch geringeren Bedarf an sorgfältiger Überwachung ("monitoring") einzelner Handlungen werde die geistige Arbeitsbelastung reduziert. Das Automatisieren von Fertigkeiten scheint also das Kurzzeitgedächtnis zu entlasten.

Dies wird besonders in dem Moment wichtig, wo die "gesparte Belastung", d.h. noch verfügbare kognitive Kapazität in einer komplexeren Situation benötigt wird. Zunächst wäre allerdings die Frage zu klären, ob man beim Ausführen einer automatisierten Fertigkeit tatsächlich die Aufmerksamkeit auf eine weitere kognitive Tätigkeit richten kann. Anderson (1980, S. 230) zitiert ein in den 70er Jahren durchgeführtes Experiment, in dem so etwas in eindrucksvoller Weise demonstriert worden ist: Durch intensives Üben konnten Versuchspersonen lernen, Texte mit Verständnis zu lesen, während sie gleichzeitig Diktate aufnahmen. War dies anfangs sehr schwer (die Lesegeschwindigkeit sehr langsam), so wurde schließlich - bei simultaner Ausführung der beiden kognitiven Tätigkeiten - normale Lesegeschwindigkeit mit einem dem reinen Lesen ebenbürtigen Textverständnis erreicht. Dies läßt die simultane Ausführung verschiedener kognitiver Tätigkeiten auch in mathematischen Situationen zumindest denkbar erscheinen.

Zusammenfassend können wir feststellen:

1. Kognitive Fertigkeiten können automatisiert werden - durch üben; dabei verringert sich oder entfällt die Notwendigkeit der bewußten Überwachung von in der Fertigkeit verlangten Einzelhandlungen (vgl. die in 2.3 besprochene autonome Stufe beim Fertigkeitenlernen).

2. Die beschränkte Kapazität des Kurzzeit-(Arbeits-)gedächtnisses wird durch das Automatisieren von Fertigkeiten entlastet.

3. Die dadurch gewonnene Arbeitsspeicherkapazität kann für weitere kognitive Tätigkeiten genutzt werden.

4.2 Chunking und automatische Fertigkeiten

In 3.2 haben wir die Beschränkung der Kapazität des Kurzzeitgedächtnisses in bezug auf die gleichzeitig aufnehmbare Information angesprochen. Der Umfang dort behaltbarer Information hängt offenbar stark von ihrer *Bedeutungshaltigkeit* ab. Zum Beispiel sind Menschen normalerweise in der Lage, sechs einsilbige Worte nach einmaligem Hören oder Lesen erfolgreich wiederzugeben:

TEIL TOR WEG SPRUNG BALL NUSS -

aber nicht neun einsilbige Worte:

HUT SAFT ARM LAUF RING STOFF BUCH REIS SEE.

Erfolgreich wiedergegeben wird dagegen der folgende Satz mit 18 teils mehrsilbigen Worten:

> Richard Nixon, ehemaliger Präsident der Vereinigten Staaten, schrieb ein Buch über seine Karriere im Weißen Haus.

(Beispiele nach Anderson, 1980.)

Die ersten beiden Beispiele machen die Beschränkung des Kurzzeitgedächtnisses deutlich: Nicht die sechs, aber schon die neun einsilbigen Worte übersteigen sein Fassungsvermögen. Doch wie ist es mit dem 18-wortigen Satz? Der Schlüssel liegt darin, daß hier bedeutungstragende Einheiten auf einem anderen "level" vorliegen: In Sätzen bilden nicht die einzelnen Worte, sondern die (hier vier) Satzteile solche Einheiten. Dies läßt vermuten, daß die Beschränkung des Kurzzeitgedächtnisses nicht physikalische Einheiten (Silben, Worte o.ä.), sondern *bedeutungstragende* Einheiten betrifft. Der Psychologe George Miller (1956) hat den Ausdruck "chunk" (Brocken) für solche Informationseinheiten im Gedächtnis vorgeschlagen. Unterstützt durch empirische Befunde, hat diese Modellvorstellung heute ihren festen Platz in der kognitiven Psychologie.

Ein *chunk* ist eine bedeutungstragende Gedächtniseinheit, die rapiden Zugang zu größeren Informationseinheiten im Langzeitgedächtnis ermöglicht. Ein chunk entsteht dadurch, daß wiederholt einzelne Zustände oder Ereignisse in einer Situation in einem bestimmten Zusammenhang aufgetreten sind und schließlich ein vertrautes Muster bilden. Der Zugang zur Bedeutung eines solchen Musters gelingt dann durch Wiedererkennen - ein Prozeß von einigen hundert Millisekunden Dauer.

Die Bedeutung des Bildens von chunks ("chunking") für die geistige Informationsverarbeitung gründet sich insbesondere darauf, daß das menschliche Kurzzeitgedächtnis offenbar eine nur geringe Anzahl von Informations"brocken" (chunks) gleichzeitig zur bewußten Inspektion bereithalten kann. Je umfassender die zu einem chunk gebündelten Informationseinheiten sind, desto weitreichender ist die auf solche chunks gegründete Informationsverarbeitung. Chunking bietet ein Erklärungsmodell für die Fähigkeit eines Experten, komplexe Situationen seines Gebiets rapide zu erfassen und zu bewältigen, gestützt nämlich auf die Größe und den Allgemeinheitsgrad des Begriffsvokabulars an chunks, das dem Experten zur Strukturierung einer Situation zur Verfügung steht.

Eine Grundlage für das Chunking-Modell bilden Untersuchungen, die Adriaan de Groot in den 40er Jahren mit Schachspielern vorgenommen hat. Die Stärke von Schachmeistern liegt demnach nicht darin, daß sie, wie zunächst angenommen, sehr ausführliche Bewertungen von möglichen Spielentwicklungen vornehmen, sondern in ihrer Fähigkeit, die Verteilung der Figuren auf dem Spielfeld in sinnfälliger Weise gruppiert ("chunked") wahrzunehmen. Mit einem wiedererkannten chunk können dann der Spielsituation angemessene Handlungspläne im Gedächtnis aktiviert und bei Bedarf ausgeführt werden.

Der Beitrag, den das Chunking-Modell zu einer Erklärung von Fertigkeiten im Erfassen und Bewältigen mathematischer Situationen leisten kann, liegt auf der Hand. Die mit

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

vorliegende Situation einer gemischt-quadratischen Gleichung kann als solche erfaßt werden, wenn man die chunks x^2 : quadratisches Glied, $-6x$: lineares Glied etc. zu bilden in der Lage ist. Sie wird "auf den ersten Blick" erfaßt, wenn nach vielem Üben das Muster (als visueller Stimulus) einer solchen Gleichung derart vertraut geworden ist, daß es selbst einen chunk bildet. D.h. man versteht das Ganze in seiner Zusammensetzung aus bestimmten Untereinheiten (x^2, $-6x$ etc.), die wiederum *bei Bedarf* im Detail analysiert werden können (z.B. der Koeffizient des linearen Gliedes ist -6). Die Wahrnehmung der gesamten Gleichung als *ein* chunk wird entscheidend bei der *Planung*, wie die Gleichung zu lösen ist: Das Beschreibungsniveau wird sich dabei auf das Ganze beziehen und wenige, relativ allgemeine Terme (etwa "quadratische Ergänzung") verwenden, *obwohl* bei der Durchführung des Plans schließlich so spezielle Dinge wie "teile -6 durch 2" auftreten werden. Bei gegebener Fertigkeit im Umgang mit quadratischen Gleichungen wird dies jedoch aller Erfahrung nach "automatisch eingeplant".

Dieses Entwerfen von Unterplänen braucht bei der Planung nicht berücksichtigt zu werden, was verdeutlicht, in welchem Sinne der Chunking-Prozeß das Kurzzeitgedächtnis (in dem die Teile des Plans dem Denkprozeß zur bewußten Verfügung stehen müssen) entlastet. Es erfordert jedoch, daß die zur quadratischen Ergänzung notwendigen Teilprozesse *automatisiert* und als ein *chunk* der Aktivierung zugänglich sind.

Selbstverständlich wird sich die genannte Gleichung auch ohne solche automatisierten Fertigkeiten lösen lassen; allerdings auf einem niedrigeren Beschreibungsniveau, das die bewußte Handhabung einer *größeren* Zahl von *kleineren* Untereinheiten, mithin eine stärkere Auslastung des Kurzzeitgedächtnisses bei höherer Zuwendung von Aufmerksamkeit (durch sog. Monitorprozesse) erfordert.

Betrachten wir nun einmal die Gleichung

$$\sin^2 x - 6\sin x + 5 = 0$$

Für den "Experten" ist sie vermutlich in zwei chunks zu erfassen (gemischt-quadratische Gleichung in sinx). Es läßt sich sicherlich ausmalen, daß ein Nicht-Experte in dieser oder einer anderen, komplexeren Situation schließlich kapituliert, d.h. daß sein Kurzzeitgedächtnis und die aufzuwendenden Monitorprozesse der gleichzeitigen Bewältigung aller Problemvariablen nicht mehr gewachsen sind.

4.3 Literatur (zusätzlich zu den in 2.3 angegebenen Werken)

Miller, G. (1956). The Magic Number 7 $\pm$2. *Psychological Review, Vol.63,* 81-97.

Norman, D.A. (1982). *Learning and Memory.* San Francisco, Cal.: Freeman.

4.4 Übung

Das Anliegen der (Norman, 1982) entnommenen Übung, die auf einer Variante des "Missionare-und-Kannibalen-Problems" basiert, ist ein kleines Lernexperiment, das vielleicht 30 Minuten erfordert. Es soll eine Fertigkeit gelernt und durch "Überlernen" automatisiert werden. Gebraucht werden sechs Objekte, z.B. drei große und drei kleine Büroklammern, außerdem Papier, Bleistift und eine Uhr mit Sekundenzeiger.

Ein Missionare-und-Kannibalen-Problem

Drei Missionare hatten sich verirrt, in den Dschungeln des Planeten Aurilion. Getrennt von Ihrer Truppe, ohne Essen und Radio, wußten sie nur, daß der richtige Weg geradeaus ging. Ein Fluß versperrte ihnen den Weg, und sie berieten, was zu tun war. Auf einmal kamen drei Kannibalen daher, die ein Boot mit sich trugen. Auch sie wollten gerade über den Fluß. Bei früheren Gelegenheiten hatte es schon Begegnungen zwischen Kannibalen und Missionaren gegeben. Kannibalen fraßen schon lange keine Missionare mehr. Missionare jedoch hatten begonnen, die Situation auszunutzen, wenn immer sie in der Überzahl waren: Die ahnungslosen Kannibalen wurden getauft, ehe sie entkommen konnten.

Die drei Kannibalen waren gewillt, den Missionaren über den Fluß zu helfen, aber es paßten immer nur zwei Leute zugleich ins Boot, und die Kannibalen würden in keinem Fall mit einer Überzahl von Missionaren zusammenbleiben. Wie ist das Problem zu lösen?

Ihre Aufgabe: Nehmen Sie große Büroklammern (o.ä.) für Missionare und kleine für Kannibalen und schieben Sie sie über den (eingebildeten) Fluß, immer höchstens zwei auf einmal. Wenn an einer Flußseite jemals mehr Missionare als Kannibalen sind, müssen Sie von vorn beginnen. Lösen Sie das Problem (es sind elf Züge; das kann beim ersten Mal 10 Minuten dauern). Gehen Sie nach den Schritten des Fertigkeitenlernens aus 2.3 vor, um das Demonstrieren der Lösung zu automatisieren. Schreiben Sie bei jedem Durchgang die Zeit auf und üben Sie das rein mechanische Schieben, bis Sie es zweimal hintereinander in jeweils weniger als 10 Sekunden schaffen. Notieren Sie Ihre Beobachtungen.

5. EINE DISKUSSION ÜBER FERTIGKEITEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT

In diesem Abschnitt wollen wir eine Kontroverse zu erörtern beginnen, die in jüngerer Zeit um die Rolle und den Stellenwert des Fertigkeitenerwerbs im Mathematikunterricht entstanden ist. Ausgelöst wurde die Diskussion durch einen Vortrag des Psychologen Gagné auf der 1982er Jahrestagung der Amerikanischen Gesellschaft für erziehungswissenschaftliche Forschung ("American Educational Research Association") in New York. Die von Gagné vertretenen Ansichten sind auf teils erhebliche Kritik bei amerikanischen Mathematikerziehern gestoßen und haben eine neue Erörterung um kognitive Phänomene beim Mathematiklernen und über die Konsequenzen der kognitiven Lerntheorie für den Mathematikunterricht nach sich gezogen, die sich in einigen Artikeln im "Journal for Research in Mathematics Education" niedergeschlagen hat.

5.1 Gagnés Bemerkungen zur Psychologie des Mathematikunterrichts

Der Ausgangspunkt von Gagnés Ausführungen (veröffentlicht in Gagné, 1983) war die Tatsache, daß in den USA bei vielen Schülern Mängel in den mathematischen Grundfertigkeiten festzustellen sind, in eher zunehmendem Maße. Als Beispiele führte er Standardaufgaben zur Prozentrechnung, zur Quadratfläche und zur Division an (bei einer nationalen Erhebung stellte sich beispielsweise heraus, daß 61 Prozent aller 17-jährigen die Aufgabe 250 : 0.5 nicht lösen konnten) und folgerte, daß derzeit selbst die elementarsten Fertigkeiten von vielen Schülern nicht erworben werden.

Gagné will deshalb Erkenntnisse aus der kognitiven Lerntheorie - er stützt sich dabei auf das Information-Processing-Modell - zur Verbesserung des Mathematikunterrichts eingesetzt sehen. Seine Argumentation beschränkt sich zwar auf (Grundschul-)Arithmetik, jedoch ist er der Ansicht, daß sie sich auf andere Bereiche übertragen läßt und bemerkt: "Wenn wir einige brauchbare Forschungsantworten über das Lernen der Arithmetik bekommen können, sind wir in einer besseren Ausgangslage, die wirklich wichtigen Fragen über das Lernen höherer Mathematik zu formulieren."

Im Hinblick auf die Anwendung von Mathematik in Problemaufgaben schlägt Gagné ein Modell vor, das ein Vorgehen in drei Phasen vorsieht:

(1) Übersetzung einer verbal beschriebenen Situation in einen mathematischen Ausdruck;

(2) Ausführung einer Berechnung oder Operation mit diesem Ausdruck;

(3) Überprüfung der Lösung im Licht des Originalproblems.

Hierbei plädiert er insbesondere dafür, die in der Berechnungsphase benötigten Fertigkeiten zu automatisieren, um optimale Leistung zu erreichen. Er sagt schließlich, daß die kognitiven Fähigkeiten, die die Schüler von der Vorschule bis zur Oberstufe benötigen, aus einer Sammlung gespeicherter Regeln bestehen, die am besten automatisch ausgeführt werden, und daß vielfache Übung zur Automatisierung solcher Regeln aufgewendet werden sollte.

In seinen Ausführungen bezieht Gagné sich auf die angenommene Beschränkung des Arbeitsgedächtnisses (vgl. Abschnitt 3.2). Deshalb "muß der knappe kognitive Vorrat an Aufmerksamkeit (...) den schwierigsten und komplexen Teilen des Problems zugewendet werden, wenn seine Lösung effizient und erfolgreich erhalten werden soll." Gagné bemerkt dann, daß die Automatisierung algebraischer Operationen die Grundlage für schnelles und flüssiges Denken in der Anwendungssituation bilde und daß die bei Schülern beobachteten Unterschiede in Schnelligkeit und Akkuratheit bei Berechnungen auf dem Mangel an automatisierten Rechenfertigkeiten bei einigen Schülern beruhe. In einer Problemlösesituation müsse so der Ausführung von Fertigkeiten mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden, was eine Störung und Verlangsamung der dem Problemlösen gewidmeten kognitiven Operationen nach sich zöge.

Die Verknüpfung der zur Problemlösung durchgeführten Tätigkeiten mit ihrer mathematischen Bedeutung sieht Gagné auf die erste und dritte Phase seines Modells beschränkt. Insbesondere sollen Fehler in einer Berechnung nicht dadurch vermieden werden, daß während der Berechnungphase die benutzte Symbolik in einen Bezug zu ihrer Bedeutung gestellt wird (z.B. bei Rechenalgorithmen durch Modelle zur Verdeutlichung des Stellenwertsystems), sondern dadurch, daß in der dritten Phase, nach der Berechnung also, das Resultat über die Bedeutung der Symbole überprüft wird (z.B. muß 19 x 20 ein wenig kleiner als 20 x 20 , also 400, sein).

Gagné spricht in diesem Zusammenhang vom "abstrakten" und vom "konkreten" Umgang mit Symbolen: Den in Phase 1 aus der Übersetzung eines Alltagsproblems ("19 Arbeiter verdienen jeder $142 die Woche; wieviel verdienen alle zusammen?") in mathematische Form erhaltenen Ausdruck 142 x 19 nennt er *abstrakt*, das Hantieren mit den Ziffern bei der Berechnung durch den Multiplikationsalgorithmus in Phase 2 hingegen *konkret*. Ein Inbeziehungsetzen des Ergebnisses (2698) zur Bedeutung in Phase 3 beinhalte, da zwischen Zeichenebene und Bedeutungsebene vermittelnd, wiederum abstraktes Denken: Etwa kann die Schätzung "der Gesamtbetrag liegt in der Gegend von $2800 (140 x 20)" die durch konkretes Hantieren mit Ziffern erzeugte Zeichenreihe 2698 als das richtige Ergebnis bestätigen.

Gagné empfiehlt, im Unterricht und in der Forschung weniger Gewicht auf die Klassifikation von Aufgaben als abstrakt oder konkret zu legen, dafür aber mehr Gewicht auf das sorgfältige, überlegte Lehren korrekter Regeln und das Automatisieren entsprechender Fertigkeiten. Alle drei Phasen seines Modells sollten Gegenstand weiterer Forschung sein.

5.2 *Auf der Suche nach Bedeutung im Mathematikunterricht: Eine Antwort auf Gagné*

Die amerikanischen Mathematikerzieher Steffe und Blake (1983) geben dazu folgende Erwiderungen: In der Mathematikdidaktik hat man sich seit längerem mit den psychologischen Grundlagen für Dinge wie Wissen, Bedeutung, Begriffe, geistige Operationen, Problemlösen und Einsicht beschäftigt; man könne von einer historisch gewachsenen Zusammenarbeit zwischen kognitiven Theoretikern und Mathematikerziehern sprechen. Wenn Gagné vom Inbeziehungsetzen einer kognitiven Theorie zum Mathematiklernen spricht, dann könne damit nicht schlicht eine Anwendung der Theorie gemeint sein. In der Vergangenheit sei bereits festgestellt worden, daß der Organisation des Rechenunterrichts viel Schaden zugefügt worden sei durch den Versuch, alle Lernsituationen in den Rahmen einer einzigen Theorie zu pressen; auf diese Beobachtung gründet sich die hauptsächliche Kritik von Steffe und Blake an Gagné. Sie sagen, Gagnés Anwendung der Information-Processing-Theorie verzerre die Bedeutung dessen, was Mathematiklernen heißt und füge den Aussagen weit älterer Lerntheorien wenig hinzu.

Gagnés Sicht von mathematischem Problemlösen als einem dreiphasigen Prozeß aus Übersetzung einer verbal beschriebenen Situation in einen mathematischen Ausdruck, automatisierter Berechnung einer Lösung anhand dieses Ausdrucks und Testen, ob die Lösung im Vergleich zum ursprünglichen Problem sinnvoll ist, kritisieren Steffe und Blake wie folgt: Das ausschließliche Beschränken von mathematischem Problemlösen auf verbal beschriebene Situationen sei irreführend. Ferner sei zwar die Übersetzung in eine symbolische Darstellung ein wichtiger Teil des Prozesses, jedoch stehe dazwischen als wesentlicher Schritt die Suche nach der die Problemsituation charakterisierenden fundamentalen Struktur.

An Gagnés zweiter Phase, der automatisierten Berechnung, bemängeln die Autoren folgendes: Das automatische Erzeugen von Ergebnissen kennzeichne eine rein auf Antworten gerichtete Haltung. Ferner müsse nicht jedes Problem überhaupt auf eine einschlägige Berechnung führen; dies wird verdeutlicht an dem Problem: "Welche zwei Zahlen haben als Summe 15 und als Differenz 3?" Eine Lösung durch Probieren erfordere zwar Rechnen, jedoch keine zielgerichtete Berechnung: Ein algebraischer Lösungsansatz führt auf zwei Gleichungen, die im Sinne Gagnés automatisch zu lösen wären. Hier distanzieren sich Steffe und Blake radikal von Gagné; sie schreiben: "Wir wollen, daß der Mathematikschüler das Lösen der Gleichungen anfänglich als echtes mathematisches Problem sieht. Das Originalproblem war gestellt worden, um einen *Kontext* für die sonst möglicherweise bedeutungslose Symbolik (der Gleichungen) zu liefern." M.a.W. fordern die Autoren, daß das Lösen der Gleichungen – in einem frühen Stadium jedenfalls – im Lichte einer Problemstellung, d.h. bei ständiger Interpretation der Gleichungen geschehen soll.

Schließlich fassen die Autoren Gagnés Vorschläge als implizite Propaganda für Übung, Schnelligkeit und Akkuratheit zusammen, wie sie in den zwanziger Jahren (d.h. vor den Bemühungen um einen "beziehungshaltigen" Mathematikunterricht) vorherrschend gewesen sei. Diese halten sie für überholt; obwohl man den Sinn des Übens nicht ignorieren solle, meinen sie (mit einem Zitat des Mathematikerziehers Brownell aus den 30er Jahren), daß Arithmetik "weniger eine Herausforderung an des Schülers Gedächtnis als an seine Intelligenz" sein solle.

5.3 *Ausblick*

Mit einem Zitat, ebenfalls von Brownell (1956, S. 130), wollen wir einen Kontrapunkt zu der Kritik von Steffe und Blake setzen:

> So ist es beim Rechnen eine Sache, die mathematischen Prinzipien des Borgens in der Subtraktion zu begreifen – was durch eine einzige einsichtsvolle Erfahrung geschehen kann – , aber eine andere Sache, zum schnellen und korrekten Subtrahieren in der Lage zu sein. Wenn in Beispielen wie 73 - 47 und 52 - 19 ein Kind, das solch ein Verständnis besitzt, immer die komplette logische Erklärung durchdenkt, wird tatsächlich sich seine Leistung verringern, zumindest vom Standpunkt der Schnelligkeit. Verständnis und Fertigkeit sind nicht identisch. Ein einziger Fall von Einsicht kann zu einem Verständnis führen, aber kaum Fertigkeit hervorbringen. Für Fertigkeit ist es notwendig zu üben.

Im nächsten Abschnitt wollen wir die Diskussion über Fertigkeiten im Mathematikunterricht auf der Grundlage einer in (Wachsmuth, 1983) veröffentlichten Kritik an Gagné fortsetzen. Die massive Reaktion auf Gagnés Thesen ist zum Teil bedingt durch das augenblickliche Klima in der amerikanischen Mathematikerziehung, das durch einen Rückfall zum Drillen an den Schulen gekennzeichnet ist. Das reine Einüben von korrekten Regeln, wie es von Gagné empfohlen wird, ist offenbar nicht ausreichend. Aus einer Fortsetzung von Gagné Gedanken lassen sich jedoch womöglich Einsichten von größerer Tragweite gewinnen.

5.4 Literatur

Brownell, W.A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. In W.D. Reeve (Ed.): *The teaching of arithmetic (Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)*. New York: Columbia University, Teachers College, Bureau of Publications.

Brownell, W.A. (1956). Meaning and skill - maintaining the balance. *Arithmetic Teacher*, Oct. 1956, 129-136.

Gagné, R.M. (1983). Some issues in the psychology of mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 7-18.

Steffe, L.P. & Blake, R.N. (1983). Seeking meaning in mathematics instruction: A response to Gagné. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 210-212.

Wachsmuth, I. (1983). Skill automaticity in mathematics instruction: A response to Gagné. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 204-209.

6. FORTSETZUNG DER DISKUSSION ÜBER FERTIGKEITEN

6.1 Die "Back to basics"-Bewegung in den USA

Die Diskussion um Gagné muß im Kontext des augenblicklichen Klimas in der amerikanischen Mathematikerziehung gesehen werden. In Abschnitt 2.2 hatten wir die Umstände, die zum Scheitern der "Neuen Mathematik" in den USA führten, bereits kurz berührt. (Nicht überall gilt sie übrigens als gescheitert; in den UdSSR sieht man die Lage ganz anders. Die Situation in Deutschland ist derzeit eher von einer gewissen Ratlosigkeit bestimmt.) Das vor der Wende zur "Neuen Mathematik" übliche Lehren von Methoden und Verfahren hat sich in Anwendungssituationen, die über den stereotypen Aufgabenrahmen des Unterrichts hinausgehen, als von geringem Wert erwiesen. Ein heute generell gefordertes Verständnis für die Mathematik soll dem Lernenden Kompetenz für die Analyse und mathematische Bearbeitung von Problemen geben und damit bessere Möglichkeiten für die mathematische Bewältigung von Anwendungssituationen bieten. Fehlt es jedoch an Fertigkeiten und Erfahrung im Umgang mit der betreffenden Mathematik, so scheitert die Problembearbeitung möglicherweise an einem Mangel an elementaren Fertigkeiten. Auf diese Feststellung bezieht sich Gagnés Ansatz; vgl. Abschnitt 5.1.

Unbestritten auf Seiten der Mathematikdidaktiker ist der mit der Neuen Mathematik beschrittene Weg des "verstehenden Lernens" (*learning with understanding*) - in diesem Sinne hat die "New Math" durchaus ihr Gutes gehabt. Gagnés Vorstoß erfolgt jedoch zu einer Zeit, wo man sich in den USA mit ernsthaften Problemen durch eine von Schulen und Elternorganisationen getragenen Gegenbewegung zur Neuen Mathematik auseinandersetzen muß: Unter dem Slogan *"back to basics"* versucht man durch Besinnung auf "althergebrachte" Grundfertigkeiten die "aufgetretenen Symptome zu kurieren". Die Folge: An vielen Schulen in den USA wird heute beinahe mehr gedrillt als vor Einführung der Neuen Mathematik. Nachdem die 70er Jahre von dieser Gegenbewegung gekennzeichnet waren und immer noch die Frage diskutiert wird, ob im Mathematikunterricht dem Erzielen von Ergebnissen oder dem Verständnis für die Methoden der Vorzug zu geben sei (*product-versus-process debate*), kommt Gagnés Aufruf zum Üben in ein ohnehin gereiztes Klima zwischen Mathematikerziehern und Schulen. (Man muß dazu noch wissen, daß in den USA Elternorganisationen und die Schulen selbst einen weit größeren Einfluß auf das Unterrichtsprogramm als bei uns haben.)

In diesem Zusammenhang ist die Diskussion um Gagné zu sehen. Seine Thesen könnten zu Mißverständnissen führen und Mathematiklehrern einen falschen Einduck von der allgemein vertretenen Meinung in der Fachdidaktik vermitteln; deutlich erkennbar wird dies in der Kritik von Steffe und Blake. Gagnés Argumente beziehen sich jedoch auf neue Erkenntnisse der kognitiven Psychologie, die über den von ihm früher vertretenen "kognitiven Behaviorismus" hinausgehen. Werfen Steffe und Blake ihm eine verzerrende Interpretation des Mathematiklernens durch die Information-Processing-Theorie vor, so können doch die Annahmen und die mögliche Tragweite dieses Ansatzes heute nicht mehr übersehen werden. Einem voreiligen Verwerfen der Gagnéschen Ideen vorbeugend, dient die Fortführung der Diskussion in den folgenden Abschnitten der Analyse und weiteren Ausarbeitung bzw. Korrektur.

6.2 Automatik von Fertigkeiten im Mathematikunterricht: Eine Antwort auf Gagné

Bei (Wachsmuth, 1983) werden die Ausführungen Gagnés in den Kontext der Frage nach der Wechselwirkung von Fertigkeiten und Verständnis gestellt. Insbesondere die Unterscheidung von deklarativem und prozeduralem Wissen scheint hier wesentlich zu sein. Obwohl die beiden Wissensarten nicht völlig unabhängig sind, erfordern sie doch sehr unterschiedliches Vorgehen im Unterricht. In seinen Vorschlägen bezieht sich Gagné auf die beschränkten Fähigkeiten des Arbeitsgedächtnisses, die nach seiner Meinung durch die Automatisierung von Fertigkeiten ausgeglichen werden können. Für das Erlernen von Fertigkeiten hat man drei Schritte unterschieden (vgl. Abschnitt 2.3): (a) die (deklarative) kognitive Stufe als Verständnisgrundlage für die Fertigkeit, (b) die assoziative Stufe, in der eine Prozedur aus der deklarativen Information konstruiert wird, und (c) die autonome Stufe, in der die Fertigkeit zunehmend flüssig und automatisch wird.

Es ist die Frage - und das ist Gagnés Anliegen - ob in der Curriculumentwicklung nicht die Tendenz bestanden hat, die Wichtigkeit der dritten Stufe zu übersehen. Auf den Erwerb von deklarativem Wissen hat man viel Gewicht gelegt; man nimmt an, daß der Schüler, wenn er solches Wissen "verstanden" hat, auch in der Lage sein wird, es anzuwenden und Probleme "auszuknobeln". In den in 2.2 erwähnten Empfehlungen des National Council of Teachers of Mathematics werden Kosten-Nutzenüberlegungen für die Verwendung von Unterrichtszeit erwogen; "zuviel" Üben soll vermieden werden. Weiteres Einüben von Fertigkeiten soll auf Problemsituationen,

die ihre Anwendung erfordern, verlegt werden. (Auch bei den in Deutschland diskutierten Ansätzen des problemorientierten und des anwendungsorientierten Mathematikunterrichts besteht diese Problematik.) Ein solches Vorgehen könnte sich jedoch gerade nachteilig auswirken: Wenn die Aufmerksamkeit auf die Ausführung einer nichtautomatisierten Prozedur gerichtet wird, wird man vom Problem selbst abgelenkt. Diese Ablenkung kann möglicherweise Gedankengänge zur Organisation des Problemlöseprozesses unterbrechen und damit den Prozeß stören.

In der autonomen Stufe des Fertigkeitenlernens wird eine Fertigkeit "selbständig" in dem Sinne, daß sie kein verbales Äquivalent in deklarativer Form mehr benötigt, wodurch die geistige Arbeitsbelastung reduziert wird (vgl. Abschnitt 4.1). Darüber hinaus gibt es Hinweise dafür, daß das *Automatisieren* von Teilfertigkeiten vor dem Erlernen von darauf aufbauenden höheren Fertigkeiten *zum Erlernen höherer Fertigkeiten beitragen* kann. Ein Beispiel aus dem Bereich des Programmierens von Computern wird bei Anderson (1980, S. 249ff) angeführt: In dem Maße, wie Komponenten beim Programmieren automatisch bewältigt werden, kann man die Aufmerksamkeit auf übergeordnete Probleme richten.

Es ist aber auch denkbar, daß man eine Fertigkeit "unverstanden", d.h. unter Auslassung der kognitiven Stufe erlernt (z.B. das Dividieren von Brüchen). Eine solche Fertigkeit wollen wir im folgenden "mechanisch" nennen (engl. *"rote skill"*). Worin liegt nun der Unterschied, wenn man eine gegebene (a) als *mechanische* oder (b) als *verstandene* Fertigkeit beherrscht? Es sind weiter zwei Fälle zu unterscheiden: Erstens, die fragliche Fertigkeit ist *nicht automatisiert*; zweitens, sie ist *automatisiert*.

1a. Eine mechanische Fertigkeit, die nicht automatisiert ist, erfordert das Abrufen einer oder mehrerer Regeln, die dann mechanisch angewendet werden, ohne Verständnis. Wenn man Teile der Regel vergessen hat oder nicht mehr weiß, wie die Variablen einzusetzen sind, gibt es keine Möglichkeit, dies aus anderem Wissen zu rekonstruieren. (Zum Beispiel geschieht dies häufig im Falle der quadratischen "p-q-Formel".)

1b. Eine verstandene Fertigkeit, die nicht automatisiert ist, benutzt deklaratives Wissen eines Lernenden für einen bestimmten Zweck. (Zum Beispiel kann man, wenn man Zahlen mit Dienesblöcken darzustellen versteht, dies zur Ableitung des schrittweisen Vorgehens beim Subtraktionsalgorithmus benutzen.) Eine auf solche Weise ausgeführte Fertigkeit kann man eher als Problemlöseprozeß ansehen (näher erläutert in Wachsmuth, 1982). Anstatt mit Symbolen "konkret" (im Sinne von Gagné) umzugehen, benutzt man Symbole in "abstrakter" Weise;

tatsächlich nämlich bezieht man sich dann auf ihre Bedeutung.

2a und 2b. Die Idee des Überlernens einer Fertigkeit - ob sie mit Verständnis erlernt wurde oder nicht - besteht in folgendem: Es wird erreicht, daß *die Abfolge der zur Ausführung notwendigen Handlungen* automatisch abläuft - nichts muß dabei aus irgendwelchem Verständnis oder Wissen von Fakten, Zwecken und Zielen abgeleitet werden. In diesem Prozeß löst ein Schritt den nächsten aus, und es gerade die Fähigkeit, die Abfolge der Schritte zur Erreichung eines Zieles ausführen zu können, was die Fertigkeit ausmacht. (Vgl. dazu Übung 4.4)

Es gibt Hinweise dafür, daß Kinder die Fähigkeit zum Verständnis bestimmter Fertigkeiten später entwickeln als die Fähigkeit zum rein mechanischen Ausführen der Fertigkeiten (z.B. im Falle des Zählens oder der Bruchalgorithmen; vgl. dazu die Diskussion bei Suydam, 1978, S. 302f). Tatsächlich sehen manche Forscher den Erwerb einer Prozedur als Vorläufer entsprechenden begrifflichen Wissens; sie sprechen von "prozeduralem Verständnis" (darüber mehr in Abschnitt 9). Die Frage ist, ob es Vorteile hat, wenn automatisierte mechanische Fertigkeiten einem "volleren" Verständnis solcher Fertigkeiten vorangehen.

Wenn eine automatische Fertigkeit aufgerufen wird, werden Handlungen nicht von einem Verständnis abgeleitet, sondern von einem eigenständigen "Handlungsschema" gesteuert. Es ist ein ähnlicher Unterschied wie zwischen einem Verständnis für die Physik des Fahrradfahrens und der Fähigkeit, radfahren zu können. Die bekannte Tatsache, daß man das Training einer motorischen Fertigkeit nicht durch Nachdenken über die Tätigkeit stören sollte, scheint eine Entsprechung im Erwerb prozeduralen mathematischen Wissens zu haben. Gagné (1983) ergänzt seine Empfehlung über sorgfältiges Lehren korrekter Regeln: Auftretende Fehler soll man möglichst nicht erklären, sondern das korrekte Verfahren erneut lehren. Davis (1978) richtet an Lehrer den Rat: Während Drillphasen wird am besten das Gewicht aufs Erinnern gelegt; nicht erklären! Für die reine Ausführung einer Fertigkeit braucht man nicht notwendig ein Verständnis dafür.

Die derzeitigen Curricula vermengen die zwei Ziele des Ausführenlernens und des Verstehenlernens einer Fertigkeit. Es ist immer noch umstritten, ob besseres Verständnis einer Prozedur selbst auch bessere Leistungen in ihrer Durchführung ergibt. Obwohl viele Mathematikerzieher argumentieren würden, daß dies der Fall ist, ist anscheinend ein anderer Aspekt übersehen worden: Gagné vertritt die Meinung, daß ein Verständnis dafür, wann eine Prozedur einzusetzen ist, aus Phase (1) und (3) seines Modells (vgl.

S. 27) abzuleiten ist und *nicht* aus einem Verständnis der Prozedur selbst. Ein gewisses Maß an Verständnis für die Prozedur könnte jedoch wichtig sein, um sie korrekt in den Kontext einer Problemlösung einzubetten.

Zwei Beispiele sollen deuten darauf hindeuten, warum es auch wünschenswert erscheint, daß ein Schüler die Arbeitsweise einer Prozedur versteht: (a) Wenn man den Subtraktionsalgorithmus für Aufgaben wie 238 - 190 gelernt hat, würde ein Verständnis des Algorithmus' seine *Erweiterung* auf Fälle wie 2,38 - 1,9 wesentlich erleichtern. (b) Wenn eine mechanische Fertigkeit einige Zeit nicht benutzt wird, kann sie "verblassen"; ein Verständnis für die Fertigkeit könnte die Grundlage für die *Rekonstruktion* der Prozedur aus deklarativem Wissen bieten (in Abschnitt 15 werden wir hierauf zurückkommen). Es hätte also sehr wohl Sinn, Fertigkeiten mechanisch *und* (später) mit Verständnis zu lernen, vielleicht im Zuge eines spiraligen Vorgehens.

Aus der bisherigen Diskussion ergeben sich drei Fragen:

1. Sollte man nicht prozedurales und deklaratives Wissen als zwei aufeinander bezogene, jedoch getrennte Aspekte im Mathematikunterricht behandeln?

2. Gibt es optimale Altersstufen für die Automatisierung bestimmter Fertigkeiten und für den Erwerb eines Verständnisses davon?

3. Wenn das optimale Alter für das Automatisieren einer Fertigkeit früher liegt als das für ihr Verständnis, welches Vorgehen wäre dann im Unterricht sinnvoll?

6.3 Literatur (zusätzlich zu den Stellen in 5.4)

Davis, E.J. (1978). Suggestions for teaching the basic facts of arithmetic. In M.N. Suydam & R.E. Reys (Eds.), *Development of computational skills*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Suydam, M.N. (1978). Review of recent research related to the concepts of fractions and ratio. In E. Cohors-Fresenborg & I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe D, Band 1.

Wachsmuth, I. (1982). Letter to the Editor. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(2), 188-192.

6.4 *Übungen*

1. (Gesichtspunkt des Verblassens einer Fertigkeit)

   Identifizieren Sie eine von Ihnen längere Zeit nicht eingesetzte, aber früher einmal beherrschte mathematische Fertigkeit (etwa Newtonsches Näherungsverfahren, Differenzieren nach der Quotientenregel, Nachweis einer Körperstruktur, Berechnung einer Quadratwurzel auf beliebige Stellenzahl, Polynomdivision, o.ä.). Versuchen Sie, die Fertigkeit aus dem Geiste ohne weitere Hilfen zu rekonstruieren und an einer Beispielaufgabe anzuwenden. Notieren und interpretieren Sie Ihre Beobachtungen.

2. (Gesichtspunkt des Erweiterns einer Fertigkeit)

   Finden und erläutern Sie Beispiele von Fertigkeiten, die Sie im Verlauf Ihrer Mathematikausbildung gelernt und später erweitert haben.

3. Nehmen Sie Stellung zu den am Schluß von 6.2 formulierten Fragen und diskutieren Sie mögliche Alternativen für den Mathematikunterricht.

7. ABSCHLUSS DER DISKUSSION ÜBER FERTIGKEITEN

Die Auseinandersetzung mit Gagnés Thesen in Abschnitt 6.2 hat im wesentlichen ergeben, daß seine Forderung nach der Automatisierung von Fertigkeiten auch aus der Sicht eines auf Verständnis gerichteten Mathematikunterrichts diskussionswürdig erscheint; letztendlich könnten sich hieraus auch Auswirkungen auf die Gestaltung der Curricula ergeben. Im folgenden setzen wir die Besprechung nach (Wachsmuth, 1983) fort und wenden uns der Problematik eines verläßlichen Wechselspiels zwischen automatischen Fertigkeiten und dem Verständnis ihrer Bedeutung zu. Schließlich gehen wir auf eine Stellungnahme Gagnés zu den Kritiken ein.

7.1 *Das Validieren von Resultaten*

Gagné (1983) merkt an, daß häufig sich Schüler auf das Ergebnis einer algorithmischen Berechnung verlassen, ohne zu untersuchen, ob die erhaltene Lösung im Licht des Originalproblems einen Sinn ergibt (Problematik des "Validierens"; vgl. auch S. 27f). Dieser Punkt betrifft die verschiedenen Ebenen, auf denen man mit mathematischen Symbolen umgehen kann. Die erste ist die *syntaktische* Ebene, auf der man Symbole (z.B. Zahlzeichen) nach bestimmten Regeln handhabt, als - wie Gagné sagt - "konkrete" Objekte des Denkens und vollkommen unabhängig von ihrer Bedeutung (als Zahlen). Dies ist die normale Situation, wenn man einen Algorithmus routinemäßig einsetzt. Die zweite ist die *semantische* Ebene, die Gagné "abstrakt" nennt, auf der man mit Symbolen unter Bezug auf ihre Bedeutung umgeht.

Der Kerngedanke des Validierens betrifft die *Wechselwirkung* zwischen den beiden Ebenen, die gut funktionieren muß, wenn Mathematik in sinnvoller Weise betrieben werden soll. Davis und McKnight (1980) berichten über ein an Schülern der dritten und vierten Klasse beobachtetes Phänomen: Diese Schüler konnten den (amerikanischen, vom in Deutschland gebräuchlichen verschiedenen) Subtraktionsalgorithmus im allgemeinen korrekt ausführen, machten bei bestimmten Problemen aber fast grundsätzlich einen systematischen Fehler (näheres in Übung 1). Sie alle konnten, *wenn man sie danach fragte*, Dienesblöcke zur Darstellung der Zahlen verwenden und damit auch den Vorgang des "Borgens" erklären. Aber dieses "verdeckte" Wissen wurde während des Ausführens der Subtraktionsprozedur nicht aktiviert. Die zwei Ebenen, auf der man die Berechnung durchführen kann (syntaktische und semantische), waren im Wissen der Schüler offenbar unverbunden.

Eine Hauptfrage, die Davis und McKnight hier aufwerfen, ist es, ob das beobachtete Phänomen "unvermeidbar ist für die meisten Kinder dieser Altersstufe, oder ob es die Folge eines übermäßig 'algorithmischen' (und nicht auf Verständnis gerichteten) Unterrichtsprogramms ist". Gagné sagt, daß man Wege zum Überprüfen von Lösungen mit Sorgfalt lehren solle. Das tatsächliche Problem kann in zwei Fragen ausgedrückt werden:

4. Wie kann man Kinder Wege zur Überprüfung von Lösungen lehren in dem Sinne, daß ihr algorithmisches Verhalten in von syntaktischen Regeln geleiteten Situationen durch ihr semantisches Wissen überwacht wird?

5. Kann eine solche Wechselwirkung zwischen der syntaktischen und semantischen Ebene der Informationsverarbeitung Kindern bestimmter Altersstufen überhaupt beigebracht werden?

Als ein wesentliches der früher angesprochenen zehn Gebiete mathematischer Grundfertigkeiten (vgl. Abschnitt 2.2) wird die "Wachsamkeit in Hinsicht auf die Vernünftigkeit von erhaltenen Resultaten" genannt. Es scheint so, daß "Wachsamkeit" das automatische *Aktivieren von Warnungen oder Vorsichtsmaßregeln* im Verlauf einer Problembearbeitung beinhaltet. Wenn man also ein Curriculum im Auge hat, das beides - mathematisches Verständnis und gutes Beherrschen von Fertigkeiten - verfolgt, so wird man die folgende Frage in die Forschung einbeziehen müssen:

6. Wie können Vorsichtsmaßregeln automatisiert werden, so daß ein verläßliches, wachsames Wechselspiel von Fertigkeit und Verständnis in Mathematik erreicht wird?

Gagnés Sicht, daß die von Schülern benötigten kognitiven Fähigkeiten aus einer Sammlung von automatisierten Regeln zu bestehen haben (vgl. Abschnitt 5.1), beinhaltet offensichtlich noch nicht alles: Man muß die Regeln auch mit Verständnis ausführen können und darüber hinaus (im Sinne einer Fertigkeit) Vorsichtsmaßregeln verinnerlicht haben, die es einem erlauben, bei Bedarf "auf Verständnis umzuschalten".

7.2 Gagnés Erwiderung auf die Kritiken

In einer Stellungnahme äußert sich Gagné (1983b) zu einzelnen Kritikpunkten. Den im Abschnitt 6.2 wiedergegebenen Argumenten, mit denen er im wesentlichen einverstanden ist, setzt er folgen-

des hinzu: Bei den erwähnten drei Stufen des Fertigkeitenlernens hält er die erste, deklarative Stufe nicht für unbedingt notwendig; viele Prozeduren erlerne man ohne ein solches Vorgehen. Beim Automatisieren von, wie er nun sagt, "intellektuellen" Fertigkeiten wie der *Anwendung* der binomischen Formeln müsse das Gewicht darauf liegen, die Prozedur des Quadrierens etwa auf jedes beliebige Binom *verallgemeinern* zu können. In diesem Sinne sei auch das Erlernen einer intellektuellen Fertigkeit niemals "mechanisch" (engl. "rote"); diesen Ausdruck solle man dem verbalen Auswendiglernen vorbehalten.

In bezug auf die Kritik von Steffe und Blake wehrt sich Gagné gegen den Vorwurf, das "Verständnis" beim Mathematiklernen außer acht gelassen zu haben: Gerade darauf beziehe sich doch die erste und die dritte Phase des von ihm vorgeschlagenen Modells. Die "Übersetzung" (Mathematisierung) und die Validierung eines Problems müsse von einem Problemverständnis geleitet sein, und die Schüler sollten entsprechende Wissensschemata als Grundlage dafür erwerben. Dagegen sollten die in der zweiten Phase vorgenommenen Berechnungen auf automatisierten intellektuellen Fertigkeiten beruhen; ein Verständnis dafür sei auf Grundlegendes zu beschränken, z.B. daß man die Multiplikation ganzer Zahlen als fortgesetzte Addition auffassen kann. Den in der Kritik vertretenen Hinweis auf die Wichtigkeit von "mathematischer Struktur" für das Verständnis lehnt er als gernzitiert und übervereinfacht ab und setzt dagegen den von ihm vorgezogenen Standpunkt, daß sich Verständnis in der Fähigkeit, Probleme erfolgreich bearbeiten zu können, äußere.

Das in der Schule zu erlernende Wissen soll sich nach Gagnés Ansicht auf das Umgehen mit Mathematik in Alltagssituationen beschränken; er stuft Schulwissen, auch solches über die "Struktur der Mathematik", als relativ bedeutungslos ein selbst für diejenigen, die sich später einmal zum Mathematikstudium entschließen. Schließlich kommt er darauf zurück, daß nach seiner Ansicht erheblich mehr Gewicht auf das Üben gelegt werden muß und schließt: "Das Automatisieren intellektueller Fertigkeiten erscheint nach dem Stand der gegenwärtigen Forschung über das Wesen des menschlichen Wissens nach wie vor erstrebenswert. Ich schlage vor, es als eine Voraussetzung für das Verstehen von Mathematik anzusehen."

7.3 Kommentar

Zwei Gesichtspunkte in Gagnés Stellungnahme sind neu gegenüber seinen - in 5.1 referierten - ursprünglichen Bemerkungen (Gagné, 1983). Dort hatte er sich grundsätzlich auf *Rechen*fertigkeiten ("computational skills") bezogen, begründet offenbar durch seine Beschränkung auf Beispiele aus der Grundschularithmetik. Herausgefordert durch Gagnés Behauptung, daß die bis hin zur Oberstufenmathematik benögtigten Fähigkeiten sich in einer Menge von möglichst zu automatisierenden Regeln fassen ließen (vgl. S. 27), wurde die Diskussion bei (Wachsmuth, 1983) auf allgemeine mathematische (z.B. algebraische) Fertigkeiten ausgedehnt und die Bezüge zum Mathematikverständnis problematisiert (vgl. S. 32). Es wurde die Frage aufgeworfen, ob der Erwerb von Fertigkeiten in einer zunächst mechanischen, d.h. möglicherweise "unverstandenen" Weise Vorteile haben könne für die spätere Ausbildung eines "volleren" Verständnisses und entsprechenden begrifflichen Wissens (vgl. S. 34). Der abschließende Satz in Gagnés Stellungnahme (s.o.) zeigt in dieser Hinsicht eine deutliche Erweiterung seiner Position: Erstens bezieht er sich nun auf "intellektuelle Fertigkeiten" allgemein - er meint damit prozedurales Wissen (persönliche Mitteilung, 1982), zweitens macht er sich die Auffassung zu eigen, daß automatische Fertigkeiten eine Voraussetzung für Mathematikverständnis bilden könnten. -

Zum Abschluß wollen wir auf bei uns gehörte Meinungen zu sprechen kommen, die in diesem Zusammenhang von Interesse sind. In einer vielbeachteten Denkschrift der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zum gymnasialen Mathematikunterricht (1976) wird u.a. folgendes gesagt:

> Verständnis für mathematische Problemstellungen und Zusammenhänge kann nur erreicht werden, wenn auf jeder Schulstufe die in den vorangehenden Unterrichtsstunden entwickelten Techniken und Methoden sicher beherrscht werden. Gerade die fehlende Sicherheit in Kalkülen macht es dem Schüler oft unmöglich, der Entwicklung eines neuen mathematischen Gedankenganges zu folgen oder mathematische Methoden anzuwenden: ein Schüler, der z.B. mit Ungleichungen und Absolutbeträgen nicht sicher umgehen kann, wird im Unterricht in Analysis unnötige Schwierigkeiten haben und so nicht zu soliden Kenntnissen auf diesem Gebiet gelangen können.

In dieser Denkschrift wird auch das von jedem Abiturienten erwartete unverzichtbare mathematische Kernwissen beschrieben, das Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten in sieben Bereichen umfaßt: Numerische Techniken (Rechnen mit Brüchen, Dezimalzahlen und Potenzen, Umgang mit Rechenhilfsmitteln, Sicherheit bei Überschlagsrechnungen); einfache Gleichungen und Ungleichungen; graphische Darstellungen; Grundkenntnisse in Geometrie; formale Fertigkeiten; Lineare Algebra und Geometrie; Analysis.

Wir eröffneten die Diskussion in Abschnitt 5 mit den Bemerkungen Gagnés über festgestellte Mängel bei den mathematischen Grundfertigkeiten amerikanischer Schüler, die wie erwähnt eine Wurzel in der Verschiebung der Gewichte im Mathematikunterricht haben könnten. In einer Denkschrift beklagt die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (1982) die aus der ihrer Sicht unzureichende mathematische Ausbildung an unseren Gymnasien und untersucht die Voraussetzungen, mit denen der (Ingenieur-)Student heute die Hochschulen betritt:

> Hier haben sich im vergangenen Jahrzehnt der Bildungsreform spürbare Veränderungen vollzogen. Unter dem Eindruck einer verstärkt an ihren Grundlagen und Strukturzusammenhängen interessierten Hochschulmathematik wurden strukturelle Gesichtspunkte auch in der Schulmathematik immer mehr betont. Die Anwendungen der Mathematik, besonders in den Naturwissenschaften, wurden hierüber vernachlässigt; mit der Zersplitterung der Inhalte ging ein Verfall der Fertigkeiten einher. Diese weithin beklagte Entwicklung läßt sich auch mit dem allgemeinbildenden Charakter der reinen Mathematik kaum rechtfertigen, denn die Anwendungen der Mathematik sind nicht weniger allgemeinbildend.

Damit wollen wir die Diskussion um mathematische Fertigkeiten zunächst abschließen. Es wird nun erforderlich sein, den Begriff des Mathematikverständnisses weiter zu präzisieren.

7.4 Literatur

Davis, R.B. & McKnight, C. (1980). The influence of semantic content on algorithmic behavior. *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 39-87.

Gagné, R.M. (1983b). A Reply to Critiques of Some Issues in the Psychology of Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 214-216.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung (1976). Denkschrift "Zum Mathematikunterricht an Gymnasien". Bezug durch: Geschäftstelle der DMV, Albertstr. 24, 7800 Freiburg.

Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (1982). Denkschrift "Zur Mathematikausbildung der Ingenieure an Wissenschaftlichen Hochschulen" (abgedruckt in MNU, Heft 1/83).

7.5 *Übungen*

1. Zum amerikanischen Subtraktionsalgorithmus: Diese Übung soll die Möglichkeit systematischer Fehler in Abhängigkeit von der verwendeten Methode demonstrieren. Der amerikanische Algorithmus beruht auf dem "Entbündeln" (Borgetechnik). Die auf S. 37 erwähnte Untersuchung bezog sich auf die Aufgabe 7002 - 25 = ? Beobachtet wurde folgendes fehlerhafte Vorgehen:

$$\begin{array}{r} 7002 \\ -\ \ 25 \\ \hline \\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} {}^{6}\ \ {}^{1}\ \ \ \\ \cancel{7}002 \\ -\ \ 25 \\ \hline 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 5\ \ \ \ \ \ \\ \cancel{6}\,{}^{1}{}^{1}\ \ \\ \cancel{7}002 \\ -\ \ 25 \\ \hline 5087 \end{array}$$

Im bei uns gebräuchlichen Algorithmus (Ergänzungsverfahren) würde diese Aufgabe wahrscheinlich problemlos durchgehen. Kritisch wäre hier vermutlich die Aufgabe 7002 – 93 = ? (Selbst nachvollziehen!) Die im Zusammenhang mit der zurückliegenden Diskussion aufgeworfene Frage ist, ob Verfahrensfehler durch Verständnis der Methode oder eher durch vermehrtes Üben auch kritischer Fälle vermieden werden können. Wie ist das Validieren einzubeziehen?

Die folgenden Übungen sollen Ihre *Wachsamkeit* im Umgang mit (algebraischen) Fertigkeiten testen. Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben und kommentieren Sie ggfs., wo Ihnen bei der Abarbeitung etwas aufgefallen ist.

2. Man vereinfache: $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen (Grundmenge $\mathbb{R}$):

a) $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{x+2} = 0$

b) $x - a = {}_{+}\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2 - 3ax}$

4. Äußern Sie sich zu den folgenden "Beweisen":

a) 3 = 4 , denn:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= (x+4)(x-3) && \\ \Leftrightarrow (x+3)(x-3) &= (x+4)(x-3) && \mid :(x-3) \\ \Leftrightarrow x+3 &= x+4 && \mid -x \\ \Leftrightarrow 3 &= 4 && \end{aligned}$$

b) Eine quadratische Gleichung hat immer 0 als eine Lösung, denn:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow x\left(ax - b + \frac{c}{x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Für $x = 0$ wird der erste Linearfaktor und damit das Produkt zu 0; hieraus folgt die Behauptung.

5. Ist die Funktion f mit $f(x) = {}_{+}\sqrt{x^2 + 2x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ in $x = 0$ a) stetig? b) differenzierbar?

6. Lesen Sie die Denkschrift der DMV "Zum Mathematikunterricht an Gymnasien" (1976) und H.G. Steiners kritische Bemerkungen zu einem in ähnliche Richtung zielenden Aufruf einiger Fachverbände (IDM Occasional Paper 22, 1982).

8. WAS IST "MATHEMATIKVERSTÄNDNIS"?

8.1 Vorbemerkungen

Bei der Beschäftigung mit Theorien des Lernens (nicht nur von Mathematik), wie auch bei der vorangegangenen Erörterung des Erlernens mathematischer Fertigkeiten, trifft man immer wieder auf das Wort "Verständnis". Es scheint in vieler Hinsicht eine kritische Rolle zu spielen, jedoch ist unser Begriff davon eher vage. Sicherlich wird er mehr umfassen müssen, als "auf eine Frage die richtige Antwort geben können". Auch Gagnés Auffassung, Verständnis äußere sich in der Fähigkeit zur erfolgreichen Problembearbeitung (vgl. Abschnitt 7.2) ist für unsere Zwecke viel zu allgemein. Herscovics und Bergeron (1983, S.75) schreiben:

> Die Notwendigkeit eines Verständnisses für Mathematik hat man seit langem als ein Hauptproblem des Mathematiklernens erkannt. Denn ohne Verständnis wird Mathematik schon bald zu einer überwältigenden Bürde von zu behaltenden Regeln und Symbolen und von Verfahren, die jeder Bedeutung entbehren. Wie wichtig Verständnis auch sein mag, wenn man es fassen will und global in einem pädagogisch relevanten Kontext definieren, über das schlichte Erlernen von Fertigkeiten hinaus, erscheint dies immer als unmögliche Aufgabe: Wir sind Gefangene unserer Worte und sind unvermeidlich verschiedener Meinung über ihren Sinn. "Verständnis" kann nicht getrennt werden von "Denken", "Wissen" und "Lernen", denn Verstehen ist das Produkt eines Denkens, das nicht im Vakuum operiert, sondern auf dem durch vorangehendes Lernen erworbenen Wissen.

Die Autoren erinnern daran, daß die Mathematiker selbst nicht einmal über die Natur von Mathematik einer Meinung sind, deshalb sei es auch nicht überraschend, wenn sie sich schwerlich auf eine Definition von Mathematikverständnis einigen können. Jedoch, ebenso wie der Mangel an Übereinstimmung über die Natur von Mathematik deren Weiterentwicklung nicht aufhalten konnte, sollte die Entwicklung der Didaktik nicht von einer universell akzeptierbaren Definition des Verstehens abhängen.

Im Vordergrund der weiteren Behandlung unseres Themas soll jetzt eine Präzisierung des Verständnisbegriffs stehen. Dabei wollen wir uns auf einige für das Mathematiklernen wichtige Teilbereiche konzentrieren.

Tragen wir zunächst zusammen, was bisher im Zusammenhang mit "Verständnis" und "Verstehen" gesagt wurde. Auf S. 7 gaben wir eine grobgefaßte, vorläufige "Definition": Eine Sache verstehen heißt, sie in eigene geistige Kategoriensysteme einordnen zu können. Es wurde dort bereits gesagt, daß komplexere geistige Prozesse als rein sprachlich-mathematische etwa zum Verständnis der Achterbahn beitragen. Auch haben wir zwischen verschiedenen Arten von Verständnis unterschieden, z.B. dem anfänglichen Verstehen einer Aufgabenstellung, dem Verstehen der errechneten Lösung oder der verwendeten Operationen und Verfahren.

Wir haben dann scharf zwischen den Begriffen "Fertigkeit" und "Verständnis" getrennt (S. 12), da verschiedene Lernmechanismen zugrunde liegen könnten. Ein Verständnis von Zahlen oder von der allgemeinen Ableitung etwa wird durch den ausschließlichen Drill der damit verbundenen Fertigkeiten noch nicht erreicht (S. 20). Mit Brownell waren wir der Überzeugung (S. 29), daß ein einziger Fall von Einsicht möglicherweise Verständnis, aber kaum Fertigkeit hervorbringen kann. Das in der modernen Mathematikdidaktik geforderte Verständnis von der Mathematik soll bessere Bewältigung von Anwendungssituationen durch Kompetenz für die Analyse und mathematische Bearbeitung von Problemen erbringen (S. 31).

Als Organisationsmerkmale des Langzeitgedächtnisses haben wir deklaratives und prozedurales Wissen unterschieden (S. 17) und das darauf bezogene Verbundmodell des Erlernens mathematischer Fertigkeiten von S. 12f im Hinblick auf die Wechselwirkung von Fertigkeiten und Verständnis diskutiert (S. 32ff). Verschiedentlich wurde angesprochen, daß automatisierte Fertigkeiten eine mögliche Grundlage für Verständnis bilden. Erwähnt wurde auch, daß bei Schülern die Entwicklung bestimmter Fertigkeiten und eines Verständnisses davon zu verschiedenen Zeiten erfolgen kann (S. 34). Als wünschenswert erschien schließlich ein verläßliches, wachsames Wechselspiel von Fertigkeit und Verständnis in der Mathematik, das es einem erlaubt, nach Bedarfslage "auf Verständnis umzuschalten" (S. 38).

8.2 Verständnis - wovon?

Zu Beginn der Vorlesung haben wir allgemein vom Verständnis "von einem Sachverhalt" gesprochen. Nun sollte zunächst das Wort "Sachverhalt" konkretisiert werden. Wir könnten dabei denken an:

(a) einen mathematischen Begriff;
(b) eine mathematische Fertigkeit;
(c) ein mathematisches Problem;
(d) die Anwendung von Mathematik in einer anfangs nicht-mathematischen Situation.

Selbstverständlich wird Mathematikverständnis alle diese Bereiche (und vermutlich noch mehr) einschließen. Bevor wir uns einer Besprechung von Einzelheiten zuwenden, wollen wir einige Verständnisarten ansprechen, die bisher unterschieden worden sind.

8.3 Verständnis - in welchem Sinne?

Herscovics und Bergeron (1983) geben einen kurzen Überblick über verschiedene Verständnismodelle, den wir in Auszügen hier wiedergeben (sämtliche Literaturhinweise siehe dort): Der Psychologe Bruner hat schon in den 60er Jahren auf die Wichtigkeit eines intuitiven Verständnisses - im Gegensatz zu einem formalen, analytischen Verständnis - des Schülers bei der Bewältigung von Sachverhalten hingewiesen; später hat er dies ausdrücklich auch auf das Mathematiklernen bezogen.

Der englische Mathematikdidaktiker und Psychologe Skemp hat Mitte der 70er Jahre die Begriffe "instrumentelles" und "relationales Verständnis" unterschieden. Mit dem (von Skemp geringgeschätzten) instrumentellen Verständnis ist der Besitz von "Regeln ohne Gründe" und die Fähigkeit, solche Regeln anzuwenden, gemeint. Unter "relational understanding" versteht Skemp das "Wissen, was zu tun ist und warum" (d.h. Handlungspläne in Relation zu mathematischen Begründungen). Instrumentelles Verständnis sei zwar schneller erwerbbar; jedoch werde der aufwendigere Erwerb von relationalem Verständnis durch bessere Anpassungsfähigkeit an neue Problemstellungen, leichteres Behalten, Selbstmotivation und organische Gesamtqualität belohnt.

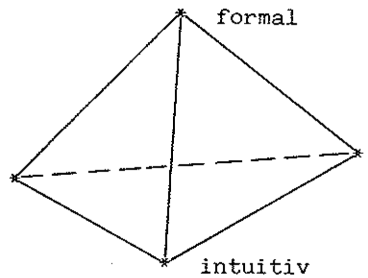
Als eine Synthese der Vorstellungen von Bruner und Skemp haben in den 70er Jahren Byers und Herscovics ein "tetrahedral model" vorgestellt, das vier Arten des Verständnisses unterschied:

- instrumentelles Verständnis als die Fähigkeit, eine gelernte Regel zur Lösung eines Problems anzuwenden, ohne zu wissen, warum die Regel funktioniert;

- relationales Verständnis als die Fähigkeit, spezielle Regeln oder Prozeduren aus allgemeineren mathematischen Beziehungen abzuleiten;

- intuitives Verständnis als die Fähigkeit, ein Problem ohne vorherige Analyse zu lösen;

- formales Verständnis als die Fähigkeit, mathematische Symbole und Schreibweisen mit relevanten mathematischen Ideen zu verbinden und diese Ideen zu Ketten logischen Schließens zu fügen.



Die Namensgebung des Modells bezog sich auf die Vorstellung der Autoren, daß Verständnis für einen mathematischen Sachverhalt immer eine Mischung der vier Verständnisarten beinhaltet; dieses symbolisierten die Autoren als einen Punkt innerhalb des durch die vier Verständnisarten abgegrenzten Tetraeders (siehe Abb.).

In den letzten Jahren wurde dieses Modell durch Skemp und andere Autoren noch verfeinert. Bei den noch andauernden Diskussionen konnte bisher jedoch keine Einigung über die Eingrenzung der Begriffsdefinitionen erzielt werden; deshalb wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen.

Eine Weiterentwicklung des Tetraeder-Modells, auf die wir in den nächsten Abschnitten zu sprechen kommen, wurde von Bergeron und Herscovics zur *Analyse mathematischer Begriffsbildung* eingesetzt. Unter anderem sollte in einem Experiment die Nützlichkeit des Modells bei der Ausbildung von Grundschullehrern untersucht werden. Der Erfolg war erfreulich: Die 28 am Experiment beteiligten Grundschullehrer entwickelten ein Bewußtsein für die verschiedenen Verständniskategorien und konnten im Unterricht über Zahlen, Stellenwertsystem und Grundrechenarten davon Gebrauch machen. Auch wichen sie von ihrer einseitig auf richtige Antworten gerichteten Haltung ab und legten nun gleiches Gewicht auf die Schulung von Denkprozessen der Schüler.

Eine theoretische Analyse enthüllte jedoch einige Unstimmigkeiten in dem aus dem Tetraedermodell entwickelten (sog. Hybrid-)Modell. Unter anderem wurden mit "instrumentellem Verständnis" nicht nur ein anfängliches Verständnis der Anwendung von Regeln oder Prozeduren abgedeckt, sondern auch das völlig mechanische Beherrschen unverstandener Prozesse, was man als "Verständnis" eigentlich nicht bezeichnen kann. Außerdem wurde offensichtlich, daß ein einziges Verstehensmodell niemals so verschiedene mathematische Aktivitäten wie Begriffsbildung, Problemlösen oder das Ausarbeiten logischer Beweise umfassen kann.

Bergeron und Herscovics beschränkten sich deshalb in ihrer weiteren Arbeit ausdrücklich auf mathematische Begriffsbildung und entwickelten ein Verstehensmodell, das versucht, verschiedene Verständnisebenen wie auch die fortschreitende Konstruktion von Verständnis zu beschreiben. Dieses Modell stellen wir nun vor.

8.4 Ein Verstehensmodell für mathematische Begriffe

Die Konstruktion fundamentaler mathematischer Begriffe, ob auf Grundschul- oder höherer Ebene, ist ein Prozeß, der u.U. mehrere Jahre in Anspruch nimmt; für den Zahlbegriff z.B. wurde dies durch Piaget nachgewiesen. Bergeron und Herscovics sehen solche Begriffe eher als ein Netzwerk vieler anderer Begriffe; sie sprechen von einem "begrifflichen Schema". Beeinflußt von Information-Processing-Theorien, Piagets Arbeiten und den speziellen Bedürfnissen der Mathematikdidaktik haben sie ein Verstehensmodell entworfen, das vier "Ebenen" unterscheidet:

(a) *intuitives* Verständnis
(b) *prozedurales* Verständnis
(c) *Abstraktion*
(d) *Formalisierung*

Im nächsten Abschnitt werden wir diskutieren, in welcher Weise dieses Modell der fortschreitenden Konstruktion von Verständnis Rechnung trägt.

8.5 Literatur

Herscovics, N. & Bergeron, J.C. (1983). Models of Understanding. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 83/2, 75-83.

9. VERSTÄNDNIS VON MATHEMATISCHEN BEGRIFFEN UND FERTIGKEITEN

9.1 Die Konstruktion eines Verständnisses mathematischer Begriffe

Das in 8.4 vorgestellte Verständnismodell von Herscovics und Bergeron soll jetzt im einzelnen erläutert werden. Wie auch der englische Titel ihres Modells ("A constructivist model of understanding") ausdrückt, sehen die Autoren die Entwicklung des Verständnisses von einem mathematischen Begriff als vom Lernenden zu erbringende geistige Konstruktion (eines Begriffsnetzes). Die dabei von ihnen unterschiedenen vier Ebenen werden nun erklärt.

(a) *Intuitives Verständnis*: Hierunter verstehen die Autoren das informale Vorwissen eines Schülers über das zu konstruierende begriffliche Schema. Z.B. ist das Zusammenfügen zweier Mengen von Objekten Kindern geläufig, lange bevor sie eine (über ganz grobes Schätzen hinausgehende) Vorstellung vom Addieren haben. Visuelle Wahrnehmung und primitive, nicht quantifizierte Tätigkeiten kennzeichnen dieses intuitive Stadium des Verstehens. Das Einbeziehen eines solchen "Vorverständnisses" beim Mathematiklernen sichert, daß das neue Wissen von vornherein an Bedeutung geknüpft ist durch Verankerung in den Vorstellungen und Erfahrungen des Schülers.

(b) *Prozedurales Verständnis*: Dieses Stadium umfaßt, daß der Schüler das intuitive Verständnis von einem Begriff und einige weitere Voraussetzungen zu einer anfänglichen Prozedur zusammensetzen kann, wodurch solches Wissen" in präziserer Weise benutzbar wird. Z.B. kann das Vorverständnis von der Addition, ergänzt durch die Voraussetzung des Abzählenkönnens, zu einer einfachen Additionsprozedur (Zusammenfügen zweier Mengen und Abzählen der insgesamt erhaltenen Objekte) fortgesetzt werden. Die Autoren weisen darauf hin, daß die dazu erforderliche systematische Koordination grundsätzlich schon pädagogisches Handeln erfordert, also nicht vom Schüler allein erreicht wird. Dadurch, daß sie eine "prozedurale" Verständnisform postulieren, vertreten die Autoren außerdem implizit den Standpunkt, daß die Konstruktion eines mathematischen Begriffes nicht möglich ist ohne eine damit verbundene Prozedur.

(c) *Abstraktion*: Ein wesentlicher Schritt in der Konstruktion eines Begriffs besteht in seiner Loslösung von anfangs damit verbundenen Intuitionen und Prozeduren, was schließlich dazu führen soll, daß der Begriff sich zum eigenständigen Objekt des Denkens entwickelt. Z.B. soll ein Verständnis von Zahlen sich schließlich von der Anschauung und von der im Verlauf seiner Entwicklung damit zusammengebrachten Zählprozedur ablösen. Dieser Vorgang, dessen zentrale Bedeutung Piaget hervorgehoben hat, wird als Abstraktion bezeichnet und stellt eine dritte Ebene des Verständnisses dar. Er beinhaltet das Erkennen von Invarianten, etwa die Erkenntnis, daß die einer endlichen Menge von Objekten zugeordnete (An-)Zahl eine unveränderliche ("invariante") Eigenschaft ist, die bei Änderungen in der Anordnung der Objekte oder der Zählreihenfolge erhalten ("konserviert") bleibt. Der Aufbau solcher Erkenntnis erfordert die Koordinierung und mögliche Umkehrbarkeit verschiedener Gedankengänge. Dies kann jedoch nicht geschehen, wenn sich das Denken nicht vorher von der konkreten Anschauung (etwa dem Handhaben physikalischer Objekte) befreit hat und im Operieren mit geistigen Objekten vorangetrieben werden kann.

(d) *Formalisierung*: Die vierte Ebene von mathematischem Begriffsverständnis bezieht sich speziell auf die symbolische Natur von Mathematik (die "Form" des Umgangs mit mathematischen Inhalten). Der Umgang mit mathematischer Notation stellt auf allen Stufen bis zur Universitätsmathematik kognitive Anforderungen, deren Bewältigung man als über die ersten drei Verständnisebenen hinausgehend ansehen kann. Das bloße Manipulieren von Symbolen allein kann jedoch noch nicht als Kennzeichen eines weitergehenden Verständnisses gelten, da es losgelöst von jeglicher Bedeutung geschehen kann. Erst wenn ein Begriff von konkreten Verkörperungen abstrahiert und der symbolische Umgang mit ihm durch Bezug auf Bedeutungen begründet werden kann, kann man von einem formalen Begriffsverständnis sprechen.

Das Verständnismodell von Herscovics und Bergeron unterscheidet sich von den in 8.3 angesprochenen Modellen in folgender Hinsicht: Anstatt allgemein verschiedene Verständnisarten zu unterscheiden, beschränken die Autoren ihr Modell auf den kognitiven Konstruktionsprozeß der Bildung von mathematischen Begriffen. Die vier Verständnisebenen betonen wichtige Teilaspekte beim Fortschreiten dieses Prozesses.

Die Autoren merken ausdrücklich an, daß ihr Modell nicht als ein lineares Lernmodell mißverstanden werden dürfe. Durch die Vernetzung verschiedener Begriffe zu einem begrifflichen Schema besteht eine gegenseitige Abhängigkeit von Ebenen des Verständnisses für solche Begriffe. Wenn bei einem Schüler z.B. ein prozedurales Verständnis von der *Addition* (mittels Abzählen) schon besteht, wird es kaum zu einem abstrakten fortsetzbar sein, wenn nicht

vorher ein von der Zählprozedur abstrahiertes *Zahl*verständnis erreicht wurde. Ganz sicher solle man mit der Einführung eines neuen Begriffes nicht warten, bis die dafür vorauszusetzenden Begriffe sämtlich auf der formalen Ebene verstanden worden sind.

Auch sollte das Verständnismodell nicht als ein Unterrichtsmodell mißverstanden werden. Wenn etwa auf der formalen Verständnisebene symbolische Schreibweisen einbezogen werden, so sage das Modell damit noch nichts über ein didaktisches Vorgehen bei der Unterweisung in mathematischer Symbolik aus. Ebensowenig sei gemeint, daß man die Unterweisung darin bis zum Erreichen eines abstrakten Verständnisses aufschieben solle.

Den didaktischen Nutzen des Modells sehen Bergeron und Herscovics in folgendem: Die vier Verständnisebenen könnten als kognitive Lehrziele verstanden werden. In diesem Sinne bestehe das Problem des Unterrichtens nicht in der reinen "Wissensweitergabe", sondern in der Anleitung der Schüler zur Konstruktion ihres Wissens.

9.2 Kommentar zum Verständnismodell von Herscovics und Bergeron

Hervorgehoben werden soll der Stellenwert, den die Autoren einer prozeduralen Verständnisform zumessen: Sie sehen die Konstruktion eines mathematischen Begriffes als nicht möglich an ohne eine bestimmte damit verbundene Prozedur (im Sinne einer Fertigkeit). Umgekehrt ausgedrückt werden also bestimmte mathematische Fertigkeiten (z.B. eine Prozedur zur Addition natürlicher Zahlen) als Vorläufer begrifflichen Wissens über Mathematik (z.B. des Additionsbegriffs) gewertet. Zu einem früheren Zeitpunkt (vgl. Abschnitt 2.1) haben wir eine Feststellung von Suydam und Dessart zitiert, die auf gleicher Linie besagt, daß sich begriffliches Denken zum Teil auf das aus der Entwicklung von Fertigkeiten entstandene Verständnis stützt. Das Modell von Herscovics und Bergeron unterstützt unsere These zum Wechselspiel von mathematischen Fertigkeiten und Mathematikverständnis: Mathematischen Fertigkeiten kommt eine wichtige Rolle als *Vorläufer mathematischen Begriffsverständnisses* zu.

Über das Automatisieren von Fertigkeiten sagen Bergeron und Herscovics nichts aus. Wir vertreten hier den Standpunkt, daß eine automatisierte Prozedur die *Abstraktion des Begriffs von der Prozedur wesentlich begünstigt* dadurch, daß die gewonnene kognitive Kapazität (vgl. Abschnitt 4.1) - der "gedankliche Abstand" von der Ausführung der einzelnen Schritte, Raum gibt für die für den Abstraktionsprozeß notwendige Reflexion.

Wir kommen nun zurück auf unsere früher (S. 34) formulierte Frage nach denkbaren Vorteilen des Erwerbs von zunächst unverstandenen, "mechanischen" Fertigkeiten: Man erwirbt auch eine Art von Verständnis dadurch, daß man Fertigkeiten - auch wenn man die zugehörige Mathematik noch nicht "voll" versteht - anwendet und die Wirkung und Tragweite ihres Einsatzes erfährt. Gerade dort, wo komplexere Zusammenhänge vorliegen, könnte man sogar sagen, daß zu einem Mathematikverständnis auch die Einsicht gehört, daß man in bestimmten Fällen bereit ist, vermitteltes Wissen zunächst zu akzeptieren und im handelnden Umgang damit eine graduelle Erweiterung des Verständnisses zu erfahren.

9.3 Verständnis von mathematischen Fertigkeiten

Der in 8.2 vorgenommenen Einteilung folgend, wenden wir uns nun dem Verständnis von mathematischen Fertigkeiten zu. Ziel der Besprechung soll auch hier die Klärung der Frage "Verständnis - in welchem Sinne?" sein (vgl. 8.3). Zwei Aspekte werden wir dabei unterscheiden: (1) ein Verständnis der *in einer Fertigkeit benutzten Mathematik*; (2) ein Verständnis des *mathematischen Kontexts, in dem eine Fertigkeit eingesetzt wird*. Das bisher Gesagte soll zunächst noch einmal kurz im Zusammenhang dargestellt und um weitere Einsichten ergänzt werden.

Zu (1): Als eine Gefahr des reinen Drillens von Fertigkeiten hat man erkannt, daß Mathematik von Schülern dann leicht als Anhäufung von unverbundenen "Rezepten" verstanden wird. Wie Resnick und Ford (1981) ausführen, gehen die Vorschläge nun eher dahin, Mathematikunterricht auf den Erwerb einer integrierten Menge von Regelmäßigkeiten und Prinzipien auszurichten. Ein weiteres, häufig erwähntes Argument gegen das Drillen ist die Gewöhnung der Schüler an eine wenn auch schnelle, so doch unbedachte und unflexible Art des Reagierens, während mathematisches Denken häufig Flexibilität und Kreativität erfordert. Heute sind sich die meisten Mathematikerzieher darüber im klaren, daß sowohl Drill als auch beziehungshaltiges Lernen erforderlich ist. Jedoch ist noch nicht geklärt, wie man diese verschiedenen Lernerfahrungen im Unterricht integrieren soll.

Die Argumente der Befürworter des verstehenden Lernens von Fertigkeiten richten sich auf ein Verständnis der in einer Fertigkeit benutzten mathematischen Begriffe (in diesem Sinne beziehen sie sich also auf den ersten oben genannten Aspekt). Wenn Verständnis an die Stelle des reinen Memorierens von Fakten und Prozeduren tritt, so wird argumentiert, können die Schüler Vergessenes rekonstruieren oder sogar eigene Prozeduren zur Lösungsfindung konstruieren. Das Kriterium der Geschwindigkeit einer

beherrschten Fertigkeit wird für vergleichsweise unerheblich gehalten.

Ein anderes Argument ist, daß ein begriffliches Verständnis der in einer Fertigkeit verwandten Mathematik höhere Flexibilität im Einsatz der Fertigkeit ermöglicht. Kennt man etwa das Kommutativgesetz der Addition, so kann man bei Rechenprozeduren Summanden vertauschen; man kann Rechenvorteile nutzen aus der Kenntnis des Distributivgesetzes usf. Kennt man das Diskriminantenverfahren zum Test auf reelle Lösungen einer quadratischen Gleichung, so wird man etwa die Gleichung

$$17x^2 - \frac{2}{3}x + \sqrt{2} = 0$$

gar nicht erst zu lösen versuchen.

Zu (2): Der Kontext, in dem eine mathematische Fertigkeit eingesetzt wird, erfordert eine andere Art von Verständnis als das der in der Fertigkeit verlangten Mathematik. Man muß in der Lage sein, überhaupt zu erkennen, daß - und wie - eine bestimmte Fertigkeit in einem bestimmten Kontext einzusetzen ist. Kontexteingebettete Probleme erfordern ein komplexeres Verständnis von Sprache, Situation, Strategiesuche und Fertigkeiten. Dies leitet über in den Bereich des Problemverständnisses, jedoch sollte man schon beim Erwerb einer Fertigkeit Wert auf möglichst diverse Anwendungskontexte legen. Wir werden hierauf zurückkommen.

9.4 Übungen

1. Diskutieren Sie anhand des Modells von Herscovics und Bergeron eine längerfristige Planung von Mathematikunterricht mit dem Ziel der Konstruktion eines Verständnisses des Ableitungsbegriffs bei den Schülern. Berücksichtigen Sie die allgemeine und die Ableitung in einem Punkt (einer reellen Funktion) und ferner, daß die Klasse behandelter Funktionen im Verlauf des Sekundarcurriculums mehrfach erweitert wird!

2. Die folgende Aufgabe aus der linearen Algebra - obwohl durch Berechnungen zu lösen - erfordert schon einiges mathematisches Begriffsverständnis sowie (Kontext-)Verständnis der benötigten mathematischen Fertigkeiten. Lösen Sie die Aufgabe und analysieren Sie, über welche Begriffe und Fertigkeiten Sie dabei verfügen müssen.

   Aufgabe: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Finden Sie:

   a) alle Eigenwerte von A; b) alle zugehörigen Eigenvektoren.

10. VERSTÄNDNIS VON DEM LÖSEN VON PROBLEMEN

Die Forschungsaktivitäten und die Literatur zum Problemlösen sind heute kaum überschaubar. "Problemlösen" kann schlechthin als die aktive Auseinandersetzung des denkenden Menschen mit der Welt aufgefaßt werden; entsprechender Stellenwert wird diesem Bereich seit dem Beginn einer "kognitiven" Psychologie zugemessen. Mit der experimentellen Erforschung dieses Bereichs wurde von den Gestaltpsychologen begonnen; Problemlösen wurde dort als ein Prozeß der kognitiven Organisation aufgefaßt. Diese Auffassung war für bestimmte Problemklassen sehr geeignet, jedoch nicht allgemein genug für die Analyse beliebiger Probleme. Spätere Ansätze des Behaviorismus beschränkten sich auf die zur Lösungsfindung zu erbringenden "Responsen", wobei das besondere Interesse den Wahrscheinlichkeiten für das Erzeugen verschiedener, auch nicht naheliegender Responsen galt (Aufgaben, deren Lösung durch die wahrscheinlichsten Responsen nicht erhältlich waren, definierte man dort gerade als "Probleme"). Obschon man die Wichtigkeit flexiblen Verhaltens für erfolgreiches Problemlösen erkannt hatte, waren diese Ansätze nicht geeignet für eine ins Detail gehende Analyse von Komponenten erfolgreichen Problemlösens.

In den neueren Ansätzen der Psychologie wird, ausgehend von der weithin beachteten Arbeit von Newell und Simon (1972), Problemlösen unter dem Gesichtspunkt der Informationsverarbeitung analysiert ("information processing approach"). Der wesentliche Vorteil dieser Theorie - im Gegensatz etwa zu Ansätzen des Behaviorismus - liegt in der detaillierten Analyse von Problemlöseprozessen; die theoretischen Interpretationen enthalten spezifische Annahmen über beim Lösen auftretende geistige Prozeßkomponenten.

10.1 Bemerkungen zum Information-Processing-Modell

In Abschnitt 3.1 haben wir zum ersten Mal Bezug genommen auf den in der modernen Kognitionspsychologie favorisierten Information-Processing-Ansatz. Dieser Ansatz ist aus der sog. Künstliche-Intelligenz-Forschung hervorgegangen, deren theoretisches Ziel es ist, die Prinzipien intelligenten Verhaltens zu verstehen. Wenn man kognitive Prozesse durch Computerprogramme simulieren will,

so wird im psychologisch ausgerichteten Ansatz gefordert, daß nicht nur das *Produkt*, also das gezeigte "intelligente" Verhalten, sondern auch die *Prozesse*, auf denen dieses Verhalten beruht, mit denen der beim Menschen empirisch beobachtbaren in Übereinstimmung gebracht werden können.

Das Information-Processing-Modell gründet sich dabei auf dieselbe Ebene von Informationsverarbeitung wie beim Menschen: die begriffliche. Nicht numerisch, sondern symbolisch, und nicht kalkulatorisch, sondern folgernd wird dabei mit den Elementen der Informationsverarbeitung umgegangen. Soweit menschliche Intelligenz auf linguistischer Grundlage erklärt werden kann, könnte "Künstliche Intelligenz" die präziseste Form eines psychologischen Modells liefern.

Der Information-Processing-Ansatz hat sich bisher als ausgesprochen nützlich zur Analyse spezieller Probleme erwiesen, jedoch wurde noch keine zusammenhängende Theorie entwickelt, die Problemlösevorgänge für breite Klassen von Problemen mit allgemeinen psychologischen Prinzipien zu erklären vermag. Es hat jedoch den Anschein, daß der eingeschlagene Weg in dieser Hinsicht erfolgreich sein könnte.

10.2 Verständnis beim Problemlösen

Der erste Schritt zur Lösung eines Problems ist, es zu verstehen. "Verstehen" hat man dabei definiert als das Erstellen einer Repräsentation des Problems, wobei sich "Repräsentation" auf ein geistiges Modell der Problemsituation bezieht, das der Problemlöser konstruiert und manipuliert, um eine Lösung zu finden (Newell & Simon, op.cit.).

Aus der Forschung der letzten Jahre ergeben sich deutliche Hinweise darauf, daß die Problemrepräsentation eine kritische Komponente für Problemlösefertigkeiten ist. Das Problem der geistigen Repräsentation eines zu lösenden Problems kann dabei vermutlich nicht unabhängig von dem Problem der Repräsentation von Wissen im Gedächtnis betrachtet werden. Bei Computersimulationen von Problemlöseprozessen, wie sie von Newell und Simon - gestützt auf umfangreiche Protokollanalysen aus Versuchssitzungen mit menschlichen Problemlösern - erstmalig vorgenommen wurden, ist dies drastisch herausgestellt worden. In einem Computer, um den Vergleich hier anzuführen, würden die zur Problemlösung vorgenommenen Handlungen auf bestimmten Datenstrukturen operieren:

- Datenstrukturen, die das Problem darstellen und die in eine Form transformiert werden, aus der die Lösung erhältlich ist;

- zusätzlich Datenstrukturen, die "Wissen über die Welt" darstellen und die benutzt werden, um Teile der Problemlösung zu erhalten oder die Konstruktion der Lösung zu leiten.

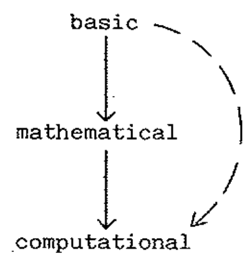
Ähnlich wird man bei einem menschlichen Problemlöser die geistige Repräsentation des zu lösenden Problems in Verbindung mit der geistigen Repräsentation faktischen "Weltwissens", darunter auch mathematischen Wissens, in Betracht ziehen müssen. Besonderes Gewicht wird hierbei der Art der Repräsentation von Wissen im Gedächtnis als Grundlage des Problemlöseprozesses zugemessen. Problemlösefertigkeit, so scheint es, ist in hohem Maße vom Problemverständnis und damit von der Qualität der Wissensrepräsentation abhängig.

Vermutlich muß ein Verständnis für Problemlösen auch ein Verstehen der erzielten Lösung sowie - in gewissem Umfang - der verwendeten Operationen und Prozeduren beinhalten, wie wir es im Zusammenhang mit mathematischen Fertigkeiten schon angesprochen haben. Bevor wir dies weiter verfolgen, wollen wir konkret auf die Anwendung von Mathematik in nicht-mathematischen Situationen eingehen (vgl. 8.2).

10.3 Problemlösen in anfangs nicht-mathematischen Situationen

Ein interessanter Ansatz der Psychologin Jill Larkin zielt auf die Entwicklung einer "vereinheitlichten Theorie darüber, wie Leute Mathematik benutzen" (Larkin, 1983). Larkins Forschungsanliegen ist es, theoretisch zu fassen, wie der Lernende mathematisches Wissen in anfangs nicht-mathematischen Situationen (z.B. in Textaufgaben oder in naturwissenschaftlichen Problemen) anwendet. Larkin argumentiert, daß in so unterschiedlichen Gebieten wie der kindlichen Arithmetik und der Hochschulphysik ähnliche Denkmuster beim Problemlösen beobachtbar sind. Dazu hat sie ein Problemlösemodell entworfen, das erfolgreichen Problemlösern das folgende schrittweise Vorgehen zuschreibt: Zunächst wird eine aus geistigen Objekten und ihren Zwischenbeziehungen bestehende Basisrepräsentation des Problems im Gedächtnis des Problemlösers erstellt. In der nächsten Phase wird diese Basisrepräsentation durch Hinzufügen weiterer Objekte und Beziehungen vornehmlich mathematischer Natur angereichert, um eine mathematisch elaborierte Repräsentation des Problems zu erhalten, aus der schließlich die Lösung durch Berechnungen gewonnen wird.

Nach Larkins Ansicht besteht der wesentliche Schritt im Problemlöseprozeß grundsätzlich im Verschaffen der elaborierten Problemrepräsentation, die dann die zur Lösung führenden Berechnungen leitet. Die gemeinsame Ursache von Mißerfolgen beim mathematischen Problemlösen in allen Bereichen liege darin, daß dieser Schritt umgangen und die Berechnung direkt von der Basisrepräsentation aus versucht wird (siehe Abbildung).



Modell des Problemlösens durch Repräsentationswechsel (Larkin)

Für zwei Bereiche: (a) Textaufgaben zu Addition und Subtraktion und (b) physikalische Probleme in der Flüssigkeitsstatik sind Modelle im Computer implementiert worden, die durch unterschiedliches Maß an Elaboration verschiedene Grade von Problemlösefähigkeit simulieren. Die Computer-Modelle ermöglichen Vorhersagen über eine Staffelung in der Problemschwierigkeit und über zu erwartende Fehlermuster. Empirische Studien wurden herangezogen, um die Vorhersagequalität der Modelle zu überprüfen.

Im Vergleich zu dem von Gagné vorgeschlagenen Modell wird das Hauptgewicht in Larkins Modell auf das Erstellen der Problemrepräsentation gelegt. Was bei Gagné die erste Phase ist (Übersetzung einer verbal beschriebenen Situation in einen mathematischen Ausdruck; vgl. Abschnitt 5.1), wird bei Larkin zum wesentlichen Gegenstand ihres Problemlösemodells. Statt einer "Übersetzung" postuliert sie einen mehrfachen Wechsel der Problemrepräsentation zur Anreicherung des Verständnisses von dem Problem, bis schließlich zu Berechnungen geschritten werden kann. Dies soll kurz erläutert werden.

Basisrepräsentation: Der Problemlöser (Mensch oder Computer) liest den Text des Problems und benutzt Neuronen oder Elektronik, um eine interne Problemrepräsentation zu konstruieren. Diese Repräsentation besteht aus geistigen Objekten und Beziehungen dazwischen, die direkt zur im Text beschriebenen Situation korrespondieren.

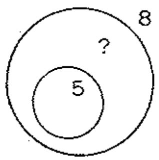
Mathematische Repräsentation: Neue Objekte und Relationen (zumeist mathematischer Natur) werden hinzugefügt, um schließlich eine mathematische Repräsentation zu erhalten. Oft redundant, erlaubt sie, Teile der Problemrepräsentation im Vergleich mit anderen zu überprüfen. Aus der mathematischen ergibt sich die *Berechnungsrepräsentation*.

Beispiel: Erich hat 5 Pfennige. Sein Vater gibt ihm ein paar dazu. Jetzt hat er 8. Wie viele Pfennige kamen dazu?

Basisrepräsentation:

- enthält Erich, seinen Vater und die zu 8 ergänzten Pfennige;
- die 5 Pf. sind durch die Relation "gehört" mit Erich verbunden;
- die fraglichen Pfennige sind durch die Relationen "gehört-jetzt" und "gehörte-ursprünglich" mit Erich bzw. seinem Vater verbunden.

Mathematische Repräsentation:



konstruiert wird z.B. eine Menge/Teilmenge-Beziehung zwischen Erichs jetzigen, ursprünglichen und neu hinzugekommenen Pfennigen. Hieraus erhält man die

Berechnungsrepräsentation: $8 - 5 = ?$

Ein Computer-Modell, das derartige Textaufgaben löst, heißt CHIPS ("Concrete Human-like Inferential Problem Solver", Briars & Larkin, 1984). Als "Minimalmodell" enthält CHIPS die kleinste Menge Wissen, die als ausreichend zum Lösen elementarer Textaufgaben angesehen werden kann. Für eine große Vielfalt solcher Aufgaben produziert CHIPS Antworten (richtige und falsche) und eine Folge von Schritten, die die "Lösungsstrategie" angibt. Eine wesentliche Annahme des Modells ist es, daß Kinder die Repräsentierung derartiger Problemsituationen mithilfe von Zählobjekten ("Chips") vornehmen (konkret oder im Geiste). Das "Verständnis" des Problems wird durch die Qualität der Repräsentation reflektiert (z.B. kann im obigen Beispiel mangelndes Verständnis sich darin zeigen, daß eine Unterscheidung der besitzanzeigenden Relationen "gehört-jetzt" und "gehörte-ursprünglich" in der Problemrepräsentation nicht vorgenommen wird, wodurch eine auf dem Abzählen der Chips in der Differenzmenge beruhende Lösung unmöglich wird).

10.4 Literatur

Briars, D. & Larkin, J.H. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*(3).

Larkin, J. (1983). *Working towards a unified theory of how people use mathematics*. Papier zum eingeladenenen Vortrag auf der 1983er Tagung der American Educational Research Association, Montreal.

Newell, A. & Simon, H.A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

11. WEITERE PRÄZISIERUNG DES VERSTÄNDNISBEGRIFFS

11.1 Davis' Arbeit über mathematisches Verständnis

Über mehr als ein Jahrzehnt haben Robert Davis und seine Mitarbeiter am Curriculum Laboratory an der University of Illinois außerordentlich viele Daten gesammelt von Schülern, die Mathematik lernen (von Grundrechenfertigkeiten bis hin zur Differential- und Integralrechnung). Die Studien enthalten ausführliche und sensible Protokollanalysen von Schülern, die mathematische Probleme bearbeiten. Das Gewicht liegt auf der Untersuchung ihrer Fehler und Mißkonzeptionen (ein Beispiel haben wir in Abschnitt 7 angesprochen). Anstelle der forcierten Entwicklung eines Begriffsgebäudes wurden tiefgehende Analysen der mathematischen Aufgaben selbst ggfs. unter Verwendung von Ideen der Künstlichen Intelligenz interpretiert; es wurden postulierte Wissensrepräsentationsstrukturen und Verarbeitungsmechanismen zum Vergleich herangezogen. Die beste Quelle für diese Arbeit sind das "Journal of Children's Mathematical Behavior" (jetzt "Journal of Mathematical Behavior") und der Abschlußbericht von Davis' zweieinhalbjährigem Projekt zur Rolle von "Verständnis" beim Mathematiklernen (Davis, Young, and McLoughlin, 1982).

Belegt durch eine Vielzahl von Beispielen weisen Davis *et al.* in diesem Bericht immer wieder darauf hin, daß alternative Wege des "Verstehens" unterschieden werden können. Hat man z.B. drei Arten des Verstehens identifiziert, so sei auch gleich eine vierte denkbar: wenn man nämlich die drei gegebenen in ihren Beziehungen untereinander versteht. Unter der Überschrift "Multiple Understandings" wird gesagt: "*Mehrere* Möglichkeiten des Verstehens zu sehen ist wesentlich verschieden davon, nur eine zu sehen, egal welche." Der Rahmen der erläuternden Beispiele reicht dabei von Grundrechenfertigkeiten bis zur Differential- und Integralrechnung. Dabei betonen Davis *et al.* die trotz dieser so weit gespannten Betrachtung von Mathematik angetroffene "schlagende Ähnlichkeit" dessen, was es heißt "zu verstehen". Sie bemerken weiter (S. 35):

> Wir geben zu bedenken, daß sich "Verstehen" in der Analysis auf weite Gebiete relevanten - sogar *essentiellen* - Wissens erstreckt. Man kann nicht Analysis verstehen, ohne *Grenzwerte* zu verstehen. Ein "Verständnis" von Grenzwerten kann jemandem wahrscheinlich nicht ohne ein formales, als auch ein intuitives Verständnis zugesprochen werden. Keins dieser beiden ist denkbar ohne Kenntnis einer Zahl von Beispielen und Gegenbeispielen. Man muß die Topologie der reellen Zahlengeraden kennen, formal und intuitiv. Man muß mathematische Induktion und Widerspruchsbeweise verstehen. Und für alles dies benötigt man algebraische Rechenfertigkeiten, um die Teile zusammenzufügen.

11.2 Ein Beispiel für alternative Möglichkeiten des Verstehens

Davis *et al.* (1982, S. 21ff) erläutern z.B. alternative Wege zu einem mathematischen Verständnis der beim Zusammendrücken einer Feder geleisteten Arbeit.

1. Methode

Es wird zunächst angenommen, daß die Federkraft beim Zusammendrücken konstant ist. *Wenn* die Kraft konstant ist, dann kann man die Arbeit W (Work) durch einfaches Multiplizieren von Kraft F (Force) und Distanz D ausrechnen:

$$W = F \cdot D$$

Man kommt jedoch bei diesem Problem ohne Analysis nicht aus, da die Kraft nicht konstant ist, sondern vom Grade des Zusammendrückens abhängt. Folgende Argumentation nimmt darauf nun bezug:

(i) *Wenn* die Kraft konstant wäre, hätten wir keine Schwierigkeiten;

(ii) aber die Kraft hängt ab von der Distanz x, um die wir die Feder zusammengedrückt haben;

(iii) wenn nun x nur wenig geändert würde, würde auch die Kraft F sich nur wenig ändern;

(iv) drücken wir also die Feder nur um einen *geringen* Betrag dx zusammen;

(v) und da die Kraft F sich nur wenig dabei ändert, stellen wir uns erstmal vor, *sie ändert sich überhaupt nicht*. Dann kann man schreiben

$$dW = F \cdot dx$$

(vi) Dabei machen wir natürlich einen Fehler. Aber wir können den Fehler abschätzen und zeigen, daß der Gesamtfehler E_n gegen 0 geht, wenn dx gegen 0 geht. Ist R die totale Distanz, um die die Feder zusammengedrückt ist, so teile R in n gleiche Intervalle auf, so daß also gilt:

$$dx = \frac{R}{n}. \quad \text{Dann ist } E = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(vii) Lassen wir n jetzt gegen ∞ gehen, so geht der Gesamtfehler gegen 0, und die Summation für die Gesamtarbeit (beim Zusammendrücken um R) wird zum Integral:

$$W = \int_0^R F(x)dx$$

2. Methode

In einem alternativen Ansatz könnte man die oben abgeleitete Gleichung als *Arbeitsdefinition* vorgeben und dann die Situation darauf aufbauend analysieren; so findet man es zum Beispiel in Unterrichtstexten.

Diese beiden Ansätze stellen zwei sehr verschiedene Wege dar zum Verständnis, wie die geleistete Arbeit berechnet werden kann. Die erste Methode ("nimm-an-es-ist-konstant-und-behalte-den-entstehenden-Fehler-im-Auge") hat den Nachteil, daß für den Schüler die Sprache zuerst verwirrend sein wird; jedoch hat sie den Vorteil, daß dem Schüler ein Prinzip an die Hand gegeben wird, das sich auf viele andere Probleme anwenden läßt.

3. Methode

Ein dritter Weg zum Verstehen des Federproblems benutzt den Zwischenwertsatz und basiert auf der Beobachtung, daß die Kraft F eine monoton wachsende stetige (da lineare) Funktion der Distanz x des Zusammendrückens ist. Nimmt man für jedes Teilintervall den kleinsten Wert von x, erhält man also eine zu kleine Näherung für F; nimmt man den größten, wird sie zu groß. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann also einen Wert

x_k^* in jedem Intervall (x_k, x_{k+1}), so daß $F(x_k^*)(x_{k+1} - x_k)$ den

korrekten Wert der Arbeit W_k des Zusammendrückens um dieses Intervall liefert, mit dem Fehler gleich 0. Nach der Definition

des Riemann-Integrals ergibt dann der Ausdruck

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} F(x_k^*)(x_{k+1} - x_k)$$

exakt das Integral

$$\int_0^R F(x)\, dx$$

11.3 Beispiel eines Verständnismechanismusses

In vielen Fällen "versteht" man, weil man in der Lage ist, einen bestimmten "input" an etwas, was im (Langzeit-)Gedächtnis wiedergefunden wird, anzupassen und feststellen:

(i) es paßt perfekt,

(ii) das im Gedächtnis aufgefundene "Etwas" führt zu Assoziationen, die alle mit dem input verbundenen Fragen beantworten können.

Beispiel: Die Gleichung $e^{2t} - 5e^t + 6 = 0$

kann leicht bearbeitet werden, wenn wir dazu die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ (sowie damit assoziierte Lösungsverfahren) auffinden und sie unter den folgenden Substitutionen als perfekt passend feststellen:

$e^t \leftrightarrow x$, $e^{2t} \leftrightarrow x^2$, $1 \leftrightarrow a$, $-5 \leftrightarrow b$, $6 \leftrightarrow c$.

Das (Zwischen-)Ergebnis $e^t = 2 \vee e^t = 3$ kann weiterverarbeitet werden, wenn nach dem gleichen Prinzip dann im Gedächtnis ein anderes Stück Wissen über den Zusammenhang von Logarithmus- und Exponentialfunktionen als Umkehrfunktionen aufgefunden wird:

$$A^r = s \iff \log_A s = r.$$

Wieder gelingt eine perfekte Anpassung der aktuellen Daten an das aufgefundene Wissen:

$$e \leftrightarrow A,\ t \leftrightarrow r,\ 2 \leftrightarrow s$$

so daß $t = \ln 2$ bzw. $t = \ln 3$.

11.4 Verständnismechanismen - Verstehen und Nichtverstehen

Ein großer Teil der menschlichen Informationsverarbeitung kann dem fast automatischen, häufig gar nicht bewußten Auffinden von "Situationsrepräsentationen mit zugeordneten Mengen von Handlungsmustern" - wie in 11.3 erläutert - zugeschrieben werden. Die Existenz solcher "Wissenspakete" wird heute in diversen psychologischen Theorien angenommen; sie werden unter anderem unter den Namen "Schemata", "Frames" oder "Scripts" geführt (wir wollen hier keinen vorziehen und weitere Einzelheiten außer acht lassen). Allen gemeinsam ist die folgende Prämisse: Als Reaktion auf bestimmte Merkmale der angetroffenen Situation werden im Langzeitgedächtnis des Individuums stereotype Repräsentationen dieser Situation aktiviert, sowie damit verbundene Erwartungen betreffs angetroffener Einzelheiten und voraussichtlich auszuführender Pläne. Wenn man, wie in der in 11.3 beschriebenen Aufgabe den passenden "Rahmen" aufgefunden hat, so "versteht" man auf einmal die ganze Situation; im Zusammenhang damit steht z.B. die Wahrnehmung von sog. *chunks* (vergleiche Abschnitt 4.2 und auch das dort besprochene Beispiel unter diesem Gesichtspunkt).

In diesem Sinne bedeutet "Verstehen" das Anpassen einer Situation an eine im Langzeitgedächtnis aufgefundene "Repräsentationsstruktur".

Manchmal mißlingt es, Wissen im Gedächtnis aufzufinden, obwohl es dort gespeichert war. Dies ist einer der möglichen Fälle, wie es scheitern kann, daß man etwas "versteht". Ein Beispiel dafür haben wir in Abschnitt 7.1 angesprochen (falsch ausgeführter Subtraktionsalgorithmus): In dem dort geschilderten Fall wurde zum Verständnis notwendiges Schlüsselwissen nicht aktiviert, *obwohl es im Gedächtnis vorhanden war*.

Nicht zu verstehen heißt also nicht notwendig, daß es am erforderlichen Wissen mangelt, sondern möglicherweise ist das *Nichtauffinden* dieses Wissens die Ursache. Eine andere Ursache von mangelndem Verständnis kann darin liegen, daß eine *falsche*, d.h. der Situation nicht angemessene Repräsentationsstruktur aufgefunden wird.

Natürlich kann "Verstehen" nicht das hundertprozentige Wiederauffinden und Aktivieren früher gelernter Sachverhalte bedeuten - solch eine Repräsentationsstruktur wäre zu starr, um eine neue Situation erfolgreich bewältigen zu können. "Verstehen" muß dagegen beinhalten, daß vorhandene Repräsentationsstrukturen an neu vorgefundene Sachverhalte angepaßt werden können (vergleiche das Beispiel in 11.3). D.h. "verstehen" bedeutet also auch, eine geeignete geistige Repräsentation für die jeweilige Situation

konstruieren zu können (vgl. Abschnitt 10.2).

Eine andere Ursache von Nichtverstehen kann also darin liegen, daß jemand nicht in der Lage ist, eine geistige Repräsentation für bestimmte "Eingabedaten" zu konstruieren.

11.5 Zusammenfassung der Äußerungen über Verstehen

"Verstehen" beinhaltet in jedem Fall, daß eine geeignete Wissensrepräsentationsstruktur (WRS) im Gedächtnis des Schülers benutzt wird. Diese kann im Langzeitgedächtnis aufgefunden worden sein ("retrieval"), oder sie kann neu konstruiert oder als Kombination von beidem erzeugt worden sein.

In den Fällen, wo "retrieval" vorliegt, muß für einen erfolgreichen Verstehensprozeß im einzelnen folgendes erfüllt sein:

1. Eine WRS existiert im Langzeitgedächtnis des Schülers, die die Problemsituation angemessen repräsentieren kann;

2. Eine geeignete WRS wird ausgewählt und im Gedächtnis aufgefunden (das "retrieval");

3. Die aktuellen Daten des vorliegenden Problems oder der Situation werden korrekt in die aufgefundene WRS eingebettet;

4. Wenn die Anforderungen der Aufgabe über den Wissensbereich der aktivierten WRS hinausführen, werden nach Bedarf zusätzliche WRS'en (in rekursiver Weise) aktiviert.

Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist, daß mit dem Aktivieren einer WRS als Resultat eines Verstehensprozesses prototypische Handlungsmuster: *Pläne* zur Verfügung stehen, deren Ausführung - unter Einsetzung der aktuellen Daten - die Bewältigung der Problemsituation ermöglicht. Später werden wir auf die wichtige Rolle von *Sprache* bei der Anpassung und Umsetzung von Plänen in Problemsituationen zu sprechen kommen (Abschnitt 13).

11.6 Literatur

Davis, R.B., Young, S., & McLoughlin, P. (1982). *The roles of "understanding" in the learning of mathematics*. Part II of the Final Report of National Science Foundation Grant SED 79-12740, Curriculum Laboratory, University of Illinois, Urbana-Champaign.

11.7 Übung

a) Zeigen Sie: Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ist zu sich selbst invers, d.h. für alle x ist $f(f(x)) = x$.

b) Finden Sie weitere nichttriviale Beispiele für Funktionen, die zu sich selbst invers sind.

c) Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, wann eine Funktion ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) zu sich selbst invers ist.

Beim Bearbeiten dieser Übung beachten und beschreiben Sie bitte:

(i) Die kritische Rolle von *Repräsentationen* bei jeglicher Analyse;

(ii) die wichtige Rolle, die *repräsentationserzeugende Fertigkeiten*, z.B. das Zeichnen von Funktionsgraphen, dabei spielen;

(iii) die Rolle von "naiven" oder "prämathematischen" Repräsentationen (etwa einer "Funktionsmaschine").

12. DIE ROLLE VON "METAKOGNITION" FÜR MATHEMATISCHES VERSTÄNDNIS

In diesem Abschnitt wollen wir Aspekte des Mathematikverständnisses besprechen, die in den bisher erwähnten überhaupt nicht enthalten waren. Es geht dabei um "Metakognition" (Metawissen - Wissen über Wissen). Obwohl es sich nicht um ein mathematikspezifisches Phänomen handelt, ist der Besitz oder Nichtbesitz von Metawissen offenbar von großer Bedeutung für mathematische Kompetenz. Die folgenden Thesen sollen erläutert werden (wir folgen einer Arbeit von Schoenfeld, 1983): (1) Metakognitive Fertigkeiten sind wichtige Komponenten mathematischer Leistung. (2) Viele Schüler entwickeln metakognitive Fertigkeiten in nur geringem Umfang oder gar nicht, wahrscheinlich als Folge eines Mathematikunterrichts, der auf diesen Aspekt des Verstehens kaum zu sprechen kommt; häufig ist dies jedoch ein Grund für mathematische Schwierigkeiten. (3) Es ist möglich, wenn auch schwierig, solche Fertigkeiten bei Schülern auszubilden.

12.1 Was ist Metakognition?

Eine wichtige Komponente mathematischer Kompetenz besteht darin, daß man das einem zur Verfügung stehende Wissen in effizienter Weise zu nutzen versteht, gerade auch in ungewohnten Zusammenhängen. Neben dem Besitz formaler Techniken ist es wichtig zu wissen, wann ihr Einsatz angemessen ist und wann man besser davon absieht. Ebenso wichtig ist es, die Qualität der eigenen Argumentation bewerten und verbessern zu können, während man sich ihrer bedient; all dieses - und noch mehr - würde man unter dem Begriff "Metakognition" einzuordnen haben. Eine der ersten, weitgefaßten Definitionen von Metakognition stammt von Flavell (1976, S. 232):

> "Metakognition" bezieht sich auf das Wissen von den eigenen kognitiven Prozessen und allem, was damit zu tun hat, etwa die für das Lernen relevanten Eigenschaften von Information und Daten. Zum Beispiel benutze ich Metawissen ..., wenn ich bemerke, daß es mir schwerer fällt, A zu lernen als B; wenn mir auffällt, daß ich C noch einmal überprüfen sollte, bevor ich es als Tatsache hinnehme; wenn mir scheint, daß ich in Aufgaben des Multiple-choice-Typs am besten jede einzelne Alternative untersuche, ehe ich mich für eine als die beste entscheide; ... Metakognition bezieht sich unter anderem

auf das aktive Überwachen und konsequente Regulieren und Orchestrieren solcher Prozesse in Beziehung zu den kognitiven Objekten und Daten, auf denen sie beruhen, gewöhnlich im Dienst eines konkreten Ziels oder Anliegens.

Kurzgesagt handelt es sich hier also um Wissen darüber, wie man mit seinem Wissen zur Erzielung größtmöglichen Nutzens umgeht.

12.2 Die Rolle von Metakognition in mathematischen Situationen

In 11.4 und 11.5 haben wir die Bedeutung von Wissensrepräsentationsstrukturen für mathematisches Verständnis angesprochen. Eine durch Situationsmerkmale zutreffend aktivierte WRS, so wurde gesagt, führt auch zur Bereitstellung von Plänen, deren Ausführung man in der Situation u.U. zu erwarten hat. Wo angebracht ermöglicht die Routine-Aktivierung solcher Repräsentationen ein schnelles und effizientes Bewältigen mathematischer Situationen. Nicht immer jedoch ist die sofortige Ausführung von Plänen, "die einem einfallen", sinnvoll - hier spielt die Kontrolle des kognitiven Funktionierens durch metakognitive Fertigkeiten eine wichtige Rolle. Schoenfeld (1983) gibt einige Beispiele von Fällen, wo durch das Fehlen angemessener metakognitiver Fertigkeiten Schüler bei der Bearbeitung mathematischer Probleme scheitern. Eins davon geben wir im Folgenden wieder.

Problem: Auf der Kreislinie eines Kreises mit dem Radius R werden drei Punkte markiert und das dadurch begrenzte Dreieck eingezeichnet. Welche Wahl der Punkte ergibt das Dreieck mit der größtmöglichen Fläche? Begründe deine Antwort so gut wie möglich.

Zwei Schüler D und E in Schoenfelds Untersuchungen nahmen sich 20 Sekunden Zeit, das Problem zu lesen, und begannen sogleich, einen Lösungsweg zu entwerfen. Hier ihr Dialog dabei:

D: "Versuchen wir doch einen Spezialfall, wie ein gleichseitiges Dreieck..."

E: "Könnten wir die ... du weißt doch, wie wir Minimax-Aufgaben rechnen, wo man zwei Formeln hat und es auf eine Variable reduziert und das alles..."

D: "Wir können es ja für ein gleichseitiges Dreieck machen, aber funktioniert das in allen Fällen? Ich kann mir vorstellen, alles, was er von uns will, ist herauszufinden ..."

E: "Probieren wir doch erstmal das gleichseitige ..."

Die Schüler verbringen dann sechs Minuten damit, die Fläche des dem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks (mit Seite x) abzuleiten, die $x^2/4 \cdot \sqrt{3}$ beträgt. Diese Formel "maximieren" sie dann durch Differenzieren und Gleich-Null-Setzen, woraus sich ergibt, daß $x = 0$ sein muß. Sie sind verwirrt und geben auf.

Zwei andere Schüler, K und A, vermuten nach weniger als einer Minute, daß das gleichseitige Dreieck das größte ist und beschließen, dessen Fläche auszurechnen. Sie verwickeln sich in umständliche Berechnungen und sitzen immer noch daran, als nach 20 Minuten ihre Zeit aufgebraucht ist. Auf die Frage, wozu sie denn die Fläche des gleichseitigen Dreiecks benötigen, können sie keine Antwort geben.

Was war los? Im ersten Fall begannen die Schüler eine Berechnung, die man bei etwas Nachdenken als Unsinn hätte erkennen können: Man kann keinen Spezialfall maximieren. Im zweiten Fall rechneten die Schüler "wild drauflos", kaum daß ihnen "gleichseitiges Dreieck" und "Fläche" in den Sinn kamen. Keinem gelang es, den anfänglichen Fehlschlag zu überwinden. Sieben von zwölf Schülerpaaren in Schoenfelds Experiment verhielten sich so oder so ähnlich, nach dem Motto "das Problem lesen, ein Vorgehen auswählen und dann daran arbeiten, solange die Zeit reicht". In allen Fällen wäre die Vergeblichkeit des Vorgehens vorhersehbar gewesen, aber *aufgrund des Fehlens bestimmter metakognitiver Fertigkeiten wurde nichts vorhergesehen.* Einige der anderen fünf Schülerpaare fanden Teillösungen, deren weitere Ausnutzung zum Ziel geführt hätte; als jedoch der Ansatz das Problem nicht völlig löste, wurde er völlig verworfen (und damit die guten Ideen). Auch dies ist ein Versagen auf metakognitiver Ebene: In so einem Fall sollte man sich zunächst fragen, ob die vergeblichen Ansätze vielleicht brauchbare Elemente enthielten.

Es ist also klar, daß die Aktivierung einer WRS ohne "exekutive Kontrolle", d.h. Überwachung der Auswahl und Ausführung von Handlungsplänen leicht zu ziellosem oder gar unsinnigem Handeln führen kann. Aus diesem Grunde wird mathematisches Verständnis auch auf metakognitive Fertigkeiten bauen müssen. Fragen wie: "Was wird dir dieser Ansatz bringen?" oder "Ist dieser Ansatz gerechtfertigt?" würden unangemessenen Ansätzen vermutlich Einhalt geboten haben. "Rechtfertigen die Fortschritte die Fortsetzung dieses Ansatzes?" hätte zielloses Herumrechnen vielleicht unterbrochen. Solche Fragen kamen jedoch den Schülern nicht in den Sinn, woraus Schoenfeld folgert, daß im Mathematikunterricht eine solche Komponente von Mathematikverständnis vermutlich außer acht gelassen wurde.

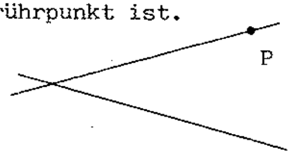
Aus anderen (nicht auf Mathematik bezogenen) Studien führt

Schoenfeld Fälle an, in denen sich Probanden - durch geschickte Fragen sensibilisiert - als fähig erwiesen, viel tiefergehende Argumente zu geben, als sie ohne solche Unterstützung hatten produzieren können. Oder es wurden Versuchspersonen durch die bloße Aufforderung, ein Gegenbeispiel zu finden, in die Lage versetzt, ihre eigene fehlerhafte Argumentation zu widerlegen. Dies bedeutet: Hätten sie von sich aus ihre Argumentation mit der Suche nach Gegenbeispielen überprüft, so hätten sie die falschen Schlüsse vermeiden können.

12.3 Probleme mit dem "mathematischen Weltbild"...

Wir wollen noch ein in anderer Weise typisches von Schoenfelds Beispielen vorstellen. Zwölf Paare von Probanden (in diesem Fall College-Studenten des ersten Semesters) bekamen das folgende

Problem: Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden und der Punkt P auf einer der Geraden (siehe Abbildung). Zeige und begründe, daß man nur mit Zirkel und Lineal einen Kreis konstruieren kann, der beide Geraden als Tangenten hat, wobei P der eine Berührpunkt ist.



Das Ergebnis: In allen Fällen wurde durch Probieren eine Konstruktion versucht, wobei zum Teil mehr als 80% dieser Zeit mit Zirkel und Lineal in der Hand gearbeitet wurde, mit mehr oder weniger Erfolg. In keinem Fall wurde eine Lösung des Problems aus mathematischen Überlegungen abgeleitet. In einem Fall wurde nachträglich eine mathematische Begründung versucht, sonst blieb es bei der Konstruktion, also der rein empirischen Rechtfertigung allein. *Aber:*

Am Ende der Problemsitzung wurden die Studenten aufgefordert zu zeigen, (a) daß die Berührpunkte des Kreises mit den Geraden den gleichen Abstand vom Geradenschnittpunkt haben und (b) daß die durch den Kreismittelpunkt und den Schnittpunkt der gegebenen Geraden führende Gerade den von den gegebenen Geraden eingeschlossenen Winkel halbiert - Fakten, auf die sich die Studenten ohne Beweis verlassen hatten. *Allen* beteiligten Paaren gelang der Nachweis dieser beiden Fakten innerhalb kurzer Zeit. Das heißt, sie verfügten über die Mittel zur Lösung des ursprünglichen Problems, benutzten sie aber nicht - sie dachten nicht einmal daran, sie zu benutzen!

Man kann daraus folgern, daß das "mathematische Weltbild" dieser Studenten mathematische Argumentation als eine nützliche Vorgehensweise mathematischen Entdeckens nicht umfaßt - in diesem Fall möglicherweise begründbar aus Erfahrungen mit einem schulischen Geometrieunterricht, der Beweise primär als Bestätigung von ohnehin einsichtigen oder vom Lehrer als wahr vorgegebenen Sachverhalten einsetzte.

12.4 Was tun? Praktische Empfehlungen für den Unterricht

Wie gesagt führt Schoenfeld den Mangel an metakognitiven Fertigkeiten bei Schülern in erster Linie darauf zurück, daß der "normale" Mathematikunterricht sich häufig auf die Vermittlung von Fakten und Verfahren beschränkt und Maßnahmen zur Entwicklung metakognitiver Fertigkeiten kaum oder gar nicht zum Unterrichtsgegenstand erhoben werden. Die Vorstellung, als "Manager" für sich selbst das eigene Handeln zu beaufsichtigen, ist den meisten Schülern fremd. Nach ihrer Vorstellung arbeitet das Gedächtnis im Grunde autonom: Man tut, "was einem dazu einfällt".

Gestützt auf seine Erfahrungen aus eigenen Unterrichtsexperimenten, schlägt Schoenfeld vor, mit den Schülern die Problematik der Kontrolle von Entscheidungen offen zu besprechen und sie im Gebrauch solcher Entscheidungen zu unterweisen. Dazu eignet sich ein problemorientierter Unterricht, in dem der Lehrer die Rolle des "Managers" (bei Arbeit im Klassenverband) oder des "Beraters" (bei Gruppenarbeit) übernimmt. Fragen der folgenden Art sollen den Schülern helfen, ihr Tun einschätzen zu lernen:

- "Ist jeder sicher, daß er das Problem versteht, ehe wir es zu lösen versuchen?"

- "Gibt es irgend etwas sonst, was wir probieren sollten?"

- (Nach z.B. 5 Minuten) "Gut, wir haben dies eine Weile verfolgt. Klappt es damit? Geht alles wie gewünscht, oder sollten wir etwas anderes ausprobieren?"

Wichtig ist, daß solche Fragen wie die letzten auch dann gestellt werden, wenn alles gut läuft; sonst werden die Schüler sie bald als Hinweis des Lehrers auffassen, etwas anderes zu probieren - damit wäre ihr eigentlicher Zweck, nämlich den Schüler nach und nach von der Kontrolle durch den Lehrer auf eigene Kontrolle umzustellen, verfehlt. Die Idee ist, daß man diese Fragen zu jeder Zeit "aus dem Hinterkopf nach vorne holen" kann, wenn die Lösung nicht gelingen will. Weitere Verhaltensmaßregeln und Fragen könnten z.B. sein:

- "Gebe ich dem Ansatz noch drei Minuten, dann probiere ich erst etwas anderes."

- "Bevor ich diese Ansatz verwerfe, kann ich irgend etwas davon retten? Sind irgendwelche Ideen darin, auf die ich evtl. zurückkommen sollte, wenn der neue Ansatz nicht klappt?"

Das heißt, als "externer Manager" soll der Lehrer den Schülern zunächst helfen, das beste aus ihrem Wissen zu machen. Keine der vom Lehrer eingeworfenen Fragen könnte nicht auch vom Schüler gestellt werden (sie enthalten in keinem Fall dem Schüler nicht zugängliche Information). Das Ziel ist, daß der Schüler all diese Kontrollfunktionen verinnerlicht und schließlich die Überwachung durch einen externen Manager (Lehrer) erübrigen kann.

Verstärkt soll dieses Ziel in der Gruppenarbeit angegangen werden; der Lehrer tritt hier eher als Berater auf. In Schoenfelds Unterrichtsexperiment wurde im Klassenraum ein Poster mit den folgenden "exekutiven" Fragen aufgehängt:

> Was genau tust du gerade?
>
> (Kannst du es präzise beschreiben?)
>
> Warum tust du das?
>
> (Wie paßt es in deine Lösung?)
>
> In welcher Weise hilft es dir?
>
> (Was wirst du mit dem Ergebnis dann machen?)

Die anfangs häufig beobachtete Unfähigkeit der Schüler, diese Fragen zu beantworten - gekoppelt mit der Erkenntnis, daß in diesem Fall man höchstwahrscheinlich gerade Zeit verschwendet - begünstigt dabei das Verinnerlichen dieser Fragen. Keineswegs soll das Explorieren von Lösungswegen hierdurch ausgeschlossen werden; eine gerechtfertigte Antwort ist natürlich auch: "Ich probiere ein bißchen herum und hoffe, daß mir dabei etwas einfällt", solange der Schüler sich eben dieses Tuns *bewußt* bleibt und nicht in zielloses Handeln verfällt. In seinen Ausführungen bezieht Schoenfeld sich auf den russischen Psychologen Wygotski, der das graduelle Verlagern des "äußeren" Lehrer-Schüler-Dialogs zu einem innerlich geführten in seiner Bedeutung für die Entwicklung des handlungsorientierten Denkens herausgestellt hat.

Aus den Erkenntnissen aus Schoenfelds Erörterungen können wir schließen, daß ein auf mathematisches Verständnis ausgerichteter Unterricht die Aufmerksamkeit gegenüber den verfügbaren Wissensresourcen, Kontrollstrukturen und dem "mathematischen Weltbild" einschließen muß. Der nicht einfache, jedoch mögliche Einbezug von "metakognitiven" Lehraktivitäten ist sinnvoll und gerechtfertigt: Es zahlt sich offenbar aus zu wissen, wie man mit seinem Wissen besser umgeht.

12.5 Literatur

Flavell, J. (1977). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.), *The nature of Intelligence*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (1983). *Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding*. Paper presented at a conference on problem solving held at San Diego State University, June 3-5.

13. DIE ROLLE VON SPRACHE FÜR MATHEMATISCHES VERSTÄNDNIS

13.1 Metakognition und Automatisierung; Metasprache

Im letzten Abschnitt haben wir die entscheidende Rolle von Metakognition bzw. metakognitiven Fertigkeiten für die zielgerichtete Anwendung von mathematischem Wissen erörtert. Es war z.B. davon die Rede, daß trotz des Vorhandenseins relevanten Wissens Schüler bei der Bearbeitung mathematischer Probleme durch ein "Versagen auf metakognitiver Ebene" scheitern können. Metakognitive Fertigkeiten sind notwendig für die Überwachung der Auswahl und Ausführung von Handlungsplänen, für die Einschätzung des eigenen Handelns *während man handelt*. Die von Schoenfeld vertretenen Forderungen zielen auf die Verinnerlichung von Kontrollfunktionen in Form von Fragen, die man sich selbst während der Problembearbeitung stellt. Dabei soll man gewissermaßen "aus sich heraustreten" und das eigene Tun von einer höheren (Meta-) Ebene aus beobachten und bewerten.

Die Unterichtsempfehlungen von Schoenfeld betrafen das Bewußtmachen solcher metakognitiven Mechanismen und das Einüben entsprecAender Verhaltensweisen. Vergleichen wir dies Vorgehen mit den drei Stufen des Fertigkeitenlernens aus Abschnitt 2.3 - kognitive, assoziative und autonome, so ist auch hier die Wichtigkeit der dritten, autonomen Stufe hervorzuheben: Wie bei jeder anderen Fertigkeit bedarf es vermutlich reichlichen Übens, um die erstrebenswerten metakognitiven Fertigkeiten zu verinnerlichen, d.h. zu automatisieren. Ebenso ist "der knappe kognitive Vorrat an Aufmerksamkeit" (vgl. S. 27 und S. 16) zu bedenken: Ehe die in der jeweiligen Situation einzusetzenden mathematischen Fertigkeiten nicht einigermaßen automatisch ausgeführt werden können, wird der Schüler kaum kognitive Aufmerksamkeit auf die Kontrolle des eigenen Tuns richten können.

Eine besondere Rolle in diesem Zusammenhang scheint die Entwicklung einer inneren, funktionalen Sprache einzunehmen, wie sie vermutlich aus dem nach innen verlagerten Lehrer-Schüler-Dialog hervorgeht (vgl. S. 72). Die Überprüfung einer aufgefundenen WRS (siehe Abschnitt 11.5) daraufhin, ob sie zur aktuellen Situation paßt, das Aneinanderfügen von Wissensteilen zu Plänen für die Problembearbeitung, die Auswahl und Überwachung von Plänen usw. bedarf einer solchen Sprache, die kurzgesagt die Orientierung des

Individuums zu Handlungen leitet. Davis und seine Mitarbeiter haben wiederholt auf den Stellenwert einer sog. Planungssprache oder auch *"Metasprache"* hingewiesen (siehe etwa Davis & McKnight, 1979). Daß die Entwicklung entsprechender sprachlicher Kompetenz der Schüler für ihr mathematisches Verständnis wichtig, jedoch offenbar von komplexer Problematik ist, soll im Folgenden an einem Beispiel erläutert werden.

13.2 Verständnisebenen bei mathematischen Fertigkeiten

Kommen wir dafür zurück auf das in 9.3 behandelte Verständnis von mathematischen Fertigkeiten, und zwar unter dem Aspekt des Kontexts, in dem eine Fertigkeit eingesetzt wird. Wir hatten dort gesagt: "Kontexteingebettete Probleme erfordern ein komplexeres Verständnis von Sprache, Situation, Strategiesuche und Fertigkeiten." Zur Erläuterung der unterschiedlichen Verständnisebenen bei der Ausführung einer Fertigkeit soll ein idealisiertes Beispiel analysiert werden (die Quelle sind eigene Unterrichtserfahrungen). Drei Schüler lösen eine quadratische Gleichung mittels quadratischer Ergänzung und führen dabei, um einen Ausdruck der Form

$$x^2 + 2ax + a^2$$

zu erhalten, die folgende Äquivalenzumformung durch:

$$x^2 - 6x = -5 \longrightarrow x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$$

Wir wollen diese (idealisierten) Schüler A, B und C nennen und uns vorstellen, daß ihr Denken sich in folgenden Worten äußert.

Schüler A sagt etwa: "Und jetzt muß ich *die quadratische Ergänzung machen, das heißt* ich muß den Koeffizienten von x (-6) durch 2 teilen *um a zu bekommen* (-3), dieses quadrieren, *um a^2 zu bekommen* (9), und es dann auf beiden Seiten addieren."

Schüler B sagt: "Und jetzt muß ich den Koeffizienten von x (-6) durch 2 teilen (ergibt -3), dieses quadrieren (ergibt 9) und es dann auf beiden Seiten addieren."

Schüler C sagt: "Und jetzt teile ich -6 durch 2 (ergibt -3), quadriere dies (ergibt 9) und addiere es dann auf beiden Seiten."

Alle drei Schüler können offenbar die notwendigen Schritte zur quadratischen Ergänzung ausführen. Jedoch können wir anhand seiner Sprache auf drei unterschiedliche Ebenen in A's Denken schließen (wir wollen dabei annehmen, daß die jeweils geäußerte Sprache dem Denken des Schülers entspricht und nicht etwa Schüler

C nur eine "sprechfaule" Ausgabe von Schüler A ist):

(i) Auf der untersten Ebene (die in C's Erklärung als einzige beobachtet werden kann) operiert A mit Zahlzeichen, d.h. manipuliert Symbole.

(ii) Auf der zweiten Ebene (die auch in B's Erklärung beobachtet werden kann) zeigt A Verständnis für den Stellenwert der Symbole innerhalb der die Gleichung ausdrückenden Zeichenreihe ("6 ist der Koeffizient von x"). Das heißt, er versteht die Syntax der Zeichenreihe und kann dies angemessen ausdrücken.

(iii) Auf der höchsten Ebene demonstiert (nur) A ein Verständnis für die Bedeutung des gerade durchgeführten Gesamtprozesses (eine quadratische Gleichung auf das vollständige Quadrat bringen). Das heißt, er verbindet seine Handlungen mit dem auf das Gesamte gerichteten Zweck dieses Teils der Prozedur, indem er sich einer auf höherer Ebene liegenden "Metasprache" bedient.

Nun - wie kann ein Schüler dies eigentlich lernen? Alles auf einmal? Wenn nicht, in welcher Reihenfolge dann? Ein dem Mathematiklehrer wohlbekanntes Phänomen, das man zu einem frühen Zeitpunkt beim Unterrichten von Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen (und ähnlich in vielen anderen Situationen) antrifft, ist das folgende: Auf die Frage "was kommt als nächstes?" erwartet der Lehrer vom Schüler die folgende Antwort: "Quadratische Ergänzung!" Jedoch sagt häufig ein Schüler: "Jetzt 6 durch 2 teilen, dann quadrieren und auf beiden Seiten addieren." Das heißt, während es des Lehrers Anliegen ist, über Ziele und Zwecke zu reden - auf einer höheren Ebene, verharrt der Schüler auf der unteren Ebene und antwortet mit einer Beschreibung des Prozesses, so wie er von früheren Fällen in seiner Erinnerung ist - offenbar nur daran interessiert, was zur Lösung der Aufgabe *getan werden muß*. Ist dies nur einfach ein Unterschied im Interessenstandpunkt von Lehrer und Schüler?

13.3 Sprache und Bewußtsein

Eine interessante Position des Psychologen Bruner kann in dieser Situation möglicherweise weiteren Aufschluß geben. Über das Erlernen von Sprache, ausdrücklich auch auf Mathematik bezogen, hat Bruner (1981) gesagt, daß sich beim Kinde ein Bewußtsein für das eigene Tun entwickelt, wenn von ihm bestimmte technische Bedingungen für den Gebrauch von Zeichen (z.B. gesprochenen Worten) gemeistert werden. Es sind dies der deiktische, der intra-

linguistische und der meta-pragmatische Gebrauch von Zeichen. Damit ist folgendes gemeint:

Deixis (abgeleitet vom griechischen Wort für "zeigen") bezieht sich auf die Art und Weise, wie ein Zeichen auf einen Referenten (bezeichnetes Objekt) verweist. Zum Beispiel illustriert

```
   *      *
     *  *    *    <-- 6
    *
```

eine solche Zeichen-> Referent-Beziehung (das Zeichen "6" verweist auf eine Gruppe von sechs Sternen). Es folgt ein anderes Beispiel für Deixis (in welchem überdies das Zeichen "6" Objektcharakter hat):

Koeffizient-> 6 x

Der *intralinguistische* Gebrauch von Zeichen betrifft eine innerhalb der Sprache ausgedrückte Zeichen-> Zeichen-Beziehung. Zum Beispiel ein Satz wie

"6 ist der Koeffizient von x"

setzt die Zeichen "6" und "Koeffizient" in Beziehung und erlaubt es dem Sprechenden, diese Beziehung in seiner Äußerung zu reflektieren.

Der *metapragmatische* Gebrauch von Zeichen ermöglicht es, das zweckgerichtete Reflektieren über Zeichenbeziehungen sprachlich zu erfassen; er beinhaltet eine geschachtelte Beziehung zwischen Zeichen wie folgt: Zeichen-> (Zeichen-> Zeichen); d.h. Zeichen verweisen auf eine Zeichen-Zeichen-Beziehung. Ein Beispiel für den metapragmatischen Gebrauch von Zeichen ist der folgende Satz:

"'6 ist der Koeffizient von x' ist eine Aussage über die Rolle von '6' in dem Term '6x'."

Nach Bruner versetzt dieser letzte Typ einer Zeichenbeziehung das Individuum in die Lage, sich über die eigene Sprache zu erheben und dadurch Bewußtsein über das eigene Tun zu erlangen. Das heißt, Bruner sieht Bewußtsein abgeleitet von der Fähigkeit, über das eigene Tun zu reflektieren und sich von der eigenen kognitiven Tätigkeit abzuheben. Diese Sicht koppelt Bewußtsein also untrennbar an die Entwicklung angemessener Sprache.

Zurück zu unserem obigen Beispiel mit der quadratischen Ergänzung: Es erscheint nach allem so, daß es auch eine Frage des kognitiven Entwicklungsstandes ist, ob ein Schüler solch einen Prozeß in Beziehung zu seiner Funktion und seinem Zweck innerhalb eines größeren Kontexts setzen kann. Wenn der Schüler seine ganze Aufmerksamkeit noch der Ausführung der einzelnen Operationen zuwenden muß, wird es für ihn schwierig, wenn nicht gar unmöglich sein, den bewußten Überblick über das Ganze zu behalten. Solange nämlich nicht der Gesamtprozeß zu einer Routineprozedur "gechunkt" worden ist, wird kognitive Aufmerksamkeit in den Einzelschritten gebunden (vgl. Abschnitt 4). Dies gilt vermutlich in noch stärkerem Maße für viele Situationen aus dem Analysisunterricht.

Hieraus läßt sich vielleicht ermessen, daß der Erwerb mathematischer Handlungsfähigkeit (als dem vielleicht wichtigsten Aspekt von Mathematikverständnis) sich nicht nur auf das Erlernen von Verfahren und den Erwerb von Begriffsverständnis stützen kann, sondern auch sprachliche Kompetenz in hohem Maße erfordert, deren Entwicklung im Mathematikunterricht gefördert werden muß.

13.4 Literatur

Bruner, J. (1981). Eingeladener Vortrag bei der Curriculumtagung am "Zentrum für interdisziplinäre Forschung" an der Universität Bielefeld im Juni 1981 (Transkript einer Tonbandaufzeichnung).

Davis, R.B. & McKnight, C.C. (1979). Modeling the processes of mathematical thinking. *Journal of children's mathematical behavior*, 2(2), 91-113.

13.5 Übungen

1. Wie würden Sie den Unterricht unter Berücksichtigung verschiedener Verständnisebenen und der Rolle von Sprache gestalten? Erörtern Sie ein Unterrichtsthema Ihrer Wahl!

2. Stellen Sie Ihre logischen und metakognitiven Fertigkeiten auf die Probe bei der Lösung des "Kanonenkugelproblems"! Beobachten Sie Ihre Metasprache (besonders auch Sätze mit "ich", d.h. wo Sie sich von Ihrem eigenen Tun absetzen) und machen Sie sich darüber Notizen. Nicht aufgeben, wenn es mit dem Problem nicht im ersten Anlauf klappt!

Das Kanonenkugelproblem:

Stellen Sie sich vor, Sie haben zwölf Kanonenkugeln, alle bis auf eine vom gleichen Gewicht. Es ist nicht bekannt, ob die "ungleiche" Kugel leichter oder schwerer als die anderen ist, nur, daß sie anders ist. Sie erhalten eine (Balken-)Waage und sollen die ungleiche Kugel in nur drei Wägungen herausfinden.

14. EINE ENTWICKLUNGSPSYCHOLOGISCH BEGRÜNDETE LEHRTHEORIE

Einen interessanten Ansatz, die Erkenntnisse aus der modernen Kognitionspsychologie für den Unterricht nutzbar zu machen, vertritt der Erziehungswissenschaftler Robbie Case vom Ontario Institute for Studies in Education (Toronto). Case's (1978, 1980) Forschung zur kognitiven Entwicklung dient der Formulierung einer Lehrtheorie und hat mittlerweile weithin Aufmerksamkeit gefunden. Case, der sich als "Neo-Piagetiker" versteht, hat dazu bestehende Unterrichtstheorien unter Einbeziehung entwicklungsbedingter Stufen im kindlichen Auffassungsvermögen fortentwickelt. Mit teils eigenen und teils klassischen Piaget-Experimenten hat Case gezeigt, daß in der Bewältigung von Problemaufgaben Kinder eine Folge von kognitiven Entwicklungsstufen durchlaufen, die Case auch in Untersuchungen anderer Forscher identifizieren konnte. Eine wesentliche Annahme zur Erklärung dieser Stufung besteht darin, daß mit fortschreitendem Alter die Kapazität des geistigen Arbeitsspeichers (vgl. Abschnitt 3), d.h das Maß an bewußt über-blick- und kontrollierbarer Information zunimmt. In den folgenden Abschnitten wollen wir dies näher erläutern.

14.1 Der Ansatz von Case

Case's Analyse stützt sich auf den Information-Processing-Ansatz und bezieht sich auf die dort postulierte "exekutive Kontroll-struktur". Darunter versteht man eine geistige Prozedur, die durch eine Folge von geistigen Operationen von einer (unbefriedigenden) Anfangssituation zu einer (befriedigenderen) Zielsituation führt. Eine exekutive Kontrollstruktur kann i.a. in drei Komponenten gefaßt werden: (1) Eine Repräsentation der Problemsituation, (2) eine Repräsentation des Ziels und (3) eine Repräsentation der (bzw. einer) zum Ziel führenden Schrittfolge.

Case analysierte zunächst ein klassisches Experiment von Piaget: Eine einfache Balkenwaage mit der Möglichkeit, verschieden viele, verschieden große Gewichte in verschieden großem Abstand vom Hebeldrehpunkt anzuordnen, ist gegeben. Hierbei können mit dem Alter zunehmend differenzierte Strategien von Kindern festgestellt werden bei der Vorhersage, welcher Arm der Waage sich senken wird (in Abhängigkeit von Anzahl, Größe und Anordnung der Gewichte). Case's Analyse ergab für drei verschiedene Altersgruppen die folgenden exekutiven Kontrollstrukturen:

<u>*Stufe 1*</u> (3 – 4 Jahre)

PROBLEMSITUATION:

- Balkenwaage mit Gewichten

ZIEL:

- Finde heraus, welche Seite sich senken wird.

STRATEGIE:

1. Schätze ab, ob auf einer Seite das Gewicht schwerer aussieht. Wenn ja, wähle diese Seite.

<u>*Stufe 2*</u> (4 1/2 – 6 Jahre)

PROBLEMSITUATION:

- Balkenwaage mit Gewichten
- Verschiedene Zahl von Gewichten auf jeder Seite

ZIELE:

- Finde heraus, welche Seite sich senken wird.
  - Finde die Seite mit dem zahlmäßig größeren "Zug".

STRATEGIE:

1. Schätze ab, ob auf einer Seite das Gewicht schwerer aussieht. Wenn ja, wähle diese Seite. (Wenn nicht, gehe zu 2.)
2. Zähle die Gewichte auf jeder Seite, merke dir die Seite mit der größeren Anzahl als schwerer. (Gehe zu 1.)

<u>*Stufe 3*</u> (7 – 8 Jahre)

PROBLEMSITUATION:

- Balkenwaage mit Gewichten
- Verschiedene Zahl von Gewichten auf jeder Seite
- Gewichte haben verschiedenen Abstand vom Drehpunkt

ZIELE:

- Finde heraus, welche Seite sich senken wird.
  - Finde die Seite mit dem zahlmäßig größeren "Zug".
    - Finde die Seite mit dem größeren Abstand vom Drehpunkt.

STRATEGIE:

1. Schätze ab, ob auf einer Seite das Gewicht schwerer ausssieht. Wenn ja, wähle diese Seite. (Wenn nicht, gehe zu 2.)

2. Zähle die Gewichte auf jeder Seite, merke dir die Seite mit der größeren Anzahl als schwerer. (Falls ungleich, gehe zurück zu 1. Falls gleich, gehe zu 3.)

3. Zähle auf beiden Seiten die Anzahl der Abstandseinheiten vom Drehpunkt. Merke dir das Gewicht auf der Seite mit dem größeren Abstand vom Drehpunkt als das mit dem größeren Zug. (Gehe zurück zu 1.)

In den Kontrollstrukturen der Stufen 2 und 3 sind jeweils mehrere Ziele angegeben, wobei das erste, "höchste" Ziel immer das gleiche bleibt wie in Stufe 1. Mit zunehmender Problemkomplexität müssen jedoch "untergeordnete" Ziele (im Druck eingerückt) in die Lösestrategie einbezogen werden. Dies bedeutet, daß bei der Lösung komplexerer Probleme das Kind Aufmerksamkeit auf die Verfolgung untergeordneter Ziele richten muß, dabei jedoch das oder die übergeordneten Ziele nicht aus den Augen verlieren darf; solange keine Teilstrategien Routine geworden sind, müssen alle Ziele im Arbeitsgedächtnis verbleiben. D.h. mit zunehmender Problemkomplexität wachsen auch die Kapazitätsanforderungen an den Arbeitsspeicher: Wie groß auch immer die Belastung bei einer bestimmten Stufe sein mag - die der nächsthöheren Stufe ist um mindestens eine (Kurzzeit-)Gedächtniseinheit höher. Case bezieht sich dabei ausdrücklich auf die Annahme, daß das Kurzzeitgedächtnis - der Arbeitsspeicher - begrenzt ist in der Fähigkeit, solche Teilziele sowie die Resultate schon durchgeführter Denkoperationen aufzunehmen.

In Situationen, wo entsprechend dem kindlichen Entwicklungsstand die Kapazitätsgrenze erreicht wird, könnte die noch beherrschte Stufe der Problemkomplexität dadurch überschritten werden, daß die auf untergeordnete Ziele gerichteten Strategien automatisiert werden (vgl. auch Abschnitt 3.2). Case schlägt vor, dazu folgendermaßen vorzugehen:

1. Schritt (Analyse): Identifizierung einer "exekutiven Hierarchie" im speziellen Problemgebiet.

2. Schritt (Test): Identifizierung der augenblicklichen Entwicklungsstufe der Schüler innerhalb der Hierarchie.

3. Schritt (Unterrichtsstrategie): Erleichterung des Fortschritts von der augenblicklichen zur nächsten Stufe der Hierarchie.

Um dies zu bewerkstelligen, soll der Unterricht wie folgt angelegt werden: (a) Entwerfe eine Situation, in der der Schüler das oberste Ziel der Aufgabensituation verstehen kann. (b) Stelle einige Aufgaben, die unter der augenblicklichen Exekutivstruktur des Schülers gelöst werden können. (c) Gehe dann zu Aufgaben über, die sich damit *noch nicht* lösen lassen, sondern eine Stufe höher liegen. (d) Helfe dem Schüler dabei, die neuen Merkmale dieser Aufgaben zu erkennen, die seine bisherige Strategie scheitern lassen. (e) Helfe dem Schüler, eine neue Unterprozedur zur Bewältigung dieses neuen Merkmals zu entwickeln. (f) Lasse eine ausreichende Übungsperiode zur Automatisierung dieser neuen Unterprozedur folgen, so daß der Schüler nicht einmal mehr die *Intention* zu ihrer Ausführung "speichern" muß. Das heißt, in gewissem Sinne sieht der Case'sche Ansatz also vor, daß der gestufte Entwicklungsprozeß im Unterricht nachvollzogen wird.

14.2 Im Test: Unterricht zur Proportionalität

Eine im Gefolge von Case's Arbeit durchgeführte Untersuchung von Gold (1980) ging davon aus, daß häufig Schüler in einer Weise unterrichtet werden, die sich an der formalen Struktur von Mathematik orientiert, den kognitiven Entwicklungsstand der Schüler jedoch nicht in Betracht zieht. Es könne anhand vorhandener Forschungsergebnisse angenommen werden, daß (a) der kognitive Entwicklungsstand Einfluß auf die Leichtigkeit, mit der Schüler arithmetische Grundbegriffe lernen, habe und daß (b) bei Kindern mit Lernschwierigkeiten ausschließlich in Mathematik unter Umständen ein weniger weit fortgeschrittener kognitiver Entwicklungsstand die Ursache sein könne. Falls dies der Fall sei, so könne ein Unterricht, der die kognitive "Bürde" der Schüler verringert, Aussicht auf Erfolg haben. Zwei Ansätze in diesem Sinne seien der einer Lernhierarchie nach Gagné (1968) und der entwicklungspsychologisch begründete Ansatz von Case, der neben einer Reduzierung der Informationsbelastung Rücksicht nimmt auf die Fähigkeit der Kinder, den begrifflichen Kern eines Lerngegenstands zu verstehen, als auch auf ihre Tendenz, übervereinfachte Lösungsstrategien zu entwickeln, wenn sie Verständnisschwierigkeiten haben.

Um diese Annahmen zu überprüfen, wurden drei verschiedene Unterrichtsansätze zum Thema "Proportionen" - 1. "Standard" (US-Curriculum), 2. nach Gagné und 3. nach Case - an zwei Gruppen von je 27 Schülern erprobt. Bei der einen Gruppe handelte es sich um Schüler, die zu jung waren, um den betreffenden Stoff schon erarbeitet zu haben (4. und 5. Klasse), bei der anderen (6. und 7. Klasse) um Schüler, die den Stoff schon behandelt, aber (nach Erkenntnissen aus einem Vortest) nicht ausreichend gelernt und auch sonst Schwierigkeiten mit der Mathematik hatten; auf diese Weise wollte man die Abhängigkeit vom kognitiven Entwicklungsstand der Schüler erschließen.

Die Ergebnisse (stark verkürzt): Es zeigte sich, daß in der unmittelbaren Auswirkung (Nachtest nach zwei Tagen) die beiden experimentellen Ansätze dem Standardunterricht überlegen waren, wobei ein nur geringer Vorsprung des Case-Ansatzes gegenüber dem von Gagné verzeichnet wurde, insbesondere bei der "normalen" Schülergruppe (ohne festgestellte Lernschwierigkeiten). Bei der Schülergruppe mit Lernschwierigkeiten zeigten sich jedoch langfristig (bei einem nach einem Monat durchgeführten Nachtest) erhebliche Unterschiede: Während die in den beiden experimentellen Methoden trainierten normalen Schüler sich noch verbessern konnten (gleichbleibender Erfolg bei der Standardgruppe), verbesserten sich bei den Schülern mit Lernschwierigkeiten nur die nach Case trainierten Schüler, sonst (d.h. bei Standard- oder Gagné-Training) wurde eine Leistungsverschlechterung beobachtet. Z.Tl. scheint der Unterschied begründet dadurch, daß die Case-Methode grundsätzlich dem intuitiven Verständnis eher zugängliche Strategien verfolgt.

14.3 Wann ist ein entwicklungsbezogenes Curriculum sinnvoll?

In vielen Fällen mag man argumentieren, daß anstelle der aufwendigen Unterrichtsmethode von Case der Unterricht aufgeschoben werden sollte, bis die Schüler den kognitiven Anforderungen besser gewachsen sind, sprich etwa bis zum Erreichen der formal-operativen Stufe (Piaget). Für die folgenden Schülergruppen ist der entwicklungspsychologische Ansatz von Case aber möglicherweise der einzige Weg zur Erlangung bestimmter mathematischer Fertigkeiten:

1. Kinder mit verzögerter geistiger Entwicklung. Nach Definition betrifft dies Schüler, deren Entwicklung hinter der ihrer gleichaltrigen Mitschüler zurückbleibt und in einer niedrigeren Stufe endet. In diesem Fall ist die Strategie, den Unterricht einfach bis zur vollständigeren Entwicklung aufzuschieben, natürlich gar nicht gangbar.

2. Erwachsene. Es gibt eine Reihe von kognitiven Aufgaben, die selbst bei Erwachsenen zu einer Überlastung des Arbeitsspeichers führen und in denen sie Strategien verfolgen, die zwar intuitiv bestechend, aber inkorrekt sind. In vielen Fällen trifft dies z.B. für Aufgaben aus der Statistik zu. Bei solchen Aufgaben sind Erwachsene im Grunde in der gleichen Lage wie in der intellektuellen Entwicklung Zurückgebliebene: Ihre Entwicklung ist abgeschlossen, und weiteres Verständnis kann nicht einfach als Folge des Lernaufschubs erwartet werden.

3. Kinder, die behindert sind oder einen anderen kulturellen Hintergrund haben als die Mehrzahl der Schüler (Gastarbeiter!). Obwohl hier ein Lernaufschub recht erfolgversprechend sein könnte, wird damit die Kluft zwischen ihnen und ihren Mitschülern nicht überwunden. Deshalb muß in solchen Fällen jeder Ansatz, der ein früheres Beherrschen bestimmter mathematischer Fähigkeiten möglich erscheinen läßt, erstrebenswert scheinen.

4. Kinder, die Förderunterricht in bestimmten Gebieten benötigen. Das Ziel von Förderunterricht ist natürlich, Schülern die Möglichkeit zu geben, aufzuholen. Auch hier scheint ein Lernaufschub keine sinnvolle Alternative zu sein.

Obwohl Case's Arbeit in erster Linie auf den Entwurf von Lehrplänen abzielt, könnte ohne umfangreiche Eingriffe der konventionelle Unterricht davon profitieren, daß Überlegungen angestellt werden, wie seine Methoden zu einer effizienteren Behandlung des Lernstoffs eingesetzt werden können. Bei entsprechenden Versuchen haben nach geeigneter Schulung Lehrer gute Erfolge damit im täglichen Unterricht verzeichnen können; z.B. gelang es ihnen nachher oft, die Ursache von Lernschwierigkeiten auf der Stelle zu diagnostizieren und auch sofort zusätzliche Übungen einzuplanen, die die festgestellte Schwierigkeit überwinden helfen.

14.4 Zusammenfassung

Case's Resultate können wie folgt zusammengefaßt werden: (1) Jüngere Schüler beherrschen weniger elaborierte Strategien als ältere. (2) Jede höhere Entwicklungsstufe beinhaltet die Einbeziehung einer oder mehrerer neuer (weniger geläufiger) Variablen. (3) Die Anzahl der vom Schüler berücksichtigten Variablen ist durch die Kapazität seines Arbeitsspeichers (Kurzzeitgedächtnis) beschränkt. (4) Für schulische wie nicht-schulische Probleme kann eine gleichartige Staffelung von mit dem Alter zunehmend differenzierten Strategien nachgewiesen werden.

Die von Case hieraus abgeleiteten und in Unterrichtsexperimenten überprüften Konsequenzen beinhalten die Identifikation von gebietsspezifischen Strategien sowie ihre entwicklungsgerechte Staffelung. Der Lernfortschritt des Schülers wird dann durch das Bewußtmachen weniger geläufiger Variablen und Einbeziehen entsprechender Strategien bei gleichzeitiger Automatisierung der vorher beherrschten Strategien bewerkstelligt. Vorteile dieser (aufwendigen) Unterrichtsmethode zeigen sich insbesondere bei Schülern mit Lernschwierigkeiten.

14.5 Literatur

Case, R. (1978). A developmentally based theory and technology of instruction. *Review of Educational Research 48*(3), 439-463.

Case, R. (1980). A developmental theory of instruction. In R. Karplus (Ed.) *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*, University of California, Berkeley.

Gagné, R.M. (1968). *The conditions of learning* (2nd edition). New York: Holt, Rinehart, Winston.

Gold, A.P. (1980). A developmentally based approach to the teaching of proportionality. In R. Karplus (Ed.) *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education*, University of California, Berkeley.

15. DIE ROLLE VON AUSWENDIG GELERNTEM WISSEN BEIM PROBLEMLÖSEN

In diesem Abschnitt kommen wir zurück auf Problemlösen unter dem Aspekt des Einsatzes von erlerntem Wissen. In Abschnitt 10 hatten wir uns mit der zentralen Rolle der geistigen Repräsentation für erfolgreiches Problemlösen beschäftigt; "erlerntes Wissen" wurde dort im wesentlichen in seiner Bedeutung für die Konstruktion eines entwickelten Problemverständnisses behandelt. Nun wenden wir uns einer besonderen Sorte von "erlerntem Wissen", nämlich dem auswendig gelernten zu und diskutieren seinen Stellenwert bei Problemlöseprozessen.

15.1 Elaboratives Problemlösen

In 10.3 haben wir bereits Larkins Modell des Problemlösens durch Repräsentationswechsel vorgestellt. Der wesentliche Gedanke war dabei folgender: Die als erstes Produkt des Verstehensprozesses im Geiste des Problemlösers konstruierte "Basisrepräsentation" wird durch Hinzunahme von vornehmlich mathematischem Wissen aus dem Langzeitgedächtnis weiterentwickelt (elaboriert); aus dieser "mathematischen Repräsentation" läßt sich dann eine geeignete "Berechnungsrepräsentation" gewinnen. Die Ursache von Mißerfolgen im Problemlösen wurde dort in unzureichender Elaboration, also dem voreiligen Versuch, zu Berechnungen zu schreiten, gesehen. Ein wichtiger Gesichtspunkt von Larkins Modell ist, daß die Regeln zur Erstellung und Nutzung der elaborierten Repräsentation sehr allgemein sind und auf eine große Anzahl von Problemen zutreffen sollen.

Beispiel: Gegeben sind 30 Meter Maschendrahtzaun. Angrenzend an eine 60 Meter lange Scheunenwand soll ein rechteckiges Gebiet eingezäunt werden. Welche Abmessungen liefern die größtmögliche Nutzfläche?

Eine ganze Klasse solcher "Extremwertaufgaben" kann dann unter Anwendung immer der gleichen elaborativen Regeln des Typs: "Drücke die zu maximierende Größe als Funktion von etwas anderem aus, bilde die Ableitung und setze gleich 0" gelöst werden.

Nicht immer ist es jedoch der Fall, daß Schüler in solch allgemeiner Weise an eine Problemaufgabe herangehen. Häufig werden sie für bestimmte Aufgaben sich "den Ansatz" merken oder gewisse

Gleichungen auswendig lernen usf. Gegenüber der von einem allgemeinen, weitreichenden Verständnis gekennzeichneten Fähigkeit, Probleme durch Elaboration zu lösen, wird auch das Auswendiglernen möglicherweise unverstandener Regeln die erfolgreiche Bearbeitung von Aufgaben ermöglichen. Die Frage ist aber, wie tragfähig ein solches Vorgehen ist. Häufig kann man dann z.B. feststellen, daß die typischen Anwendungsaufgaben ohne Schwierigkeiten gelöst werden, aber schon eine geringe Variation des Kontexts zu völligem Unvermögen des Schülers führen kann.

Ist unter diesem Aspekt das oft verpönte "Auswendiglernen" - d.h. das Verankern von isolierten Fakten, Formeln, Fertigkeiten etc. im Langzeitgedächtnis - völlig verwerflich, oder kann es auch sinnvoll sein?

Diese Frage gewinnt an Bedeutung, wenn man sich mit der Wissensrückgewinnung, d.h. dem Wiederauffinden von erworbenem Wissen im Gedächtnis beschäftigt. Bekanntlich kann erlerntes Wissen *vergessen* werden. Bedeutet dies, daß dann das Wissen völlig aus dem Langzeitgedächtnis "gelöscht" ist?

15.2 Vergessen

Nach den Annahmen der Information-Processing-Psychologie ist der Prozeß des Vergessens nicht als ein Verschwinden des Wissens aus dem Gedächtnis zu verstehen, sondern als ein Verfall der Möglichkeit, das Wissen im Gedächtnis wiederaufzufinden (also des "retrievals"; vgl. auch Abschnitt 11.4). Gestützt auf eine von ihm entwickelte Theorie der menschlichen Informationsverarbeitung postuliert Anderson (Anderson & Kline, 1979), daß alles Gelernte (Erfahrene) grundsätzlich ins Langzeitgedächtnis eingegliedert wird, also ein ständiger Zuwachs (engl. "accretion") von Wissen vorliegt. Später können sich jedoch die Zugangsstrukturen - die "Pfade", auf denen man das Wissen erreichen und aktivieren kann - ändern. Vergessen könnte man dann deuten als einen Verfall der Zugangsstrukturen, d.h. den Verlust der Möglichkeit, das betreffende Wissen zu reaktivieren; die Wissensrepräsentationsstrukturen selbst werden jedoch nicht zerstört.

Eine interessante, hier nicht weiter verfolgte Konsequenz dieser Theorie ist es, daß etwas, was man einmal "falsch" gelernt hat und später dann "richtig", beides nebeneinander im Langzeitgedächtnis existiert. Es kann also nur über eine Änderung der Zugangsstruktur erreicht werden, daß "falsches" Verhalten durch "richtiges" ersetzt wird. Jedoch kann das Gedächtnis in diesem Sinne durchaus widersprüchliche Information enthalten, und "Rückfälle" zu falschem Verhalten in einer Situation sind möglich (wie

man in der Praxis tatsächlich beobachten kann).

In früheren Abschnitten hatten wir das Erlangen von Verständnis als einen *konstruktiven Prozeß* bezeichnet (siehe insbesondere Abschnitt 9). Bei einer gut angelegten Vernetzung des Wissens im Langzeitgedächtnis sollte ein Vergessen von Wissensteilen durch einen Prozeß der *Rekonstruktion* (im Sinne des Wiederauffindens von Zugangsstrukturen) aus dem "Gesamtverständnis" heraus ausgeglichen werden können. Jedoch ist die Möglichkeit der Wiedergewinnung von "vergessenem" Wissen in hohem Maße von der Art der Wissensorganisation abhängig. Hier bestehen vermutlich große Unterschiede zwischen Wissen, das in ein allgemeineres Verständnis eingebettet ist, und unverstanden auswendig gelerntem Wissen. Betrachten wir zwei Beispiele.

1. Beispiel (betrifft auswendig gelerntes Wissen):

   Bei einem Gedicht, ebenso wie bei der "berüchtigten" Epsilon-Delta-Stetigkeitsdefinition, fällt einem der *Wortlaut* (mehr oder weniger genau) wieder ein, häufig ausgelöst durch "Anstoßen" der ersten paar Worte.

2. Beispiel (betrifft in Verständnis eingebettetes Wissen):

   An eine Geschichte, ebenso wie an die Definition der Gruppe, erinnert man sich dagegen vielleicht eher *sinngemäß* und kann eine vollständige Formulierung aus dem "Sinngefüge" wieder *herleiten*.

Der wesentliche Gedanke des Folgenden ist, daß sich diese unterschiedlichen Mechanismen ergänzen können. In einer Arbeitsgruppe um Jill Larkin an der Carnegie-Mellon University ist der Einfluß der Mechanismen auf die Problemlösefertigkeit untersucht worden.

15.3 Eine Untersuchung zu Gedächtnisprinzipien beim Problemlösen

Die Untersuchung (Freeland & Larkin, 1983) bezieht sich auf organische Chemie, und die Problemstellung ist zunächst auf diesen Bereich zugeschnitten. Jedoch erscheinen die hierfür präzisierten Modelle und der allgemeine Trend der Resultate auch für das Mathematiklernen von Interesse, wie die Autoren andeuten.

In der organischen Chemie stellen sich viele Probleme wie folgt dar: Von einer oder mehreren Verbindungen ist bekannt, daß sie unter bestimmten Bedingungen miteinander reagieren, wobei eine oder mehrere neue Verbindungen entstehen. Ein einfaches Problem, das auch als Teil einer komplexeren Problemstellung auftreten kann, ist dann die Frage nach dem Reaktionsergebnis - bei gegebenen Ausgangsstoffen - als Strukturformel(n) der entstehenden Verbindung(en). Freeland und Larkin postulieren zwei alternative Modelle für die Bearbeitung solcher Probleme: (1) ein sog. *Rote-Memory-Modell*; der englische Ausdruck "rote" bezieht sich dabei auf Routinefertigkeiten aus mechanischem Üben (vergl. S. 33); (2) ein sog. *elaboratives Modell*; es bezieht sich auf Problemlösen durch Elaborieren im oben besprochenen Sinne.

(1) Das Rote-Memory-Modell beinhaltet, daß der Problemlöser durch fortgesetztes Üben im Gedächtnis Assoziationen zwischen den an einer Reaktion beteiligten Stoffen und dem Reaktionsergebnis aufgebaut hat. Bekommt er dann ein Problem der oben besprochenen Art vorgelegt, so müssen ihm dazu die Reaktionsergebnisse dieser spezifischen Reaktion wieder einfallen. Eine verbreitete Methode bei amerikanischen Chemiestudenten ist das Benutzen sog. *flashcards*: Um sich die Reaktionen einzuprägen, schreibt man die beteiligten Stoffe auf eine Karteikarte und das Reaktionsergebnis auf die Rückseite und benutzt solche Karten für eine drillende Übungsform mit sofortiger Kontrollmöglichkeit - eine Methode des Auswendiglernens also.

(2) Ein im Sinne des elaborativen Modells handelnder Problemlöser wird dagegen zunächst die aus einem vorgelegten Problem erhaltene Basisrepräsentation anreichern, indem er zusätzliche Information über die Ausgangsstoffe heranzieht: z.B. wird er Information über die Ladungen (positiv oder negativ), die Bindungsstruktur (doppelt oder einfach) und eine Reihe von Regeln (wie: "positiv tendiert zum Binden mit negativ" und "stärker positiv ersetzt schwächer positiv") benutzen, um das Reaktionsergebnis daraus abzuleiten. Ein solches Benutzen allgemeiner elaborativer Regeln, die nicht auf spezifische Reaktionen beschränkt sind, baut offenbar viel stärker auf einem "Verständnis" der Vorgänge auf, als die mittels flashcards auswendig gelernten Reaktionen.

In Anlehnung an Texte eines Chemiebuchs wurden für beide Modelle Inferenzregeln für die Bearbeitung von Reaktionsproblemen in einem kleinen Teilbereich der organischen Chemie explizit formuliert. Durch Simulation in einem Computerprogramm wurde nachgewiesen, daß beide Regelmengen die vollständige Lösung solcher Probleme ermöglichten. Diese Regeln sollten dann mit den von Studenten in Problemlösesituationen tatsächlich angewendeten Schlußregeln verglichen werden. Die Regeln der beiden Modelle unterschieden sich in folgender Hinsicht: Die "*flashcard*-Regeln" waren in ihrer Anwendbarkeit beschränkt; jede bezog sich auf genau eine Reaktion und umfaßte alle beteiligten Stoffe sowie das Reaktionsprodukt. Die *elaborativen* Regeln waren allgemein formuliert und konnten bei vielen Problemen angewendet werden, jedoch

steuerte jede nur eine von mehreren zur Problemlösung erforderlichen Inferenzen bei.

In einem Experiment wurde verglichen, inwieweit sich die hypothetischen Regeln der beiden Modelle mit dem Problemlöseverhalten von drei Studenten deckten. Dabei wurde die Methode des "lauten Denkens" mit Protokollanalyse verwandt.

1. Resultat: Es wurde festgestellt, daß die Protokollaussagen sich zu 70 % mit flashcard-Regeln in Einklang bringen ließen; die restlichen Aussagen bezogen sich auf die Auswahl und "Reparatur" von Regeln (davon gleich mehr), und nur zu einem geringen Teil deuteten sie auf eine Anwendung von elaborativen Regeln. In etwa der Hälfte der Fälle wurden die Regeln korrekt angewendet.

2. Resultat: Der häufigste Fehler war, daß die Bedingungen von Regeln zum Teil außer acht gelassen und somit Regeln unzutreffend angewendet wurden. Andere Fehler waren, daß nicht alle Regelfolgerungen beachtet oder daß Regelbedingungen und -folgerungen unzulässig verändert ("repariert") wurden, um sie im (falschen) Problemkontext einsetzen zu können. D.h. die von den Problemlösern erinnerten "flashcard-Regeln" waren häufig unexakt und nicht komplett. Freeland und Larkin bezeichnen dies bildhaft als "Verblassen" ("faded flashcards").

In einem zweiten Experiment sollte untersucht werden, ob sich Studenten in der vermehrten Anwendung von elaborativen Regeln anstelle von auswendig gelernten flashcard-Regeln trainieren lassen. Dazu wurden 13 Studenten, die kein Vorwissen über organische Chemie mitbrachten, in ausgeklügelter Weise in der Anwendung von elaborativen Regeln unterwiesen (d.h. sie sollten eine Reihe von allgemeineren Reaktionsprinzipien kennen und umzusetzen lernen). Wieder wurde das Problemlöseverhalten dieser Studenten mit den hypothetischen Regeln verglichen.

Resultat des zweiten Experiments: Insgesamt war die Leistung der Studenten nicht überwältigend; von 10 Problemen wurden im Mittel knapp die Hälfte gelöst. Der beste Problemlöser löste neun der zehn Probleme unter korrekter Anwendung von acht der im ganzen neun elaborativen Regeln, was darauf hinweist, daß elaborative Regeln - vorausgesetzt, sie werden korrekt eingesetzt - guten Erfolg ermöglichen. Insgesamt wurden aber Verstöße gegen bis zu 20 % der angewendeten Regeln notiert, und nur ein gutes Drittel der neun Regeln wurde überhaupt korrekt eingesetzt. D.h. die Problemlösung wurde zumeist mit einer nicht angemessenen Menge von Regeln versucht, woraus sich die verhältnismäßig geringe Erfolgsrate erklären läßt: Werden nicht alle notwendigen Regeln benutzt, so muß die Elaboration fehlerhaft werden.

Das Fazit dieser Untersuchungen stellt zunächst vor einen Konflikt: Sich selbst überlassen, lernten die Chemiestudenten "flashcard-Regeln" auswendig; unvollkommene Erinnerung daran und Überverallgemeinerung waren dann die Ursache von Fehlern. Beim ausdrücklichen Training in elaborativen Problemlösemethoden erlernten die Studenten jedoch nur einige der notwendigen Regeln und machten mindestens ebenso viele Fehler wie die Studenten, die sich auf auswendig gelerntes Wissen verließen. Weder die eine noch die andere Methode für sich allein scheint also für gute Leistungen ausreichend zu sein.

In dieser Situation haben Freeland und Larkin mit der Beobachtung von "Experten" im Lösen von Problemen der organischen Chemie begonnen und festgestellt, daß diese Problemlöser eine Mischung von auswendigem Wissen und Problem-Elaboration einsetzen. Die Autoren vermuten nun, daß ein angemessenes Problemlösemodell - zumindest eines für Gebiete mit einer großen Fülle von Faktenwissen - auf beide Arten des Wissenseinsatzes bezugnehmen muß. Assoziationen vom Typ der "flashcard-Regeln" ermöglichen das schnelle Gewinnen von Teillösungen, und elaborative Regeln können dann bestehende Lücken schließen oder möglicherweise flashcard-Regeln auf neue Situationen anzupassen helfen.

Besonderes Gewicht könnten diese Beobachtungen für das Problem des *Vergessens von Einzelheiten* haben, das sich sowohl im oben erwähnten "Verblassen" von memoriertem Wissen ("faded flashcards") als auch in fehlerhaftem Elaborieren äußern kann. Flashcard-Regeln - selbst dann, wenn man sich nicht an alle Einzelheiten erinnert - ermöglichen häufig Hinweise auf die ungefähre Lösungsgestalt. Elaborative Regeln ermöglichen aufgrund ihrer allgemeinen Anwendbarkeit das weitere Ausarbeiten eines Lösungsansatzes. Jedoch scheinen elaborative Regeln allein nicht ausreichend zur Konstruktion komplexer Lösungswege zu sein. Auch im Hinblick auf mathematisches Problemlösen schlagen die Autoren daher vor, daß auswendig gelerntes Wissen eine sinnvolle und nützliche Rolle spielen kann.

15.4 Literatur

Anderson, J.R. & Kline, P.J. (1979). A general learning theory and its application to schema abstraction. In G.H. Bower (Ed.) *The psychology of learning and motivation, Vol. 13*, 277-318.

Freeland, R. & Larkin, J. (1983). *Representation and memory in problem solving.* Auf der 1983er Tagung der American Educational Research Association in Montreal präsentiertes Papier.

15.5 Übungen

1. Diskutieren Sie, ob und in welchem Sinne die Erkenntnisse von Freeland/Larkin auf die Mathematik übertragbar sein können.

2. Was fällt Ihnen zum Wechselspiel von Fertigkeiten und Verständnis unter den obigen Gesichtspunkten ein?

3. Was für mathematisches Wissen sollte man auswendig können?

4. (Vgl. auch Übung 6.4.1) Machen Sie ein Erinnerungsexperiment mit dem folgenden "Problem": Rekonstruieren Sie ad hoc aus dem Gedächtnis - mit Papier und Bleistift als einzigen Hilfsmitteln - die axiomatische Definition eines Vektorraums. Beobachten und notieren Sie, wo "gemerktes Wissen" in Erscheinung tritt, ob korrekt/vollständig oder inkorrekt/unvollständig, und welche Inferenzen auf allgemeinerer Basis (d.h. Elaborationen) Sie einsetzen, bis schließlich eine vollständige Definition auf dem Papier steht.

16. MATHEMATISCHE FERTIGKEITEN UND MATHEMATIKVERSTÄNDNIS

In diesem letzten Abschnitt wollen wir im Versuch eines Resumees einige wichtige Gedanken und Einsichten des bisher Gesagten aufgreifen und unter dem Gesichtspunkt ihrer Relevanz für den Schulalltag auswerten.

16.1 Zu mathematischen Fertigkeiten

Eine Fertigkeit ist die Fähigkeit, bestimmte Handlungen oder Folgen von Handlungen ausführen zu können – so hatten wir begonnen. Später war ein komplexes Bedingungsgefüge von mathematischen Fertigkeiten und mathematischem Verständnis hinzugekommen, welches Anlaß gab, ganz unterschiedliche Lernprinzipien zu studieren. Der Unterscheidung von "Kenntnis" und "Können", von "Verständnis" und "Fertigkeit" entspricht offenbar auch eine unterschiedliche Ausprägung langzeitlichen Gedächtnisbesitzes, die wir mit der Gegenüberstellung von deklarativem und prozeduralem Wissen konkretisierten (Abschnitt 3.3). Diese Klassifizierung fanden wir in der Stufung eines Modells des Fertigkeitenlernens berücksichtigt (Abschnitt 2.3), worin sowohl dem Erwerb deklarativen Wissens als *Verständnisgrundlage* als auch entsprechenden prozeduralen Wissens als *Handlungsgrundlage* Rechnung getragen wird. Die dritte Stufe dieses Modells betrifft die Automatisierung von Fertigkeiten, denen damit eine "autonome" (von begrifflicher Wissensverarbeitung unabhängige) geistige Repräsentation zugeschrieben wird.

*** Das Einüben und das Verstehen von Fertigkeiten richten sich auf unterschiedliche Repräsentationsformen im Langzeitgedächtnis mit unterschiedlichen Eigenschaften und Vorzügen. Eine Form kann die andere nicht (oder nur bedingt) ersetzen. Die beiden Formen bedürfen verschiedener Lehrmethoden.

****

Als erwiesen gelten kann die Tatsache, daß kognitive Fertigkeiten automatisiert werden können und daß dabei die notwendige Zuwendung an kognitiver Aufmerksamkeit sich verringert oder gar entfällt. Hierdurch können kognitive Beschränkungen des Kurzzeitgedächtnisses kompensiert werden: Die gewonnene Kapazität kann

für weitere kognitive Tätigkeiten genutzt werden (Abschnitt 4.1).

*** Durch Automatisieren von Fertigkeiten verringert sich die kognitive Belastung des Schülers. Dazu reicht es nicht aus, zwei oder drei Anwendungsaufgaben zu rechnen. Automatisieren erfordert vielfaches und vielfältiges Üben. Im Einzelfall wird daher entschieden werden müssen, ob der Aufwand den Nutzen rechtfertigt.

****

Die aus der Gagné-Diskussion in den Abschnitten 5 – 7 gewonnenen Erkenntnisse lassen die Folgerung zu, daß automatisierte mathematische Fertigkeiten eine Voraussetzung für mathematisches Verständnis bilden können. Unterstützt wird diese Annahme durch das konstruktivistische Verständnismodell von Bergeron und Herscovics (Abschnitt 9), wonach prozeduralem Wissen eine wichtige Rolle beim Erwerb mathematischen Begriffsverständnisses zugeschrieben wird. Es erscheint möglich, daß das Automatisieren von Prozeduren im Verlauf der Verständniskonstruktion – aufgrund des Freisetzens von sonst in ihrer Ausführung gebundener kognitiver Kapazität – die Abstraktion eines mathematischen Begriffs (als eigenständigem mathematischen Objekt) vom handelnden Umgang mit der Prozedur wesentlich begünstigt.

Beispiel: Der Erwerb des Limesbegriffs wird demnach gefördert, wenn Verfahren zur Grenzwertbestimmung flüssig beherrscht werden.

*** Automatisieren von Verfahren allein führt noch nicht zur Abstraktion eines Begriffs. Durch Reflexion gewonnene Erkenntnisse auf der deklarativen Wissensebene können erst Handeln und Resultat des Handelns gegenüberstellen und voneinander ablösen.

****

Besonders wichtig wird die Frage des Automatisierens von Fertigkeiten unter dem Gesichtspunkt, daß die kognitive Kapazität offenbar altersabhängig ist und bei jüngeren Schülern noch größeren Einschränkungen unterliegt (siehe Abschnitt 14). In der Lehrtheorie von Case wird daher Automatisierung gezielt zur Überwindung kognitiver Beschränkungen (zur Erleichterung der "kognitiven Bürde") eingesetzt, um dadurch Freiraum zur Bewältigung komplexerer Mathematik zu schaffen. Erleichternd kommt hinzu, daß jüngere Schüler eher geneigt sind zu üben und dabei auch schneller lernen, während mit zunehmendem Alter der Wunsch nach Verständnis größer, die Lust am Üben aber kleiner wird. Nach den Erkenntnissen aus Unterrichtsversuchen scheint es dabei unter dem Gesichtspunkt des Behaltens sinnvoll, wie bei Case automatisierte Fertigkeiten dicht am Verständnis anzusiedeln.

Beispiel: Demnach ist es besser, zum Größenvergleich von Brüchen die Hauptnennermethode statt der Kreuzmultiplikation einzuüben.

*** Je jünger der Schüler, desto eher ist es notwendig (und auch aussichtsreich), durch Automatisierung von Fertigkeiten besseres Mathematikverständnis zu ermöglichen. Dabei sollten die schließlich automatisierten Fertigkeiten so formuliert sein, daß sie bei "bewußter Ausführung" dicht am Verständnis liegen.

****

Nach allem sollte jedoch klar sein, daß einfaches Üben von Prozeduren nicht notwendig zu starken Problemlösefertigkeiten führt. Es erscheint vernünftig zu folgern, daß beim Lernenden die Fertigkeit im Erzielen eines Problemverständnisses begünstigt wird, wenn das Wissen über Problemlöseprozeduren wohl-integriert ist in das allgemeine begriffliche Wissen. Damit erhöht sich die Chance, in Anwendungssituationen auf relevantes mathematisches Wissen zuzugreifen: Der Gebrauch des "richtigen Stück Wissens zur richtigen Zeit" ist ein Kennzeichen von Verständnis.

16.2 Zu mathematischem Verständnis

Unsere erste, grobe "Definition" von Verständnis (S. 7) besagte: Eine Sache verstehen heißt, sie in eigene geistige Kategoriensysteme einordnen zu können. Diese "Definition" beim Wort nehmend, wollen wir unter Bezug auf das inzwischen Gelernte die wesentlichen Gesichtspunkte noch einmal hervorheben.

1. *Verstehen ist ein Prozeß:* Es geschieht etwas im Geiste, wenn man "versteht". In vielen Fällen (bei gutem Verständnis) sind die dabei auftretenden Prozesse unterbewußt, automatisch und schnell. Bei erhöhten Anforderungen an das Verständnis wird der Prozeß deutlicher erkennbar: Es dauert einen Moment, bis einem die Bedeutung z.B. des Ausdrucks "transzendente Zahl" einfällt oder bis man eine Vorstellung von "zwei nicht-parallelen Geraden im Raum, die sich nicht schneiden" hat. (Im ersten Fall treten Such- oder Rekonstruktionsprozesse auf, im zweiten wird möglicherweise erst eine bildliche Repräsentation konstruiert und dann der Begriff "windschief" dazu aufgefunden.) Nimmt der Verstehensprozeß in einer Situation zu viel Zeit in Anspruch (wenn z.B. der Lehrer im Unterricht fortfährt, noch während beim Schüler andere begonnene Verstehensprozesse ablaufen), so kann das Verständnis

daran scheitern.

*** Zuviel auf einmal zu schnell hintereinander beeinträchtigt des Schülers Chancen zu verstehen. Der Lehrer muß ein Gefühl dafür entwickeln, wann es beim Schüler "klickt".

****

2. Ein Verstehensprozeß beinhaltet in jedem Fall die Konstruktion einer *"Bedeutungsrepräsentation"*: Das "Einordnen in geistige Kategoriensysteme" hatten wir (siehe Abschnitt 11.5) mit der Aktivierung einer geeigneten Wissensrepräsentationsstruktur (WRS) im Langzeitgedächtnis und der Anpassung der aktuellen Daten an diese Struktur präzisiert. Handelt es sich um einen neu zu verstehenden Sachverhalt (etwa eine Problemstellung), so muß eine angemessene Repräsentation - gestützt auf andere WRSen im Langzeitgedächtnis - im Arbeitsgedächtnis neu konstruiert werden.

Das Verständnis kann scheitern, wenn keine geeignete WRS aufgefunden wird, oder aber, wenn die Einordnung aktueller Daten in durch die Situation aktivierten WRSen nicht oder nur unvollkommen gelingt. Das Nichtauffinden einer geeigneten WRS kann zwei Ursachen haben: (a) es ist keine vorhanden (die Verständnisgrundlage fehlt); (b) sie vorhanden, wird aber nicht aufgefunden (mangelndes "retrieval" - relevantes Wissen wird nicht aktiviert). Gerade für den letzten Fall muß der Lehrer ein Gespür entwickeln: Schlägt z.B. beim Schüler das Verständnis für den Beweis einer trigonometrischen Beziehung fehl, weil ihm nicht mehr geläufig ist, daß Sinus = Gegenkathete zu Hypotenuse ist?

*** Der Lehrer muß sichern, daß beim Schüler zum Verständnis des Unterrichts notwendiges Wissen (re-)aktiviert wird (bzw. überhaupt vorhanden ist).

****

3. "*Eigene* geistige Kategoriensysteme": Die als Verständnisgrundlage notwendigen WRSen müssen natürlich persönlicher Gedächtnisbesitz des Verstehenden sein. Das Gefüge der WRSen bestimmt die "Strukturen" des Gedächtnissystems einer Person, die die Grundlage ihres Wissens und ihrer Überzeugungen, einschließlich aller persönlichen Eigenarten, Unexaktheiten und Fehler im Denken bilden.

*** Jeder Schüler verfügt über individuelle WRSen, die sich von denen seiner Mitschüler unterscheiden können. Folglich muß der

Lehrer gezielt auf den einzelnen Schüler zugeschnittene Verständnishilfen geben können. Verschiedene Erklärungsansätze ("Ich erkläre es noch einmal anders...") haben also durchaus einen Sinn.

****

Die große Einsicht aus der zweiten Hälfte des Buchs ist: *Verständnis und Wissen sind konstruktiver Natur* (Abschnitt 9). Das im Langzeitgedächtnis gespeicherte Wissen ist nicht einfach angesammelt, sondern strukturiert: der Lernende hat die Konstruktion von Netzwerkstrukturen zu erbringen, die in vielfältiger Weise Grundlagen für ein "reiches" Verständnis mathematischer Situationen zusammenfügen sollen. Die Qualität des erlernten mathematischen Wissens hängt nicht nur davon ab, was man lernt, sondern auch, wie man es miteinander in Verbindung bringt. Eben *weil* Wissenserwerb eine Konstruktion ist, hängt vieles davon ab, wie man baut. Dazu trägt der Lehrer wesentlich bei: z.B. kann er dem Schüler helfen, übergeordnete Zusammenhänge zu erkennen und dadurch Wissenstrukturen, die sonst vielleicht isoliert bleiben, zu vernetzen.

*** Beim Erwerb mathematischen Wissens des Schülers spielt der Lehrer die Rolle des "Architekten".

****

Die kritische Rolle der Repräsentation von Wissen im Gedächtnis zeigt sich besonders beim Problemlösen (Abschnitt 10). Erfolg in Problemlösesituationen erfordert darüber hinaus Fertigkeiten im "Verwalten" des zur Verfügung stehenden mathematischen Wissens, und zwar sowohl des Faktenwissens wie auch der beherrschten Fertigkeiten. Mehrfach ist zum Ausdruck gekommen, daß der Erfolg bei Problemlöseaktivitäten abhängig ist von der Fähigkeit, zwischen dem (möglicherweise automatischen) Tun und der Selbstbeobachtung und Bewertung des eigenen Tuns hin- und herschalten zu können, sei es durch verinnerlichte Vorsichtsmaßregeln (Abschnitt 7), oder sei es durch metakognitive Fertigkeiten (Abschnitt 12). Dabei spielt die innere Sprache als organisierender Faktor für mathematisches Handeln eine entscheidende Rolle (Abschnitt 13). Es stellt vielleicht die schwierigste Aufgabe des Unterrichtens von Mathematik dar, beim Schüler ein solches Bewußtsein bezüglich seines Handelns zu entwickeln, besonders dort, wo der Schüler kognitiv ausgelastet ist und mangels zusätzlichen Freiraums im Denken den notwendigen Abstand gar nicht einnehmen kann. Bruner hat die Rolle des Lehrers in dieser Hin-

sicht treffend als die eines "Maklers in Sachen Bewußtsein" ("broker of consciousness") bezeichnet, der zunächst den übergeordneten Standpunkt im Denken und Handeln des Schülers vertritt, bis der Schüler sein eigenes Bewußtsein dafür entwickelt hat. Ähnliches hat Schoenfeld mit dem allmählichen Übergang vom "externen Manager" (Lehrer) zur Einnahme der Rolle des eigenen Managers seitens des Schülers ausgedrückt (Abschnitt 12).

*** Es ist nicht allein damit getan, Erklärungen zum Verständnis von mathematischen Verfahren bereitzustellen und die Verfahren zu üben. Erforderlich ist es, daß der Schüler sein eigener Manager für den zweckgerichteten Einsatz seines Wissens wird. Der Lehrer übernimmt dabei zunächst die Rolle des "externen Managers" bzw. Beraters.

****

Es soll noch einmal betont werden, daß "Verständnis" für mathematische Zusammenhänge keine Frage von "ja" oder "nein" ist; es entwickelt sich eher Stück für Stück. Man kann ein teilweises Verständnis haben, wenn man nur einige Zusammenhänge eines gesamten Sachzusammenhangs erkennt und bewältigen kann; das Verständnis wird vollständiger, wenn neue Zusammenhänge erkannt und zu den anderen in Beziehung gesetzt werden sowie spezielle Regeln daraus abgeleitet werden können ("relationales Verständnis"; vgl. Abschnitt 8). Ein "umfassendes" Verständnis für einen Sachzusammenhang wird sicherlich einschließen, daß alternative Wege des Verstehens beschritten werden können (sprich: der Sachzusammenhang auf verschiedene WRSen abbildbar ist); die Möglichkeit der Gegenüberstellung solcher Verstehenswege bietet eine reichere Bedeutungsrepräsentation (siehe Abschnitt 11).

Das Verstehen und Bewältigen mathematischer Situationen erfordert ein entwickeltes Zusammenspiel von Fertigkeiten und Verständnis, unterstützt durch entsprechenden prozeduralen und deklarativen Gedächtnisbesitz (Abschnitt 3). In welcher Weise auch auswendig gelerntes Wissen dabei eine sinnvolle Rolle spielen kann, wurde in Abschnitt 15 erläutert; eine Entsprechung hierzu könnte in zunächst "mechanisch" erlernten Fertigkeiten (Abschnitt 6) vorliegen. Grundsätzlich jedoch haben sich Fertigkeiten ohne Verständnis dafür, wann und wo solches Wissen einzusetzen ist, als von geringem Wert in nicht-stereotypen Situationen erwiesen. Umgekehrt mag ein "Verständnis" ohne Beherrschung zugeordneter Fertigkeiten dem Schüler zwar zu einem gewissen Grade die Kompetenz geben, über eine Problemsituation zu sprechen und sie zu analysieren; bei der tatsächlichen Ermittlung einer Lösung könnte er aber an einem Mangel an Fertigkeiten scheitern. In gewissem

Sinne könnte die erstgenannte Kombination (Fertigkeiten ohne Verständnis) zur New-Math-Revolution beigetragen haben und die zweite (Verständnis ohne Fertigkeiten) zur Back-to-basics-Bewegung. Wo stehen wir heute? Das Ziel des Unterrichts muß es offensichtlich sein, beides, mathematische Fertigkeiten und Mathematikverständnis zu entwickeln und zu integrieren.

NAMENSREGISTER