

## Lokal-synchrone Zellularräume

Ipke Wachsmuth

An der Lutherkirche 19  
3000 Hannover 1

### Zusammenfassung.

Als Alternative zu asynchronen Zellularräumen, die i.a. auf einem gegenüber dem der synchronen anders gearteten Substitutionskalkül basieren, wird ein erweitertes Automatenkonzept bereitgestellt, das den durch die übliche Beschreibung eines synchronen Zellularraums gegebenen Kalkül ausführt, ohne daß eine globale Taktung erforderlich ist.

Einleitung.

Das Konzept der synchronen Zellularautomaten oder Zellularräume gilt schon seit längerem als angreifbar aufgrund des Einwandes, die hierbei angenommene globale Taktung unendlich vieler Zellen sei unvereinbar mit elementaren Prämissen der Relativitätstheorie (Existenz einer oberen Grenze für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information, etwa die Lichtgeschwindigkeit; oder Unmöglichkeit des Gleichlaufs zweier beliebig weit voneinander entfernter Uhren). So gelangte man zu Ansätzen für asynchrone Zellularräume - die Diskussion "synchron/asynchron" ist mittlerweile zu einem zentralen Thema innerhalb der Forschung auf diesem Gebiet geworden.

Auch für Realisierungen von Zellularautomaten ist der obige Einwand sehr wesentlich: Dort kommt zwar immer nur eine endliche, jedoch über die Zeit wachsende (!) Anzahl von Zellen zum Einsatz, so daß unüberwindliche Synchronisations-schwierigkeiten entstehen können.

Diese Schwierigkeiten treten bei Ansätzen für asynchrone Zellularräume nicht auf. Dafür muß jedoch in Kauf genommen werden, daß etwa die in einem Schritt ausgeführten Zellzustandsübergänge - im Synchronfall sind es sämtliche möglichen - unter Umständen bis auf einen Zustandsübergang pro Schritt reduziert werden (Priese 1974) (man erhält in diesem Fall quasi ein sequentiell statt parallel rechnendes Automatenkonzept). Oder es müssen weitere Zellzustände (Nakamura 1974) oder eine zusätzliche Dimension eingeführt werden (Golze 1977).

In allen Fällen erhöht sich von vornherein der Aufwand - an Zellen oder an Rechenschritten oder an benötigten Zellzuständen.

Auf der Suche nach einer anderen Methode, die "billiger" und insbesondere auf Realisierungen ausgerichtet ist, sind wir bemüht, auf einer Art Mittelweg ein "global-asynchrones lokal-synchrones" Parallelkonzept zu entwickeln, das die genannten Schwierigkeiten umgehen soll und das, bei geeigne-

ter Interpretation, das gleiche leistet wie das ursprüngliche global-synchrone Konzept.

Ansatzpunkt ist die Automatenstruktur selbst: Durch eine einfache zusätzliche Einrichtung der Zellen kommt eine "lokale Taktung" benachbarter Zellen zustande, die - obwohl global im Mißtakt - den Zellularautomaten wie einen global-getakteten, also synchronen arbeiten läßt. Als Rechenschritte werden - wie üblich - die (von außen eingegebenen) Taktimpulse gezählt, die, wie beim Synchronkonzept, jeweils mit unendlich vielen Zellzustandsübergängen korrespondieren.

Damit kann eine grundlegende Eigenschaft von Zellularautomaten, nämlich paralleles Rechnen in hohem Maße, ohne die ursprünglichen Einwände beibehalten werden.

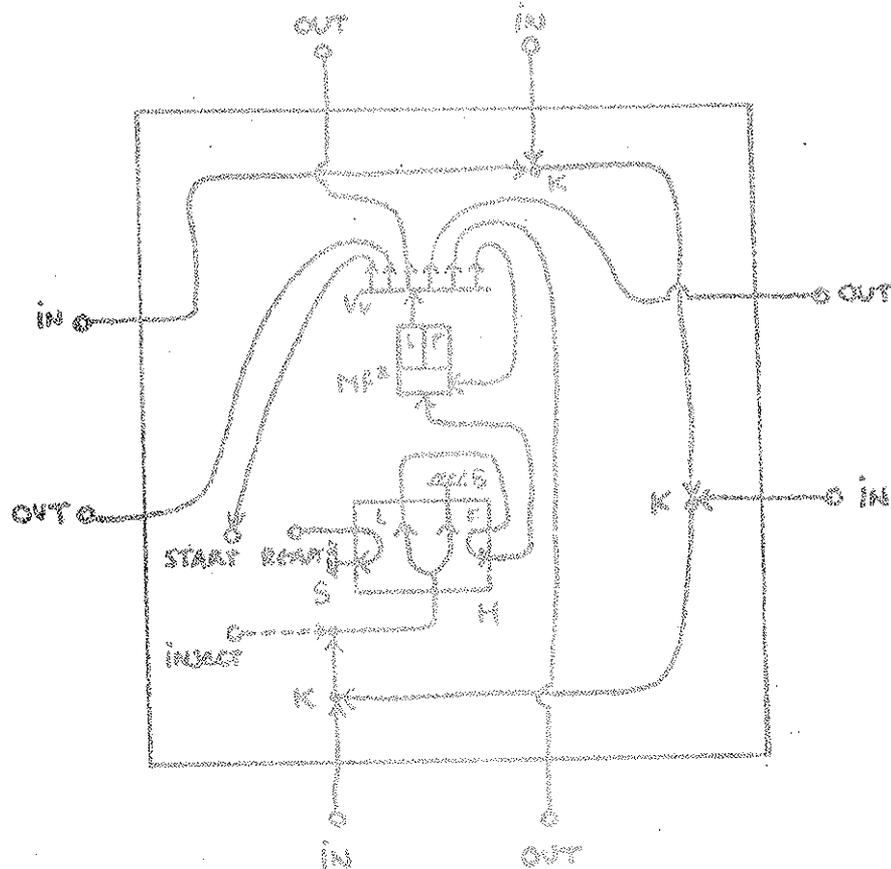
Ergebnisse.

Wir beschränken uns hier auf zweidimensionale Zellularräume mit von Neumann'scher Nachbarschaft; es ist gezeigt worden, daß man i. a. auf diesen Fall standardisieren kann. Jeder beliebige synchrone Zellularraum dieses Typs kann aufgrund der im folgenden dargestellten Ergebnisse durch einen (global-)asynchronen ersetzt werden - "bei gleicher Leistung" (dies ist noch näher zu erläutern).

Folgende Idee liegt zugrunde: Betrachtet wird in der euklidischen Ebene ein Verbund von Automatenzellen unter den Homogenitätsforderungen wie in der üblichen Interpretation. Die Verteilung der Taktimpulse an die einzelnen Zellen soll nach einem besonderen Schema erfolgen. Bezeichnen wir den üblicherweise mit einer Zelle identifizierten endlichen Automaten (vgl. Arbib 1969, p.375) als "oberen Aufbau" (Bild 2), so soll die erwähnte Taktverteilung durch einen zusätzlichen "unteren Aufbau" einer jeden Zelle (Bild 1) erreicht werden.

Die Funktionsweise soll hier nur skizziert werden:

## "UNTERER AUFBAU" EINER ZELLE



K	KNOTEN
H	WEICHE
S	SENKE
MF <sup>2</sup>	MONO FLOP
V	VERVIELFÄCHIGER

Bild 1

In dem unteren Aufbau einer Zelle führt das Ankommen eines Impulses auf einer oder mehreren IN-Leitungen dazu, daß nach einer gewissen Verzögerungszeit  $v$  ( $0 < v_{\min} \leq v \leq v_{\max} < \infty$ ) auf allen OUT-Leitungen ein Impuls hinausgeht und gleichzeitig ein Impuls an START im oberen Aufbau die Berechnung des Nachfolgezustands einleitet. Diesen Moment bezeichnen wir als Taktzeitpunkt der Zelle. Erst nach Beendigung dieses Rechenvorgangs, der die Dauer  $s$  ( $0 < s_{\min} \leq s \leq s_{\max} < \infty$ ) in Anspruch nimmt, wird von einem READY-Impuls der untere Aufbau der Zelle durch (Rück-)Stellen einer Weiche in die Lage versetzt, erneut Impulse annehmen zu können.

## "OBERER AUFBAU" EINER ZELLE

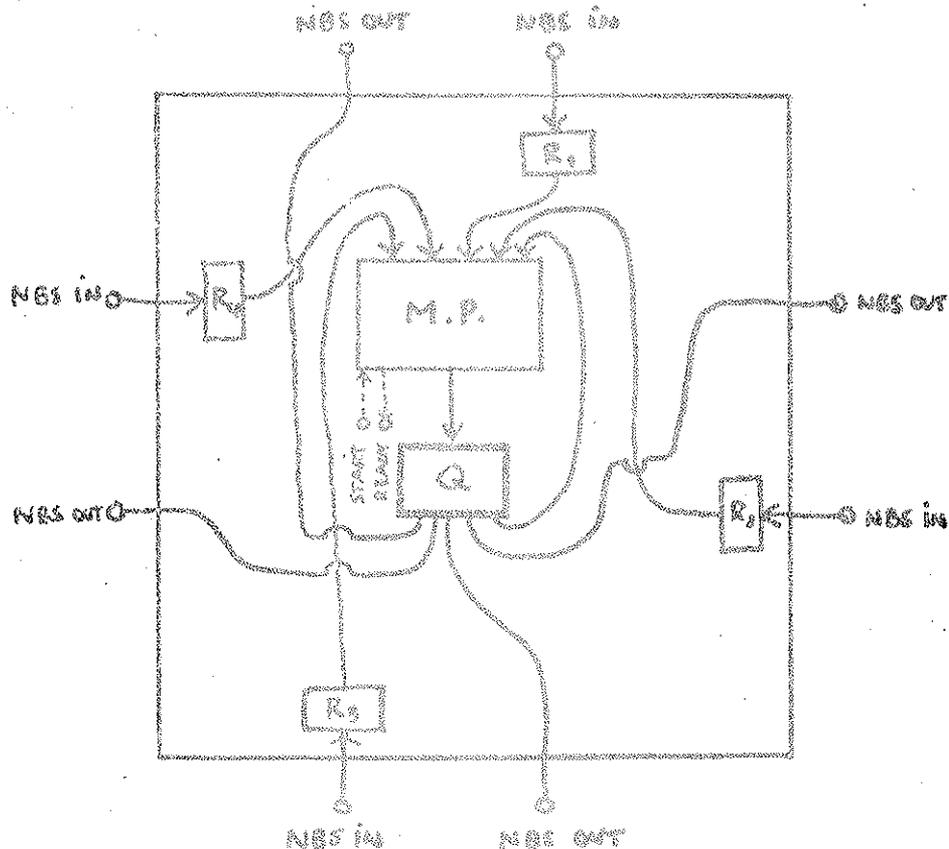


BILD 2

ZELLZUSTAND = INHALT (Q)

Im oberen Aufbau wird auf einen START-Impuls hin die Nachbarschaftsinformation eingelesen und anschließend der Nachfolgezustand berechnet. Es wird vorausgesetzt, daß der letzte Zustand einer Zelle an einem entsprechenden Register solange von den Nachbarn abgefragt werden kann, bis (nach der Rechendauer  $s$ ) der Nachfolgezustand in dieses Register eingeschrieben wird. Unter der Forderung

$$s_{\min} > v_{\max}$$

ist dann die korrekte Ausführung der lokalen Substitutionen gewährleistet.

Betrachten wir nun einen Zellularautomaten, dessen Zellen in der oben beschriebenen Weise aufgebaut sind. An einer

ausgezeichneten Zelle, etwa der Ursprungszelle, werden die Taktimpulse von außen eingegeben; dazu dient ein spezieller Eingang INJECT (siehe Bild 1). Die Verteilung an die übrigen Zellen des Zellularraums soll durch den unteren Aufbau der Zellen geleistet werden.

Wir sagen, daß zwei benachbarte Zellen lokal-synchron arbeiten, wenn sich ihre aus einem aus einem gegebenen (Ur-)Takt resultierenden Taktzeitpunkte um höchstens  $v_{\max}$  unterscheiden.

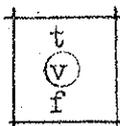
Ein in die Ursprungszelle eingegebener Taktimpuls breitet sich aufgrund der Wirkung des unteren Aufbaus der Zellen nach allen Seiten des Raumes aus; dabei können an den Zellen unterschiedliche Verzögerungen zwischen  $v_{\min}$  und  $v_{\max}$  auftreten. Der Verlauf einer solchen "Taktfront" zu einem Zeitpunkt  $t$  ist lokalisiert innerhalb der aus  $t \cdot v_{\min}$  und  $t \cdot v_{\max}$  sich ergebenden Grenzen. Für die Rechendauer  $s$  kann eine bereits angesprochene Zelle keine weiteren Taktimpulse annehmen, so daß wegen der Forderung  $s_{\min} > v_{\max}$  eine "Rückgabe" von Taktimpulsen nicht auftreten kann.

An einem Beispiel soll zunächst eine tatsächliche Taktverteilung demonstriert werden (Bild 3). Dabei stehen die Zah-

0 ① 1	1 ① 2	2 ① 3	3 ① 4	4 ① 5	5 ① 6
1 ① 2	2 ③ 5	3 ③ 6	4 ① 5	5 ① 6	
2 ① 3	3 ③ 6	6 ③ 9	5 ① 6		
3 ① 4	4 ① 5	5 ① 6			
4 ① 5	5 ① 6				
5 ① 6					

Bild 3

len für die folgenden Größen:



Zeitpunkt, zu dem die Zelle den Takt erhält  
effektiv auftretende Verzögerung  
Taktzeitpunkt der Zelle

(Hier ist also  $v_{\min} \leq 1$  und  $v_{\max} \geq 3$ .) Aus diesem Beispiel läßt sich sofort folgern, daß die zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  vom Takt bereits erreichte Fläche  $F_t$  vom Geschlecht  $\neq 0$  sein kann. (Betrachte das Beispiel zu einem Zeitpunkt  $t \in (5,6)$ .)

Es ist jetzt zu klären, ob die geschilderte untere Strukturierung der Zellen eines Zellularraums in die Ursprungszelle eingegebene Taktimpulse immer in gewünschter Weise verteilt. Zunächst wird die Eingabe eines einzelnen Taktimpulses betrachtet.

Theorem.

Bei Eingabe eines einzelnen Taktimpulses gewährleistet die untere Strukturierung der Zellen eines (zweidimensionalen) Zellularraums durch das angegebene Netzwerk eine Verteilung des Impulses mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Für jede Zelle des Raums existiert ein (globaler) Zeitpunkt  $t$ , zu dem sie einen Taktimpuls erhält.
- (b) Keine Zelle erhält mehr als einen Taktimpuls.
- (c) Benachbarte Zellen arbeiten lokal-synchron.

Beweisskizze.

(a) Eine Zelle erhält einen Taktimpuls spätestens zum globalen Zeitpunkt  $d \cdot v_{\max}$ , wenn  $d$  der (durch Summenbetrag definierte) Abstand zum Ursprung ist.

(c) Von zwei benachbarten Zellen, die beide noch keinen Taktimpuls hatten, gibt diejenige, die zuerst einen erhält, spätestens nach  $v_{\max}$  einen Taktimpuls an die andere, falls diese bis dahin nicht schon von einer anderen Zelle einen Taktimpuls erhalten hat. Die Taktzeitpunkte unterscheiden sich also höchstens um  $v_{\max}$ .

(b) Es wird gezeigt: f.a.  $t$  ist die Menge  $F_t$  der Zellen, die bis zum Zeitpunkt  $t$  mindestens einen Taktimpuls erhalten haben, gleich der Menge  $G_t$  der Zellen, die bis  $t$  genau einen Taktimpuls erhalten haben. Für den unteren Aufbau der Zellen unterscheiden wir dazu in der folgenden Argumentation drei Zustände:

- O, falls die Weiche H in Stellung l ist,
- T, falls H in Stellung r und Mf hat noch nicht geschaltet,
- R, falls H in Stellung r und Mf hat geschaltet (Zelle rechnet)

Diese Zustände können nur in der Reihenfolge  $O \rightarrow T \rightarrow R \rightarrow O$  auftreten. Man zeigt jetzt induktiv über  $t$  (diskrete Beobachtungszeitpunkte einführen) das

Lemma.

F.a.  $t$  ist in  $F_t$  kein Nachbar einer Zelle, die im Zustand T ist, im Zustand O.

Sei nun eine Zelle  $\beta$  im Zustand T. Da nach (c) benachbarte Zellen lokal-synchron arbeiten, ist ein Nachbar von  $\beta$ , der zu  $F_t$  gehört, spätestens vor  $v_{\max}$  in T gewesen. Entweder er ist zum Zeitpunkt  $t$  noch in T, oder wenn nicht, ist er aufgrund der Voraussetzung  $s_{\min} > v_{\max}$  noch in R.

Jetzt folgt die Behauptung: Nur Nachbarn von Zellen im Zustand T können in T übergehen, wenn sie im Zustand O sind. Das ist nach dem Lemma für Zellen in  $F_t$  jedoch niemals der Fall. Also  $F_t = G_t$ .

Betrachtung von Taktfolgen.

Beim Synchronkonzept kann nach einer Zeit größer als  $s_{\max}$  nach der Eingabe eines Taktes ein weiterer eingegeben werden: Spätestens dann haben nämlich alle Zellen des Raumes den Nachfolgezustand inne. Bei dem hier vorgelegten Konzept hat nach der Zeit  $v_{\max} + s_{\max}$  die Ursprungszelle mit Sicherheit den Nachfolgezustand eingenommen, so daß die Eingabe eines weiteren Taktes möglich ist.

Kann man davon ausgehen, daß die zellspezifischen Verzögerungszeiten  $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$  sich über die Zeit nicht ver-

ändern, so wird bei jedem folgenden Takt, der in die Ursprungszelle eingegeben wird, die in der Reihenfolge gleiche Verteilung von Taktimpulsen an die einzelnen Zellen auftreten. Betrachtet man die unteren Aufbauten aller Zellen für sich, so kann man davon sprechen, daß der "Taktverteilungsraum"  $\mathcal{T}$  zeitlich konstant ist. In diesem Fall ist eine gegenseitige Beeinflussung verschiedener Takte ausgeschlossen, so daß für alle Takte einer Folge von in die Ursprungszelle eingegebenen Takten mit dem Abstand  $d \geq v_{\max} + s_{\max}$  die angestrebte lokale Taktung gegeben ist.

Läßt man nun zu, daß der Taktverteilungsraum  $\mathcal{T}$  zeitlich variiert, d.h. daß die an den einzelnen Zellen auftretenden Verzögerungszeiten nicht für alle Takte einer Folge die gleichen sind, sieht die Situation anders aus:

Nimmt man einmal an, daß bei einem ersten Takt  $T_0$  an allen Zellen die Verzögerung  $v_{\max}$  auftritt, bei einem weiteren Takt  $T_1$  jedoch jeweils  $v_{\min}$ , so holt die Taktfront von  $T_1$  die von  $T_0$  irgendwann ein. Das darf jedoch nicht passieren; nicht einmal ein Mindestabstand  $d_{\min}$ , der gegeben ist durch die maximale Rechenzeit einer Zelle,  $s_{\max}$ , plus  $v_{\max}$ , die maximale Verzögerung bei der Taktverteilung an einer Zelle, darf unterschritten werden, da sonst Taktimpulse verloren gehen können.

Durch zusätzliche lokale Restriktionen soll erreicht werden, daß die zeitliche Distanz zweier aufeinander folgender Takte an keiner Zelle  $d_{\min}$  unterschreiten kann. Von mehreren denkbaren Möglichkeiten sollen zwei hier skizziert werden.

1) Setzt man voraus, daß sich die Schwankungen der Verzögerungszeiten bei aufeinander folgenden Takten innerhalb eines bestimmten endlichen Radius' ausmitteln, so ist eine Einholung aufeinander folgender Takte unmöglich, wenn nur anfangs eine hinreichend große Distanz (bei der Takteingabe) eingehalten wird.

2) Durch einen lokalen Regelungsprozeß läßt sich unter bestimmten Bedingungen erreichen, daß die Annäherung aufein-

ander folgender Takte über den Mindestabstand hinaus verhindert wird, auch wenn eine Voraussetzung wie unter 1) nicht gegeben ist. Dazu wird an jeder Zelle zum Taktzeitpunkt eine Schwellenfunktion ausgelöst (hierzu dient der seitliche Eingang von  $Mf^Z$  - vgl. Bild 1), die für eine bestimmte Dauer nach dem Taktzeitpunkt positive Werte hat und dann verschwindet. Anhand des bei Eingang eines Nachfolgetaktes registrierten Schwellwerts kann die Dichte der Taktaufeinanderfolge in Grenzen bestimmt und eine Zusatzverzögerung ermittelt werden (die Schaltzeit von  $Mf^Z$  kann hierzu in beschränktem Umfang verlängert werden).

In diesem Fall kann der Abstand bei der Takteingabe auf  $s_{\max} + v_{\max} + \varepsilon$  ( $\varepsilon < v_{\min}$ ) heruntergedrückt werden (beim Synchronfall:  $s_{\max}$ ). Ob dieses Prinzip generell anwendbar ist, wird zur Zeit untersucht.

#### Diskussion.

Statt "am Kalkül" anzusetzen, wie Nakamura (1974), Pries (1974) und Golze (1977), wird hier die Auffassung des Zellarraums als "simultaner Ersetzungskalkül" beibehalten und ein erweitertes Automatenkonzept zur Ausführung dieses Kalküls bereitgestellt, auf Grund dessen die Vorbehalte gegen den simultanen Kalkül möglicherweise fallen gelassen werden können.

Das neue, mit dem unteren Zellaufbau für die Taktverteilung versehene Automatenetzwerk arbeitet die Berechnung einer Nachfolgekonfiguration nicht mit einem Schlag, sondern sukzessive von innen nach außen ab, jedoch kann die Berechnung eines weiteren Nachfolgers jeweils schon kurze Zeit (etwa  $s_{\max} + v_{\max} + \varepsilon$ ) nach der des vorhergehenden gestartet werden.

So erhält man eine maximale Taktfrequenz, die nicht wesentlich unter der des entsprechenden global-synchronen Zellarraums liegt. Dabei hat die sukzessive Ausführung des einzelnen globalen Übergangs keinen Einfluß auf die lokale Verrechnung der Information. Kurz gesagt laufen hier

die gleichen Rechenvorgänge ab wie in dem korrespondierenden synchronen Zellularräum (der also denselben, d.h. durch dieselbe formale Beschreibung gegebenen Kalkül rechnet). In diesem Sinn kann man davon sprechen, daß das hier vorgestellte lokal-synchrone Konzept "das gleiche leistet" wie das ursprüngliche global-synchrone Konzept.

Allerdings ist es notwendig, auf "synchrone Bilder" von Konfigurationen zu verzichten. Durch Anhalten des Taktes läßt sich jedoch ein synchroner Ausschnitt des Bildes einer Konfiguration erhalten, und zwar spätestens nach z.B. der Zeit  $\frac{n}{2} \cdot v_{\max} + s_{\max}$  für einen Ausschnitt von der Form eines regelmäßigen, zum Ursprung symmetrischen Rhombus der Breite  $n+1$ .

Abschließend sei erwähnt, daß die Beschränkung auf zweidimensionale Zellularräume keine wesentliche ist; etwa genügt es, für dreidimensionale Zellularräume mit von Neumannscher Nachbarschaft den nach Bild 1 gegebenen unteren Aufbau um zwei K-Bausteine und entsprechende Ausgänge des Impuls-Vervielfachers  $V_v$  zu erweitern. Auch Verallgemeinerungen auf andere Nachbarschaften sind möglich.

#### Literatur.

Arbib, M.A.: Theories of Abstract Automata (Prentice Hall 1969)

Golze, U.: Lokale und globale Synchronisation (1977), im vorliegenden Band erschienen

Nakamura, K.: Asynchronous Cellular Automata and Their Computational Ability, Systems.Computers.Controls, Vol.5, No.5 (1974)

Priese, L.: Über einfache unentscheidbare Probleme: Computational- und constructional-universelle asynchrone cellulare Räume, Diss. (Münster 1974)