

SIMULTANE ZELLULARE KALKÜLE UND
LOKAL-SYNCHRONE ZELLULARAUTOMATEN

Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Universität Hannover

zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -

genehmigte Dissertation

von
Ipke Wachsmuth
geboren am 27. März 1950 in Rehren A.O.

Referent: Prof. Dr. G. Bertram
Korreferent: Prof. Dr. K. Döpp
Tag der mündlichen Prüfung: 15.2.1980

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Notationen	6
1. Einführung	7
2. Zellularräume und Substitutionskalküle	16
3. Lokal-synchrone Zellularautomaten	26
3.1 Vorüberlegungen	26
3.2 T-Zellnetze und T-Netze	39
3.3 Die Polyautomaten (\hat{Z}, T)	50
3.4 Betrachtung eines einzelnen Taktes	59
3.5 Betrachtung von Taktfolgen - prinzipiell	71
3.6 Betrachtung von Taktfolgen in Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$	83
Nachwort	95
Literaturverzeichnis	101

Meinem Lehrer
Alfred Siegmüller
(1921-1978)

Einleitung

Synchrone Zellularautomaten sind - unter dem Gesichtspunkt einer Realisierung - mit bestimmten physikalischen Annahmen nicht vereinbar. Die aus diesem Grund entwickelten Ansätze asynchroner Zellularautomaten vermeiden diese Schwierigkeiten, schränken aber die bei synchronen Zellularautomaten gegebene parallele Arbeitsweise mehr oder weniger stark ein. Die Problemstellung der vorliegenden Arbeit können wir wie folgt umreißen:

Es soll die grundlegende Idee des Zellularautomaten als einem Modell hochparalleler Informationsverarbeitung beibehalten und versucht werden, das zugrundeliegende Automatenkonzept dahingehend zu modifizieren, daß, ohne Voraussetzung globaler Synchronität, eine adäquate Ausführung "simultaner zellularer Kalküle" durch physikalisch realisierbare Zellularautomaten erreicht wird. Möglichkeiten und Grenzen unseres Ansatzes "lokal-synchroner Zellularautomaten" werden in der Arbeit untersucht.

Dabei wird wie folgt vorgegangen. Im ersten Abschnitt wird das bekannte Konzept des synchronen Zellularautomaten aus automatentheoretischer Sichtweise dargestellt. Hierbei legen wir, zur Vorbereitung auf den in dieser Arbeit entwickelten Ansatz, besonderen Wert auf die Beschreibung der Grundbausteine (Automatenzellen).

Im zweiten Abschnitt wird zunächst herausgestellt, daß das mathematische Modell des synchronen Zellularautomaten als spezieller Substitutionskalkül (mit normierter Regelgestalt) aufzufassen ist. Der Gesichtspunkt der Synchronität findet Ausdruck in der Metaregel eines solchen Kalküls: Die Anwendung sämtlicher zutreffender Basisregeln ist simultan vorzunehmen. Die Beziehung zwischen solchen Kalkülen und synchronen Zellularautomaten wird - in Gegenüberstellung zu verschiedenen Ansätzen asynchroner Zellularautomaten - verdeutlicht. Die Ergebnisse dieser Analyse sind in den Aussagen 2.1- 2.3 zusammengefaßt.

Zu Beginn des dritten Abschnitts wird eine heuristische Darstellung der dem Ansatz zugrundeliegenden Idee gegeben. Einige physikalische Grenzfra-

gen - als eigentlicher Anlaß zur Untersuchung nicht (global) synchroner Zellularautomaten - werden, in durch den Rahmen der Arbeit gegebener Kürze, angesprochen (Formulierung von Postulaten). Es wird eine Definition synchroner Arbeitsweise von Mengen von Automatenzellen gegeben, die mit den zugrundegelegten physikalischen Annahmen vereinbar ist; insbesondere bezieht sie sich auf endliche Zellmengen.

Eine weitere Analyse des Zusammenhangs zwischen einem Simultankalkül und einem (hypothetischen) synchronen Zellularautomaten führt zu folgendem Ergebnis: Für die korrekte simultane Anwendung von Basissubstitutionsregeln ist die gleichzeitige Ausführung der entsprechenden lokalen Übergänge durch den Automaten zwar lokal, nicht jedoch global notwendig. Dies führt uns zu dem schwächeren Begriff lokal-synchroner Arbeitsweise (Definition 2 in 3.1), welche ohne Bezug auf die Endlichkeit einer betrachteten Zellmenge auskommt.

Die für den späteren Ansatz benötigten Hilfsmittel stellen wir in 3.2 bereit: Hier entwickeln wir das Konzept des T-Netzes, eines speziellen Automatennetzwerks, das den zu lokal-synchroner Arbeitsweise von (zweidimensionalen) Zellularautomaten führenden Organisationsprozeß leisten soll. Ein solches T-Netz erfüllt in bezug auf seinen modularen Aufbau aus T-Zellnetzen die ursprünglichen, an einen Zellularautomaten gestellten Homogenitätsforderungen.

Der Beschreibung des T-Zellnetzes legen wir das Konzept des APA-Netzes [PRI2] zugrunde, für das wir hier eine lokale Zeitbetrachtung einführen: Um den aufgrund der in 3.1 formulierten Postulate anzunehmenden Zeitverbrauch beim Übergang eines Schaltelements von einem Zustand in einen anderen ausdrücken zu können, beziehen wir sog. Übergangszustände in die relationale (indeterministische) Beschreibung eines Schaltelements ein. Die lokale Zeitbetrachtung eröffnet uns dann die - bei rein nicht-deterministischer Betrachtung nicht mögliche - Bezugnahme auf die Dauer von (Teil-)Prozessen im T-Netz.

Die hierbei angenommene zeitliche Variabilität der in den Komponenten eines Netzes (bei wiederholtem Ablauf eines Prozesses) auftretenden

Verzögerungen ist unseres Wissens in der einschlägigen Literatur bisher nicht behandelt worden. Die in einem ähnlichen Zusammenhang eingeführten (im zweiten Abschnitt besprochenen) "asynchronen Grammatiken" [LIP] enthalten eine solche Annahme implizit. In anderem Kontext - zur Fehlerkorrektur in sog. Distributed Systems - wird in [NOE] das Konzept "Time Petri Nets" von Merlin vorgestellt, das auf die minimale und maximale Dauer einzelner Operationen Bezug nimmt. In einem hiermit verwandten Netzansatz in [RAM] und dessen Verallgemeinerung in [SIF] sind zugeordnete Komponentenverzögerungen als zeitlich konstant vorausgesetzt.

Zellularautomaten \hat{Z} , deren Automatenzellen mit den in 3.2 definierten T-Zellnetzen unterlegt sind, führen wir in 3.3 als Polyautomaten (\hat{Z}, T) ein. Dabei definieren wir die für das folgende wichtigen Begriffe "Taktzeitpunkt" und "ursächlicher T-Input" (einer Zelle α). Es handelt sich um raum-zeitliche Ereignisse, die im Netz durch zu bestimmten Zeiten an bestimmten Stellen auftretende "Impulse" repräsentiert sind. In diesem Zusammenhang führen wir eine kontinuierliche, vollständig geordnete Zeitskala ein, die bei den Untersuchungen in 3.4 - 3.6 dazu herangezogen wird, solche raum-zeitlichen Ereignisse jeweils innerhalb einer Zellnachbarschaft in bezug auf ihre zeitliche Reihenfolge zu vergleichen.

Diese in unserer Betrachtung auf den Ort der Ursprungszelle bezogene globale (Beobachtungs-)Zeit vereinfacht die beweistechnischen Darstellungen (und die Vorstellung des globalen Verhaltens eines solchen Polyautomaten); ihre Verwendung stellt aber keine unmittelbare Notwendigkeit dar: Mit mehr Aufwand wäre die Argumentation auf eine lokale Zeitskala der jeweils beobachteten Zelle α zu beziehen, die dort auch nur in endlichen Abschnitten zu betrachten ist und etwa mit jedem ursächlichen T-Input an α neu beginnen kann. (Man beachte dazu auch, daß im Induktionsbeweis des Lemmas 2 in 3.5 nur auf "instants" t_n bezuggenommen wird.) Vorsorglich sei bemerkt, daß die globale Zeitskala hier nicht dazu dient, ein Synchronisationschema zu definieren.

Im Rest des dritten Abschnitts untersuchen wir das Konzept von Polyautomaten (\hat{Z}, T) daraufhin, ob es die Vorstellung von lokal-synchronen Zellularautomaten verwirklicht, d.h. ob die Menge der Zellen eines solchen

Automaten (\hat{Z}, T) die in 3.1 definierten Bedingungen für lokal-synchrone Arbeitsweise erfüllt (\hat{Z} bezeichnet dabei einen beliebigen, nicht notwendig deterministischen zweidimensionalen Zellularautomaten mit von-Neumannscher Nachbarschaft). Mit dem Theorem 3.4.3 können wir diesbezüglich zeigen: Bei Eingabe eines einzelnen Taktsignals tritt an jeder Zelle von (\hat{Z}, T) genau ein Taktzeitpunkt auf, wobei sich die Taktzeitpunkte benachbarter Zellen nicht stärker unterscheiden, als es für die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge zulässig ist. Dies bedeutet aber, daß durch das eine Taktsignal - bei lokal-synchroner Arbeitsweise - gerade ein Ableitungsschritt des korrespondierenden Simultankalküls zur Ausführung gebracht wird.

Als Korollar läßt sich dann - setzt man zeitlich konstante Verzögerungen in den T-Zellnetzen voraus - die entsprechende Aussage für jedes einzelne Taktsignal einer Folge beweisen, d.h. unter dieser Voraussetzung gilt: (\hat{Z}, T) arbeitet lokal-synchron (3.5.0).

Bezugnehmend auf die Postulate aus 3.1 untersuchen wir in 3.5 dann (\hat{Z}, T) unter der schwächeren Voraussetzung zeitlich (beschränkt) variierender Verzögerungen. Es stellt sich heraus:

- Eine Einholung von aufeinanderfolgenden Taktsignalen ist prinzipiell möglich (3.5.1);
- falls keine Einholung auftritt, so arbeitet (\hat{Z}, T) lokal-synchron (3.5.3/ 3.5.4); aber:
- auch durch irgendeinen (mit den Postulaten aus 3.1 vereinbaren) lokalen Regelungsprozeß läßt sich eine Einholung prinzipiell nicht ausschließen (3.5.5).

Unter dem Gesichtspunkt, daß bei Realisierungen von Zellularautomaten in jedem Fall nur endlich viele Zellen zum Einsatz gelangen können, gehen wir in 3.6 auf das Konzept endlicher Zellularautomaten ein. Wir betrachten Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$, bei denen der maximale Abstand einer Zelle zum Ursprung n betragen darf (also n^2 die Größenordnung verfügbarer Zellen ist). Die Beziehungen zwischen n und den zu lokal-synchroner Arbeitsweise

von $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ führenden Taktabständen werden untersucht und mit 3.6.3 der Grenzfall angegeben. Hier ergibt sich ein gegenüber dem globaler Synchronisierung vergleichbaren Fall 3.6.1 ein echter, mit n wachsender Zugewinn. Mit einem stochastischen Ansatz versuchen wir, die aus 3.6.3 erhaltene Grenze noch auszudehnen; unter Berücksichtigung der dortigen Annahmen stellt das Ergebnis 3.6.10 die absolut untere, wohl nicht erreichbare Grenze dar.

Abschließend sei hier die folgende, möglicherweise interessante Interpretation des Ergebnisses 3.6.3 angedeutet. Ein endlicher Zellularautomat ließe sich, unter Bezugnahme auf die längste Signallaufzeit, auch global synchronisieren (etwa entsprechend 3.6.1). Um ihn "schneller" zu machen, d.h. ihn mit höheren Taktfrequenzen betreiben zu können, müßte man die Geschwindigkeit der Signalübermittlung erhöhen bzw. die Komponentenverzögerungen, etwa durch räumlich dichtere Anordnung der Schaltelemente, verkleinern. Dieses Vorgehen wäre auch bei einem lokal-synchronen Zellularautomaten möglich.

Wie aus 3.6.3 ersichtlich ist, läßt sich bei einem lokal-synchronen Zellularautomaten jedoch auch dadurch eine Erhöhung der Taktfrequenz erreichen, daß die zeitliche Variabilität der Komponentenverzögerungen verkleinert wird.

Dem einen wie dem anderen sind offenbar physikalische Grenzen gesetzt. Es könnte aber von den technologischen Bedingungen abhängen, in welcher Richtung - in bezug auf Zugewinn an Geschwindigkeit oder Zugewinn an Exaktheit - sich mehr erreichen lassen wird.

Herrn Prof. Dr. G. Bertram danke ich für das Gastrecht, das er diesem Forschungsgebiet an seinem Institut gewährte und das diese Arbeit erst ermöglichte.

Notationen

R	Menge der reellen Zahlen
Z	Menge der ganzen Zahlen
$Z^2 =$	$Z \times Z$ (kartesisches Produkt), analog Z^n
N	Menge der natürlichen Zahlen
$N_0 =$	$N \cup \{0\}$
Z	Zellularraum
\hat{Z}	Zellularautomat, S.51
(Z, sim)	Simultankalkül, S.52 und S.18
(\hat{Z}, T)	mit einem T-Netz unterlegter Zellularautomat \hat{Z} , S.52
$(\hat{Z}, T)^{(n)}$	endlicher Automat (\hat{Z}, T) , S.84
\mathcal{t}	Zeitskala, S.54; $t \in \mathcal{t}$ wird nach Bedarf indiziert.
$\langle t^\alpha \rangle$	Ereignis "Taktzeitpunkt an der Zelle α zur Zeit t^α ", S.55
$\langle \underline{t}^\alpha \rangle$	Ereignis "ursächlicher T-Input an α zur Zeit \underline{t}^α ", S.55
$\langle \bar{t}_{j(\beta)}^\alpha \rangle$	Ereignis "T-Output von α an die Nachbarzelle β zu $\bar{t}_{j(\beta)}^\alpha$ ", S.65
$\langle t_k^\alpha \rangle$	Ereignis "k-ter Taktzeitpunkt von α zur Zeit t_k^α ", S.71
\equiv	Identität von Ereignissen, S.56
$ \cdot $	Absolutbetrag
card M	Anzahl der Elemente einer Menge M
supp(c)	Menge nicht-ruhiger Zellen einer Konfiguration c, S.29
N	(Zell-)Nachbarschaft, S.13, oder erweiterte Nachbarschaft, S.29
H_1	zweidimensionale von-Neumann-Nachbarschaft, S.15

Ferner werden übliche Symbole der Mengenlehre und der Prädikatenlogik verwendet.

1. EINFÜHRUNG

Zellularautomaten sind spezielle "Polyautomaten": Eine (in der idealen Auffassung unbeschränkte) Vielzahl von gleichartigen, untereinander verbundenen einfachen Systemen, den Zellen, ergibt ein in der Gesamtheit sehr mächtiges System. Die simultane lokale Informationsverarbeitung dieser Vielzahl von Zellen ermöglicht global die Lösung jeder (im mathematischen Sinn) lösbarer Aufgabe: Zellularautomaten stellen das automatentheoretische Explikat eines berechnungsuniversellen Kalküls dar; sie sind in dieser Hinsicht einer Turingmaschine äquivalent.

Darüber hinaus ermöglichen sie die Selbstreproduktion bestimmter, zur Lösung derartiger Aufgaben fähiger Teilstrukturen, wobei als "Rohmaterial" wieder (vorher nicht aktivierte) Zellen dienen. Dabei kann der neu entstehende Automat mit einer neuen, anderen Aufgabe versehen, ja sogar in seiner Anlage modifiziert werden. Die wirkliche Komplexität dieser Systeme liegt also nicht so sehr in den individuellen Fähigkeiten der Grundbausteine (Zellen), sondern in der Art ihrer als Muster von Zellzuständen ausgedrückten Gesamtzustände oder Konfigurationen.

Gerade die Gleichartigkeit und Austauschbarkeit der Grundbausteine ermöglicht die angesprochenen Wesensmerkmale und die universelle Anpaßbarkeit eines solchen Automaten-systems an die verschiedenartigsten Probleme; das alles wurde in der Grundlage bereits von John von Neumann, dem diese Idee eines "zellularen Automaten" entstammt, nachgewiesen.

Von Neumann hat dieses Konzept ursprünglich nicht als eine Präzisierung des Berechenbarkeitsbegriffs entwickelt, sondern zur Behandlung kybernetischer und biologischer Fragestellungen - darauf zielt etwa die Betrachtung selbstreproduzierender und selbstmodifizierender Strukturen ab. Ein Zellularautomat ist intendiert als Maschine, die in der Natur vorgefundene Prozesse nachvollziehen soll; jedoch wird dies ausgedrückt in einer mathematischen Beschreibung einer solchen Maschine. (Bevor er dieses abstrakte Modell entwickelte, bezogen sich von Neumanns Überlegungen auf ein sog. kinematisches Modell eines physikalisch realen Apparates.)

Das formale Konzept des Zellularautomaten stellt seither einen Gegenstand der mathematischen Untersuchung dar, und viele Arbeiten in der Literatur

befassen sich mit der Tragweite dieses Konzepts. Dabei ist es ein wesentlicher Gesichtspunkt, aus den Funktionsprinzipien der Grundbausteine, den lokalen Übergangsregeln, auf globale Eigenschaften eines Zellularautomaten zu schließen. Das primäre Interesse gilt den Konfigurationen eines Zellularautomaten (oder Zellularraums, wie das mathematische Abstraktum auch genannt wird), sowie den Beziehungen zwischen Konfigurationen bezüglich der durch die lokalen Regeln induzierten Globaltransformation. Viele dies betreffende Fragen sind (für zwei- und höherdimensionale Zellularräume) logisch unentscheidbar, so daß schon in dieser Hinsicht die mathematische Theorie der Zellularautomaten als interessant und nicht-trivial anzusehen ist.

Daneben wird jedoch die physikalische Realisierung von (endlichen) Zellularautomaten - zunächst fraglich wegen der großen Konkurrenz herkömmlicher Universalrechner - als ein Fernziel verfolgt. Zellularautomaten können als Modell für sog. Feldrechner (Array Processors) gelten. In der Tat kann man einen Feldrechner wie den ILLIAC IV als realen Zellularautomaten (mit beschränkter Feldgröße bzw. Zellenanzahl) auffassen. Jedoch sind die relativ wenigen (64) Zellen für sich genommen recht komplizierte Systeme, so daß ein Wesensmerkmal des zellularen Automaten ursprünglicher Auffassung: große Anzahlen sehr einfacher Grundbausteine - damit nicht verwirklicht ist.

Die ungarische ICRA-Forschungsgruppe (Budapest) ist etwa seit 1974 mit der Entwicklung eines realen Zellularautomaten nach dem Modell von Codd befaßt [FAY1/2], das eine Verbesserung (Vereinfachung) des von Neumann'schen Ansatzes darstellt und recht weitgehend untersucht wurde, vgl. etwa [GOL1].

Erst in jüngerer Zeit jedoch erscheint durch die Fortschritte bei der Entwicklung und Herstellung hochintegrierter Schaltungen (LSI-Technik) die Erzeugung großer Zellanzahlen möglich. Durch die völlige Gleichheit seiner Grundbausteine tritt dabei der Zellularautomat gegenüber den hierarchisch komplex aufgebauten herkömmlichen Computersystemen in starke Konkurrenz. Wesentlich ist dabei seine natürliche Eignung zu paralleler Informationsverarbeitung; insbesondere dort, wo große Mengen gleichartig auftretender Daten in realer Zeit verarbeitet werden müssen (etwa bei meteorologischen Problemen), könnte ein realisierter Zellularautomat überlegen sein.

Nach dieser kurzen Einordnung und Abgrenzung des Gebiets wollen wir nun einen üblichen Zugang zum Konzept des zellularen Automaten darstellen.

Man betrachtet einen Verbund von gleichartigen "Automatenzellen", die man sich auf den ganzzahligen Gitterpunkten des n-dimensionalen euklidischen Raumes angeordnet denkt. Jede solche Automatenzelle ist mit gewissen "benachbarten" Automatenzellen verbunden: nach einem bestimmten, überall gleichen Schema (1. Homogenitätsforderung).

Die Automatenzellen, kurz: Zellen, können verschiedene Zustände innehaben, die sich zu bestimmten Zeitpunkten ändern können: aufgrund von Übergangsregeln, die für jede Zelle die gleichen sind (2. Homogenitätsforderung). Als Grundlage bei der Anwendung dieser Übergangsregeln für eine gegebene Zelle dienen dabei die momentanen Zustände der benachbarten Zellen sowie ihr eigener; durch die Regeln ist festgelegt, welche neuen Zustände für diese Zelle bei einem Übergang in Frage kommen. Ist für jede Zelle in allen Fällen der neue Zustand eindeutig bestimmt, so spricht man von determinierten, andernfalls von indeterminierten Regeln.

Der Grundgedanke ist, daß durch das Zusammenwirken eines Verbundes solcher Automatenzellen "Leistung" erbracht wird, die die summierten "Leistungen" der Einzelteile, also der Zellen übersteigt - in welchem Sinn, wurde oben bereits angedeutet.

Zur Beschreibung der Automatenzellen können Moore-Automaten¹ dienen:

Definition.

Ein (vollständiger determinierter) Moore-Automat A ist formal ein System $A = (Z, X, Y, \delta, \lambda)$; dabei ist

Z eine nichtleere endliche Menge von Zuständen,

X eine nichtleere endliche Menge von Eingabesignalen,

Y eine nichtleere endliche Menge von Ausgabesignalen,

$\delta: Z \times X \rightarrow Z$ die Überföhrungsfunktion (oder Übergangsfunktion),

$\lambda: Z \rightarrow Y$ die Ausgabefunktion (oder Markierungsfunktion).

¹ Zur Theorie abstrakter Automaten siehe [HAR].

Die Mengen X und Y bezeichnet man als Eingabe- bzw. Ausgabealphabet. Man nennt A determiniert aufgrund der Tatsache, daß δ Funktion ist, also einer vorgegebenen Zustand-Eingabe-Kombination jeweils genau einen neuen Zustand zuordnet, und vollständig, da δ für jede mögliche derartige Kombination definiert ist.

Um ggfs. auch indeterminiertes Verhalten von Automatenzellen beschreiben zu können, wollen wir das Konzept des Moore-Automaten wie folgt ausweiten¹.

Definition.

Ein verallgemeinerter Moore-Automat A ist ein System $A = (Z, X, Y, \Delta, \lambda)$ mit Z, X, Y und λ wie vorher und einer Übergangsrelation $\Delta \subset Z \times X \times Z$.

Ist etwa $(z, x, z_1) \in \Delta$ und $(z, x, z_2) \in \Delta$, so bedeutet dies: Bei Zustand z ist unter der Eingabe x der Übergang nach z_1 oder z_2 möglich; es ist nicht determiniert, welcher Übergang auftritt.

Ein verallgemeinerter Moore-Automat ist determiniert, falls Δ rechtseindeutig ist, und vollständig, falls für alle Paare (z, x) ein z' existiert, so daß $(z, x, z') \in \Delta$ - der ursprüngliche Fall ist also enthalten.

Die Ausgabefunktion λ eines (verallgemeinerten) Moore-Automaten A hängt nur von seinen Zuständen ab. Während der gesamten Dauer, in der A einen bestimmten Zustand innehat, soll das zugehörige Ausgabesignal ständig abfragbar sein, so daß man davon sprechen kann, daß λ den jeweiligen Zustand eines Moore-Automaten "anzeigt", daher die Bezeichnung "Markierungsfunktion".

Eine Automatenzelle ist nun wie folgt durch einen (verallgemeinerten) Moore-Automaten A zu beschreiben.

Die Menge verschiedener Zustände, die eine Zelle einnehmen kann, sei mit Q bezeichnet; im folgenden sei immer Voraussetzung, daß Q endlich ist und mindestens zwei Elemente enthält. Diese Menge Q wird als Zustandsmenge von A gesetzt.

Die Zellzustände sollen allen benachbarten Zellen durch eine Markierungsfunktion λ angezeigt werden; dazu sei als Ausgabealphabet von A das $(m-1)$ -fache kartesische Produkt der Zustandsmenge Q gewählt, wenn $m-1$ die - immer endliche - Anzahl der Nachbarn ist, und es sei λ die kanonische

¹Vgl. die analoge Verallgemeinerung eines Mealy-Automaten in [BÖH, S.3]

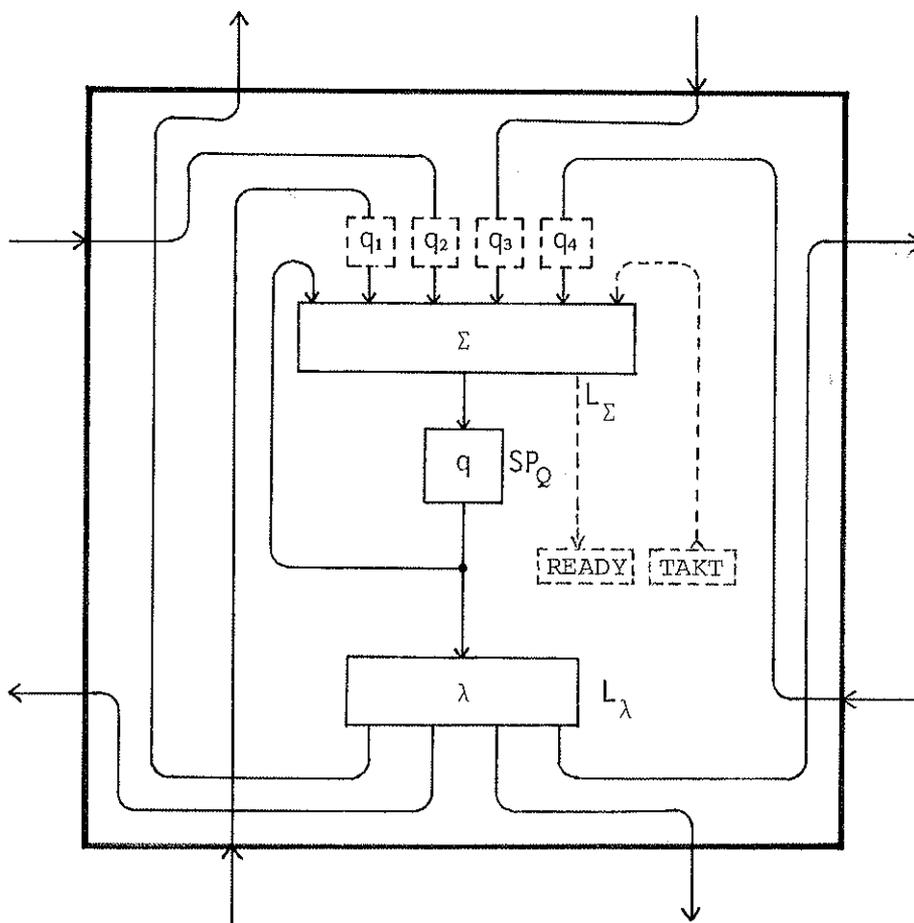
Diagonalabbildung, $\lambda: Q \rightarrow Q^{m-1}$ mit $\lambda(q) = (q, \dots, q)$ für alle $q \in Q$.

Das Eingabealphabet von A sei gleich dem Ausgabealphabet. Wie gesagt basieren die Übergangsregeln einer Zelle auf dem eigenen Zustand der Zelle und den Zuständen ihrer Nachbarn, sie sind folglich als Übergangsrelation von A: $\Sigma \subset Q \times Q^{m-1} \times Q$, also $\Sigma \subset Q^{m+1}$, bzw. im deterministischen Fall als Übergangsfunktion $\sigma: Q^m \rightarrow Q$ zu repräsentieren.

Als Beschreibung einer Automatenzelle A kann jetzt der (verallg.) durch

$$A = (Q, Q^{m-1}, Q^{m-1}, \Sigma, \lambda)$$

definierte, nicht notwendig determinierte, nicht notwendig vollständige Moore-Automat dienen. Zur Veranschaulichung zeigt die folgende Abbildung die schematische Darstellung einer Zelle im zweidimensionalen Raum, die für die vier kanonischen Nachbarn: unten, links, oben und rechts vorgesehen ist.



Die Arbeitsweise einer solchen Zelle hat man sich wie folgt vorzustellen: Bei einem Übergang wird aus dem eigenen Zustand $q \in Q$, der aus einem "Speicher" SP_Q abgefragt wird, und den abgefragten Zuständen der benachbarten Zellen (als q_1, q_2, q_3 bzw. q_4 eingesetzt) in einer "Schaltlogik" L_Σ ein neuer Zustand $q' \in Q$ mit $(q, q_1, q_2, q_3, q_4, q') \in \Sigma$ berechnet, der in den Speicher eingeschrieben wird und den Nachbarzellen durch eine "Ausgabelogik" L_λ angezeigt wird. Ein solcher Übergang wird ausgelöst durch ein Taktsignal; im Moment seiner Beendigung möge ein Readysignal auftreten.

Bei der Anordnung gleichartiger Automatenzellen der beschriebenen Art auf den Punkten der Gaußschen Ebene erlaubt die gewählte Verteilung und Lage der Verbindungen für die Eingabe- und Ausgabesignale die uniforme Verschaltung der Zellen zu einem Automatenverbund mit der gewünschten Nachbarschaftsstruktur, so daß die Homogenitätsforderungen für einen zellularen Automaten erfüllt sind.

Diese gleichen Zellen A können durch Indizierung nach ihrer Lage im Raum unterschieden werden: A^α, A^β, \dots , wenn α, β, \dots Punkte des Raumes (oder hier: der Ebene) sind; abkürzend bezeichnet man auch einfach die Punkte α, β, \dots als Zellen und denkt sich die zugehörige Automatenstruktur gleichzeitig darauf gegeben. Als weitere Vereinfachung bezieht man die Abhängigkeit der Übergangsrelation vom eigenen Zustand einer Zelle in die Abhängigkeit von den benachbarten Zellen ein, indem man eine Zelle als zu sich selbst benachbart ansieht.

Gemäß der Auffassung von Moore-Automaten wird der jeweilige Zustand einer Zelle so lange (statisch) angezeigt, bis der nächste Übergang erfolgt ist. Für die Dauer, in der der Zustand einer Zelle angezeigt wird, sprechen wir von definiertem Zustand der Zelle. Ferner hängt bei Moore-Automaten die Ausgabe zu einem Zeitpunkt nur von ihrem derzeitigen Zustand ab, so daß Eingaben erst nach der nächstfolgenden Zustandsänderung Einfluß auf die Ausgabe haben. Durch diesen Sachverhalt wird erreicht, daß in einem zellularen Automaten jeder Zustandswechsel einer Zelle nur lokale, d.h. auf den Bereich ihrer endlich vielen Nachbarzellen beschränkte Auswirkungen hat. Dies ist eine grundlegende Eigenschaft zellulärer Automaten.

In einem einzigen Zeitpunkt $t=0$ dürfen alle Zellen eines Zellularautomaten "von außen" auf einen Anfangszustand eingestellt werden; danach arbeitet

der Automatenverbund "autonom", d.h. ohne externe Eingriffe.

Ein gegebener Zellularautomat ist charakterisiert durch die Dimension des unterliegenden Raumes, die Anzahl und Lage der Nachbarn seiner Zellen, die für seine Zellen möglichen Zustände und die Regeln für Zustandsänderungen seiner Zellen. Es ist daher die folgende Beschreibung gebräuchlich:

Definition.

Ein Zellularautomat Z ist formal ein System $Z = (Z^n, N, Q, \Sigma)$, dabei ist

Z^n : der zugrundeliegende Raum; $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in Z^n$ ist eine Zelle;

N : die (Zell-)Nachbarschaft, die für die Ursprungszelle als endliche Menge von Vektoren angegeben wird (es sei der Nullvektor enthalten) und durch Translation auf sämtliche Zellen des Raumes fortgesetzt wird. Die Ursprungszelle bzw. ihre Translatierte wird als zentrale Zelle der Nachbarschaft bezeichnet.

Q : eine endliche Menge von (Zell-)Zuständen; $\text{card } Q > 1$;

Σ : eine endliche Menge von Regeln, die lokalen Übergangsregeln.

Die Prämisse einer solchen Regel¹ aus Σ ist ein m -Tupel von Zustandssymbolen (der Zustände einer Zellnachbarschaft - falls $\text{card } N = m$), die Conclusio liefert einen Nachfolgezustand für die zentrale Zelle einer Nachbarschaft. Jenachdem, ob diese Regeln immer ein- oder manchmal mehrdeutig sind, spricht man von einem deterministischen bzw. nichtdeterministischen Zellularautomaten. Es ist nicht gefordert, daß die Regelmenge total ist, d.h. daß sie für jedes m -Tupel von Zustandssymbolen eine Regel enthält. Im Fall einer deterministischen Regelmenge spricht man gewöhnlich von einer lokalen Übergangsfunktion.

Häufig wird ein Zustand $q_0 \in Q$ ausgezeichnet als Ruhezustand, falls nämlich Σ die Regel enthält, daß das m -Tupel über $\{q_0\}$ in q_0 resultiert und keine andere Regel mit gleicher Prämisse in Σ liegt; man schreibt in diesem Fall: $Z = (Z^n, N, Q, q_0, \Sigma)$.

Bisher war noch nicht die Rede davon, in welcher Weise die Übergangsregeln auf eine gegebene Besetzung aller Zellen mit Zuständen anzuwenden sind:

¹Auf die Terminologie von Regelsystemen wird in Abschnitt 2 genauer eingegangen; im übrigen verweisen wir auf [MAL].

Bei dem ursprünglichen Konzept des Zellularautomaten setzt man voraus, daß zu festen Zeitpunkten (einer diskreten Zeit) jeweils alle Zellen des Raumes ihren Zustand gemäß Σ ändern. Das bedeutet: Die Übergänge erfolgen bei simultaner Regelanwendung an allen Zellen in einem Schritt. In diesem Fall sind sämtliche Zellen des Raumes zwischen je zwei aufeinander folgenden Übergängen gleichzeitig in definiertem Zustand, und es ist sinnvoll, von einem Gesamt- oder Globalzustand des Zellularautomaten zu sprechen. Ein solcher Globalzustand eines Zellularautomaten Z ist formal durch eine Abbildung $c: Z^n \rightarrow Q$ anzugeben und wird Konfiguration (in Z) genannt.

Da es (wegen $\text{card } Q > 1$) unendlich viele Konfigurationen eines Zellularautomaten Z gibt, kann man Z als einen unendlichen Automaten ansehen, dessen Zustände Konfigurationen sind und dessen Übergangsregeln von den lokalen Übergangsregeln induziert werden; in Analogie spricht man von globalen Übergangsregeln, im deterministischen Fall auch von einer globalen Übergangsfunktion. Die zum Zeitpunkt 0 vorzunehmende Spezifikation sämtlicher Zellzustände ergibt einen Initialzustand (Initialkonfiguration) des Zellularautomaten. Externe Eingaben oder Ausgaben treten danach nicht auf. Falls ein Ruhezustand ausgezeichnet ist, spricht man von einer endlichen Konfiguration, wenn nur endlich viele Zellen nicht im Ruhezustand sind, und man fordert dann i.a., daß die Initialkonfiguration eine endliche ist.

Auf diese Weise - simultane Regelanwendung an allen Zellen - erhält man das Konzept des synchronen Zellularautomaten. Gewöhnlich wird angenommen, daß ein globaler Takt die Zellen eines solchen Automaten synchron arbeiten läßt, wobei die Existenz geeigneter Synchronisationsschemata vorausgesetzt wird.

Synchrone Zellularautomaten in der Art des von Neumann'schen Konzepts werden ausführlich untersucht bei [NEU], [BUR], [COD], [GOL1], [BAN], [SMI2] und vielen weiteren Autoren; es sei auf die umfassende Literaturliste in [SMI3] verwiesen. Eine algebraische Darstellung findet man bei [MER]. A.R. Smith III stellt Zellularautomaten in den allgemeineren Kontext der (von ihm so genannten) Polyautomaten [SMI3]. Dort sowie in [VOL] findet man überschauende Darstellungen und Diskussionen der Theorie synchroner Zellularautomaten.

Es ist nun jedoch denkbar, daß man auf die Forderung einer simultanen Anwendung der lokalen Übergangsregeln an allen Zellen verzichtet, indem man zuläßt, daß in einem Schritt jeweils nur ein Teil - oder gar nur eine - der Zellen eines Zellularautomaten einen Übergang erfährt. Dies führt zum Konzept des asynchronen Zellularautomaten, dessen Untersuchung seit 1974 wachsenden Raum in der Literatur einnimmt [NAK],[PRI1],[GOL3],[YAN]. Auf dieses Konzept gehen wir in den folgenden Abschnitten näher ein.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß nicht immer Z^n als zugrundeliegender Raum eines Zellularautomaten dient (etwa [MER]). In solchen Fällen wird jedoch i.a. gefordert, daß der Raum eine additive abelsche Gruppe ist (z.B. Z_s ; $Z_s \times Z$ - "Zylinder"), um die Fortsetzbarkeit der Zellnachbarschaft zu sichern. Hier betrachten wir jedoch immer den oben eingeführten Fall. Ferner ist in [SMI1] gezeigt, daß die Nachbarschaft in einer ganz bestimmten Weise normiert werden kann. Auf solche "Standardnachbarschaften", etwa die auf Seite 11 angegebene von Neumann'sche H_1 -Nachbarschaft: $\{(0,0), (0,-1), (-1,0), (0,1), (1,0)\}$ werden wir uns hier beschränken.

Als Modelle finden Zellularräume inzwischen allgemeine und weitreichende Anwendung. So dienen sie in [WUN] dazu, die Untersuchungen der Systemtheorie (als Theorie von Zeitprozessen) auf raum-zeitliche Vorgänge zu erweitern; es wird dort aufgezeigt, in welcher Weise raum-zeitliche Prozesse systemtheoretisch beschrieben und in zellularen Strukturen modelliert werden können. In dem Zusammenhang sei des weiteren auf eine Arbeit von Zuse verwiesen [ZUS].

In der Literatur existieren weitere Konzepte von Polyautomaten, die verwandt sind mit Zellularautomaten, etwa "Tesselation Automata" als nicht-autonome Variante (zu jedem Zeitpunkt sind externe Eingaben möglich), oder ganz allgemein "Iterative Arrays" (vgl. hierzu [SMI3]). Der Ausdruck "Zellularraum" wird häufig synonym für "Zellularautomat" gebraucht, manchmal in einer etwas abweichenden Bedeutung, etwa bei [SMI3] oder [NAK]. Wir werden uns hier an die folgende Regelung halten: Ist an das mathematische Abstraktum gedacht, so sprechen wir von einem Zellularraum, ist an eine Maschine (im Sinne der Automatentheorie) gedacht, von einem Zellularautomaten oder auch Polyautomaten.

2. ZELLULARRÄUME UND SUBSTITUTIONSKALKÜLE

Es wird sich als sinnvoll erweisen, zwei Dinge zu unterscheiden, wenn von einem Zellularraum gesprochen wird:

Durch die formale Beschreibung eines Zellularraums ist einerseits ein Kalkül gegeben - dieser Sachverhalt soll im Anfang dieses Abschnitts genauer dargestellt werden. Auf der anderen Seite wird ein Zellularraum als ein Verbund oder Netzwerk von Automaten, die nach einem bestimmten Schema zusammenarbeiten, aufgefaßt. In der ursprünglichen - synchronen - Version, von der wir zunächst ausgehen wollen, wird gleichzeitig an allen Automatenzellen ein Nachfolgezustand berechnet, d.h. ein Zustandsübergang ausgeführt.

Nachdem eine automatentheoretische Charakterisierung von Zellularräumen im ersten Abschnitt erfolgt ist, werden wir nun die Darstellung als Kalkül präzisieren; danach sollen die beiden verschiedenen Auffassungen in Beziehung gebracht werden.

Als Kalküle bezeichnet man gemeinhin Systeme zur Umformung von Zeichenreihen (Worten) mit Hilfe von Regeln; ein Beispiel sind die Logikkalküle. Die Einordnung des im folgenden betrachteten Typs von Regelsystemen unter den allgemeineren Begriff des formalen Systems sowie eine Darstellung des Bezugs zu assoziativen Kalkülen (das sind endlich definierte Halbgruppen) und Wortproblemen findet man in [MAL]. Den dort eingeführten Begriff des "Wortes" als lineare Zeichenreihe wollen wir hier im Anschluß an [PRI1] auf in der Ebene oder im Raum angeordnete Zeichenmengen, sog. Muster (englisch: Pattern) übertragen. Zunächst führen wir nun den Begriff des "Substitutionskalküls" für lineare Worte ein und verallgemeinern ihn anschließend für Muster.

Eine beliebige endliche Menge von unterscheidbaren Symbolen (Buchstaben) heiße ein Alphabet. Man stelle sich vor, daß eine unbeschränkte Menge von Feldern gegeben ist, worin Buchstaben angeordnet werden können. Eine endliche Folge von mit gewissen Buchstaben (eines Alphabets C) besetzten Feldern heiße ein Wort (über dem Alphabet C).

Eine Teilmenge von Feldern mitsamt den dort stehenden Buchstaben eines Wortes w heißt ein Teilwort t von w , falls w darstellbar ist als utv , wobei u und v (möglicherweise leere) Worte sind.

Definition.

Ein Substitutionssystem oder Substitutionskalkül¹ ist gegeben durch ein Alphabet $C = \{c_1, \dots, c_p\}$ und eine endliche Menge Γ von (Basis-)Substitutionsregeln $v_i \rightarrow w_i$ ($i = 1, \dots, \ell$), wobei v_i und w_i (möglicherweise leere) Worte über dem Alphabet C sind. v_i heißt Prämisse und w_i Conclusio der Regel $v_i \rightarrow w_i$.

Ein Vorkommen des Teilwortes v_i innerhalb eines Wortes v darf gemäß einer entsprechenden Regel durch w_i ersetzt werden. I.a. werden zusätzliche Vereinbarungen darüber getroffen, wie zu verfahren ist, wenn innerhalb eines Wortes mehrere Regelanwendungen auf einmal möglich sind. Solche Zusatzvereinbarungen werden als Metaregeln bezeichnet. Eine gemäß Substitutionsregeln und Metaregel vorgenommene Substitution, die ein Wort v in ein Wort w überführt, in Zeichen: $v \vdash w$, heißt Ableitungsschritt.

Man unterscheidet Kalküle zur Erzeugung von Wortmengen (hier muß mindestens eine prämissenfreie Regel - ein Axiom - vorgegeben sein, um überhaupt ein Wort erzeugen zu können) und wortverarbeitende Kalküle, deren Regeln auf vorgegebenen Wortmengen operieren.

Den ursprünglich für eindimensionale (lineare) Worte gegebenen Begriff des Substitutionskalküls kann man kanonisch übertragen auf zwei- und mehrdimensionale Worte, deren Buchstaben also in Feldermengen, die sich in mehreren Dimensionen erstrecken, angeordnet sind (Muster):

Ein Wort sei hier einfach eine Zuordnung von Buchstaben eines Alphabetes C zu einer endlichen Teilmenge der Feldermenge F , d.h. eine partielle Abbildung w von F in C ; wir verzichten auf die Darstellung eines Wortes als Folge, die von einer vorzugebenden Anordnung der Feldermenge abhängt. Ein Teilwort t eines Wortes w sei entsprechend eine partielle Abbildung von F in C , so daß $\text{dom}(t) \subseteq \text{dom}(w)$. Als verallgemeinertes Wort wollen wir eine total definierte Abbildung w von F in C bezeichnen.

Nun läßt sich die Auffassung eines (synchronen) Zellularraums Z als (wortverarbeitender) Kalkül verdeutlichen:

Z sei gegeben als System $Z = (Z^n, N, Q, \Sigma)$, wie im vorigen Abschnitt beschrieben. Aus n -dimensionalen Worten (bzw. verallgemeinerten Worten) über dem Alphabet Q in der Feldermenge Z^n - d.h. die Felder für Buchstaben sind die

¹Es ist auch die Bezeichnung Semi-Thue-System gebräuchlich nach dem norwegischen Mathematiker Axel Thue.

Punkte von Z^n - werden gemäß Basis-Substitutionsregeln einer speziellen, festen Gestalt, den lokalen Übergangsregeln, (Nachfolge-)Worte abgeleitet, wobei entsprechend der Auffassung von synchronen Zellularräumen sämtliche möglichen lokalen Übergänge (= Basis-Substitutionen) simultan ausgeführt werden¹ (Meta-regel!). Einer Konfiguration entspricht in diesem Konzept ein verallgemeinertes Wort. Eine Basisregel hat beispielsweise im Fall der zweidimensionalen von Neumannschen Nachbarschaft folgende Gestalt (a, b, c, d, e und a' sind Zustandsvariable):

$$\begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline c|a|e \\ \hline b \\ \hline \end{array} \rightarrow [a']$$

Die spezielle Form der Regeln eines Zellularraums erlaubt es, simultan an sämtlichen der Gestalt der Nachbarschaft N entsprechenden Teilworten eines Wortes Ersetzungen vorzunehmen, ohne daß Konfliktfälle auftreten. Dies liegt daran, daß - obwohl sich (in bezug auf die Felder) die Bereiche der Regelprämissen gewöhnlich überschneiden - keine Überschneidungen der Resultate von Regelanwendungen auftreten, denn die Conclusio einer Regel ist hier in jedem Fall ein einbuchstabiges Wort, das der zentralen Zelle von N zuzuordnen ist.

Auf diesem Prinzip simultaner Regelanwendung basieren die synchronen Zellularräume. Hier ist es möglich, von einem globalen Ersetzungsprozeß zu sprechen, den man durch die Angabe einer globalen Übergangsfunktion bzw. -relation beschreiben kann. Offenbar muß dabei das Problem der Überschneidung der Regelprämissen bewältigt werden; im Prinzip werden dazu in einem Zwischenschritt zunächst für jede Zelle Hilfsfelder mit den Zustandssymbolen der Nachbarn besetzt, was in Analogie im Automatenkonzept geschieht (in der Abbildung auf Seite 11 sind die Hilfsfelder durch $[\]$ angedeutet). Nach einer Regelanwendung, sprich: einem Übergang sind diese Hilfsfelder wieder leer. Die strukturelle Beschreibung dieses Sachverhalts gelingt durch Verwendung der Nachbarschaftszustandsfunktion - vgl. [COD, S.8] - , die im folgenden definiert wird.

Sei etwa durch $N = \{ \delta_1, \dots, \delta_m \mid \delta_i \in Z^n \}$ die Nachbarschaft und durch Σ die rechtseindeutige lokale Übergangsrelation zunächst eines deterministischen Zellularraums Z gegeben. Hier kann man Σ als lokale Übergangsfunktion $\sigma: Q^m \rightarrow Q$ auffassen. Die korrespondierende globale Übergangsfunktion τ für Konfigurationen erhält man auf die folgende kanonische Weise.

¹Ein solcher Kalkül wird im folgenden als Simultankalkül bezeichnet.

Mit C sei die Menge der Konfigurationen in Z bezeichnet; $c \in C$ ist dargestellt durch

$$c: \begin{cases} Z^n \rightarrow Q \\ \alpha \mapsto q_\alpha \end{cases}$$

Aus N erhält man die Nachbarschaftsfunktion g , definiert durch

$$g: \begin{cases} Z^n \rightarrow (Z^n)^m \\ \alpha \mapsto (\alpha + \delta_1, \dots, \alpha + \delta_m) \end{cases}$$

Die Nachbarschaftszustandsfunktion zu g , $h^{(g)}$, ist wie folgt definiert:

$$h^{(g)}: \begin{cases} C \times Z^n \rightarrow Q^m \\ (c, \alpha) \mapsto (c(\alpha + \delta_1), \dots, c(\alpha + \delta_m)) \end{cases}$$

Dann ist die globale Übergangsfunktion τ definiert durch

$$\tau: \begin{cases} C \rightarrow C \\ c \mapsto c' \end{cases}$$

wobei $c'(\alpha) := \sigma(h^{(g)}(c, \alpha))$ f. j. $\alpha \in Z^n$. $\tau(c)$ heißt Nachfolgekonfiguration oder (zeitlicher) Nachfolger von c .

Im Fall indeterminierter lokaler Regeln induziert die Relation Σ eine globale Übergangsrelation T , definiert durch

$$T(c, c') : \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in Z^n \Rightarrow (h^{(g)}(c, \alpha), c'(\alpha)) \in \Sigma)$$

Als Nachfolger einer Konfiguration c kann dann jede Konfiguration c' , die zu c in der Relation T steht, auftreten.

Der unter Vorgabe der Metaregel simultaner Regelanwendung erhaltene globale Substitutionsprozeß operiert also auf verallgemeinerten Worten in der Feldermenge Z^n und ist beschrieben durch die globale Übergangsrelation. Gleichwohl ist der Kalkül durch Angabe von Zustandsalphabet, lokalen Übergangsregeln und Metaregel vollständig beschrieben!

Man kann nun von dem Prinzip simultaner Regelanwendung abgehen, indem man den globalen Prozeß in der Weise einschränkt, daß in jedem Schritt statt sämtlicher nur eine Teilmenge S_k der möglichen lokalen Ersetzungen durchgeführt wird, im ersten etwa S_1 , im zweiten S_2 usw. Dies betrifft also eine Änderung der Metaregel.

Um zu einem in bezug auf verallgemeinerte Worte wohldefinierten Substitutionsprozeß zu gelangen, ist hier die Nachbarschaftszustandsfunktion in jedem

einzelnen Schritt genau für die Zellen, an denen in diesem Schritt substituiert werden soll, vorzunehmen; dann bleibt die ursprüngliche Gestalt der Basisregeln erhalten. Falls durch entsprechende Vorgabe der Teilmengen S_k in keinem Fall Überlappungen von Regelprämissen auftreten, kann man stattdessen auch von vornherein Regeln zur Ersetzung von Teilworten von der Gestalt der gegebenen Nachbarschaft durch Teilworte gleicher Gestalt formulieren. Im Fall der zweidimensionalen von-Neumannschen Nachbarschaft ergibt sich dann die folgende Regelgestalt:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & d & \\ \hline c & a & e \\ \hline & b & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & d' & \\ \hline c & a & e \\ \hline & b' & \\ \hline \end{array}$$

Dies ist insbesondere dann möglich, wenn man die Anzahl der pro Schritt vorgenommenen lokalen Substitutionen auf eine einzige reduziert.

Es ergeben sich nun zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten zur Modifikation des ursprünglichen zellularen Kalküls:

1. Entweder wird bei zwei überlappenden Teilworten von der Gestalt der Regelprämissen, deren eines in einem ausgeführten Schritt bereits ersetzt ist, in einem späteren Schritt für das zweite die gegenüber dem Fall simultaner Ersetzung i.a. (wegen unterschiedlicher Prämissen) abweichende Regel angewendet. In diesem Fall erhält man bei sonst unveränderter Vorgabe von Alphabet und Basisregeln einen völlig anderen Kalkül.
2. Oder es wird auf eine noch anzugebende Weise dafür gesorgt, daß dort, wo von zwei überlappenden Teilworten der Gestalt der Regelprämissen zunächst nur eins ersetzt wird, bei der Substitution des zweiten die vor der Substitution des ersten geltende Prämisse eingesetzt wird. Dies ist etwa dann erforderlich, wenn man einen Kalkül erhalten will, der "das gleiche leistet" wie ein gegebener simultaner Kalkül, das soll heißen: einer beliebigen Konfiguration c , die im simultanen Kalkül den unmittelbaren, d.h. in einem globalen Substitutionsschritt erzeugten Nachfolger c' hat, den (bis auf eine Kodierung) gleichen, wenn auch nicht unmittelbaren Nachfolger zuordnet.

Aus bestimmten Gründen, die im dritten Abschnitt dargestellt werden, ist man daran interessiert, einen Typ von Zellularräumen zu erhalten, die ohne die Voraussetzung globaler Synchronität zu gleichen Leistungen befähigt sind wie (global-)synchrone Zellularräume. Ein möglicher Ansatzpunkt ist es, von dem Prinzip simultaner Regelanwendung abzugehen. In dieser Richtung ist, etwa seit

dem Jahr 1974, eine Reihe von Arbeiten erschienen, von denen die grundlegenden hier kurz diskutiert werden sollen.

Die erste der beiden obigen Möglichkeiten verfolgend, gibt Priese in [PRI1] Kalküle mit der Metaregel: 'eine lokale Ersetzung pro Schritt an einer beliebigen Stelle' an, die - in bezug auf die Regelanwendung - asynchrone Zellularräume darstellen, und zeigt, daß in solchen Kalkülen universelle Computer¹ mit der Fähigkeit zur Selbstreproduktion² existieren, bei erstaunlich einfachen Basisregeln.

Unabhängig davon hat etwa zur gleichen Zeit Nakamura [NAK] einen asynchronen Zellularautomaten, ebenfalls mit Fähigkeit universeller Berechenbarkeit³ entwickelt. In der gleichen Arbeit beschreibt er eine Methode zur Überführung von synchronen in asynchrone Zellularräume, die der Alternative unter 2. entspricht, unter Verwendung eines "lokalen Synchronisationsverfahrens". Die unter 2. implizit verlangte "Aufbewahrung" von Regelprämissen in der Automatenstruktur gelingt dadurch, daß das Zustandsalphabet Q eines synchronen Zellularraums ersetzt wird durch $Q \times Q \times \{0, 1, 2\}$ für einen entsprechenden asynchronen. Ein Zustand des neuen Zellularraums repräsentiert jetzt gleichzeitig den als tatsächlich eingenommen anzusehenden Zellzustand, ferner den unmittelbar vorhergehenden sowie einen "Merker" für den augenblicklichen Stand innerhalb einer lokalen Synchronisation; die Übergangsregeln werden entsprechend modifiziert. Das bedeutet allerdings, daß z.B. für einen asynchronen Zellularraum, der den Zellularraum von Codd [COD] simuliert⁴, statt 8 nunmehr 192 (= $8 \cdot 8 \cdot 3$) Zellzustände benötigt werden!

Golze gibt in [GOL3] ein Verfahren dafür an, wie n -dimensionale synchrone Zellularräume durch $(n+1)$ -dimensionale asynchrone zu simulieren⁴ sind. Dort wird bei in beliebiger Abfolge stattfindenden lokalen Substitutionen der neue Buchstabe (Zustand) eines Feldes (einer Zelle) nicht ins gleiche Feld, sondern in ein neues aus einer Menge von Feldern (Zellen), die sich in der nächsthöheren Dimension erstreckt, geschrieben. Der alte Buchstabe im alten Feld

¹ Gemeint ist die Fähigkeit zur Berechnung einer jeden berechenbaren Funktion durch einen Zellularautomaten.

² Hierauf wurde im 1. Abschnitt eingegangen.

³ Selbstverständlich muß in allen Fällen, die hier zitiert sind, der Berechenbarkeitsbegriff neu gefaßt werden.

⁴ Auf die Angabe eines Simulationsbegriffs verzichten wir hier; siehe [GOL3].

steht weiter zur Verfügung, so daß bei Überschneidungen von Regelprämissen die Prämissen bereits ausgeführter Regelanwendungen erhalten bleiben; in dieser Beziehung wird auch hier die zweite der obigen Möglichkeiten verfolgt.

Zu Beginn dieses Abschnitts wurde die Zweigesichtigkeit des Begriffs "Zellularraum" angesprochen: einerseits Kalkül, andererseits Polyautomat; beide Sachverhalte sind nun präzisiert worden. Dem ursprünglichen (synchronen) Zellularraumkonzept entspricht dabei auf der einen Seite gerade ein simultaner Substitutionskalkül, auf der anderen ein Polyautomat, dessen Zellen durch einen globalen Takt synchron schalten (vgl. S.14). Der Zusammenhang zwischen beidem besteht in der Vorstellung, daß dieser Simultan-kalkül von dem Polyautomaten gerechnet oder ausgeführt wird - ähnlich wie etwa ein Turing-Programm von einer Turing-Maschine ausgeführt wird, vgl. dazu [MAL, S.188ff] - in einer Weise, die Richardson (zitiert in [MER, S.5]) als "sehr effektiv" bezeichnet:

Die simultan vorzunehmenden lokalen Substitutionen werden nämlich durch die synchron schaltenden Automatenzellen vollständig `p a r a l l e l` ausgeführt. (Paralleles Rechnen wird als eine der grundlegenden Eigenschaften von Zellularautomaten angesehen, vgl. etwa [GOL1, S.58]). Diese Möglichkeit besteht bei Zellularautomaten insofern, als die Abfrage der lokalen Übergangsregeln sowie die Ausführung der lokalen Übergänge nicht an speziellen zentralen Stellen erfolgen, wie etwa bei einem herkömmlichen Computer mit hierarchischem Aufbau im Speicher bzw. Prozessor, sondern nach Voraussetzung direkt in jeder einzelnen Zelle vorgenommen werden.

Oben sind wir bereits eingegangen auf nicht-simultane Substitutionskalküle, auf denen die verschiedenen angesprochenen Typen "asynchroner Zellularräume" basieren. Asynchrone Zellularräume wurden entwickelt aufgrund bestimmter Einwände gegen eine Voraussetzung globaler Synchronität, die anfangs des folgenden dritten Abschnitts noch diskutiert werden.

Eine solche Voraussetzung wird im Ansatz von Priese dadurch vermieden, daß jeweils nur eine lokale Substitution in einem Schritt vorgenommen wird, wobei die Reihenfolge der Schritte durch die Anwendbarkeit der Kalkülregeln bestimmt und sonst beliebig ist; das so erhaltene asynchrone zellulare Konzept ist allerdings ein rein sequentielles.

Im diskutierten Ansatz von Nakamura erfolgt die (im Vergleich zum Synchronfall größere) Gesamtheit der lokalen Substitutionen parallel, jedoch unabhängig voneinander in dem Sinne, daß es keinen globalen Takt gibt; einen parallelen Prozeß (engl.: "concurrent operation") stellt dies insofern dar, als die Zustandsübergänge hier möglicherweise aber nicht notwendig gleichzeitig eintretende Ereignisse sind (falls nicht gleichzeitig, ist die zeitliche Reihenfolge indeterminiert), was bedeutet, daß für die Ausführung durch einen Polyautomaten jeder Zelle notwendig eine eigene Schaltlogik (vgl. S. 11f) zur Verfügung stehen muß. Der Zustandsübergang jeder einzelnen Zelle kann erfolgen, sobald eine bestimmte Konstellation der Merker-Zustände in der betreffenden Nachbarschaft eingetreten ist.

Im Ansatz von Golze erfolgen die lokalen Substitutionen untereinander völlig unabhängig und im obigen Sinne parallel. Dort werden Zellen mit gleichzeitig stattfindenden Zustandsübergängen in sog. Schaltmengen ("switch sets") zusammengefaßt und asynchrones globales Verhalten durch das Vorliegen von Schaltmengen, die echte Teilmengen der gesamten Zellmenge sind, beschrieben (vgl. die Mengen S_k auf S. 19 unten). Hierdurch wird auch im asynchronen Fall eine Beschreibung des globalen Substitutionsprozesses durch eine globale Schaltrelation ("switch relation") möglich. Das Konzept ermöglicht ferner, an den entlang der $(n+1)$ -ten Koordinatenachse gelegenen Hyperebenen des $(n+1)$ -dimensionalen simulierenden asynchronen Raumes, soweit diese nicht mehr im Bereich der sog. Schaltfront liegen, die Folge von Globalzuständen des simulierten n -dimensionalen Raumes als "synchrone Konfigurationen" (Golze) abzulesen.

Zwei weitere Arbeiten, die sich speziell auf den eindimensionalen Fall beziehen, sollen hier noch angesprochen werden:

In [YAN] wird ein Ansatz für endlich berandete¹ eindimensionale asynchrone Zellularräume gegeben; die lokalen Substitutionen erfolgen dort völlig unabhängig voneinander, wobei gemäß der ersten Möglichkeit von S. 20 verfahren wird. Für diesen Fall ist es möglich, den globalen Substitutionsprozeß durch eine rekursive globale Übergangsrelation zu beschreiben, deren Eigenschaften dort im weiteren untersucht werden.

¹ ein im Hinblick auf Realisierungen häufiger untersuchter Spezialfall; näheres siehe in [SMI 3].

In [LIP] wird ein allgemeineres Modell zur Untersuchung von eindimensionalen asynchronen parallelen Systemen (z.B. entsprechender Zellularautomaten) mit Hilfe von sog. asynchronen Grammatiken vorgestellt, das ermöglicht festzustellen, wann asynchrone Berechnungen solcher Systeme zum gleichen Resultat wie synchrone Berechnungen führen. Es wird auf ausführende Automatenzellen bezug genommen, für deren Schaltzeiten die Existenz unterer und oberer Schranken vorausgesetzt wird (eine solche Voraussetzung werden wir in Abschnitt 3.1 einführen): Statt spontanen Schaltens können diese Schaltvorgänge eine endliche Zeit beanspruchen. Diese Annahmen werden "kalkülmäßig" im Begriff der asynchronen Grammatik¹ berücksichtigt:

Eine in einer "synchrone" Grammatik einschrittige Ableitung, bei der auch mehrere Regeln simultan angewendet werden dürfen, kann sich in einer entsprechenden asynchronen Grammatik in eine Anzahl von bis zu $D+1$ Einzelschritten aufspalten. Dabei können an einzelnen Stellen bis zu D Leerlaufschritte auftreten, jedoch müssen spätestens nach $D+1$ Schritten alle Buchstabenersetzungen des im Synchronfall einen Ableitungsschritts stattgefunden haben. Eine derartige asynchrone Berechnung führt also (bei maximal $(D+1)$ -facher Schrittzahl) zum gleichen Resultat wie eine synchrone (mit $D = 0$ also); dieser Ansatz ist dabei der ersten Möglichkeit von S. 20 unterzuordnen: Die Unabhängigkeit des Resultats einer asynchronen Berechnung von der Reihenfolge der Einzelschritte wird durch eine Church-Rosser-Eigenschaft (vergleichbar der Church-Rosser-Eigenschaft bei Reduktionen im λ -Kalkül; siehe etwa [HIN]) der asynchronen Grammatik erreicht. Eine Voraussetzung dafür ist jedoch, daß in den Einzelschritten einer asynchronen Berechnung nur jeweils ein Buchstabe ersetzt wird ("single change"), also völlig seriell gearbeitet wird. Da eine Ableitung in den betrachteten Grammatiken die endliche Wortlänge erhalten muß, können auch in diesem Konzept nur endlich berandete eindimensionale Zellularräume beschrieben werden.

Für den allgemeinen (n -dimensionalen unendlichen) Fall stellen die vorher diskutierten Ansätze unseres Wissens die bisher einzigen für asynchrone Zellularräume dar. Die Ergebnisse der Überlegungen dieses 2. Abschnitts sind in den folgenden drei Aussagen zusammengefaßt:

¹Eine Grammatik ist als spezieller Substitutionskalkül aufzufassen.

- 2.1 In dem Begriff "Zellularraum" vereinen sich zwei zu unterscheidende Konzepte:
- a) ein spezieller Substitutionskalkül,
 - b) ein spezieller Polyautomat, der diesen Kalkül ausführen kann.
- 2.2 Die verschiedenen diskutierten Ansätze für asynchrone Zellularräume beruhen sämtlich auf Abänderungen der durch synchrone Zellularräume gegebenen Simultankalküle.
- 2.3 Diese Kalküländerungen bedingen wiederum Modifikationen der mit den Kalkülen korrespondierenden Polyautomaten, und zwar in bezug auf
- a) die globale Taktung der Automatenzellen (als eigentlicher Anlaß zur Entwicklung asynchroner Zellularräume),
 - b) die durch den Kalkül vorgegebene Zellnachbarschaft, Zustandsmenge, lokale Übergangsrelation und in einem Fall die Dimension des Polyautomaten.

Die unter 2.3a) genannte Modifikation der Polyautomaten ist bei den obigen Ansätzen in der folgenden Weise vorgenommen worden: Anstelle getakteten Schaltens der Zellen wird in allen Fällen das (asynchrone) Schalten der Zellen als nicht-deterministischer Prozeß betrachtet, d.h. es wird angenommen, daß Zustandsübergänge von Zellen, wenn und wann immer sie stattfinden, korrekt gemäß der Regeln des modifizierten Kalküls ausgeführt werden. Dies bedeutet: Die Ergebnisse der diskutierten Arbeiten gelten unter den schwächsten überhaupt denkbaren Voraussetzungen über das Schalten von Zellen!

Das wesentliche Ergebnis des folgenden Abschnitts wird sein, daß, bei Voraussetzung der Existenz unterer und oberer Schranken für die Schaltzeiten von Zellen, unter unveränderter Beibehaltung der ursprünglichen, durch synchrone Zellularräume gegebenen Simultankalküle ein allein in bezug auf 2.3a) modifiziertes Konzept von Polyautomaten angegeben werden kann, welche die Simultankalküle ohne Voraussetzung globaler Synchronität in einem noch zu beschreibenden Umfang ausführen.

3. LOKAL-SYNCHRONE ZELLULARAUTOMATEN

3.1 Vorüberlegungen

Im vorigen Abschnitt wurde deutlich gemacht, daß durch das ursprüngliche Konzept des Zellularraums, wie es von John von Neumann eingeführt und in vielen weiteren Arbeiten untersucht wurde, ein spezieller Substitutionskalkül gegeben ist, dessen Metaregel vorschreibt, daß in jedem Ableitungsschritt sämtliche lokalen Substitutionen simultan vorzunehmen sind; dabei besteht die Vorstellung, daß dieser Kalkül von einem passenden Polyautomaten ausgeführt werden kann.

Um Schwierigkeiten bei dieser parallelen Ausführung der lokalen Übergänge durch den Polyautomaten von vornherein auszuschließen, setzte man die Existenz eines Automatenystems voraus, bei dem durch Taktsignale an allen Automatenzellen gleichzeitig die lokalen Übergänge initiiert werden, die sämtlich vollzogen sein müssen, bevor die nächste Eingabe eines Taktes erfolgt. Diese Vorstellung führte zu einem global-synchronen Automatenkonzept, einem sehr leistungsfähigen Konzept, denn der mit einem einzelnen Takt korrespondierende Ableitungsschritt im Simultankalkül betrifft im idealen Fall unendlich viele Substitutionen.

Dieser Gesichtspunkt globaler Synchronität ist nun angreifbar, wenn man bestimmte physikalische Annahmen in die Überlegungen einbezieht. Etwa ist die Vorstellung, man könne beliebig viele mit einer zentralen Uhr verbundene Automatenzellen¹ durch Taktsignale zum gleichzeitigen Schalten veranlassen, nicht haltbar, wenn man annimmt, daß die Taktsignale nicht spontan an den Zellen auftreten, sondern einer von der räumlichen Entfernung abhängenden, nicht beliebig verkürzbaren Verzögerung unterliegen, ebensowenig die Vorstellung, man könne jede Zelle mit einer absolut genauen Taktuhr ausstatten, die man zu (zwischen je zwei Zellen) definierten Zeitpunkten in Gang setzt und dann unabhängig laufen läßt. Ohne weitere Diskussion wollen wir hier entsprechende Postulate einführen:

(P1) Es gibt eine obere Grenze für die Geschwindigkeit von Signalen.

(P2) Es gibt keine Uhren absoluter Genauigkeit.

¹ (ohne Kenntnis ihrer maximalen Entfernung und Anzahl)

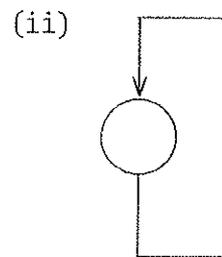
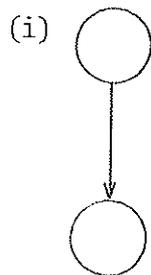
(P3) Der Gleichlauf von Uhren kann nur durch Kommunikation herbeigeführt werden.

(Derartige Betrachtungen haben C.A.Petri bereits 1962 zu einem vielbeachteten Ansatz für eine Theorie der "Kommunikation mit Automaten" geführt, bei der an alle Darstellungsmittel die strengsten Forderungen der physikalischen Konstruierbarkeit gestellt werden [PET].)

Aus (P3) folgt mit (P2) sofort:

(P3') Es gibt keinen absoluten Gleichlauf von Uhren.

Denn angenommen, zwei nach (P3) miteinander in Verbindung stehende Uhren (i) könnten absolut gleichlaufen, dann müßte die dazu notwendige Reaktion der einen auf die Signale der anderen mit absoluter Genauigkeit erfolgen,



dann müßte - in sich rückgekoppelt (ii) - die eine auf ihre eigenen Signale mit absoluter Genauigkeit reagieren und folglich eine absolut genaue Uhr darstellen, was im Widerspruch zu (P2) steht.

Übertragen bedeutet dies: Auch für räumlich nahe beieinander liegende Automatenzellen ist ein absolut gleichzeitiges Schalten unmöglich. Wir werden deshalb eine Definition geben, die eine synchrone Arbeitsweise von Automatenzellen hinreichend charakterisiert, ohne im Widerspruch zu einem der Postulate zu stehen.

Wir denken uns eine Taktuhr gegeben, die zu bestimmten Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots innerhalb einer kontinuierlichen Zeit t Taktsignale T_0, T_1, T_2, \dots an die Automatenzellen abgibt. Den Moment, wo der Zustandsübergang einer Automatenzelle durch Erhalt eines Taktsignals (T_k) initiiert wird, bezeichnen wir im folgenden als (k-ten) Taktzeitpunkt der Zelle; als Bezugszeit dient dabei immer die kontinuierliche Zeit t der Taktuhr.

Definition 1.

Eine endliche Menge von getakteten Automatenzellen arbeitet synchron, wenn für ein Taktsignal T_k die k -ten Taktzeitpunkte sämtlicher Automatenzellen sich paarweise höchstens um einen solchen Betrag ϵ unterscheiden, daß

- (i) die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge davon nicht beeinträchtigt wird,
- (ii) nach einer beliebigen Zahl von Takten ϵ nicht überschritten wird.

Das Ausführen lokaler Übergänge, kurz: Schalten der Automatenzellen erfolgt bei synchroner Arbeitsweise also im (P3') genügenden Gleichlauf (Takt), der entsprechend (P3) durch Kommunikation aller Zellen mit einer Taktuhr herbeigeführt wird. Durch die Bedingung (ii) ist gesichert, daß die durch ϵ bestimmte Qualität des Gleichlaufs der Zellen während der gesamten Laufdauer der Taktuhr beibehalten wird.

Zellularautomaten stellen nach ihrer idealen Auffassung unendliche Automaten-systeme dar. Ohne die Frage zu erörtern, ob im physikalischen Raum überhaupt eine unendliche Menge von Zellen existieren kann, folgert man aus (P1)...(P3) sofort, daß eine solche nicht synchronisierbar wäre. Deshalb bezieht sich die obige Definition ausdrücklich auf endliche Mengen und tritt daher mit keinem der Postulate in Konflikt.

Unter dem Aspekt der physikalischen Realisierung liegt es nun nahe, einen Zellularautomaten als ein zu jedem Zeitpunkt endliches, aber wachsendes: potentiell unendliches Automaten-system aufzufassen. Hier geht man immer von Zellularautomaten mit einem Ruhezustand q_0 und einer endlichen Anfangskonfiguration aus. Unter der globalen Transformation, gleichgültig ob es sich um eine determinierte (d.h. einer rechts-eindeutigen globalen Übergangsrelation genügende) handelt oder nicht, können dann als Nachfolger stets nur endliche Konfigurationen auftreten, denn wegen der Bedingung

$$(q_0, \dots, q_0, q') \in \Sigma \Rightarrow q' = q_0$$

(vgl. S.13) ist die Klasse der endlichen Konfigurationen gegenüber der globalen Transformation abgeschlossen. Die Anzahl nicht-ruhiger Zellen kann jedoch wachsen.

Im folgenden bezeichnen wir nun als Träger (englisch: support) einer Konfiguration c die Menge nicht-ruhiger Zellen

$$\text{supp}(c) := \{ \alpha \in \mathbb{Z}^n \mid c(\alpha) \neq q_0 \}$$

und als erweiterte Nachbarschaft einer endlichen Teilmenge S von \mathbb{Z}^n die Menge

$$\bar{N}(S) := \bigcup_{\alpha \in S} N(\alpha)$$

wobei $N(\alpha) = \{ \alpha + \delta_1, \dots, \alpha + \delta_m \}$ die Zellnachbarschaft von α ist¹ (vgl. S.18).

Man könnte nun zunächst einen endlichen Ausschnitt des Zellularautomaten realisieren, der mindestens die erweiterte Nachbarschaft des Trägers der Anfangskonfiguration umfaßt, und davon ausgehen, daß man in einem Erweiterungsschritt rechtzeitig, bevor die Randzellen nicht-ruhige Zustände erhalten, außen neue Zellen (im Ruhezustand) anfügen kann. Dies entspricht der Vorstellung eines potentiell-unendlichen Turing-Bandes [MAL,S.190]. Aus Gründen der tatsächlichen, von der Anzahl der bisher realisierten Zellen unabhängigen Konstruierbarkeit ist hier zu fordern:

3.1.0 Jeder Erweiterungsschritt muß ein lokaler Prozeß sein, der unabhängig von der Größe des realisierten Bereichs ausgeführt werden kann.

Die Synchronisierung einer endlichen Anzahl von an festen Orten angeordneten Zellen steht nicht im Widerspruch zu einem der obigen Postulate: Unter Bezugnahme auf die längste auftretende Laufzeit eines Taktsignals läßt sich ein geeignetes Synchronisationsschema aufbauen. In Hinsicht auf eine bei wachsender Anzahl nicht-ruhiger Zellen erforderliche Hinzunahme neuer Zellen zu der Ausgangsmenge wäre jedoch ein solches Synchronisationsschema nicht unbeschränkt erweiterungsfähig, da nach (P1) auch die längste mögliche Laufzeit von Taktsignalen zunehmen müßte. Es würde an einem bestimmten Punkt erforderlich werden, ein völlig neues, auf die (jetzt größere) Gesamtanzahl der Zellen bezugnehmendes Synchronisationsschema zu erzeugen - mit einer aufgrund längerer Laufzeiten von Taktsignalen niedrigeren Taktfrequenz. Das bedeutet: Die Synchronisierung einer wachsenden Anzahl von Automatenzellen ist ein globaler Prozeß und kann nicht 3.1.0 erfüllen.

Unter dieser strengen Endlichkeitsforderung 3.1.0 stellt also die Synchronisierung eines wachsenden Automaten eine prinzipielle Unmöglichkeit dar.

¹ Da Verwechslungen ausgeschlossen sind, schreiben wir statt " \bar{N} " auch " N ".

Auf diesen oder ähnlichen Überlegungen beruhen die im 2. Abschnitt erwähnten Einwände gegen synchrone Zellularräume. Bei den dort diskutierten Ansätzen für asynchrone Zellularräume treten derartige Schwierigkeiten aufgrund des Verzichts auf Simultankalküle als Grundlage für Zellularräume nicht auf. Dafür muß jedoch in Kauf genommen werden, daß etwa die in einem Schritt ausgeführten Zellzustandsübergänge unter Umständen bis auf einen Zustandsübergang pro Schritt reduziert werden [PRI1]. Oder es müssen sehr viele weitere Zellzustände [NAK] oder eine zusätzliche Dimension [GOL3] eingeführt werden. In allen Fällen erhöht sich von vornherein der Aufwand - an Zellen oder an Rechenschritten oder an benötigten Zellzuständen.

Die am Schluß des vorigen Abschnitts formulierten Ergebnisse haben deutlich gemacht, daß diese Ansätze sämtlich den einen Zellularraum beschreibenden Kalkül betreffen.

Der Kalkül kann aber nicht von den obigen Einwänden betroffen sein, da er nicht physikalischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt! Sondern diese Einwände richten sich gegen das ausführende physikalische Instrument des Simultankalküls, also den synchronen Polyautomaten.

Es liegt daher nahe, zur Beseitigung dieser Einwände direkt am Automatenkonzept anzusetzen und nicht den mit beträchtlichem Aufwand verbundenen Umweg über den Kalkül (der auch eine Modifizierung des Automaten-systems bedingt) zu wählen. Dazu soll die Beziehung zwischen Simultankalkül und synchronem Polyautomaten, ohne Einschränkung durch physikalische Annahmen wie oben, genauer analysiert werden.

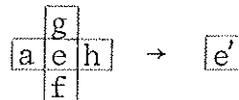
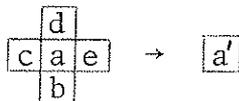
Es besteht der folgende Sachverhalt. Durch die Eingabe eines einzelnen Taktsignals an den Polyautomaten wird ein globaler Übergang initiiert, d.h. es wird gerade ein Ableitungsschritt im Simultankalkül zur Ausführung gebracht. Dadurch ist insbesondere die Möglichkeit gegeben, anhand der Anzahl der von der Taktuhr ausgesandten Taktsignale die Anzahl der vom Polyautomaten zur Ausführung gebrachten Kalkülableitungsschritte zu zählen. Im Fall einer solchen Korrespondenz zwischen einzel-nem Ableitungsschritt im Kalkül und ein-zel-nem globalen Übergang des Polyautomaten wollen wir von jetzt an von einer adäquaten Ausführung des Kalküls bzw. umgekehrt von einer adäquaten Beschreibung des Polyautomaten sprechen. Es gilt offenbar:

3.1.1 Ein synchroner Zellularautomat kann nur durch einen Simultankalkül adäquat beschrieben werden.

Die Metaregel "simultane Anwendung der Basisregeln" besagte dabei, daß ein Ableitungsschritt durch Anwendung sämtlicher Basisregeln auf einmal gegeben ist, was insbesondere Konsequenzen für das Verfahren bei Überschneidungen von Regelprämissen ergab (vgl. S.18): Das Zustandssymbol einer Zelle vor einer Regelanwendung muß auch Prämisse für die Regelanwendungen an jeder ihrer Nachbarzellen sein und umgekehrt. So muß beispielsweise im Fall, daß - wie nachstehend skizziert - ein Zellzustand a (oder e) Prämissen-



symbol für zwei verschiedene Regelanwendungen



ist, bei der Regelausführung (durch einen lokalen Übergang) in beiden Fällen ein- und dasselbe a (bzw. e) auftreten (und nicht etwa schon a' oder e').

In der ursprünglichen Interpretation ging man davon aus, daß dieser Simultaneität¹ bei der Regelanwendung durch die globale Synchronität² des ausführenden Polyautomaten Rechnung getragen wird, daß also alle lokalen Übergänge gleichzeitig erfolgen. Mit Ausnahme der durch \rightarrow bzw. \vdash gegebenen Beziehung "vorher - nachher" bei einer Regelanwendung bzw. einem Ableitungsschritt ist aber ein irgendwie gearteter Zeitbegriff nicht Bestandteil des Kalkülbegriffs! Es führt jedoch die Annahme des gleichzeitigen Auftretens sämtlicher lokalen Übergänge offenbar zu der Folgerung:

3.1.2 Ein Simultankalkül kann durch einen synchronen Zellularautomaten adäquat ausgeführt werden.

¹ "simultan" steht hier für: gemeinsam, zugleich (ohne Zeitbezug)

² "synchron" steht hier für: gleichzeitig, zeitgleich, (mit der Frequenz eines Schwingungserzeugers) gleichlaufend

Die Frage ist nun, ob die hinreichende Voraussetzung "synchron" auch notwendig für die adäquate Ausführung eines Simultankalküls durch einen Zellularautomaten ist. Diese Frage wird negativ beantwortet werden: Es genügt die schwächere Voraussetzung einer noch zu erläuternden "lokal-synchronen" Arbeitsweise der Automatenzellen. Inwieweit sich die Bedingung lokal-synchroner Arbeitsweise durch einen mit den hier formulierten Postulaten vereinbaren potentiell unendlichen Zellularautomaten, der überdies der Forderung 3.1.0 genügt, erfüllen läßt, wird im Rest des dritten Abschnitts untersucht.

Zunächst stellen wir folgendes fest:

Bei (global-)synchronen Zellularautomaten erfolgt im einzelnen globalen Übergang an jeder Zelle nur eine lokale Verarbeitung von Information: Dabei wird nämlich der Zustand einer Zelle von ihren endlich vielen Nachbarn abgefragt (für deren Nachfolgerberechnung), und von denselben endlich vielen Nachbarn bezieht die Zelle ihre Eingaben, woraus sie ihren Nachfolgezustand berechnet. Da die Zellen Moore-Automaten sind, können Eingaben erst auf dem Umweg über eine Zustandsänderung der Zelle Einfluß auf die Ausgabe nehmen. Diese wird aber erst beim nächsten globalen Übergang von den Nachbarn der Zelle abgefragt, so daß auch die Auswirkung der Informationsverarbeitung einer einzelnen Zelle pro globalem Übergang auf den Bereich einer Zellnachbarschaft beschränkt ist.

Aufgrund dieser Tatsache ist es zumindest für die korrekte Ausführung der Zustandsübergänge jeder einzelnen Zelle nur notwendig, daß je zwei benachbarte Zellen "im Takt" arbeiten, denn der Zustand der einen dient (ggfs. kodifiziert) als Eingabe für die andere und umgekehrt. Dies führt uns zu dem folgenden Begriff lokal-synchroner Arbeitsweise.

Definition 2.

Eine Menge von getakteten Automatenzellen arbeitet lokal-synchron, wenn für ein Taktsignal T_k die k -ten Taktzeitpunkte benachbarter Automatenzellen sich paarweise höchstens um einen solchen Betrag ϵ unterscheiden, daß

- (i) die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge davon nicht beeinträchtigt wird,

- (ii) nach einer beliebigen Zahl von Takten ϵ nicht überschritten wird.

Eine gemäß Definition 1 synchron arbeitende Menge von Automatenzellen arbeitet demnach auch lokal-synchron; umgekehrt kann jedoch in einer lokal-synchron arbeitenden Menge von Zellen die betragsmäßige Differenz der Taktzeitpunkte zweier nicht benachbarter Zellen ϵ überschreiten. Wenn z.B. in einer linear angeordneten Menge von Automatenzellen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ jede Zelle α_{j+1} ihren mit einem Taktsignal T korrespondierenden Taktzeitpunkt um ϵ_{j+1} später hat als ihr linker Nachbar α_j ($j = 0, 1, 2, \dots$), so unterscheiden sich schon die Taktzeitpunkte von α_0 und α_2 um $\epsilon_1 + \epsilon_2$, also möglicherweise um 2ϵ . Somit ist "lokal-synchron" ein tatsächlich schwächerer Begriff als "synchron":

Eine lokal-synchron arbeitende Menge von Automatenzellen kann global durchaus asynchron arbeiten.

Auch Definition 2 führt zu keinem Konflikt mit den Postulaten (P1)...(P3), dabei ist die Voraussetzung einer endlichen Menge von Zellen nicht notwendig: Lokale Synchronität ist eine Forderung, die endlich erfüllbar ist, ohne Bezug auf die Gesamtmenge von Zellen - sie ist somit auch durch unendliche bzw. potentiell unendliche Mengen von Automatenzellen erfüllbar.

Bei lokal-synchroner Arbeitsweise treten an den einzelnen Zellen jeweils die gleichen Folgezellzustände auf (bzw. bei indeterminierten Übergangsregeln: können prinzipiell auftreten) wie bei synchroner Arbeitsweise. Das bedeutet: Gesetzt den Fall, daß alle Zellen eines gegebenen Zellularautomaten Z einen ersten Taktzeitpunkt gehabt und geschaltet haben, aber noch keine Zelle einen zweiten, so würde (bzw. bei indeterminierten Regeln: könnte) nun die gleiche Konfiguration vorliegen wie bei synchroner Arbeitsweise, nämlich das Ergebnis genau eines Ableitungsschritts in dem Z beschreibenden Simultankalkül.

Wir wollen nun das Verhalten von Z bei synchroner und bei lokal-synchroner Arbeitsweise unter Folgen von durch die Taktuhr abgegebenen Taktsignalen vergleichen. Dazu wollen wir zunächst annehmen, daß die Automatenzellen von Z synchron arbeiten in der Weise, daß sie - ungeachtet der Frage, ob möglich oder nicht - auf ein von der Taktuhr abgegebenes Signal spontan und bis auf das durch Definition 1 gegebene ϵ gleichzeitig mit der Initiierung eines Zustandsübergangs reagieren. (Dieser fiktive, mit den obigen Postulaten unvereinbare Fall soll zur Einordnung des Weiteren herangezogen werden.)

Es träfe nun auf einen weiteren Konflikt mit physikalischen Annahmen, würde man voraussetzen, daß der neue Zustand der Zellen auch spontan angenommen wird, da der physikalische Vorgang des Schaltens (von einem Zustand in einen anderen) mit einer Umverteilung von Energie verbunden ist und folglich eine gewisse Dauer s beanspruchen muß, die nicht beliebig verkurzbar ist; als Postulat formuliert:

(P4) Es gibt eine obere Grenze für die Geschwindigkeit von Schaltvorgangen¹.

Mit (P2) folgt nun sofort, daß während einer Folge von Schaltvorgängen der Zeitbedarf eines gegebenen Schaltelements variieren kann: Wäre es nicht so, so könnte man dieses Schaltelement zur Konstruktion einer absolut genauen Uhr verwenden, was im Widerspruch zu (P2) steht. Wir wollen für das Folgende voraussetzen, daß der wegen (P4) nach unten beschränkte Zeitbedarf s für das Schalten von Automatenzellen endlich und nach oben beschränkt ist, wobei wir die größte untere bzw. kleinste obere Schranke mit s_{\min} bzw. s_{\max} bezeichnen, so daß also gelten soll:

$$3.1.3 \quad 0 < s_{\min} \leq s \leq s_{\max} < \infty$$

Betrachten wir nun einen Zellularautomaten Z mit endlicher Anfangskonfiguration c_a und hierbei speziell die endliche Menge M von Zellen der zweifach erweiterten Nachbarschaft des Trägers von c_a : $M = N(N(\text{supp}(c_a)))$; die Anzahl dieser Zellen sei n . Dann läßt sich folgern: Bei spontaner und gemäß Definition 1 synchroner Arbeitsweise würden, nach der Abgabe eines ersten Taktsignals durch die Taktuhr zum Zeitpunkt t_0 , alle n Zellen zur Zeit $t_0 + \epsilon$ (verglichen mit der Taktuhrzeit) ihren ersten Taktzeitpunkt gehabt und zur Zeit $t_0 + \epsilon + s_{\max}$ ihren Zustandsübergang vollzogen haben. Ohne eine undefinierte Situation zu erzeugen, könnte also zu einem Zeitpunkt $t_1 > t_0 + \epsilon + s_{\max}$ ein zweites Taktsignal von der Taktuhr abgegeben werden, d.h. in diesem fiktiven Fall spontaner Ausführung ist der zeitliche Abstand für Taktsignale durch

$$3.1.4 \quad \epsilon + s_{\max}$$

nach unten beschränkt.

¹Die unter dem bestehenden physikalischen Weltbild denkbare kürzeste Schaltzeit eines Schaltelements endlicher Größe mit mindestens zwei Zuständen wird in [SIM] unter Berücksichtigung von Heisenbergscher Unschärfe, Lichtgeschwindigkeit und Schwarzschildradius mit $\sim 5,6 \cdot 10^{-33}$ sec angegeben.

Wenn bei gemäß Definition 2 lokal-synchroner Arbeitsweise dieser n Zellen der früheste mit einem ersten Taktsignal korrespondierende Taktzeitpunkt einer Zelle sich nun zum Zeitpunkt t_0 der Taktuhr ereignet, so kann der späteste nicht nach dem Zeitpunkt $t_0 + (n-1)\epsilon$ auftreten; der Extremfall liegt z.B. bei dem auf S.33 skizzierten Fall einer linear angeordneten Menge von Zellen vor. D.h. alle n Zellen hätten zur Zeit $t_0 + (n-1)\epsilon + s_{\max}$ den Zustandsübergang vollzogen, und: zu diesem Zeitpunkt läge das gleiche Ergebnis wie im Synchronfall vor, nämlich das (den Träger von c_a betreffende¹) Ergebnis eines Ableitungsschritts im Simultankalkül. Zu einem Zeitpunkt $t_1 > t_0 + (n-1)\epsilon + s_{\max}$ könnte die Taktuhr ein zweites Taktsignal abgeben, d.h. im lokal-synchronen Fall ergibt diese Betrachtung eine Beschränkung des zeitlichen Mindestabstands für Taktsignale durch

$$3.1.5 \quad (n-1)\epsilon + s_{\max}$$

Dieses von der Anzahl n der anfangs betrachteten Zellen abhängige Ergebnis gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die in den einzelnen Ableitungsschritten erzeugten Nachfolger von c_a in bezug auf ihre Träger den Bereich von $\text{supp}(c_a)$ nicht überschreiten. Es kann nun die Anzahl nicht-ruhiger Zellen eines Zellularautomaten bei jedem Takt dadurch wachsen, daß in der Nachbarschaft nicht-ruhiger Zellen bisher ruhige Zellen "erregt" werden. War beim ersten Takt die Menge M von Zellen der zweifach erweiterten Nachbarschaft des Trägers von c_a zu betrachten²:

$$M = N(N(\text{supp}(c_a)))$$

so ist es beim zweiten: $M' = N(M)$

beim dritten Takt: $M'' = N(M')$

usw., dabei gilt: $n = \text{card } M < \text{card } M' < \text{card } M'' < \dots$

d.h. mit wachsender Taktzahl müßte die zeitliche Distanz der Taktsignale immer mehr zunehmen bzw. die Taktfrequenz abnehmen, so daß lokal-synchrone Arbeitsweise von Zellularautomaten auf eine ähnliche prinzipielle Beschränkung zu führen scheint wie die synchrone.

¹Eine endliche Konfiguration ist durch Einschränkung auf den Träger bereits vollständig definiert.

²Die hinzugenommenen ruhigen Zellen müssen bei der Anwendung der lokalen Regeln im Randbereich des Trägers in Betracht gezogen werden.

Bisher wurde noch nicht angegeben, auf welchem Wege lokal-synchrone Arbeitsweise von Zellularautomaten herbeizuführen ist - es wurde jeweils nur eine auf irgendeine Art lokal-synchron arbeitende Menge von Zellen betrachtet. Unter dieser Voraussetzung konnte nichts ausgesagt werden darüber, wann eine bestimmte Zelle der Menge ihren Zustandsübergang vollzogen hat, sondern eine solche Aussage war nur über die gesamte Zellmenge möglich, und nur im Fall einer bekannten endlichen Anzahl von Zellen. Das Abwarten aller Zustandsübergänge eines k -ten Taktes vor Abgabe eines $(k+1)$ -ten bedeutet jedoch in gewisser Hinsicht globale Synchronisation, deren Unmöglichkeit bei beliebig wachsenden Zellmengen hier offenbar wird.

Es stellt sich also die Frage, ob sich bei einer stärkeren Ausnutzung der endlich erfüllbaren Eigenschaft lokaler Synchronität ein entsprechendes Automatenkonzept mit von der Anzahl in Betracht kommender Zellen unabhängiger Taktfrequenz angeben läßt. Dazu wird eine Bezugnahme auf eine bestimmte Abfolge der Taktzeitpunkte an den Automatenzellen erforderlich sein.

Wie in der zu Definition 2 führenden Überlegung verdeutlicht wurde, ist für die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge eines Zellularautomaten die synchrone Arbeitsweise benachbarter Automatenzellen, m.a.W. lokal-synchrone Arbeitsweise des Zellularautomaten hinreichend. In diesem Fall liegt das lokale Ergebnis des k -ten Ableitungsschritts für eine Zelle α in dem Moment vor, wenn α den k -ten Taktzeitpunkt gehabt und geschaltet hat, so daß an α in unmittelbarer Folge des k -ten Schaltens der $(k+1)$ -te Ableitungsschritt lokal zur Ausführung gebracht werden kann - es muß damit nur noch solange gewartet werden, bis auch alle Nachbarzellen von α den k -ten Taktzeitpunkt gehabt und geschaltet haben. Das kann wegen der Voraussetzung lokaler Synchronität aber höchstens um ϵ später sein, so daß insgesamt der zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Taktzeitpunkte an α bei lokal-synchroner Arbeitsweise nur durch

$$3.1.6 \quad s_{\max} + \epsilon$$

nach unten beschränkt ist. Diese Überlegung gilt für jede Zelle einer lokal-synchron arbeitenden Menge von Automatenzellen.

Der Ansatz zu lokal-synchronen Zellularautomaten ist von der folgenden Vorstellung geleitet. Angenommen bei je zwei benachbarten Zellen eines Zellularautomaten sind neben der Verschaltung der Ein- und Ausgänge zur Übertragung

der Nachbarschaftsinformation die Eingänge für Taktsignale miteinander verbunden, so daß auch in bezug auf die Taktübertragung global eine homogene Vernetzung der Zellen zustande kommt. Dann würde es bei einer angenommenen unendlichen Signalgeschwindigkeit ausreichen, an einer ausgezeichneten Zelle, z.B. der Ursprungszelle, die Folge der Taktsignale mit einem gemäß 3.1.4 durch $\epsilon + s_{\max}$ nach unten beschränkten Abstand in dieses "Taktnetz" einzuspeisen, um an allen Zellen ein spontanes und bis auf ϵ gleichzeitiges Schalten auszulösen. Nach (P1) gibt es jedoch keine unendliche Signalgeschwindigkeit.

Betrachten wir nun zunächst eine eindimensionale Zellmenge mit der natürlichen Nachbarschaft. Hier entsteht durch die Vermaschung der Takteingänge eine "Leitung" mit Knoten, den Verbindungsstellen mit den Automatenzellen. An einem festen Knoten, etwa bei der Ursprungszelle α_0 , sollen die Taktsignale eingegeben werden, ein erstes zum Zeitpunkt t_0 , so daß also α_0 zu t_0 den zugehörigen Taktzeitpunkt hat und spätestens zu $t_0 + s_{\max}$ geschaltet hat.

Bei nach (P1) anzunehmender endlicher Signalgeschwindigkeit würde bis zum Eintreffen des Signals an der rechten Nachbarzelle α_1 eine durch den räumlichen Abstand der Zellen gegebene Verzögerung v auftreten, so daß sich der Taktzeitpunkt dementsprechend zur Zeit $t_0 + v$, also etwas später ereignen könnte, an dem rechten Nachbarn α_2 von α_1 wieder etwas später usw., die analoge Überlegung gilt für die jeweils linken Nachbarn. Die summierten im Taktnetz auftretenden Verzögerungen hätten desto spätere Übergänge von Zellen zur Folge, je größer deren räumliche Entfernung von der Ursprungszelle wäre. Die geringen Laufzeitunterschiede der Taktsignale zu benachbarten Zellen, die sich wegen der Homogenität der Taktnetzstruktur durch ein für alle Maschen des Taktnetzes gleiches ϵ beschränken ließen, böten, falls die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge unter diesem ϵ gewährleistet ist, die Möglichkeit für ein lokal-synchrones Arbeiten der Automatenzellen.

Da der - vom Konzept genau gleiche - Abstand je zweier benachbarter Zellen in einem physikalischen Aufbau aufgrund metrischer Beschränkungen jedoch nicht mit absoluter Genauigkeit erreicht werden könnte und ferner die Geschwindigkeit eines Taktsignals unter Umständen von nicht absolut gleichmäßiger Beschaffenheit der übertragenden Leitung abhängen kann, muß ein gewisses räumliches Variieren von v angenommen werden; in Betracht gezogen

werden soll ferner ein etwaiges zeitliches Variieren von v an einzelnen Maschen, das gegeben sein kann durch die nicht absolut gleichmäßig einzuhaltende Gestalt aufeinanderfolgend erzeugter Taktsignale, wodurch unterschiedliche Signalausbreitungsgeschwindigkeiten bedingt sein können.

Neben der wegen (P1) nach unten beschränkten Verzögerung eines Taktsignals zwischen je zwei Maschenpunkten ist auch eine Beschränkung von v nach oben anzunehmen (ein Signal soll zwischen zwei Maschenpunkten nicht beliebig verzögert werden). Ähnlich wie in 3.1.3 (Zeitbedarf s für das Schalten von Automatenzellen) wollen wir auch für die räumlich-zeitliche Varianz von v auf die Existenz einer größten unteren bzw. kleinsten oberen Schranke bezugnehmen und voraussetzen:

$$3.1.7 \quad 0 < v_{\min} \leq v \leq v_{\max} < \infty$$

Falls sich nun durch v_{\max} die Bedingungen von Definition 2 erfüllen lassen, d.h. $v_{\max} \leq \epsilon$ gilt, könnten in der betrachteten eindimensionalen Zellmenge die lokalen Übergänge bei lokal-synchroner Arbeitsweise korrekt ausgeführt werden, wenn die Erfüllung folgender weiterer Bedingungen gewährleistet ist.

3.1.8 Es besteht für jedes k eine eineindeutige Entsprechung zwischen dem k -ten Taktsignal und dem k -ten Taktzeitpunkt an jeder einzelnen Zelle.

Hierfür wäre insbesondere zu sichern:

3.1.9 Ein jedes Taktsignal kann nach beliebig langem zurückgelegtem Wege als solches identifiziert werden, d.h. seine Gestalt bleibt während der ganzen Laufdauer (in Grenzen) erhalten.

3.1.10 Der - bei zeitlicher Varianz von v prinzipiell mögliche - Fall einer Einholung von aufeinanderfolgenden Taktsignalen kann ausgeschlossen werden.

Bei zwei- und höherdimensionalen Zellularautomaten entsteht durch die beschriebene Vermaschung der Takteingänge eine gitterartige Struktur, d.h. daß ein von der Ursprungszelle ausgehendes Taktsignal, wegen der fortgesetzten Verzweigungsmöglichkeit an jeder Zelle, auf mehreren verschiedenen Wegen zur

einzelnen Zelle gelangen kann. In diesem Zusammenhang gewinnt 3.1.8 zusätzliches Gewicht. Ferner muß dann die Möglichkeit, daß ein späteres Signal ein früheres auf einem anderen Wege überholt, was ebenso wie eine Einholung die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge unmöglich machen würde, berücksichtigt werden; es muß gesichert sein:

3.1.10' Eine Überholung von aufeinanderfolgenden Taktsignalen kann nicht auftreten.

Die Gesamtheit dieser Bedingungen wird sich bei einer schlichten Verbindung der Takteingänge durch Leitungen nicht erreichen lassen - allein schon wegen 3.1.9 . Es ist daher notwendig, die Automatenzellen mit einer zusätzlichen Einrichtung zu einer zweckdienlichen Verteilung der Taktsignale zu versehen. Ein in dieser Weise erweitertes Automatenkonzept wird in 3.3 eingeführt werden. An dieses Konzept wird, neben den Homogenitätsforderungen von Seite 9, die strenge Endlichkeitsforderung 3.1.0 für Erweiterungsschritte (siehe S.29) gestellt werden. Zuvor sollen jedoch einige Hilfsmittel bereitgestellt werden.

3.2 T-Zellnetze und T-Netze

Aus Gründen der übersichtlichen Darstellung beschränken wir uns im folgenden auf zweidimensionale Zellularräume mit von Neumann'scher Nachbarschaft. In [SMI1] ist gezeigt worden, daß man i.a. auf diesen Fall standardisieren kann; Verallgemeinerungen sind aber möglich.

Folgende Idee liegt dem Ansatz zugrunde. Betrachtet wird ein Verbund von in der euklidischen Ebene angeordneten Automatenzellen unter den üblichen Homogenitätsforderungen. Die Verteilung der Taktsignale an die einzelnen Zellen soll nach einem besonderen Schema erfolgen, das noch näher zu erläutern ist. Zu diesem Zweck habe jede Zelle - neben den für die Übertragung der Nachbarschaftsinformation erforderlichen Ein- und Ausgängen - in jeder räumlichen Richtung spezielle Ein- und Ausgänge für Taktsignale in einer solchen Anordnung, daß bei benachbarten Zellen jeweils der Taktausgang der einen mit dem Takteingang der anderen verbunden ist und umgekehrt. So ist es ohne weiteres

möglich, die Verbindungen zur Übermittlung von Taktsignalen in den homogenen Aufbau eines Zellularautomaten einzubeziehen.

In das entstehende Netz sollen zu bestimmten Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots an einer bestimmten, festen Stelle Taktsignale T_0, T_1, T_2, \dots eingespeist werden, die in dem Netz von Zelle zu Zelle weitergegeben werden sollen, wobei an jeder von einem Taktsignal erreichten Zelle ein Zustandsübergang initiiert wird. Dabei sollen die Zellen jeweils nur eins von mehreren Signalabkömmlingen, die aufgrund von Verzweigungen des Netzes aus einem eingegebenen Taktsignal resultieren können, aufnehmen. Es soll daher jede Zelle mit einer Vorrichtung versehen werden, die nach dem Erhalt eines Taktsignals ihre Takteingänge für eine Weile sperrt.

Zuvorderst muß nun das durch 3.1.9 gegebene grundsätzliche Problem gelöst werden. Bei einer rein-passiven Weiterleitung der Taktsignale in dem Netz ist 3.1.9 nicht zu erfüllen: Ein Signal muß beim Erzeugen einer Reaktion (Initiieren eines Schaltvorgangs) zwangsläufig an Energie verlieren und folglich nach endlich vielen Wiederholungen eines solchen Vorgangs verbraucht sein. Die Konsequenz ist: Das Signal muß zwischenzeitlich an bestimmten Stellen (durch Zufuhr von Energie) erneuert werden. Da aufgrund der Homogenitätsforderungen jede Zelle eines Zellularautomaten gleich aufgebaut sein soll, muß die Möglichkeit zur Signalerneuerung in jeder einzelnen Zelle gegeben sein. Deshalb wird dieses Netz aktive Elemente, d.h. Elemente mit Energiezufuhr enthalten müssen.

Die Frage der Zufuhr von Energie wird nun wie folgt betrachtet. Nach einer grundsätzlichen Vorstellung von Zellularautomaten ist jede Zelle mit einer eigenen Energiequelle ausgestattet. Unter Bezug auf diese Energiequelle wird vorausgesetzt:

3.2.1 Jedes Taktsignal, das bei der Taktverteilung von einer Zelle weitergegeben wird, ist neu erzeugt.

Dabei ist von untergeordneter Bedeutung, welche den einzelnen Zellen zugeordneten Elemente diese Funktion tatsächlich wahrnehmen.

An bestimmten Stellen in einer Zelle müssen ferner "alte" Signale - ohne weitere Reaktionen im Netz hervorzurufen - verschwinden. Zur Beschreibung

dieses Sachverhalts wird ein "Absorber"-Element eingeführt werden. Insgesamt kann mit 3.2.1 nun als gesichert gelten, daß ein Taktsignal in einem solchen Netz nach beliebig langem Weg als solches identifizierbar ist, wie in 3.1.9 gefordert.

Der Aufbau eines Netzes zur Taktverteilung in einem Zellularautomaten - dargestellt als abstraktes Automaten-system - wird in drei Schritten erfolgen.

- 3.2.2 a) Es werden Grundbausteine mit spezifischen Funktionen für die Signalverarbeitung angegeben. Diese Bausteine können nach ihrer Funktion im weiteren Sinne automatentheoretisch charakterisiert werden: Sie müssen auch mehrere gleichzeitig auftretende Signale verarbeiten können und sind daher nicht als rein-sequentielle Automaten zu beschreiben.
- b) Diese Automatenbausteine können durch geeignete Verschaltung ihrer Eingabe- und Ausgabestellen zu Netzwerken für die zellinterne Signalverarbeitung zusammengefügt werden, wobei freibleibende als Randstellen der Zellen zur Aufnahme und Abgabe von Taktsignalen dienen.
- c) Durch Verschaltung ihrer Randstellen können Mengen solcher zellinternen Netzwerke ihrerseits zu größeren Automaten-netzwerken verbunden werden in einem unbeschränkt fortsetzbaren Prozeß.

Es sind zwei Arten von Automatenbausteinen zu unterscheiden:

- (i) Kombinatorische Bausteine, bei denen die Ausgabesignale nur von den Eingabesignalen abhängen;
- (ii) Bausteine mit mindestens zwei unterschiedenen Innenzuständen; Zustandsänderungen und Ausgabesignale hängen hier von den Eingabesignalen und dem Zustand im Augenblick des Auftretens der Eingabesignale ab.

Bei Bausteinen mit Innenzuständen ist aufgrund von (P4) analog wie in 3.1.3 ein bestimmter Schaltzeitbedarf anzunehmen. In Betracht zu ziehen ist ferner ein innerhalb der Netze zwischen je zwei Randstellen auftretender Laufzeit-

bedarf der Signale, entsprechend der Laufzeit zwischen je zwei Maschenpunkten wie in 3.1.7. Zur vollständigen Beschreibung der Grundbausteine gehören also zwei noch zu präzisierende Dinge:

1. Beschreibung des Eingabe-/Ausgabe- und ggfs. Übergangsverhaltens gemäß (i) bzw. (ii) ("logische Struktur")
2. Angabe eines Zeitbedarfs.

Wir wollen für das Folgende annehmen, daß die Verteilung der Taktsignale durch in den Netzen laufende Impulse geschieht, wobei wir nicht auf die zeitliche Ausprägung eines Impulses Bezug nehmen wollen - sie wäre von einem speziellen physikalischen Größenbereich abhängig. Wenn wir von einem "Impuls" sprechen, ist also im abstrakten Sinn ein momentan an einer Stelle eines solchen Netzes auftretender, vom normalen Zustand unterscheidbarer "Signalzustand" gemeint, der als Reaktion das Auftreten von Impulsen an anderen Stellen des Netzes erzeugen kann.

In einem nach 3.2.2 zu konstruierenden Netz werden gleichzeitig mehrere nicht synchronisierte Impulse parallel auftreten können, so daß die Möglichkeit zu Wettläufen von Impulsen (sog. races) besteht, durch deren Ausgang unter Umständen unterschiedliche Reaktionen des Netzes bedingt sein können. Die Beschreibung solcher Vorgänge erfordert zunächst einen Typ von Automatenbaustein, der in der Lage ist, auch auf mehrere gleichzeitig an den Eingabestellen auftretende Impulse in definierter Weise zu reagieren.

Als mathematisches Modell solcher impulsverarbeitenden Bausteine werden wir das von Priese eingeführte Konzept des asynchronen parallelen Automaten (APA) heranziehen; das darauf fußende Konzept des sog. APA-Netzes, zu dem man gelangt, indem man auf Mengen solcher Automaten einen Prozeß der Netzwerkbildung einführt, soll dann zur Beschreibung des Taktverteilungsnetzes dienen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden wir darauf nur soweit eingehen, wie es die präzise Darstellung des uns beschäftigenden Problems erfordert; die algebraische Präzisierung des Modells der APA-Netze und die Grundlegung einer darauf aufbauenden Netzwerk-Theorie findet man in [PRI2] (dort allerdings in ganz anderem Zusammenhang: zur Konstruktion eines bestimmten zweidimensionalen Kalküls benutzt, der als asynchroner Zellularraum aufgefaßt werden kann, vgl. Abschnitt 2 - hier zur Beschreibung eines Netzes

zur Taktverteilung in beliebigen, einen Simultankalkül ausführenden Zellularautomaten).

Definition.

Ein Asynchroner Paralleler Automat (APA) A ist ein System $A = (Z_A, I_A, O_A, R_A)$ von paarweise disjunkten endlichen Mengen Z_A , I_A und O_A und einer Teilmenge R_A von $(Z_A \times p(I_A)) \times (Z_A \times p(O_A))$ ($p(M)$ bezeichne die Menge aller Teilmengen einer Menge M). Die Elemente von Z_A , I_A und O_A heißen Zustände, Inputs bzw. Outputs von A . R_A heißt Überföhrungsrelation von A .

Dieses Automatenkonzept kann im weiteren Sinne als Verallgemeinerung des klassischen Mealy-Automaten (deterministisch und vollständig) angesehen werden. Wesentliche Voraussetzung für das Folgende ist die Möglichkeit, in diesem Konzept das Verhalten von Automaten bei gleichzeitigem Auftreten mehrerer Inputs oder Outputs wie auch Zustandsänderungen ohne gleichzeitiges Auftreten eines Inputs oder Outputs beschreiben zu können.

Bezüglich der Input- und Outputmengen I_A und O_A besteht eine vom üblichen Schema abweichende Auffassung: Statt Ein- und Ausgaben verschiedener Signale (auf einem Eingabe- bzw. Ausgabekanal) wie im Fall der Mealy-Automaten hat man es hier mit Ein- und Ausgaben gleichartiger Signale auf verschiedenen Kanälen zu tun. Es ist deshalb zweckmäßig, die Elemente von I_A und O_A als Eingabestellen bzw. Ausgabestellen oder kurz als Eingänge bzw. Ausgänge zu bezeichnen. Diese Begriffe sind wegen der Voraussetzung disjunkter Input- und Outputmengen wohldefiniert; man kann einen APA als gerichteten Automaten bezeichnen.

Für unsere Zwecke ist es ausreichend, wenn wir den Begriff des Netzes wie folgt konkretisieren:

- (i) Jeder APA ist ein Netz.
- (ii) Jede Verschaltung von m ($m > 0$) Netzen, die dadurch entsteht, daß n ($n > 0$) bisher freie Ausgänge mit genau n korrespondierenden, bisher freien Eingängen verbunden werden, ist ein Netz.
- (iii) Nur ein nach (i) und (ii) konstruierbares Objekt ist ein Netz.

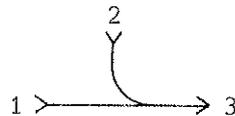
Bei den nach diesem Prozeß erzeugten Netzen kann in wohldefinierter Weise von Eingängen und Ausgängen eines Netzes gesprochen werden; es sind gerade die bei der Verschaltung von Netzen freibleibenden Eingänge bzw. Ausgänge. Ein an einem Netzbaustein auftretender Outputimpuls gilt dann als Input für den nachgeschalteten Baustein; die Modellvorstellung ist, daß Impulse "durch das Netz laufen".

Die für den Aufbau eines Taktverteilungsnetzes benötigten Grundbausteine (nach 3.2.2a) sind die nachstehend angegebenen APA: K, A, P, I. Die Elemente ihrer Überführungsrelationen sind in der (übersichtlicheren) Form

$$(z, \{i_1, \dots, i_j\}) \rightarrow (z', \{o_1, \dots, o_k\})$$

angegeben; eine solche Transition (ein möglicher Übergang) ist zu lesen als: "Im Zustand z bei Input an i_1, \dots, i_j gehe über in den Zustand z' mit Output an o_1, \dots, o_k ".

Der Baustein K ("Knoten") erhält das Symbol

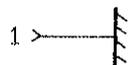


und ist definiert durch $K := (\{o\}, \{1, 2\}, \{3\}, R_K)$

$$R_K := \{ \begin{array}{l} (o, \{1\}) \rightarrow (o, \{3\}) \\ (o, \{2\}) \rightarrow (o, \{3\}) \\ (o, \{1, 2\}) \rightarrow (o, \{3\}) \end{array} \}$$

Die heuristische Beschreibung lautet: Inputimpulse an der Stelle 1 oder 2 werden bei 3 wieder ausgegeben; bei gleichzeitigem Auftreten zweier Impulse an 1 und 2 erfolgt die Ausgabe eines "vereinigten" Impulses bei 3.

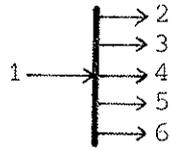
Der Baustein A ("Absorber") erhält das Symbol



und ist definiert durch $A := (\{o\}, \{1\}, \phi, \{(o, \{1\}) \rightarrow (o, \phi)\})$

Dieser Baustein soll das rückwirkungsfreie Verschwinden von Impulsen beschreiben.

Der Baustein P ("Parallelisierer") erhält das Symbol

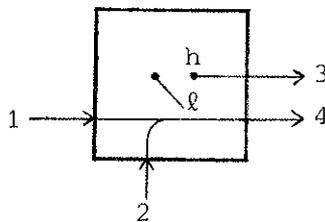


und ist definiert durch

$$P := (\{0\}, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}, \{(0, \{1\}) \rightarrow (0, \{2,3,4,5,6\})\})$$

Ein Impuls an 1 erzeugt fünf parallele Impulse an den fünf Ausgängen. - Die Bausteine K, A und P sind kombinatorische Bausteine; die Reaktion auf Impulse erfolgt unabhängig von einem inneren Zustand.

Der Baustein I ("Impulsgeber") erhält das Symbol



und ist definiert durch $I := (\{\ell, h, \uparrow, \downarrow\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, R_I)$

$$R_I := \{ (\ell, \{1\}) \rightarrow (\uparrow, \{4\}) \\ (\uparrow, \{1\}) \rightarrow (\uparrow, \{4\}) \\ (\uparrow, \phi) \rightarrow (h, \{3\}) \\ (\uparrow, \{1\}) \rightarrow (h, \{3, 4\}) \\ (h, \{1\}) \rightarrow (h, \{4\}) \\ (h, \{2\}) \rightarrow (\downarrow, \{4\}) \\ (\downarrow, \phi) \rightarrow (\ell, \phi) \}$$

I hat zwei stabile Zustände: ℓ und h und zwei labile Zustände: \uparrow und \downarrow . In dem Moment, wo I den Zustand h ("high") annimmt, erfolgt ein Impuls-output (eines in I erzeugten Impulses) bei 3; ursächlich für das Umschalten von ℓ nach h - und somit für diesen Output - ist ein im Zustand ℓ ("low") des Bausteins bei 1 eingegebener Impuls. Der während der Zeit des Umschaltens von ℓ nach h vorliegende "Übergangszustand" ist durch \uparrow bezeichnet; die Beschreibung (R_I) drückt aus, daß h unbeeinflusst von eventuellen weiteren Eingaben an 1 erreicht werden kann. (\downarrow bezeichnet analog den Übergangs-

zustand¹ während des Schaltens von h nach ℓ .) Die vollständige Definition von R_{\perp} ist nicht erforderlich, da in den später betrachteten Netzen andere als die erfaßten Zustand-Input-Kombinationen nicht auftreten können. Die nach Festlegung von R_{\perp} indeterminierte Beschreibung des I-Bausteins enthält zunächst nur die prinzipielle Möglichkeit des heuristisch beschriebenen Verhaltens; daß es innerhalb einer definierten Zeitspanne tatsächlich so auftritt, ist durch die zusätzliche Festlegung von Schranken für die Schaltzeit zu sichern (angegeben durch die von der Initiierung durch einen entsprechenden Input bis zur Annahme des neuen stabilen Zustands auftretende Verzögerung):

Zeitbedarf für das Schalten von I

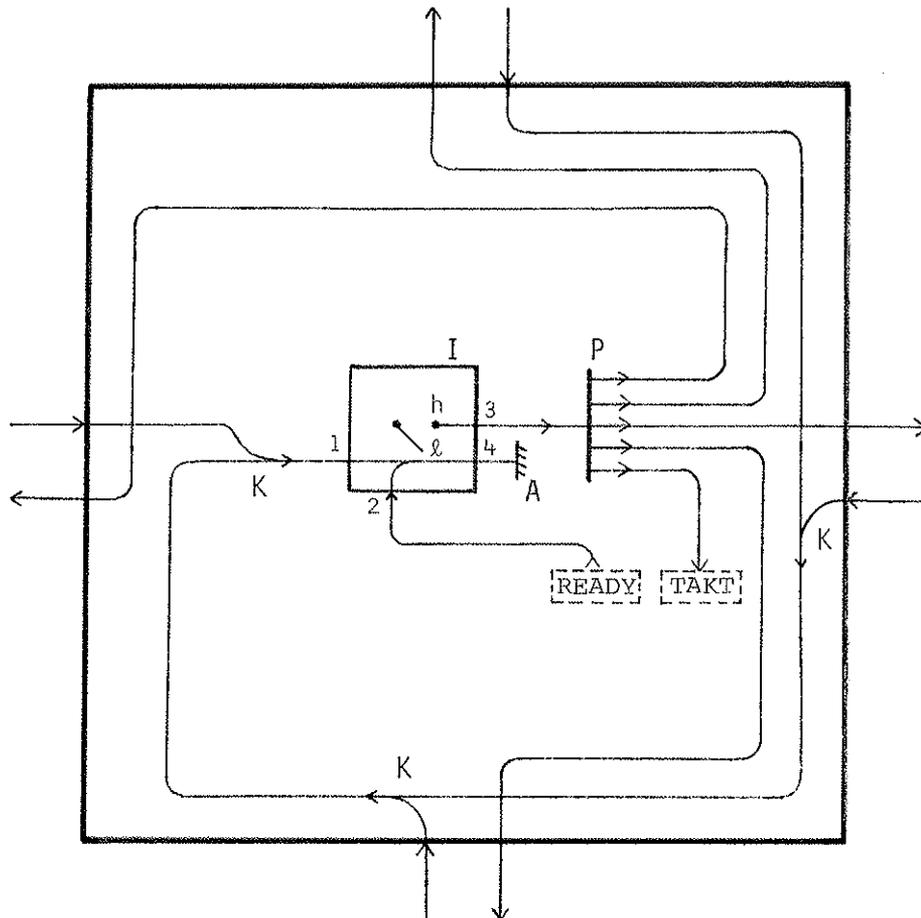
- a) von ℓ nach h: \underline{v} ($0 < \underline{v}_{\min} \leq \underline{v} \leq \underline{v}_{\max} < \infty$)
b) von h nach ℓ : \bar{v} ($0 < \bar{v}_{\min} \leq \bar{v} \leq \bar{v}_{\max} < \infty$)

Damit sind die in 3.2.2a) angekündigten Grundbausteine angegeben, so daß wir nun die interne Verarbeitung von Taktsignalen an den einzelnen Zellen durch ein APA-Netz beschreiben können; dieses wird im folgenden als T-Zellnetz bezeichnet.

Schritt 3.2.2b)

Für den betrachteten Fall von zweidimensionalen Zellularräumen mit von Neumann'scher Nachbarschaft besteht das T-Zellnetz aus drei K-Bausteinen und je einem Baustein I, A und P, die wie in der nachstehenden Abbildung zu einem APA-Netz verschaltet sind, so daß je fünf Netzeingänge und -Ausgänge entstehen: je vier externe als Randstellen der Zelle (sie werden zur Aufnahme und Abgabe von Taktsignalen dienen) und je ein interner (zur Ankopplung des T-Zellnetzes an die einzelne Automatenzelle). Die als Signalübertragungskanäle zu interpretierenden Verbindungen von Netzkomponenten werden wir auch kurz als Leitungen bezeichnen. Es soll nun die heuristische Erläuterung der Funktionsweise des T-Zellnetzes folgen.

¹ Bei schaltlogischen Bauelementen ist i.a. nur ein jeweiliger stabiler Zustand, ein "definierter" Zustand (als Resultat eines Übergangs) von Interesse, nicht - wie hier - ein Übergangszustand. In den betrachteten asynchronen Netzen ist es jedoch möglich, daß während der Dauer des Umschaltens eines Elements dort weitere Impulse auftreten. Zur vollständigen Beschreibung gehört also die Festlegung des dann vorzulegenden Verhaltens.



Betrachtet wird ein in der Ausgangssituation zunächst "leeres" derartiges Netz¹, d.h. auf keiner seiner Leitungen ist ein Impuls; der I-Baustein ist im Zustand l . An den externen Eingängen des T-Zellnetzes ankommende Impulse gelangen über die K-Bausteine als Folge von Impulsen (deren Anzahl sich durch den möglichen Fall des gleichzeitigen Benutzens beider Eingänge eines K-Bausteins verringert haben kann) an den Eingang 1 des I-Bausteins, den sie bei 4 wieder verlassen und bei A absorbiert werden. Einzig der erste Impuls der Folge initiiert dabei einen Übergang des I-Bausteins vom stabilen Zustand l in den stabilen Zustand h , wodurch - nach der Verzögerung v_1 - ein (neuer) Impuls am Ausgang 3 auftritt. Dieser gelangt an den

¹ Gegenüber dem vereinfachten "Blockschaltbild" einer Automatenzelle von S.11 ist die obige Abbildung eines T-Zellnetzes von geringerem Abstraktionsniveau (Level der Impulsverarbeitung); dies mag seine Einfachheit verdeutlichen.

P-Baustein, wodurch fünf Impulse parallel

- (i) an alle vier externen Ausgänge des T-Zellnetzes
- (ii) an den internen Ausgang "TAKT"

laufen und das T-Zellnetz verlassen. I trennt also die bei 1 ankommenden Impulse: Wenn I im Zustand ℓ ist, kann nur der erste Impuls eine Wirkung auf das Netz erzeugen; erst nachdem durch einen vom zellinternen READY-Eingang zum Eingang 2 des I-Bausteins gelangten Impuls die Rückstellung von I in den Zustand ℓ initiiert und erfolgt ist, kann ein bei 1 am I-Baustein ankommender Impuls erneut einen Impulsoutput bei 3 hervorrufen.

Auf den internen Ausgang "TAKT" bezogen bedeutet das: Immer nur einmal in einer bestimmten Zeitspanne kann durch von außen in das T-Zellnetz gelangende Impulse ein Impulsoutput an "TAKT" hervorgerufen werden. Diese Zeitspanne umfaßt insbesondere den Zeitverbrauch des zwischen einem Impuls an "TAKT" und einem Impuls von "READY" liegenden Ereignisses.

Den gesamten Zeitbedarf eines T-Zellnetzes betreffend wird die Verzögerung v zwischen der frühesten Eingabe eines für einen I-Output an 3 ursächlichen Impulses bis zur daraus resultierenden Ausgabe von fünf parallelen Impulsen an den Ausgängen des T-Zellnetzes von Bedeutung sein ($v > \underline{v}$). Für Wiederholungen des eben beschriebenen Ereignisses (bei denen der ursächliche Impuls jeweils an irgendeinem externen Eingang des T-Zellnetzes auftreten kann) gelte:

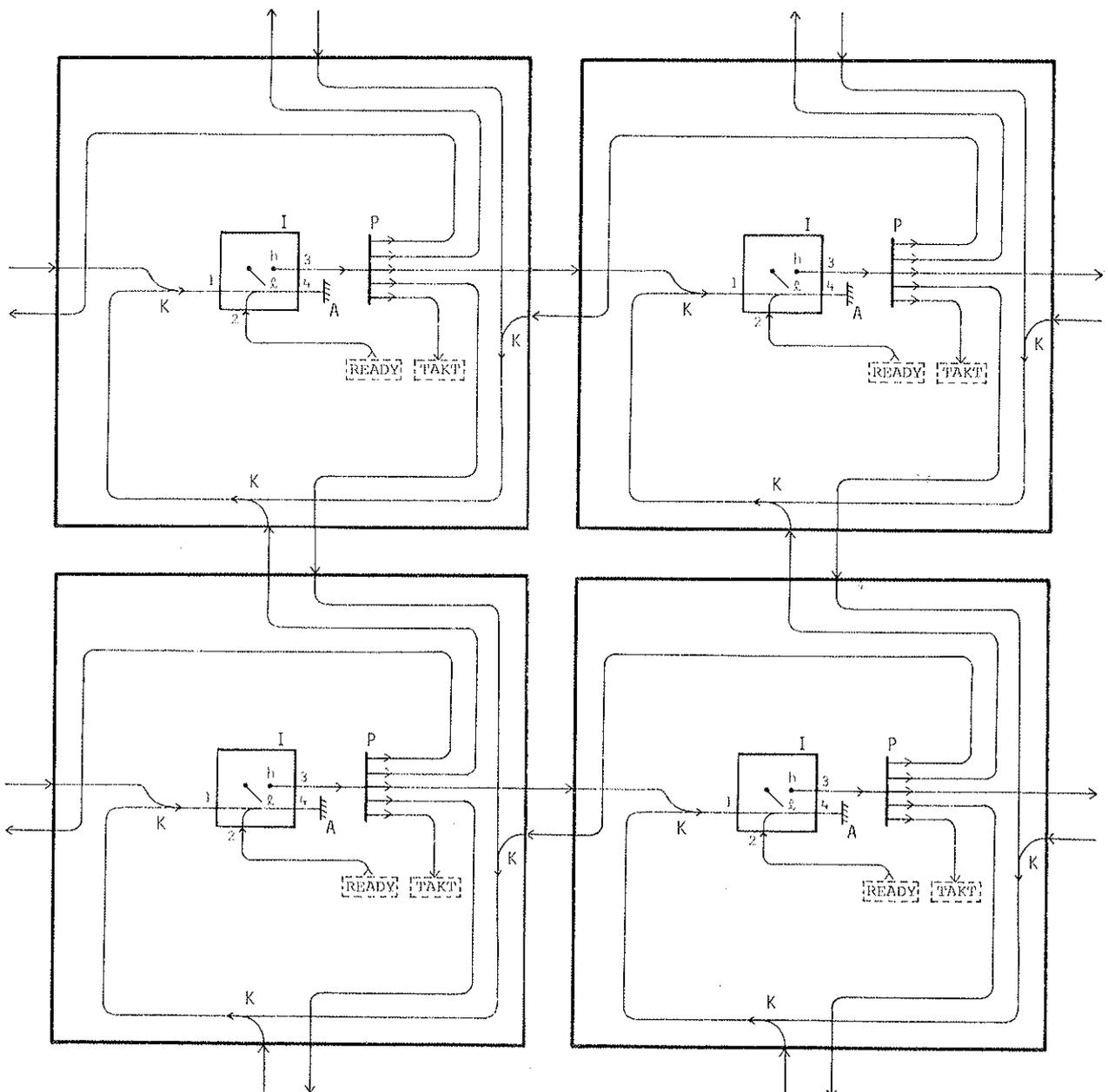
$$3.2.3a) \quad 0 < v_{\min} \leq v \leq v_{\max} < \infty \quad (\text{zeitliches Variieren von } v)$$

Eventuelle zwischen P-Baustein und den externen Ausgängen des T-Zellnetzes mögliche Laufzeitunterschiede von Impulsen sollen in diesen Toleranzbereich fallen.

Schritt 3.2.2c)

Bei Anordnung einer Menge von Kopien des unter 3.2.2b) beschriebenen Netzes auf benachbarten ganzzahligen Gitterpunkten der euklidischen Ebene lassen sich diese kanonisch zu einem neuen APA-Netz verschalten, das in bezug auf das Verschaltungsschema und die den Gitterpunkten zugeordneten Komponenten (den T-Zellnetzen) homogen aufgebaut ist; dabei werden korrespondierende

Randstellen jeweils identifiziert. Ein durch Verschaltung einer endlichen Anzahl von T-Zellnetzen erhaltenes solches Netz kann durch immer den gleichen Prozeß: das Anfügen eines weiteren T-Zellnetzes auf einem freien, einer Randstelle des bisher erhaltenen Netzes benachbarten Gitterpunkt unbeschränkt erweitert werden. Dabei sind auch Rotationen einzelner T-Zellnetze in der Ebene um $k \cdot 90^\circ$, $k \in \{1, 2, 3\}$, zulässig. Im folgenden wird ein so entstandenes Netz als T - N e t z bezeichnet. Ein Ausschnitt eines T-Netztes ist nachstehend dargestellt.



Es sei zugelassen, daß die in 3.2.3a) für ein individuelles T-Netz angegebene Verzögerung v bei einer Menge von einzelnen, verschiedenen Gitterpunkten der Ebene zugeordneten T-Zellnetzen eines T-Netzes innerhalb fester endlicher Grenzen v_{\min}' , v_{\max}' variiert, wobei o.B.d.A. der Einfachheit halber angenommen wird: $v_{\min} = \min \{v_{\min}, v_{\min}'\}$ und analog $v_{\max} = \max \{v_{\max}, v_{\max}'\}$, so daß also gilt:

$$3.2.3b) \quad 0 < v_{\min} \leq v \leq v_{\max} < \infty \quad (\text{räumliches Variieren von } v)$$

Damit ist die Konstruktionsbeschreibung eines Netzes zur Taktverteilung in Zellularautomaten abgeschlossen.

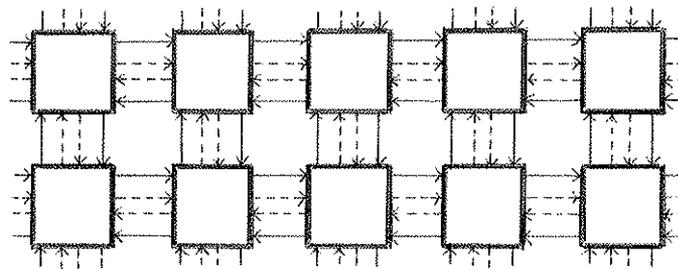
In der vorliegenden Darstellung verwenden wir das um eine lokale Zeitbetrachtung erweiterte (es wird auf Verzögerungen innerhalb von normierten Netzkomponenten, den T-Zellnetzen, Bezug genommen) Konzept des APA-Netzes; folgendes ist zu bemerken: Durch die Betrachtung von T-Netzen bzw. T-Zellnetzen wird die Untersuchung der Ausbreitung physikalischer Wirkungen ausschließlich auf die Untersuchung der Struktur des mathematischen Zusammenhangs der in Betracht kommenden physikalischen Größen verlagert; spezielle physikalische Realisierungen eines solchen Netzes bilden dann Modelle ein- und desselben abstrakten Systems.

3.3 Die Polyautomaten (\hat{Z}, T)

Die heuristischen Vorüberlegungen von 3.1 sind nun so weit konkretisiert worden, daß wir im weiteren - alternativ zu der mit den physikalischen Postulaten von 3.1 unvereinbaren Aussage 3.1.2 - die Möglichkeit der adäquaten Ausführung eines Simultankalküls durch einen lokal-synchronen Zellularautomaten untersuchen können. Unter einem lokal-synchronen Zellularautomaten wollen wir dabei einen Zellularautomaten, dessen Zellen gemäß Definition 2 aus 3.1 lokal-synchron arbeiten, verstehen. Wir behaupten:

3.3.1 Ein Simultankalkül kann durch einen lokal-synchronen Zellularautomaten adäquat ausgeführt werden.

Als die am Schluß von 3.1 angesprochene zusätzliche Einrichtung der Zellen zur Taktverteilung soll das in 3.2 eingeführte T-Zellnetz dienen: Stellt man sich Kopien des T-Zellnetzes und der auf S.11 beschriebenen Automatenzelle jeweils auf den Gitterpunkten der euklidischen Ebene übereinanderliegend angeordnet vor und dabei die internen Randstellen 'TAKT' von Automatenzelle und T-Zellnetz miteinander verbunden, und ebenso die internen Randstellen 'READY', so ist der in dieser Weise um das T-Netz erweiterte Zellularautomat homogen aufgebaut, wie in der nachstehenden Abbildung angedeutet:



(gestrichelt eingezeichnet sind die für die Taktverteilung hinzugenommenen Verbindungen; zellinterne Verbindungen sind nicht eingezeichnet).

Die nach den Vorüberlegungen in einem schlichten Leitungsnetz zur Taktverteilung zwischen je zwei Maschenpunkten auftretende Signalverzögerung v (vgl. 3.1.7) ist in gleicher Weise auch in die Betrachtung des T-Netzes einbeziehbar (3.2.3a)b)). Zum Beweis der Behauptung 3.3.1 wird gezeigt werden, daß - überhaupt - ein um das T-Netz erweiterter Zellularautomat einen Simultankalkül bei lokal-synchroner Arbeitsweise adäquat ausführen kann; dazu setzen wir zunächst anstelle von 3.2.3a) zeitlich konstante Verzögerungen voraus.

Mit $Z = (Z^2, H_1, Q, q_0, \Sigma)$ sei nun ein beliebiger (zweidimensionaler, nicht notwendig deterministischer) Zellularraum (mit von-Neumann-Nachbarschaft) gegeben. Nach den Überlegungen des Abschnitts 2. kann dadurch

- a) ein spezieller Substitutionskalkül oder
- b) ein spezieller Polyautomat

bezeichnet sein (Aussage 2.1). Um diese beiden Fälle zu unterscheiden, wollen wir im ersten Fall (Kalkül) " Z ", im zweiten (Automat) " \hat{Z} " schreiben. In beiden Fällen ist noch eine weitere Angabe erforderlich:

- a) Angabe der Metaregel von Z
(betrifft die Anwendung der lokalen Übergangsregeln)
- b) Angabe der Organisation des Schaltens der Automatenzellen von \hat{Z}
(betrifft die Ausführung von Zustandsübergängen)

Der ursprüngliche Fall: "synchrone Zellularräume" bedeutet

- a) simultane Anwendung der lokalen Übergangsregeln
korrespondierend mit
- b) globaler Taktung der Automatenzellen.

Wir haben diese beiden Spezialfälle kurz mit "Simultankalkül" bzw. "synchrone Zellularautomat" bezeichnet und wollen für die vollständige Bezeichnung von Z bzw. \hat{Z} die Angabe der Metaregel bzw. Organisation des Schaltens verlangen. Wir schreiben:

- a) (Z, sim) für den bei simultaner Anwendung der Basisregeln durch Z gegebenen Simultankalkül
- b) (\hat{Z}, \dots) für einen (Z, sim) ausführenden synchronen Zellularautomaten

(Nach den Postulaten aus 3.1 ist eine die Forderung 3.1.0 erfüllende Organisation nicht möglich.)
- c) (\hat{Z}, T) für den mit dem unterliegenden T-Netz ausgestatteten Automaten \hat{Z} .

Wir betrachten nun solche zu Zellularräumen Z passenden Polyautomaten (\hat{Z}, T) . Zum Beweis der Behauptung 3.3.1 werden wir zeigen:

3.3.1' Für einen beliebigen Zellularraum $Z = (Z^2, H_1, Q, q_0, \Sigma)$ gilt:
 (Z, sim) kann durch (\hat{Z}, T) adäquat ausgeführt werden.

Für Betrachtungen, die sich auf das T-Zellnetz einer Zelle α von (\hat{Z}, T) beziehen, führen wir folgende Sprechweise ein. Wir sagen:

α ist zur Zeit t im T-Zustand z gdw. der I-Baustein von α zur Zeit t im Zustand z ist, $z \in \{\ell, \uparrow, h, \downarrow\}$;

α hat zur Zeit t einen T-Output gdw. an einem oder mehreren der externen T-Zellnetzausgänge von α zur Zeit t ein Impuls auftritt;

α hat zur Zeit t einen T-Input gdw. an einem oder mehreren der externen T-Zellnetzeingänge von α zur Zeit t ein Impuls auftritt;

α hat zur Zeit t einen (für einen Taktzeitpunkt) ursächlichen T-Input gdw. (i) α zur Zeit t einen T-Input hat und (ii) der früheste als Folge dieses T-Inputs zu einer Zeit t' ($t' > t$) am Eingang 1 des I-Bausteins auftretende Impuls den I-Baustein im Zustand ℓ antrifft.

Zur Erläuterung: In diesem Fall (ii) wird (gemäß R_I) I zum Umschalten nach h veranlaßt, wodurch zu einer Zeit t' ($t' > t$) ein Taktzeitpunkt an α auftritt, denn der als Folge des Schaltens von I an den internen T-Zellnetzausgang 'TAKT' und damit an den TAKT-Eingang der Automatenzelle gelangende Impuls initiiert dort einen Zustandsübergang (vgl. S.12). Dafür, daß ein T-Input an α ursächlicher T-Input für α ist, ist also das Auftreten dieses T-Inputs in einem (relativ zum Vorliegen des T-Zustands ℓ) bestimmten Zeitintervall wesentlich.

Bemerkung.

Auf Seite 27 wurde der Begriff "Taktzeitpunkt" für den Moment der Initiierung eines Zustandsübergangs einer Automatenzelle (durch ein Taktsignal) eingeführt. Wie oben erläutert, wird diese Initiierung durch einen am T-Zellnetzausgang 'TAKT' auftretenden Impuls herbeigeführt, d.h. ein Taktzeitpunkt einer Zelle α ist mit dem Moment des Auftretens eines Output-Impulses bei 'TAKT' im T-Zellnetz von α identisch. Nach der zu 3.2.3 führenden Festlegung des Zeitbedarfs eines T-Zellnetzes (bei der Taktverteilung) ist ein solcher Taktzeitpunkt jeweils am Ende der Verzögerungszeit v lokalisiert.

Ferner werden wir den Begriff "Taktzeitpunkt einer Zelle α " (wie schon in den Vorüberlegungen verschiedentlich getan) in einer zweiten Bedeutung verwenden: für das raum-zeitliche Ereignis des Auftretens eines Output-

Impulses bei 'TAKT' im T-Zellnetz von α , das bestimmt ist durch die Raumkoordinaten a_1, a_2 von α ($a_1, a_2 \in Z$) und seine Lage innerhalb einer kontinuierlichen, vollständig geordneten Zeitskala \mathcal{t} , etwa ein durch ein t_0 nach unten beschränkter Abschnitt der reellen Zahlen: $\mathcal{t} = (R, \leq, t_0)$. Auf diese Zeitskala werden die Zeitpunkte der Eingabe von Taktsignalen ("Ur-impulsen") in einen Polyautomaten (\hat{Z}, T) bezogen, entsprechend der Darstellung auf S.27 unten ("Taktuhrzeit").

Der Einfachheit halber stellen wir uns die Taktuhr an der Ursprungszelle angeordnet vor, wo die Eingabe der einzelnen Taktsignale durch jeweils einen T-Input erfolgen soll. Da alle Zellen sowie die Taktuhr auf den Gitterpunkten von Z^2 fixiert sind, also relativ zueinander ruhen, ist es in jedem Fall unproblematisch, wenn wir unsere Betrachtungen (nicht jedoch irgendein Synchronisationsschema!) auf die Taktuhrzeit \mathcal{t} (im Sinne einer Beobachtungszeit) beziehen.

Einen Taktzeitpunkt einer Zelle α kennzeichnen wir im folgenden mit t^α ($t^\alpha \in \mathcal{t}$). Zur deutlichen Unterscheidung bezeichnen wir mit $\langle t^\alpha \rangle$ das Ereignis "Zur Zeit t^α tritt an α ein Taktzeitpunkt auf".

Für zwei Ereignisse $\langle t^\alpha \rangle, \langle t^\beta \rangle$ bedeutet dann " $t^\alpha < t^\beta$ " also: " $\langle t^\alpha \rangle$ tritt früher als $\langle t^\beta \rangle$ ein". Weiterhin verständlich bleibt die Sprechweise: "Zwei Taktzeitpunkte von α und β , t^α und t^β , unterscheiden sich höchstens um ϵ ": $|t^\alpha - t^\beta| \leq \epsilon$.

Für $\alpha \neq \beta$ sind $\langle t^\alpha \rangle$ und $\langle t^\beta \rangle$ verschiedene Ereignisse, die möglicherweise gleichzeitig (also $t^\alpha = t^\beta$) eintreten können. Für $t_1^\alpha \neq t_2^\alpha$ sind $\langle t_1^\alpha \rangle$ und $\langle t_2^\alpha \rangle$ verschiedene Ereignisse, die zwar am gleichen Ort α , aber zu verschiedenen Zeiten eintreten.

Wir erläutern nun das Zusammenwirken von T-Zellnetz und Automatenzelle (vgl. die Abbildungen und zugehörigen Erläuterungen auf S.47f und S.11f).

Durch einen ursächlichen T-Input an einem T-Zellnetz (im T-Zustand l) tritt in der Folge ein Taktzeitpunkt auf, d.h. ein Impuls gelangt über die TAKT-Ankopplung vom T-Zellnetz in die zugeordnete Automatenzelle, wodurch dort ein Zustandsübergang initiiert und ausgeführt wird; währenddessen ist das T-Zellnetz im T-Zustand h . Mit der Beendigung des Zustandsübergangs gelangt

über die READY-Ankopplung ein Impuls in das T-Zellnetz, wodurch es zurück in den T-Zustand ℓ versetzt wird, dann also bereit für einen erneuten ursächlichen T-Input ist.

Zur übersichtlichen Darstellung wollen wir einige charakteristische Zeitpunkte in einem solchen Ablauf benennen. Es bezeichne:

\underline{t}^α den Zeitpunkt eines ursächlichen T-Inputs für die Zelle α ,

\bar{t}^α den (auf \underline{t}^α folgenden) Taktzeitpunkt von α ,

\underline{r}^α den Zeitpunkt des Endes eines Zustandsübergangs von α ,

\bar{r}^α den (auf \underline{r}^α folgenden) Readyzeitpunkt von α .

Bemerkung.

Die Begriffsfestlegung für einen "ursächlichen T-Input" (S.53) läßt zu, daß für einen Taktzeitpunkt mehrere parallel auftretende T-Inputs ursächlich sind, wobei möglicherweise aus zwei (oder drei oder vier) zu verschiedenen Zeiten t und t' (...) an α auftretenden T-Inputs gerade ein zu t' am Eingang 1 des I-Bausteins von α auftretender Impuls resultiert (und 1 zu t' in ℓ ist). In solchen Fällen ist es jedoch ausreichend, auf den oder die frühesten ursächlichen T-Input(s) bezugzunehmen, denn nach 3.2.3 erfolgt der resultierende Taktzeitpunkt von α innerhalb der größtmöglichen Verzögerungszeit v_{\max} nach dem frühesten ursächlichen T-Input. Wir legen also fest:

Das Ereignis $\langle \underline{t}^\alpha \rangle$ ist repräsentiert durch das früheste Auftreten(je) eines für einen Taktzeitpunkt von α ursächlichen Impulses an einem (oder mehreren) der externen Eingänge des T-Zellnetzes von α zur Zeit \underline{t}^α ; ferner:

das Ereignis $\langle \bar{t}^\alpha \rangle$ ist repräsentiert durch das Auftreten eines Impulses am (internen) TAKT-Ausgang des T-Zellnetzes von α zur Zeit \bar{t}^α ;

das Ereignis $\langle \underline{r}^\alpha \rangle$ ist repräsentiert durch das Auftreten eines Impulses am (internen) READY-Eingang des T-Zellnetzes von α zur Zeit \underline{r}^α ;

das Ereignis $\langle \bar{r}^\alpha \rangle$ ist repräsentiert durch den Übergang vom Zustand \downarrow in den Zustand ℓ des I-Bausteins im T-Zellnetz von α zur Zeit \bar{r}^α .

Eine gegebene Zelle α betreffend bilden die Ereignisse $\langle \underline{t}^\alpha \rangle, \langle t^\alpha \rangle, \langle \underline{r}^\alpha \rangle, \langle r^\alpha \rangle$ eine "Ereigniskette", die nach dem Eintreten des (durch einen von außen an einen T-Zellnetzeingang von α gelangten Impuls verursachten) Ereignisses $\langle \underline{t}^\alpha \rangle$ in der genannten Reihenfolge abläuft. Dabei ist der mit einem Ereigniseintritt auftretende Impuls jeweils Ursache für das in der Kette nächste Ereignis. D.h. für gewisse Zeitpunkte $\underline{t}^\alpha, t^\alpha, \underline{r}^\alpha, r^\alpha$ ($\underline{t}^\alpha < t^\alpha < \underline{r}^\alpha < r^\alpha$) gilt: $\langle \underline{t}^\alpha \rangle \Rightarrow \langle t^\alpha \rangle \Rightarrow \langle \underline{r}^\alpha \rangle \Rightarrow \langle r^\alpha \rangle$. Das Ereignis $\langle r^\alpha \rangle$ ist nicht mit einem Impulsauftritt verbunden und hat damit kein in der Kette nächstes Ereignis zur Folge.

Parallel mit dem das Ereignis $\langle t^\alpha \rangle$ repräsentierenden Impuls am (internen) TAKT-Ausgang von α treten in der Folge von $\langle \underline{t}^\alpha \rangle$ vier Impulse an den externen T-Zellnetzausgängen von α (möglicherweise aber nicht notwendig gleichzeitig) auf, etwa zu den Zeitpunkten $\bar{t}_1^\alpha, \bar{t}_2^\alpha, \bar{t}_3^\alpha, \bar{t}_4^\alpha$. Diese Impulse betreffen nicht das durch die obige Ereigniskette gekennzeichnete Zusammenwirken von T-Zellnetz und Automatenzelle von α , sondern jeder dieser Impulse stellt einen T-Input für eine α benachbarte Zelle dar, der möglicherweise ursächlich für einen Taktzeitpunkt der entsprechenden Nachbarzelle ist, z.B. $\langle \bar{t}_1^\alpha \rangle$ ursächlich für $\langle t^\beta \rangle$, $\beta \in N(\alpha) \setminus \{\alpha\}$; d.h. $\underline{t}^\beta = \bar{t}_1^\alpha$, das bedeutet: $\langle \underline{t}^\beta \rangle$ ist identisch mit dem Ereignis $\langle \bar{t}_1^\alpha \rangle$, denn bei der Verschaltung der T-Zellnetze von α und β werden gerade die korrespondierenden externen Randstellen identifiziert (vgl. S.49). Wir schreiben in diesem Fall: $\langle \underline{t}^\beta \rangle \equiv \langle \bar{t}_1^\alpha \rangle$.

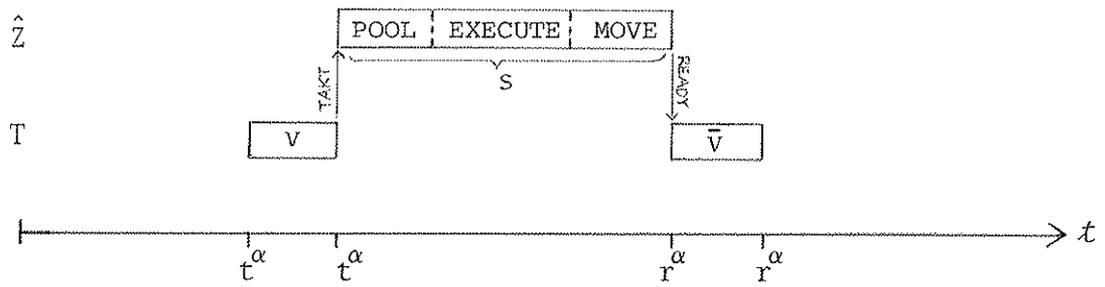
Die Ausführung eines Zustandsübergangs einer Automatenzelle α beginnt mit einem Taktzeitpunkt $\langle t^\alpha \rangle$ und läuft in drei Phasen ab - hierbei stützen wir uns auf das Modell von Arbib [ARB, S.375]; vgl. dazu die Abbildung auf S.11:

- (i) 'POOL': Die zur Zeit t^α vorliegende Nachbarschaftszustandsinformation wird in dafür vorgesehene Register der Automatenzelle eingelesen;
- (ii) 'EXECUTE': Die (bzw. im Fall einer nichtdeterministischen Regelmenge Σ : eine) in Frage kommende Regelanwendung wird in L_Σ ausgeführt;
- (iii) 'MOVE': Der erhaltene Nachfolgezellzustand q' wird in den Speicher SP_Q übertragen (dabei wird der alte Zellzustand q überschrieben).

Hieraus ergibt sich, daß der 'alte' Zustand einer Zelle jeweils bis zum Ende der Phase (ii) durch die Nachbarzellen abfragbar ist, d.h.: jeweils ab dem

Ende der Phase (iii) eines Zustandsübergangs bis zum Ende der Phase (ii) ihres nächstfolgenden Zustandsübergangs ist eine Zelle in definiertem Zustand.

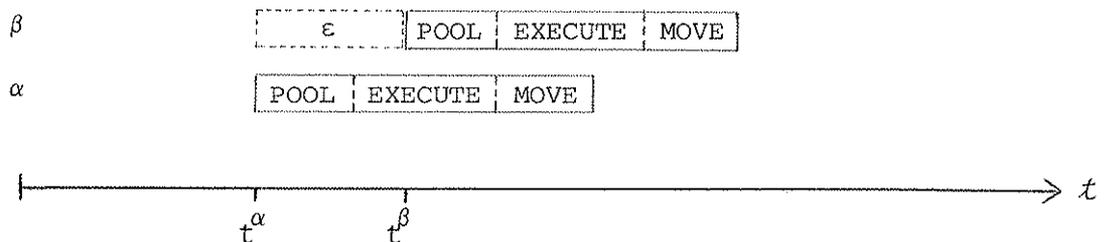
Die Arbeitsweise einer Zelle α eines Polyautomaten (\hat{Z}, T) stellt sich im Schema dann wie folgt dar:



Die (\hat{Z} betreffende) Arbeitsweise der Automatenzelle ist dabei gekennzeichnet durch zwei zeitliche Größen:

- a) ihre (nach oben und unten beschränkte) Schaltzeit¹ s (vgl. 3.1.3)
- b) ϵ , die für die korrekte Ausführung lokaler Übergänge maximal zulässige Differenz der Taktzeitpunkte benachbarter Zellen (vgl. Definition 1 bzw. Definition 2 aus 3.1)

Zur Illustration von b) kann die folgende Abbildung dienen (α und β sind benachbarte Zellen; in Phase (i) trifft β die Zelle α in definiertem Zustand an und umgekehrt):



¹Für den Fall einer nichtdeterministischen Regelmenge Σ ist hier vorauszusetzen: Innerhalb dieser Schaltzeit s muß ein Übergang zu einem gemäß Σ zulässigen Nachfolgezustand erfolgt sein.

Die das T-Zellnetz kennzeichnenden zeitlichen Größen sind:

- c) die zwischen einem ursächlichen T-Input und nachfolgendem Taktzeitpunkt auftretende (nach oben und unten beschränkte) Verzögerung v (vgl. 3.2.3)
- d) die für ein Rückstellen vom T-Zustand h in den T-Zustand l auftretende (nach oben und unten beschränkte) Verzögerung \bar{v} (vgl. "Zeitbedarf für das Schalten von I" in 3.2)

Bemerkung zu c)

Die (eine beliebige Zelle α betreffende) Verzögerung zwischen $\langle \underline{t}^\alpha \rangle$ und $\langle \bar{t}^\alpha \rangle$ beträgt im Höchstfall v_{\max} ; im Anschluß an 3.2.3 ist festgelegt, daß dies ebenfalls für die zwischen $\langle \underline{t}^\alpha \rangle$ und $\langle \bar{t}_i^\alpha \rangle$ liegende Verzögerung gilt, es kann jedoch $t^\alpha \neq \bar{t}_i^\alpha$ sein ($i=1, \dots, 4$). Die maximale (auf unterschiedlichen Impulslaufzeiten zwischen P-Baustein und T-Zellnetzausgängen beruhende) Abweichung $|t^\alpha - \bar{t}_i^\alpha|$ ist jedoch klein gegen die im gesamten T-Zellnetz auftretende Verzögerung v , so daß - ggfs. durch Einsatz eines zusätzlichen Verzögerungsgliedes (Leitung) zwischen P-Baustein und TAKT-Ausgang erfüllbar - für das T-Zellnetz einer jeden Zelle α gefordert werden kann:

Für die mit einem Taktzeitpunkt $\langle \bar{t}^\alpha \rangle$ verbundenen T-Outputs $\langle \bar{t}_1^\alpha \rangle, \dots, \langle \bar{t}_4^\alpha \rangle$ gilt jeweils:

$$3.3.2 \quad t^\alpha = \max \{ t^\alpha, \bar{t}_1^\alpha, \dots, \bar{t}_4^\alpha \}, \quad \max_i |t^\alpha - \bar{t}_i^\alpha| < v_{\min}$$

Insgesamt sind damit für Betrachtungen in (\hat{Z}, T) s, ϵ, v, \bar{v} maßgeblich. Für den Beweis von 3.3.1 bzw. 3.3.1' muß diesbezüglich folgendes vorausgesetzt werden:

$$3.3.3 \quad v_{\max} \leq \epsilon$$

d.h. die maximale Verzögerung im T-Zellnetz überschreitet nicht die höchstzulässige Differenz von Taktzeitpunkten benachbarter Zellen; ferner:

$$3.3.4 \quad v_{\max} < s_{\min} + \bar{v}_{\min}$$

(Diese Voraussetzung ist mit 3.3.3 insbesondere erfüllt.)

3.4 Betrachtung eines einzelnen Taktes

Wir untersuchen nun die Taktverteilung in Polyautomaten (\hat{Z}, T) , die den obigen Voraussetzungen genügen, zunächst bei Eingabe eines einzelnen Taktsignals.

Unter "einem Takt" eines (getakteten) Polyautomaten verstehen wir im folgenden den mit der einmaligen externen Eingabe eines Taktsignals erzeugten Prozeß des Polyautomaten. Für einen (global-)synchronen Zellularautomaten bedeutete dann "ein Takt", daß gerade ein globaler Übergang von \hat{Z} , also ein Ableitungsschritt im Simultankalkül (Z, sim) zur Ausführung gebracht würde. Im vorliegenden Abschnitt soll gezeigt werden, daß ebendies für einen Polyautomaten (\hat{Z}, T) gilt.

Wir betrachten dazu einen zu einem beliebigen Zellularraum $Z = (Z^2, H_1, Q, q_0, \Sigma)$ passenden Polyautomaten (\hat{Z}, T) mit gegebener Initialkonfiguration (in \hat{Z}), d.h. alle Zellen haben einen (in SP_Q gespeicherten) Anfangszustand, und leerem, d.h. impulsfreiem T-Netz; der T-Zustand aller Zellen sei ℓ .

Als einmalige externe Eingabe erfolge nun zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ Taktuhrzeit ein T-Input an der Ursprungszelle. Dort ist dieser T-Input ursächlich für einen (nach der Verzögerung v , höchstens v_{\max} eintretenden) Taktzeitpunkt, mit dem

- (i) ein Zustandsübergang der Ursprungszelle initiiert wird, während
- (ii) alle vier Nachbarn der Ursprungszelle (nach 3.3.2) bereits einen T-Input erhalten haben.

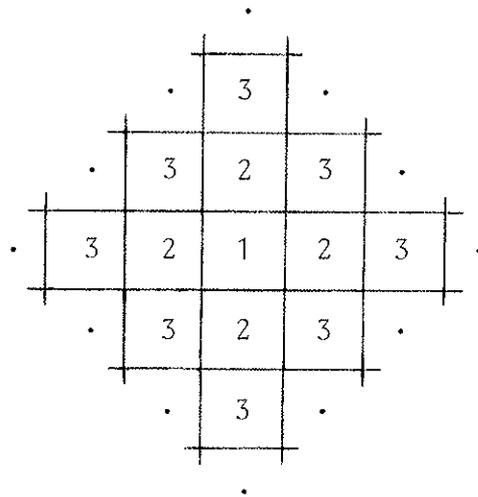
Da alle vier Nachbarzellen im T-Zustand ℓ sind, ist der T-Input dort ursächlich und führt an jeder dieser vier Zellen nach individueller Verzögerung, spätestens nach v_{\max} zu einem Taktzeitpunkt, mit dem jeweils

- (i) ein Zustandsübergang der betreffenden Zelle initiiert wird, während
- (ii) deren vier Nachbarn (u.a. also auch die Ursprungszelle) dann bereits einen T-Input erhalten haben.

Dieser T-Input trifft jeweils zumindest die "äußeren", bisher nicht von einem T-Input betroffenen Nachbarzellen im T-Zustand ℓ an, so daß dort wiederum der eben beschriebene Vorgang abläuft usf. Ob dabei eine Zelle, die bereits

einen Taktzeitpunkt hatte, von einem erneuten ursächlichen T-Input getroffen wird, steht zu klären.

Unter der hypothetischen Voraussetzung, daß sämtliche der bei dem beschriebenen Prozeß innerhalb der T-Zellnetze auftretenden Verzögerungen untereinander gleich sind, würde - beginnend mit der Ursprungszelle - sich die nachstehend dargestellte Reihenfolge von jeweils ersten Taktzeitpunkten der Zellen ergeben:



Interpretiert man den diesen Prozeß auslösenden T-Input an der Ursprungszelle als ein von der Taktuhr abgegebenes Taktsignal T_0 , ferner das Auftreten eines daraus resultierenden Taktzeitpunkts an einer Zelle α als ein Auftreten des Taktsignals T_0 an α , so stellt sich der oben beschriebene Prozeß wie folgt dar:

Ein in die Ursprungszelle eingegebenes Taktsignal breitet sich aufgrund der Wirkung des T-Netzes nach allen Seiten der Ebene aus (unter Initiierung von Zustandsübergängen an den durchlaufenen Zellen); allerdings können dabei nach 3.2.3b) unterschiedliche Verzögerungen des Signals an den Zellen auftreten, so daß es zu einer gegenüber der hypothetischen Darstellung verzerrten Reihenfolge von Taktzeitpunkten kommen kann. Der tatsächliche Verlauf einer "Taktfront" (des ersten Auftretens von Taktzeitpunkten) zu einem gegebenen Zeitpunkt t ist lokalisiert innerhalb von aus v_{\min} , v_{\max} und t sich ergebenden Grenzen, die wie folgt zu bestimmen sind.

Den Abstand zweier Zellen α und β mit den Koordinaten (a_1, a_2) bzw. (b_1, b_2) definieren wir durch Summenbetrag als

$$d(\alpha, \beta) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

Dann errechnet sich der größtmögliche Abstand zum Ursprung $(0,0)$ von Zellen (x,y) , die bis zum Zeitpunkt t einschließlich einen Taktzeitpunkt haben, zunächst für den hypothetischen Fall stets gleicher Verzögerung v , aus

$$|x| + |y| = \left[\frac{t}{v} \right] - 1 \quad (t \geq v)$$

wobei das Gauß-Symbol $[\]$ die größte ganze Zahl z : $z < \frac{t}{v}$ bezeichnet.

Bei gemäß 3.2.3b) unterschiedlichen Verzögerungen erhält man entsprechend Schranken für den größtmöglichen Abstand zum Ursprung o von Zellen α , die bis zum Zeitpunkt t einen Taktzeitpunkt $\langle t^\alpha \rangle$ ($t^\alpha \leq t$) haben, durch

$$3.4.1 \quad d_{\max}^t(\alpha, o) = \left[\frac{t}{v_{\min}} \right] - 1 \quad (t \geq v_{\min})$$

$$d_{\min}^t(\alpha, o) = \left[\frac{t}{v_{\max}} \right] - 1 \quad (t \geq v_{\max})$$

An einem Beispiel soll zunächst eine im Rahmen der Voraussetzungen mögliche tatsächliche Taktverteilung demonstriert werden. Für das T-Netz eines Polyautomaten (\hat{Z}, T) gelte:

$$v_{\min} = 1 \quad \text{und} \quad v_{\max} = 3$$

ferner gelte (3.3.2 genügend) für alle betrachteten Zellen α :

$$t^\alpha = \bar{t}_1^\alpha = \dots = \bar{t}_4^\alpha$$

d.h. Taktzeitpunkte und damit verbundene T-Outputs sollen in dem Beispiel jeweils zur gleichen Zeit auftreten. Ursächlicher T-Input \underline{t}^α für eine Zelle α sei der jeweils früheste T-Output \bar{t}_v^β einer Nachbarzelle β von α ; $\beta \in N(\alpha) \setminus \{\alpha\}$, $v \in \{1, \dots, 4\}$ ($\bar{t}_v^\beta = t^\beta$ nach obiger Voraussetzung).

In der nachstehenden Abbildung ist ein Ausschnitt der zellularen Ebene dargestellt; die in dem Feld für eine Zelle α eingetragenen Zahlen stehen dabei für die folgenden Größen:

\underline{t}^α	Zeitpunkt eines ursächlichen T-Inputs an α zwischen \underline{t}^α und t^α auftretende Verzögerung Taktzeitpunkt (= Zeitpunkt der T-Outputs) von α
(v^α)	
t^α	

Treten dann nach einem T-Input an der Ursprungszelle zum Zeitpunkt 0 an den dargestellten Zellen die jeweils eingetragenen Verzögerungen auf, so ergibt sich folgender Ablauf:

0 (1) 1	1 (1) 2	2 (1) 3	3 (1) 4	4 (1) 5	5 (1) 6
1 (1) 2	2 (3) 5	3 (3) 6	4 (1) 5	5 (1) 6	
2 (1) 3	3 (3) 6	6 (3) 9	5 (1) 6		
3 (1) 4	4 (1) 5	5 (1) 6			
4 (1) 5	5 (1) 6				
5 (1) 6					

Die Reihenfolge des Auftretens des Taktsignals an den einzelnen Zellen kann entlang der für die Taktzeitpunkte eingetragenen Zahlen abgelesen werden.

Wir interessieren uns nun für die Menge der Zellen, die bis einschließlich zum Zeitpunkt t einen Taktzeitpunkt haben; diese Menge bezeichnen wir mit F_t :
 $F_t = \{\alpha \mid \exists t^\alpha (t^\alpha \leq t \ \& \ \langle t^\alpha \rangle)\}$.

Nach Art und Weise der Taktverteilung (von Nachbar zu Nachbar) ist klar, daß (für jedes t) F_t - als Gebiet der Ebene Z^2 aufgefaßt - zusammenhängend ist; ferner gilt für $t_1, t_2 \in \mathcal{t}$: $t_1 < t_2 \Rightarrow F_{t_1} \subseteq F_{t_2}$. Aus dem obigen Beispiel folgt sofort:

3.4.2 F_t kann vom Geschlecht > 0 sein.

(Man betrachte etwa F_7 im Beispiel.)

Es ist nun zu klären, ob - bei Eingabe eines Taktsignals - das T-Netz die Organisation des Schaltens der Automatenzellen eines Zellularraums \hat{Z} in gewünschter Weise leistet.

3.4.3 Theorem.

$Z = (Z^2, H_1, Q, q_0, \Sigma)$ sei ein beliebiger, nicht notwendig deterministischer, zweidimensionaler Zellularraum mit von-Neumann-Nachbarschaft, und (\hat{Z}, T) sei der zugehörige Polyautomat. Zum Zeitpunkt 0 der Beobachtungszeit $\mathcal{t} = (R, \leq, 0)$ werde ein Taktsignal als T-Input an der Ursprungszelle eingegeben; der T-Zustand aller Zellen zur Zeit 0 sei ℓ . Dann gilt:

- (a) Für jede Zelle von (\hat{Z}, T) existiert ein Zeitpunkt t , zu der sie einen Taktzeitpunkt hat.
- (b) Die (innerhalb \mathcal{t}) frühesten Taktzeitpunkte je zweier benachbarter Zellen von (\hat{Z}, T) differieren höchstens um v_{\max} .
- (c) Keine Zelle von (\hat{Z}, T) hat mehr als einen Taktzeitpunkt.

Beweis.

(a) Aus 3.4.1 folgt: Eine Zelle α mit den Koordinaten (x, y) hat einen Taktzeitpunkt spätestens zum Zeitpunkt $t = (|x| + |y| + 1) \cdot v_{\max}$, wobei gilt: $0 < v_{\max} < \infty$, vgl. 3.2.3b).

(b) Idee: Von je zwei benachbarten Zellen, die beide noch keinen Taktzeitpunkt hatten, gibt diejenige, die zuerst einen hat, einen T-Input an die andere, der ursächlich ist (und also innerhalb der Verzögerung v_{\max} zu einem Taktzeitpunkt der zweiten führt), falls diese nicht schon früher von einer

anderen Zelle einen ursächlichen T-Input erhalten hat (der auch einen früher eintretenden Taktzeitpunkt zur Folge hat). Die Taktzeitpunkte unterscheiden sich dann höchstens um v_{\max} .

Seien also α und β zwei beliebige benachbarte Zellen im T-Zustand ℓ , von denen keine bisher einen Taktzeitpunkt hatte. Nach (a) existiert für jede Zelle ein Taktzeitpunkt.

1. Fall: α und β haben beide zur gleichen Zeit einen Taktzeitpunkt. Dann beträgt die Differenz $0 < v_{\max}$.

2. Fall: O.B.d.A. habe zuerst α einen Taktzeitpunkt, zur Zeit t^α . D.h. es tritt (wegen 3.3.2) spätestens gleichzeitig mit $\langle t^\alpha \rangle$ ein T-Output $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$ von α auf ($j \in \{1, \dots, 4\}$), der T-Input für β ist. Dabei ist $|t^\alpha - \bar{t}_j^\alpha| < v_{\min}$, (vgl. 3.3.2).

Dann hat β zu einem Zeitpunkt t^β ($t^\alpha < t^\beta$) einen Taktzeitpunkt, für den entweder (i) der mit dem Ereignis $\langle t^\alpha \rangle$ aufgetretene T-Output $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$ ursächlich ist (das hieße $\langle \underline{t}^\beta \rangle \equiv \langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$), oder (ii) ein früher als $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$ aufgetretener T-Output einer anderen Nachbarzelle von β (das hieße: $\langle \underline{t}^\beta \rangle$ früher als $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$), oder (iii) mehrere früher als $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$ gleichzeitig aufgetretene T-Outputs anderer Nachbarzellen von β (das hieße: $\langle \underline{t}^\beta \rangle$ früher als $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$), oder aber (iv) $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$ und ein oder mehrere gleichzeitig mit $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$ auftretende T-Outputs anderer Nachbarzellen von β (das hieße: $\langle \underline{t}^\beta \rangle$ gleichzeitig mit $\langle \bar{t}_j^\alpha \rangle$); vgl. die Repräsentierung eines Ereignisses $\langle \underline{t}^\alpha \rangle$, Seite 55.

Der Taktzeitpunkt von β tritt spätestens nach der auf einen ursächlichen T-Input folgenden Verzögerung v_{\max} ein; es gilt also: $t^\beta \leq \underline{t}^\beta + v_{\max}$.

In den Fällen (i) und (iv) gilt: $\underline{t}^\beta = \bar{t}_j^\alpha$ ($\bar{t}_j^\alpha \leq t^\alpha$ wegen 3.3.2)

Dann gilt auch: $\underline{t}^\beta + v_{\max} \leq t^\alpha + v_{\max}$

und somit: $t^\beta \leq t^\alpha + v_{\max}$

gleichbedeutend mit: $t^\beta - t^\alpha \leq v_{\max}$

Wegen $t^\alpha < t^\beta$ folgt: $|t^\beta - t^\alpha| \leq v_{\max}$

In den Fällen (ii) und (iii) gilt: $\underline{t}^\beta < \bar{t}_j^\alpha$ ($\bar{t}_j^\alpha \leq t^\alpha$)

Hier gilt dann: $\underline{t}^\beta + v_{\max} < t^\alpha + v_{\max}$

und es folgt analog: $|t^\beta - t^\alpha| < v_{\max}$

In jedem Fall unterscheiden sich also die frühesten Taktzeitpunkte von je zwei benachbarten Zellen α und β höchstens um v_{\max} .

W.Z.Z.W.

Im folgenden bezeichne $\langle \bar{t}_{j(\beta)}^\alpha \rangle$, $j(\beta) \in \{1, \dots, 4\}$, genau den in Verbindung mit einem Taktzeitpunkt $\langle t^\alpha \rangle$ auftretenden T-Output von α , der T-Input für die Nachbarzelle β ($\beta \in N(\alpha) \setminus \{\alpha\}$)¹ ist.

Bevor wir (c) beweisen, formulieren wir mit den bisher gewonnenen Erkenntnissen:

Regeln für die Taktverteilung durch ein T-Netz.

(T0) $\exists t^0$ ($0+v_{\min} \leq t^0 \leq 0+v_{\max}$ & $\langle t^0 \rangle$)

(T1) Für $t^\alpha > t^0$:

$$\begin{aligned} \langle t^\alpha \rangle \Rightarrow \exists \beta \quad & (\beta \in N(\alpha) \setminus \{\alpha\} \quad \& \\ & \exists t^\beta \quad (t^\beta < t^\alpha \quad \& \quad \langle t^\beta \rangle \quad \& \\ & 0 < |t^\alpha - t^\beta| \leq v_{\max} \quad \& \\ & \langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle \equiv \langle \underline{t}^\alpha \rangle)) \end{aligned}$$

(T2) $\langle t^\alpha \rangle \Rightarrow \forall \beta \quad (\beta \in N(\alpha) \setminus \{\alpha\} \Rightarrow$
 $\exists j(\beta) \quad (j(\beta) \in \{1, \dots, 4\} \quad \&$
 $\langle \bar{t}_{j(\beta)}^\alpha \rangle \text{ ist T-Input für } \beta \quad \&$
 $(\beta \text{ im T-Zustand } \ell \text{ zu } \bar{t}_{j(\beta)}^\alpha \Rightarrow$
 $\exists t^\beta \quad (t^\alpha < t^\beta \quad \& \quad \langle t^\beta \rangle \quad \&$
 $0 < |t^\alpha - t^\beta| \leq v_{\max}))))$

(T3) Ausschließlich aufgrund von (T0), (T1), (T2) können sich Taktzeitpunkte ereignen.

¹N steht hier immer für die zweidimensionale von-Neumann-Nachbarschaft.

Zur Erläuterung: (T0) besagt, daß die Ursprungszelle α (zu einem Zeitpunkt t^0) einen Taktzeitpunkt hat (nach Voraussetzung des Theorems erhält sie einen einmaligen externen (ursächlichen) T-Input zum Zeitpunkt 0, was als Eingabe eines Taktsignals zu interpretieren ist).

(T1) betrifft die Ursache eines Auftretens des Taktsignals an einer Zelle α und sagt aus, daß für den Eintritt eines Taktzeitpunkts von α ein (höchstens um die Zeitdauer v_{\max}) früher liegender Taktzeitpunkt einer von α verschiedenen Nachbarzelle notwendig ist, in Verbindung mit dem α einen ursächlichen T-Input erhält; ausgenommen ist der aufgrund von (T0) eintretende (erste) Taktzeitpunkt $\langle t^0 \rangle$ der Ursprungszelle.

(T2) betrifft die Weitergabe eines an α aufgetretenen Taktsignals und sagt aus, daß in der Folge eines Taktzeitpunkts $\langle t^\alpha \rangle$ einer Zelle α an allen von α verschiedenen Nachbarzellen β , die zur Zeit des Auftretens von $\langle \bar{t}_j^\alpha(\beta) \rangle$ im T-Zustand ℓ sind, ein höchstens um v_{\max} später liegender Taktzeitpunkt $\langle t^\beta \rangle$ eintritt (wobei nicht notwendig $\langle \bar{t}_j^\alpha(\beta) \rangle \equiv \langle \underline{t}^\beta \rangle$; vgl. (ii) im 2. Fall des Beweises von (b): es kann $\underline{t}^\beta < \bar{t}_j^\alpha(\beta)$ sein).

Aufgrund der Konstruktion der T-Zellnetze (einschließlich der Voraussetzung 3.3.2), der Konstruktion des T-Netzes und - (T0) betreffend - der Voraussetzung des Theorems können Taktzeitpunkte nur im Einklang mit (T0), (T1), (T2) eintreten. Deshalb schließt (T3) die Regeln zur Taktverteilung ab.

Wir beweisen nun (c).

Dafür, daß an einer Zelle α ein Taktzeitpunkt eintritt, ist ein vorhergehender ursächlicher T-Input notwendig, der nach (T1) als T-Output einer Nachbarzelle β von α ($\beta \neq \alpha$) auftreten muß (außer im Fall $\langle t^0 \rangle$). Zum Beweis von (c) soll gezeigt werden, daß keine Zelle, an der ein erster Taktzeitpunkt eingetreten ist, einen ursächlichen T-Input erhalten kann.

Wir betrachten (für beliebiges $t \in \mathcal{L}$) die Menge G_t der Zellen, die bis einschließlich zum Zeitpunkt t genau einen Taktzeitpunkt haben:

$$G_t = \{ \alpha \mid \exists t^\alpha (t^\alpha \leq t \ \& \ \langle t^\alpha \rangle \ \& \ \neg \exists t_1^\alpha (t_1^\alpha \leq t \ \& \ t_1^\alpha \neq t^\alpha \ \& \ \langle t_1^\alpha \rangle)) \}$$

und zeigen zunächst:

Lemma 1.

Keine Zelle β , die einen ersten Taktzeitpunkt zur Zeit t^β hat, kann dabei einer Zelle $\alpha \in G_{t^\beta}$ einen ursächlichen T-Input geben.

Im Beweis unterscheiden wir drei Fälle (für beliebiges $\beta \in Z^2$ mit dem ersten Taktzeitpunkt zu t^β).

1. Fall: $\alpha \in G_{t^\beta}$ & $\alpha \notin N(\beta)$

Mit $\langle t^\beta \rangle$ ist kein T-Input für α verbunden; vgl. (T2), (T3).

2. Fall: $\alpha \in G_{t^\beta}$ & $\alpha = \beta$

Der Fall, daß β sich selbst einen T-Input gibt, ist ausgeschlossen, vgl. (T2), (T3), insbesondere auch im Fall $\beta = \alpha = o$.

3. Fall: $\alpha \in G_{t^\beta}$ & $\alpha \in N(\beta) \setminus \{\beta\}$

D.h. nach (T2) ist spätestens mit $\langle t^\beta \rangle$ ein T-Input für α (als T-Output von β): $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle$ aufgetreten. Wegen $\alpha \in G_{t^\beta}$ gibt es genau ein t^α : $t^\alpha \leq t$ & $\langle t^\alpha \rangle$. Wir zeigen, daß $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle$ weder (i) für $\langle t^\alpha \rangle$ noch (ii) für einen eventuellen späteren Taktzeitpunkt ursächlich ist.

(i) Wegen $t^\alpha \leq t^\beta$ gilt: $t^\alpha - v_{\min} \leq t^\beta - v_{\min}$

und wegen 3.3.2 gilt: $t^\beta - v_{\min} < \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta$

Nach 3.2.3 ist $t^\alpha - v_{\max} \leq \underline{t}^\alpha \leq t^\alpha - v_{\min}$

Es folgt also: $\underline{t}^\alpha < \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta$

Das bedeutet: $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle \neq \langle \underline{t}^\alpha \rangle$, d.h. $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle$ ist nicht ursächlich für $\langle t^\alpha \rangle$.

Bemerkung. Ein Taktzeitpunkt $\langle t^\beta \rangle$ kann also nicht Ursache für einen früher oder gleichzeitig eintretenden Taktzeitpunkt $\langle t^\alpha \rangle$ sein. Falls also umgekehrt $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle \equiv \langle \underline{t}^\alpha \rangle$ gilt, folgt: $t^\alpha - t^\beta > 0$. Diese (durch 3.3.2 gesicherte) Tatsache ist bei der Formulierung der Taktverteilungsregeln (T1), (T2) bereits berücksichtigt.

(ii) z.z.: $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle$ ist nicht ursächlich für $\langle t_j^\alpha \rangle$ ($t^\alpha < t_j^\alpha$)

Nach Voraussetzung sind $\langle t^\alpha \rangle$ und $\langle t^\beta \rangle$ die frühesten Taktzeitpunkte der

(benachbarten) Zellen α und β . Aus $t^\alpha \leq t^\beta$ folgt also mit (b):

$$0 \leq t^\beta - t^\alpha \leq v_{\max}$$

und aufgrund 3.3.4: $0 \leq t^\beta - t^\alpha < s_{\min} + \bar{v}_{\min}$

d.h.: $t^\alpha \leq t^\beta < t^\alpha + s_{\min} + \bar{v}_{\min}$

α ist jedoch bis zum Readyzeitpunkt, also mindestens bis zur Zeit $t^\alpha + s_{\min} + \bar{v}_{\min}$, folglich auch zur Zeit t^β nicht im T-Zustand ℓ (vgl.S.55 und S.57), d.h. der mit $\langle t^\beta \rangle$ (nach 3.3.2 spätestens zur Zeit t^β) auftretende T-Input für α : $\langle \bar{t}_j^\beta(\alpha) \rangle$ ist nicht ursächlich für einen erneuten Taktzeitpunkt von α .

W.Z.Z.W.

Lemma 1 bezieht sich jeweils auf eine Menge G_t . Für jedes t gilt zwar: $G_t \subseteq F_t$, es könnte jedoch, für gewisses t , gelten: $G_t \subsetneq F_t$, d.h. es kann nichts ausgesagt werden darüber, ob das Lemma in jedem Fall alle Zellen, die bis zur Zeit t überhaupt einen Taktzeitpunkt hatten, betrifft.

Es muß also gezeigt werden, daß keine Zelle von F_t mehr als einen ursächlichen T-Input erhält. Nach Voraussetzung des Theorems erfolgt nur ein einziger externer (ursächlicher) T-Input an der Ursprungszelle, d.h. für jede Zelle α kommen nur noch solche (evtl. ursächlichen) T-Inputs in Betracht, die in der Nachbarschaft von α in Verbindung mit Taktzeitpunkten (als T-Outputs auftreten, vgl. (T0), (T1).

Lemma 2. Für jedes t gilt: $F_t = G_t$

Beweis. Wir betrachten (innerhalb \mathcal{L}) Zeitpunkte t_0, t_1, t_2, \dots , die wie folgt bestimmt sind:

$$t_0 = t^0$$

$$t_{n+1} = \min \{ t^\alpha \mid t_n < t^\alpha \ \& \ \exists \alpha \langle t^\alpha \rangle \}$$

Jeder Zeitpunkt t_n ist also Taktzeitpunkt einer oder mehrerer Zellen in Z^2 ; es gilt für jedes n : $F_{t_n} \subseteq F_{t_{n+1}}$.

Das Minimum existiert jeweils, da immer nur endlich viele Zellen α für den

(in \mathcal{t}) nächsten, durch Zellen β aus F_{t_n} verursachten Taktzeitpunkt in Frage kommen, nämlich gerade die Zellen α : $\alpha \in N(F_{t_n})$, wobei F_{t_n} und damit auch $N(F_{t_n})$ zu jedem Zeitpunkt endliche Mengen sind, da durch jeden Taktzeitpunkt einer Zelle jeweils nur Taktzeitpunkte ihrer (endlich vielen) Nachbarzellen verursacht werden können, vgl. (T2). D.h. $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist (innerhalb \mathcal{t}) wohlgeordnet: $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, und $(F_{t_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist wohlgeordnet bezüglich " \subseteq "; Es gilt:

$$F_{t_0} = \{o\} ; \quad \bigcup_n F_{t_n} = Z^2$$

Behauptung. $\forall n : F_{t_n} = G_{t_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Beweis (durch Induktion über n).

Induktionsanfang. Es gilt: $F_{t_0} = G_{t_0} = \{o\}$

Induktionsvoraussetzung. Gelte: $F_{t_n} = G_{t_n}$

Induktionsschritt. Da $G_{t_{n+1}} \subseteq F_{t_{n+1}}$ gilt, bleibt zu zeigen:

$$F_{t_{n+1}} \setminus G_{t_{n+1}} = \emptyset$$

Annahme: $\exists \alpha \quad (\alpha \in F_{t_{n+1}} \setminus G_{t_{n+1}})$

Ein solches α hat genau einen Taktzeitpunkt $\langle t^\alpha \rangle$ bis zur Zeit t_n , denn es gilt: $F_{t_n} \subseteq F_{t_{n+1}}$ und nach Induktionsvoraussetzung: $F_{t_n} = G_{t_n}$ (d.h. also: $\alpha \in G_{t_n}$), und einen zweiten Taktzeitpunkt $\langle t_1^\alpha \rangle$ zur Zeit t_{n+1} , denn nach Konstruktion der (t_n) kann kein Taktzeitpunkt zwischen t_n und t_{n+1} liegen. Es folgt also mit (T1):

$$\exists \beta \quad (\beta \in N(\alpha) \setminus \{\alpha\} \ \& \ \exists t^\beta \quad (\langle t^\beta \rangle \ \& \ t^\beta \leq t_n < t_1^\alpha \ \& \ |t_1^\alpha - t^\beta| \leq v_{\max} \ \& \ \langle \bar{t}_j^\beta(\alpha) \rangle \equiv \langle \underline{t}_1^\alpha \rangle))$$

D.h. α muß vor t_{n+1} ($t_{n+1} = t_1^\alpha$) einen ursächlichen T-Input erhalten haben, aufgrund eines Taktzeitpunkts einer Nachbarzelle β von α .

1. Fall: $\langle t^\beta \rangle$ ist nicht erster Taktzeitpunkt von β ($t^\beta \leq t_n$).

Das hieße: $\beta \in F_{t_n} \setminus G_{t_n}$, was im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht.

2. Fall: $\langle t^\beta \rangle$ ist erster Taktzeitpunkt von β ($t^\beta \leq t_n$).

(i) $t^\beta = t_n$. Nach Lemma 1 gilt: Durch $\langle t^\beta \rangle$ kann keine Zelle von G_{t^β} , $G_{t^\beta} = G_{t_n}$, einen ursächlichen T-Input erhalten. Aus der Annahme folgte aber gerade: $\langle \bar{t}_{j(\alpha)}^\beta \rangle \equiv \langle \underline{t}_j^\alpha \rangle$ & $\alpha \in G_{t_n}$, was nach Lemma 1 nicht möglich ist: Widerspruch.

(ii) $t^\beta < t_n$. Dann ist $\alpha \in G_{t^\beta}$, denn:

Zwischen zwei Taktzeitpunkten von α , $\langle t^\alpha \rangle$ und $\langle t_1^\alpha \rangle$, liegen die Ereignisse $\langle \underline{r}^\alpha \rangle$, $\langle \bar{r}^\alpha \rangle$ und $\langle \underline{t}_1^\alpha \rangle$, vgl. S.56), d.h. für den zeitlichen Abstand der beiden Taktzeitpunkte gilt:

$$|t^\alpha - t_1^\alpha| > s_{\min} + \bar{v}_{\min} + v_{\min}$$

denn es muß $r^\alpha < \underline{t}_1^\alpha$ sein; ferner gilt:

$$\begin{aligned} |t^\beta - t_1^\alpha| &\leq v_{\max} \\ \text{Wegen } t^\beta < t_1^\alpha \text{ gilt: } t_1^\alpha - t^\beta &\leq v_{\max} \\ \text{bzw.} \quad -v_{\max} &\leq t^\beta - t_1^\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Wegen } t^\alpha < t_1^\alpha \text{ gilt: } s_{\min} + \bar{v}_{\min} + v_{\min} < t_1^\alpha - t^\alpha$$

Durch Addieren der beiden letzten Ungleichungen erhält man:

$$s_{\min} + \bar{v}_{\min} + v_{\min} - v_{\max} < t^\beta - t^\alpha$$

$$\text{Wegen 3.3.4 folgt: } 0 < t^\beta - t^\alpha$$

also $t^\alpha < t^\beta$, und somit gilt: $\alpha \in G_{t^\beta}$. Mit Lemma 1 ergibt sich dann aber wie oben ein Widerspruch. Also $F_{t_{n+1}} = G_{t_{n+1}}$.

Damit ist die obige Behauptung bewiesen; es gilt für alle n : $F_{t_n} = G_{t_n}$. Die Behauptung von Lemma 2 beweist sich jetzt wie folgt. Nach Konstruktion von (t_n) gilt:

$$\forall n \forall t (t_n \leq t < t_{n+1} \Rightarrow F_t = F_{t_n} \ \& \ G_t = G_{t_n})$$

Es gilt: $\bigcup_n [t_n, t_{n+1}) = \{t \mid t \in \mathcal{I} \ \& \ t_0 \leq t\}$. Vor t_0 liegt aber kein Taktzeitpunkt; es gilt $F_t = G_t = \emptyset$ für $t \in [0, t_0)$. Somit gilt für jedes $t \in \mathcal{I}$: $F_t = G_t$.

w.z.z.w.

$$\text{Insgesamt gilt nun aber: } \bigcup_{t \in \mathcal{I}} G_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} G_{t_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} F_{t_n} = Z^2$$

d.h. jede Zelle $\alpha \in Z^2$ hat genau einen Taktzeitpunkt.

q.e.d.

3.5 Betrachtung von Taktfolgen - prinzipiell

Es soll im weiteren untersucht werden, ob die Menge der Zellen eines Polyautomaten (\hat{Z}, T) , kurz: ein Polyautomat (\hat{Z}, T) lokal-synchron arbeitet. Dazu ist zunächst nachzuweisen, daß überhaupt mit jedem an der Ursprungszelle eingegebenen Taktsignal gerade ein korrespondierender Taktzeitpunkt an jeder Zelle auftritt (vgl. 3.1.8).

Mit dem Theorem aus 3.4 ist bisher gezeigt, daß dies zumindest bei der Eingabe eines ersten Taktsignals T_1 (früher 'T₀' genannt) gilt. Da sich die Taktzeitpunkte benachbarter Zellen dabei höchstens um v_{\max} unterscheiden, werden (unter der Voraussetzung 3.3.3) die lokalen Übergänge korrekt, d.h. gemäß den Regeln von (Z, sim) ausgeführt. Dabei ist die in 3.4.2 festgestellte Tatsache, daß das zu bestimmten Zeitpunkten vom Takt erreichte Gebiet möglicherweise höheren Geschlechts ist, kein Hinderungsgrund: Soweit zur Zeit t Taktzeitpunkte eingetreten und dadurch initiierte Zustandsübergänge vollzogen sind, liegt damit das partielle Ergebnis gerade eines Ableitungsschritts im Simultankalkül (Z, sim) vor. Wird eine endliche Initialkonfiguration c_a in \hat{Z} vorgegeben, bei der der maximale Abstand einer dem Träger $\text{supp}(c_a)$ angehörender Zelle von der Ursprungszelle m beträgt, so liegt spätestens zur Zeit $(m+2) \cdot v_{\max} + s_{\max}$ das totale Ergebnis des Ableitungsschritts vor, wenn T_1 zur Zeit $t_1 = 0$ eingegeben worden ist, denn, wie früher erwähnt, ist eine endliche Konfiguration bereits durch Einschränkung auf den Träger definiert. Dabei gilt $\text{supp}(c_a') \subseteq N(\text{supp}(c_a))$, wenn c_a' der - bzw. im nicht-deterministischen Fall: ein - Nachfolger von c_a ist.

In dem auf S.34 betrachteten fiktiven Fall spontan-synchroner Ausführung der lokalen Übergänge wären spätestens nach der auf die Eingabe des ersten Taktsignals folgenden Dauer $\epsilon + s_{\max}$ alle Zustandsübergänge, insgesamt also ein globaler Übergang vollzogen, so daß danach durch ein zweites Taktsignal ein zweiter Ableitungsschritt in (Z, sim) zur Ausführung gebracht werden könnte, vgl. 3.1.4, nach wiederum $\epsilon + s_{\max}$ ein dritter usw.

Wie die zu 3.1.6 führenden Überlegungen zeigen, ist es bei einer Menge lokal-synchron arbeitender Automatenzellen ausreichend, wenn an jeder Zelle α die mit aufeinanderfolgenden Taktsignalen T_1, T_2, T_3, \dots korrespondierenden Taktzeitpunkte $\langle t_1^\alpha \rangle, \langle t_2^\alpha \rangle, \langle t_3^\alpha \rangle, \dots$ jeweils mindestens mit dem Zeitabstand $\epsilon + s_{\max}$ auftreten.

Bei einem Polyautomaten (\hat{Z}, T) hat nun nach der Eingabe des ersten Taktsignals die Ursprungszelle zur Zeit $t_1 + v_{\max} + s_{\max}$ mit Sicherheit den Nachfolgezustand eingenommen, so daß nach ihrem Wiedereintritt in den T-Zustand ℓ , also zu einer Zeit $t_2 \geq t_1 + v_{\max} + s_{\max} + \bar{v}_{\max}$ ein zweites Taktsignal als T-Input an der Ursprungszelle eingegeben werden kann ('=' ist deshalb möglich, weil ein im Moment des Wiedereintritts in ℓ auftretender T-Input nicht spontan am Eingang 1 des I-Bausteins auftreten kann). Nach wiederum der Dauer $D \geq v_{\max} + s_{\max} + \bar{v}_{\max}$ kann dann ein drittes Taktsignal eingegeben werden usf. Wenn nun, wie hier zunächst angenommen ist, die bei dem ersten Taktsignal an den einzelnen T-Zellnetzen spezifisch aufgetretenen Verzögerungen sich über die Zeit nicht verändern, so würden bei jedem folgenden Taktsignal die Taktzeitpunkte der einzelnen Zellen in jedesmal der gleichen Reihenfolge eintreten. Dabei würde der zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Taktzeitpunkte an jeder Zelle genau D betragen, wodurch eine gegenseitige Beeinflussung der durch verschiedene Taktsignale erzeugten Prozesse ausgeschlossen wäre. Dies beruht auf folgender Überlegung.

Bei Eintritt des mit dem zweiten Taktsignal T_2 korrespondierenden Taktzeitpunkts $\langle t_2^\alpha \rangle$ haben in diesem Fall jeweils alle Nachbarn einer Zelle α den ersten Zustandsübergang (incl. Rückstellung in den T-Zustand ℓ) mit Sicherheit vollzogen, sind also in definiertem Zustand und bereit für einen erneuten ursächlichen T-Input. D.h. auch wenn zum Zeitpunkt der Eingabe des Signals T_2 nicht alle Zellen von (\hat{Z}, T) einen Zustandsübergang (mit Rückstellung in ℓ) ausgeführt haben, ist lokal (im Bereich einer Nachbarschaft) dies jedesmal dort schon geschehen, wo ein von T_2 verursachter Taktzeitpunkt eintritt.

Der Beweis des Theorems aus 3.4 beruhte jedoch ausschließlich auf lokaler Argumentation (es wurden in jedem Fall nur benachbarte Zellen betrachtet), so daß (\hat{Z}, T) im zweiten Takt betrachtet werden kann wie im ersten - denn ein Nachbar einer Zelle mit einem zweiten Taktzeitpunkt, der selbst noch keinen zweiten ursächlichen T-Input hatte, ist im T-Zustand ℓ -, jedoch jetzt, als wenn c_a' die Initialkonfiguration wäre, falls c_a' die im ersten Takt lokal bereits erzeugte Nachfolgekonzfiguration von c_a ist.

D.h. die durch das Theorem für einen ersten Takt bewiesenen Aussagen folgen dann in gleicher Weise auch für einen zweiten Takt, mit wieder der gleichen Argumentation für einen dritten usf., da dann jedesmal dort, wo ein durch

ein Taktsignal T_{k+1} verursachter Taktzeitpunkt eintritt, lokal die k -ten Zustandsübergänge vollzogen und die betreffenden Zellen wieder im T-Zustand ℓ sind, so daß der mit dem Taktzeitpunkt verbundene T-Output für eine solche Zelle ein ursächlicher T-Input ist und somit auch dort zu einem $(k+1)$ -ten Taktzeitpunkt führt. Dabei unterscheiden sich nach der Theoremaussage (b) jeweils die k -ten Taktzeitpunkte benachbarter Zellen höchstens um v_{\max} ($k=1,2,\dots$). Unter diesen Voraussetzungen sind also die Bedingungen von Definition 2 aus 3.1 erfüllt, und wir erhalten als Korollar zu Theorem 3.4.3:

3.5.0 Unter der Voraussetzung, daß die in den T-Zellnetzen auftretenden Verzögerungen zeitlich konstant sind, gilt: (\hat{Z}, T) arbeitet lokal-synchron.

Das heißt aber: Mit jedem Taktsignal wird durch den Zellularautomaten (\hat{Z}, T) gerade ein Ableitungsschritt des korrespondierenden Simultankalküls zur Ausführung gebracht - bei lokal-synchroner Arbeitsweise! Somit ist bewiesen: Außer durch einen synchronen (3.1.2) kann (Z, sim) auch durch einen lokal-synchronen Zellularautomaten adäquat ausgeführt werden (3.3.1).

Es soll nun untersucht werden, inwieweit dieses Konzept lokal-synchroner Arbeitsweise mit den in 3.1 formulierten Postulaten vereinbar ist. Dazu müssen wir die Möglichkeit eines zeitlichen Variierens der in den T-Zellnetzen auftretenden Verzögerungen konsequent in Betracht ziehen (3.2.3a):

Bei einer Folge von an der Ursprungszelle eingegebenen Taktsignalen T_1, T_2, \dots durchläuft möglicherweise ein Signal T_{k+1} bestimmte T-Zellnetze (aufgrund kleinerer dort auftretender Verzögerungen) schneller als das vorhergehende Signal T_k . Als globale Auswirkung dieser zeitlichen Variation der "Signalgeschwindigkeit" in den Komponenten des T-Netzes könnte das mit 3.1.10 bereits angesprochene Problem einer Einholung von aufeinanderfolgenden Taktsignalen im T-Netz auftreten: falls nämlich Impulse, die ein Signal T_{k+1} repräsentieren, das T-Zellnetz einer Zelle erreichen, die noch in der Abwicklung des durch das vorangehende Taktsignal T_k erzeugten Prozesses begriffen sind.

Nimmt man, gemäß 3.2.3a), einmal an, daß beim ersten Takt T_1 an allen Zellen eines Polyautomaten (\hat{Z}, T) die Verzögerung v_{\max} auftritt, bei einem weiteren Takt T_2 jedoch jeweils v_{\min} , so wird sich die zweite "Taktfront" (der Rand des von T_2 zur Zeit t erreichten Gebiets $F_t^{(2)}$) mit wachsender Zeit

t der ersten (dem Rand¹ von $F_t^{(1)}$) immer mehr annähern und - egal, wie groß der Zeitabstand bei der Taktsignaleingabe gewählt wurde - schließlich an den Bereich von Zellen gelangen, die nach der Ausführung des ersten Zustandsübergangs noch nicht wieder im T-Zustand ℓ sind. An diesen Zellen können aber die das zweite Taktsignal repräsentierenden Impulse keine für einen zweiten Taktzeitpunkt ursächlichen T-Inputs sein, und somit tritt an diesen Zellen das Signal T_2 nicht auf. Unter den mit 3.2.3a) vorliegenden Voraussetzungen gilt also:

3.5.1 Eine Einholung von aufeinanderfolgenden Taktsignalen ist prinzipiell möglich.

Mit 3.1.10' wurde die Frage angesprochen, ob ein Taktsignal T_k durch das nächstfolgende Signal T_{k+1} , evtl. auf einem anderen Wege, überholt werden kann, d.h. daß zu irgendeinem Zeitpunkt t an einer $F_t^{(k)}$ nicht angehörenden Zelle ein von T_{k+1} verursachter Taktzeitpunkt eintritt. Betrachten wir zunächst die ersten beiden Taktsignale T_1 und T_2 .

Das zweite Taktsignal wird - wie jedes Taktsignal - an der Ursprungszelle, also im Inneren² des mit t wachsenden, zusammenhängenden Gebietes $F_t^{(1)}$ eingegeben. Um das Signal T_1 zu überholen, müßte T_2 , da es nur von Nachbarzelle zu Nachbarzelle weiterlaufen kann, zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 den Rand von $F_{t_0}^{(1)}$ passieren, was eine vorherige Einholung voraussetzt.

Falls keine Einholung auftritt, könnte also T_2 nicht T_1 überholen. Mit dem gleichen Argument könnte dann, ohne vorherige Einholung, T_3 nicht T_2 (erst recht nicht T_1) überholen usf., das heißt:

3.5.2 Falls zu keinem Zeitpunkt eine Einholung auftritt, ist eine Überholung aufeinanderfolgender Taktsignale nicht möglich.

Jedoch ist es denkbar, daß eine Zelle α , an der aufgrund einer Einholung das k-te Taktsignal nicht auftritt, eben weil sie während des k-ten Taktzeitpunkts ihrer Nachbarzellen nicht im T-Zustand ℓ ist, den mit dem (k+1)-ten

¹ Für jedes t ist $\text{Rand}(F_t^{(k)}) := F_t^{(k)} \cap N(N(F_t^{(k)}) \setminus F_t^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$;
N bezeichnet die erweiterte Nachbarschaft.

² Für jedes t ist $\text{Inneres}(F_t^{(k)}) := F_t^{(k)} \setminus \text{Rand}(F_t^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots$

Taktzeitpunkt einer Nachbarzelle β auftretenden T-Output $\langle \bar{t}_j^\beta(\alpha) \rangle$ im T-Zustand ℓ erhält: als ursächlichen T-Input also, der zu einem T_{k+1} repräsentierenden Taktzeitpunkt von α führt. In diesem Fall hätte, bedingt durch vorherige Einholung, T_{k+1} das Signal T_k überholt.

Betrachten wir nun einen Polyautomaten (\hat{Z}, T) mit Initialkonfiguration, dessen sämtliche Zellen zur Zeit $t_1 = 0$ im T-Zustand ℓ sind. Es werde eine Folge von Taktsignalen T_1, T_2, \dots an der Ursprungszelle zu Zeitpunkten t_1, t_2, \dots jeweils mit dem Abstand $D \geq v_{\max} + s_{\max} + \bar{v}_{\max}$ eingegeben, d.h. für $k = 1, 2, \dots$:

$$(TO)^{(k)} \quad \exists t_k^0 \quad (t_k + v_{\min} \leq t_k^0 \leq t_k + v_{\max} \ \& \ \langle t_k^0 \rangle)$$

und es sei vorausgesetzt, daß keine Einholung aufeinanderfolgender Taktsignale auftritt.

Für jedes k sind also zu jedem Zeitpunkt t diejenigen Nachbarn einer Zelle mit einem zu t auftretenden, durch das Signal T_k verursachten Taktzeitpunkt, die noch keinen durch T_k verursachten T-Input hatten, im T-Zustand ℓ ; d.h. die entsprechende Voraussetzung des Theorems aus 3.4 ist jeweils lokal erfüllt (vgl. die obigen Überlegungen für den Fall zeitlich nicht variierender Verzögerungen).

D.h. daß für jedes k (a) an jeder Zelle α überhaupt ein durch T_k verursachter Taktzeitpunkt $\langle t_k^\alpha \rangle$ eintritt, wobei (b) die (frühesten) durch T_k verursachten Taktzeitpunkte benachbarter Zellen sich um höchstens v_{\max} unterscheiden. Mit 3.5.2 folgt ferner:

Für jede Anzahl $k+1$ von zur Zeit t bereits eingegebenen Taktsignalen gilt für jedes t :

$$F_t^{(k+1)} \subsetneq F_t^{(k)} \subsetneq \dots \subsetneq F_t^{(1)}$$

wobei $F_t^{(k)} = \{ \alpha \mid \exists t_k^\alpha \ (t_k^\alpha \leq t \ \& \ \langle t_k^\alpha \rangle) \}$, $k=1, 2, \dots$; insgesamt kann dann, die Theoremaussage (c) betreffend, für jedes k das $(k+1)$ -te Signal betrachtet werden, indem über die Menge $F_t^{(k+1)}$ genauso argumentiert wird wie im Beweis des Theorems über die Menge F_t ($F_t = F_t^{(1)}$).

Unter der (Induktions)Voraussetzung: $\forall t \quad F_t^{(k)} = G_t^{(k)}$

folgt dann (Induktionsschluß): $\forall t \quad F_t^{(k+1)} = G_t^{(k+1)}$

und da nach dem in 3.4 bewiesenen Theorem (als Induktionsanfang) gilt:

$$\forall t \quad F_t^{(1)} = G_t^{(1)}, \text{ folgt: } \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathcal{t} \quad F_t^{(k)} = G_t^{(k)}.$$

D.h. an jeder Zelle von (\hat{Z}, T) tritt dann für jedes eingegebene Taktsignal T_k ein korrespondierender Taktzeitpunkt auf, wobei sich die k -ten Taktzeitpunkte benachbarter Zellen paarweise höchstens um v_{\max} unterscheiden und die korrekte Ausführung der lokalen Übergänge aufgrund 3.3.3 gewährleistet ist. Die Bedingungen von Definition 2 aus 3.1 wären also erfüllt. Damit ist gezeigt:

3.5.3 Falls zu keiner Zeit t an einem Ort α eine Einholung aufeinanderfolgender Taktsignale auftritt, so arbeitet (\hat{Z}, T) lokal-synchron.

Eine Einholung tritt aber gerade dann nicht auf, wenn (für $k=1, 2, \dots$) jede Zelle α , die einen durch das Taktsignal T_k verursachten Zustandsübergang vollzogen hat, zum Zeitpunkt des frühesten durch das Signal T_{k+1} verursachten T-Inputs an α , der als T-Output mit dem Taktzeitpunkt einer Nachbarzelle β von α auftritt, im T-Zustand ℓ ist, denn:

- (i) ist dann dieser T-Input ursächlich, d.h. in seiner Folge tritt ein T_{k+1} repräsentierender Taktzeitpunkt an α auf, und
- (ii) beträgt dann die Differenz der $(k+1)$ -ten Taktzeitpunkte von α und β höchstens v_{\max} , was (für α und dieses β) nicht gewährleistet wäre, wenn dadurch, daß α erst nach dem Auftreten des T-Outputs von β in den T-Zustand ℓ eintritt, ein anderer als der früheste T-Input ursächlich für den Taktzeitpunkt von α wäre.

Jede Zelle α ist aber mit Sicherheit nach der auf den letzten ursächlichen T-Input folgenden Dauer $v_{\max} + s_{\max} + \bar{v}_{\max}$ wieder im T-Zustand ℓ . D.h. ein unmittelbar jetzt folgender T-Input wäre ursächlich für einen erneuten Taktzeitpunkt von α ; tritt der T-Input jedoch früher auf, ist möglicherweise α nicht im T-Zustand ℓ .

Hinreichend dafür, daß keine Einholung auftritt, wäre also ein zeitlicher Mindestabstand der von aufeinanderfolgenden Taktsignalen verursachten frühesten T-Inputs an jeder Zelle: $D_{\min} = v_{\max} + s_{\max} + \bar{v}_{\max}$.

Da die vom ersten Taktsignal T_1 verursachten frühesten T-Inputs an jeder Zelle ursächlich sind, gilt das unter dieser Voraussetzung auch für jedes folgende Taktsignal. D.h. also:

3.5.4 Treten an jeder Zelle von (\hat{Z}, T) die durch aufeinanderfolgende Taktsignale verursachten frühesten T-Inputs mit mindestens dem Zeitabstand $D_{\min} = v_{\max} + s_{\max} + \bar{v}_{\max}$ auf, so arbeitet (\hat{Z}, T) lokal-synchron.

Wie die zu 3.5.1 führende Überlegung ergibt, kann jedoch - bei beliebiger Wahl des Zeitabstandes D bei der Taktsignaleingabe an der Ursprungszelle ($D \geq D_{\min}$) - prinzipiell eine Einholung eintreten. Im folgenden werden wir zeigen, daß eine solche Einholung - jedenfalls unter schwachen (lokalen) Voraussetzungen (auch zusätzlichen) - nicht mit absoluter Sicherheit auszuschließen ist.

Um eine über ein kritisches Maß hinausgehende zeitliche Annäherung der Taktfronten zweier aufeinanderfolgender Signale zu verhindern, müßte dort, wo ein solcher Fall an der zeitlichen Dichte der durch die Signale an den Zellen hervorgerufenen T-Inputs erkennbar wird, unter Bezugnahme auf den "Grad" der Annäherung ein dem entgegenwirkender Eingriff erfolgen: ein Regelungsprozeß also, der von im T-Netz zu repräsentierenden Regelgliedern ausgeführt werden müßte. Ein solches Regelglied wäre unter den Postulaten aus 3.1 ähnlichen Beschränkungen in seiner Genauigkeit unterworfen wie ein Schaltelement nach Voraussetzung 3.1.3. Wir wollen die Diskussion auf solche Regelungsprozesse beschränken, die sich innerhalb der lokalen Struktur eines Polyautomaten (\hat{Z}, T) realisieren lassen: Das Messen und Regeln der zu kontrollierenden Größen soll jeweils in ein und derselben Zelle erfolgen.

Nun sei angenommen, daß ein Regelungsprozeß gegeben ist, der folgenden Bedingungen genügt:

- (1) Bei Unterschreiten einer kritischen zeitlichen Distanz D_{krit} zweier aufeinanderfolgender Taktsignale an einer Zelle wird das zweite dort zusätzlich verzögert, genauer: die zwischen ursächlichem T-Input und dem (mit T-Outputs einhergehenden) Taktzeitpunkt liegende Verzögerung wird vergrößert.

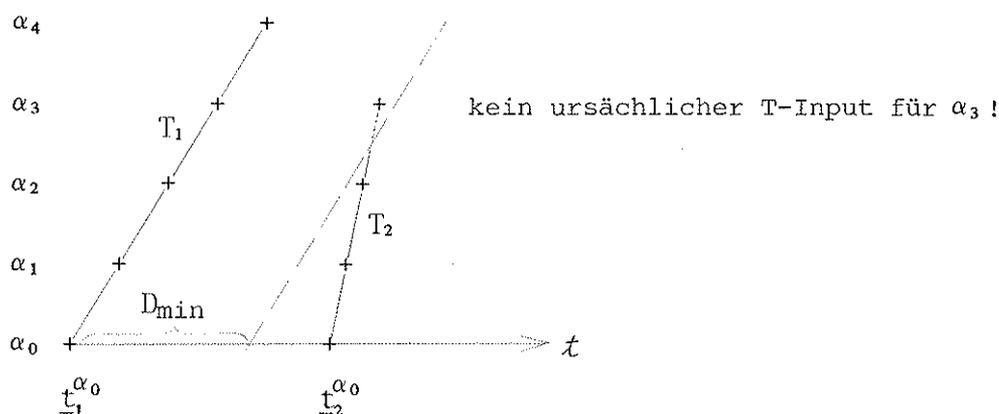
- (2) Die Zusatzverzögerung ist vom Grad der Annäherung abhängig und tritt mit einer Toleranz $\pm \frac{\delta}{2}$ auf.
- (3) Bei zwei aufeinanderfolgenden Taktsignalen, von denen das erste in jedem durchlaufenen T-Zellnetz höchstens der Verzögerung v_{\max} unterliegt, wird eine Annäherung über einen Mindestabstand D_{\min} hinaus in jedem Fall verhindert ($D_{\min} < D_{\text{krit}}$).
- (4) Die Zusatzverzögerung und damit auch die Gesamtverzögerung ist nach oben begrenzt.
- (5) Es ist zugelassen, daß die maximale Gesamtverzögerung im T-Zellnetz um c größer als v_{\max} ist, jedoch gelte (anstelle von 3.3.3):

$$v_{\max} + c \leq \varepsilon .$$

Wir werden nun einen Extremfall konstruieren, bei dem die verschiedenen Verzögerungen innerhalb der gegebenen Toleranzen in solcher Weise auftreten, daß kein Regelungsprozeß, der (1) bis (5) genügt, eine Einholung von Taktsignalen zu verhindern imstande ist.

Wir betrachten dazu einen eindimensional halbseitig unbegrenzt sich erstreckenden Streifen von Zellen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, deren T-Zellnetze zusätzlich ein (1) bis (5) erfüllendes Regelglied enthalten. Ein (als T-Input) an eine Zelle α_k gelangendes Taktsignal wird durch das T-Zellnetz von α_k (als T-Output) an α_{k+1} weitergegeben; die Eingabe der Signale erfolge an α_0 .

Es sei zunächst angenommen, daß für das erste Taktsignal T_1 an allen Zellen die nach 3.2.3 maximale Verzögerung v_{\max} auftritt, bei allen folgenden Signalen aber jeweils v_{\min} . Das bedeutet, daß (vgl. das nachstehende Beispiel)

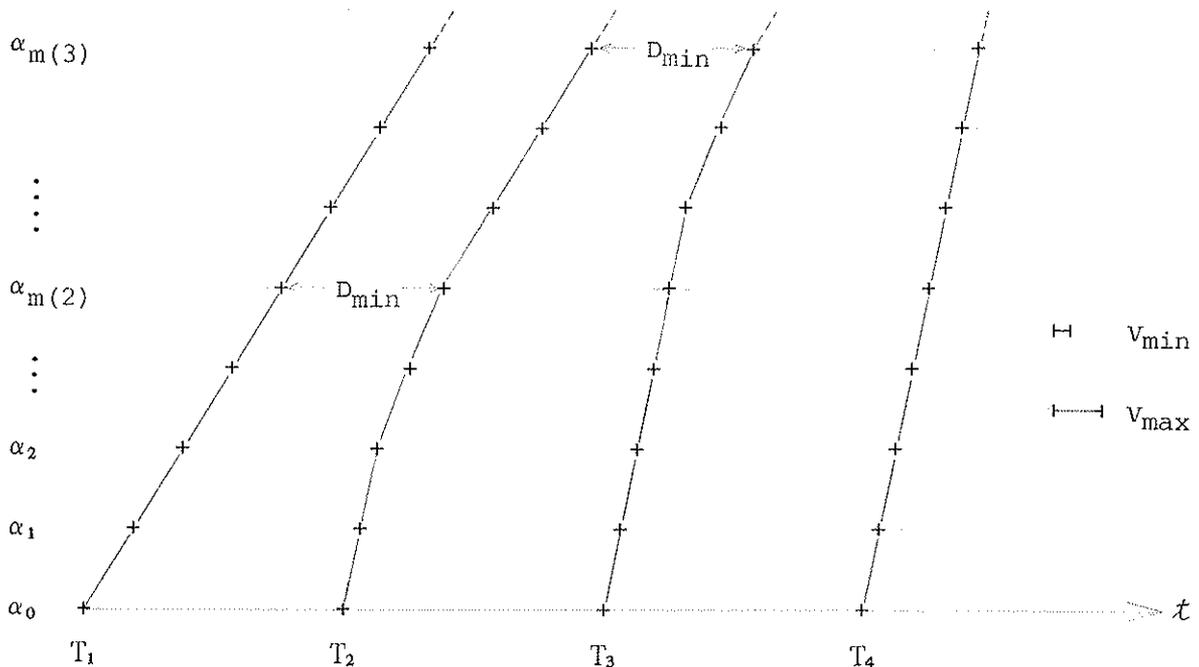


ohne Eingriff durch einen Regelungsprozeß T_2 das erste Signal T_1 einholen würde, was nicht passieren darf: es soll ja ein Mindestabstand D_{\min} an keiner Zelle unterschritten werden.

In dem angenommenen Fall wird jedenfalls an irgendeiner Zelle die kritische Zeitdistanz zwischen den beiden T_1 und T_2 repräsentierenden T-Inputs unterschritten, so daß gemäß (1) der Regelungsprozeß Zusatzverzögerung z für T_2 generiert. Hierfür sei nach (2) angenommen, daß z jeweils den innerhalb der Toleranz minimalen Wert z_u annimmt ($z_o = z_u + \delta$ wäre also der an der oberen Toleranzgrenze liegende Wert).

Gemäß (3) kann sich bei ständigem Anhalten all dieser Bedingungen die zeitliche Distanz von T_1 und T_2 an keiner Zelle unter den Mindestwert D_{\min} verringern. Das bedeutet, daß in dem jetzt zu betrachtenden, noch zugelassenen Fall: an jeder Zelle wird D_{\min} tatsächlich angenommen, als Summe von v_{\min} und Zusatzverzögerung (untere Toleranzgrenze) für T_2 nun jeweils v_{\max} auftritt, jedoch nur unter dem fortwährenden Einwirken von Zusatzverzögerung, gemäß den obigen Voraussetzungen.

Ab einer bestimmten Zelle tritt also an allen folgenden Zellen für T_2 v_{\max} auf. Da nach Voraussetzung die Signale T_3, T_4, \dots zunächst an jeder Zelle der Verzögerung v_{\min} unterliegen, kommt es hier zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Signalen zum gleichen Ablauf wie bei T_1, T_2 . Dazu folgende Skizze:

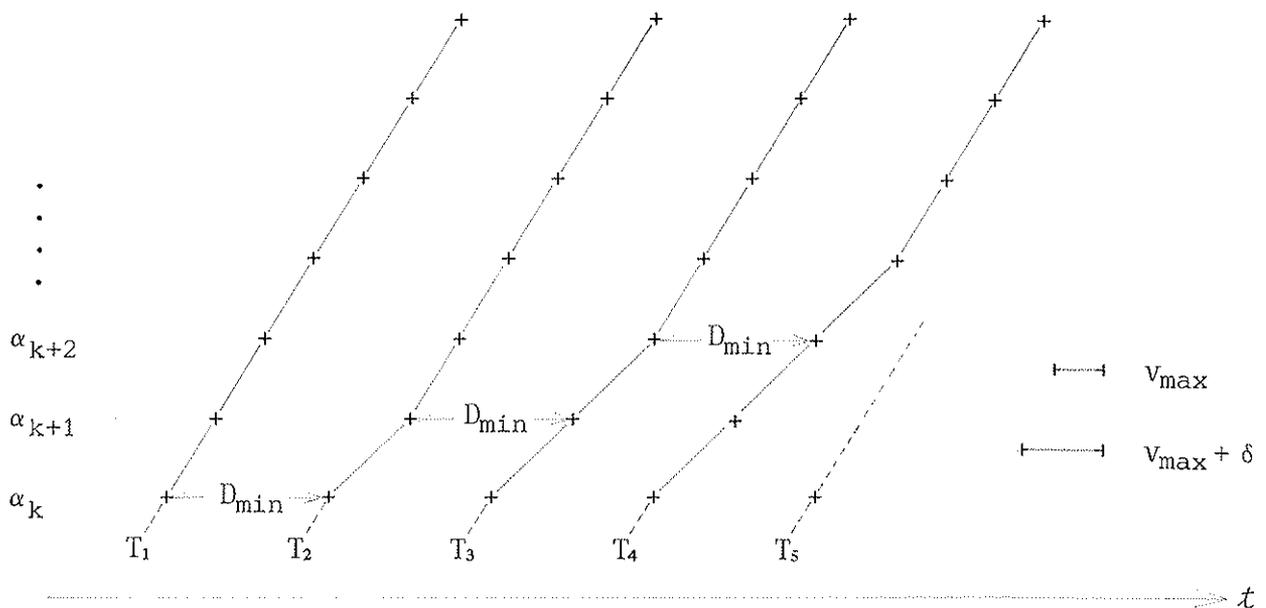


Für jedes n gibt es dann also ein $m(n)$, so daß ab der Zelle $\alpha_{m(n)}$ alle Takt-signale bis einschließlich T_n jeweils der Verzögerung v_{\max} unterliegen, so-lange die bisherigen Bedingungen unverändert gelten.

Jetzt wollen wir zeigen, daß es unter der Annahme, daß diese Bedingungen in einer bestimmten, prinzipiell möglichen Weise variieren, zu einem unver-meidlichen Eklat kommen muß.

Bis zu einer Zelle α_k sei also die oben dargestellte Situation (für ein festes n) gegeben ($k > m(n)$). D.h. an α_k beträgt der Zeitabstand der T-Inputs je zweier aufeinanderfolgender Signale jeweils D_{\min} (bis einschließlich T_{n-1}, T_n). Ab hier trete jedoch nun die jeweilige Zusatzverzögerung mit dem an der oberen Toleranzgrenze liegenden Wert $z_o = z_u + \delta$ auf, was nach (2) möglich ist, so daß nun die Signale in jedem folgenden T-Zellnetz der (nach (5) zulässigen) maximalen Gesamtverzögerung $v_{\max} + \delta$ unterliegen. Vereinfachend sei angenom-men, daß mit dem sich für T_1, T_2 an α_{k+1} ergebenden Abstand $D_{\min} + \delta$ der kri-tische Abstand überschritten ist, so daß an α_{k+1} im Höchstfall v_{\max} zu erwar-ten ist (eine größere Verzögerung würde sich im hier konstruierten Fall nur verschärfend auswirken).

Angenommen, es tritt nun für T_2 an allen folgenden Zellen jeweils v_{\max} (statt wie zuvor v_{\min}) auf, und angenommen, es geschieht ein analoger Wechsel der Be-dingungen für T_3, \dots, T_{n-1} , so ergibt sich folgender Ablauf:



Während T_2 nur einmal dem maximalen Einfluß des Regelungsprozesses unterliegt (an α_k), besteht für T_3 diese Möglichkeit zweimal (an α_k und an α_{k+1}), für T_4 entsprechend dreimal usw.; für das n -te Signal kann also $(n-1)$ -mal hintereinander die maximale Gesamtverzögerung $v_{\max} + \delta$ auftreten, bevor es dem Einfluß der Regelung nicht mehr unterliegt.

Tritt nun für das $(n+1)$ -te Signal die Zusatzverzögerung (von der Zelle α_k an) wieder mit jeweils dem an der unteren Toleranzgrenze liegenden Wert auf, so daß für T_{n+1} also an jeder Zelle die Gesamtverzögerung v_{\max} beträgt (wie in der vorseitigen Abbildung für T_5 angedeutet), so erfolgt eine Annäherung von T_{n+1} an T_n , die vom Regelungsprozeß wegen der Annahme (4) nicht mehr zu kompensieren ist; auch jeder kleinere als der nach (3) vorgegebene Abstand D_{\min} kann, wenn n bei der Konstruktion des obigen Beispiels nur hinreichend groß gewählt wird, so stark unterschritten werden, daß schließlich ein von T_{n+1} verursachter T-Input nicht-ursächlich ist.

D.h. auch wenn in (3) ein Regelungsmindestabstand vorgegeben wird, der noch beliebig viel "Spielraum" enthält, kann eine Einholung von Signalen nicht ausgeschlossen werden, soweit keine maximale Anzahl von in Betracht kommenden Taktsignalen bekannt ist (was hier angenommen werden soll): Die Konstruktion des obigen Beispiels beruht nämlich gerade darauf, daß unter den Ausgangsbedingungen (1), ..., (5) für hinreichend großes n bei einem Signal T_n eine beliebig lange Folge von Auftreten der maximalen Gesamtverzögerung (in T-Zellnetzen) denkbar ist, die vom Regelungsprozeß nur solange zu bewältigen ist, wie beim folgenden Signal die Zusatzverzögerung auch mit dem an der oberen Toleranzgrenze liegenden Wert auftritt.

Eine Einholung von Taktsignalen könnte durch einen Regelungsprozeß also nur dadurch verhindert werden, daß, wenn irgendwo (in vorher nicht anzugebender Entfernung vom Ursprung) der Beginn einer mehrfachen kritischen Annäherung erkennbar wird, rechtzeitig ein die Anzahl eingegebener Taktsignale betreffender Eingriff erfolgt, das bedeutet: Die Taktuhr dürfte kein weiteres Signal abgeben, solange von "zu vielen" Zellen eine kritische Signaldichte gemeldet wird. Eine solche Regelung wäre ein globaler Prozeß: er erforderte eine Informationsübermittlung zwischen beliebig weit vom Ursprung entfernten Zellen und der Ursprungszelle, dem Ort der Taktuhr. Die physikalische Realisierung eines derart geregelten wachsenden Automaten wäre mit 3.1.0 unvereinbar.

Dagegen ist die uneingeschränkte Realisierung eines Polyautomaten mit einem ausschließlich (1),..., (5) genügenden, in jedem einzelnen T-Zellnetz repräsentierten Regelungsprozeß denkbar, jedoch kann ein solcher lokaler Regelungsprozeß, bei unbeschränkter Anzahl von Zellen, das Einhalten eines Signalmindestabstands D_{\min} an jeder Zelle nicht gewährleisten, wie das obige Beispiel gezeigt hat. Wir stellen also fest:

3.5.5 (Negativresultat.) Eine Einholung von aufeinanderfolgenden Taktsignalen kann durch einen lokalen Regelungsprozeß prinzipiell nicht ausgeschlossen werden.

Es soll abschließend die Notwendigkeit der Bedingungen (1),..., (5) diskutiert werden.

(1) Eine zusätzliche Verzögerung ist erforderlich, um überhaupt Einfluß auf die an den Zellen auftretenden Taktabstände nehmen zu können. Eine eventuelle Beschleunigung des ersten Taktsignals gegenüber dem zweiten ist undenkbar bei einem innerhalb jeweils einer Zelle Einfluß nehmenden Regelungsprozeß, denn erst bei dem Eintreffen eines Nachfolgesignals T' (als T-Input) an einer Zelle α wird eine zeitliche Distanz zum vorausgehenden Signal T feststellbar, so daß die bis zur Weitergabe des Taktsignals T (als T-Output) an α auftretende Verzögerung zum Zeitpunkt des Eintreffens von T' ein bereits eingetretenes Ereignis ist, an dem nicht manipuliert werden kann. - Die Zusatzverzögerung soll erst bei Unterschreiten eines Abstands D_{krit} einsetzen, der unter dem Zeitabstand D_{TAKT} bei der Taktsignaleingabe liegen muß: andernfalls würde jedes auf T_1 folgende Signal von vornherein zusätzlich verzögert.

(2) Die Annahme, daß die (idealen) Werte der Zusatzverzögerung tatsächlich toleranzbehaftet auftreten, resultiert aus den bereits angesprochenen Beschränkungen für die Genauigkeit von (physikalischen) Meß- und Stellgliedern (könnte man Zusatzverzögerung exakt bestimmen und generieren, so wäre ein funktionsfähiger lokaler Regelungsprozeß denkbar).

(3) Die Verzögerung v_{\max} kann schon beim ersten, von keiner zusätzlichen Verzögerung betroffenen Signal auftreten und muß daher im genannten Fall vom Regelungsprozeß bewältigt werden können.

(4) Eine Beschränkung der maximalen Gesamtverzögerung im T-Zellnetz ist bei angestrebter lokal-synchroner Arbeitsweise der Zellen $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ notwendig:

Nach Definition 2 aus 3.1 dürfen die aus einem Taktsignal T resultierenden Taktzeitpunkte je zweier Zellen α_k, α_{k+1} höchstens um einen endlichen Betrag ϵ differieren.

(5) Die Gesamtverzögerung muß jedoch v_{\max} überschreiten können, denn wenn an einer Zelle α_k der Zeitabstand der von zwei aufeinanderfolgenden Signalen T, T' verursachten T-Inputs D_{\min} beträgt, so kann ohne Zusatzverzögerung im Extremfall (v_{\max} bei T, v_{\min} bei T') der Zeitabstand der resultierenden T-Outputs an α_k (der T-Inputs an α_{k+1} also) $D_{\min} - v_{\max} + v_{\min}$ betragen. Um in diesem Fall D_{\min} einzuhalten, muß die zu generierende Zusatzverzögerung mindestens $v_{\max} - v_{\min}$ betragen, $z_u \geq v_{\max} - v_{\min}$ also; die Gesamtverzögerung beträgt dann $v_{\min} + z_u$, d.h. im geringsten Fall v_{\max} . Bei zusammentreffendem Auftreten der Maxima von v und z kann die tatsächliche Gesamtverzögerung aber $v_{\max} + z_o$, also $v_{\max} + v_{\max} - v_{\min} + \delta$ betragen, wobei $c = v_{\max} - v_{\min} + \delta$ die in (5) vorausgesetzte Ungleichung erfüllen muß.

Ein lokaler Regelungsprozeß muß also notwendigerweise (mindestens) den Bedingungen (1), ..., (5) genügen. Jedoch zeigt das obige Beispiel, daß sich daraus schon ein nicht zu verhindernder Fall einer Einholung konstruieren läßt.

3.6 Betrachtung von Taktfolgen in Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$

Wie wir gesehen haben, ist also eine Einholung aufeinanderfolgender Taktsignale unter der Voraussetzung 3.2.3a) in keinem Fall mit Sicherheit auszuschließen, wenn eine unbeschränkte Anzahl von Zellen betrachtet wird, ob mit oder ohne Regelungsprozeß (3.5.1/3.5.5).

Nun ist jedoch nicht anzunehmen, daß in der physikalischen Realität zu irgendeinem Zeitpunkt unendlich viele Zellen existieren können; die Ressourcen sind begrenzt. Zur Beschreibung realer Zellularautomaten werden daher i.a. die auf S.23 erwähnten endlich berandeten Zellularräume (mit Ruhezustand) zugrundegelegt und vorausgesetzt, daß zunächst ein bestimmter endlicher Bereich von Zellen - genügend groß, die Initialkonfiguration plus erwarteten Zuwachs

bei der Lösung einer dem Automaten übertragenen Aufgabe fassen zu können - realisiert wird. Er wird durch spezielle Randzellen abgeschlossen oder aber durch normale Zellen, die im Fall, daß sie dem Rand des bisher realisierten Bereichs angehören, die fehlenden äußeren Nachbarn als im Ruhezustand befindlich interpretieren, was hier angenommen werden soll.

Falls zur Lösung einer (z.B. rekursiven) Aufgabe der realisierte Bereich nicht ausreicht, also irgendwo der Rand erreicht wird, sind von außen nach Bedarf neue Zellen anzufügen (vgl. S.29)¹. Das betreffs seiner Komponenten homogene Schema des T-Netzes erlaubt es dabei, einen solchen Erweiterungsschritt - jedenfalls was die Einrichtung des physikalischen Aufbaus betrifft - als von der Größe des bereits realisierten Bereichs unabhängigen lokalen Prozeß auszuführen: durch einfaches Anfügen einer Zelle (mit unterliegendem T-Zellnetz) - in dieser Hinsicht ist also 3.1.0 erfüllt. Jedoch besteht für jeden beliebigen endlichen Zeitabstand bei der Eingabe von Taktsignalen bei genügend großem Abstand n einer Zelle vom Ursprung die prinzipiell nicht vermeidbare Möglichkeit einer Einholung von Signalen, die die uneingeschränkte Realisierung eines Polyautomaten (\hat{Z}, T) ausschließt.

Wir wollen nun einen realen (endlich berandeten) Zellularautomaten, der mit einem T-Netz unterlegt ist, mit $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ bezeichnen², falls n der größte Abstand einer realisierten Zelle zum Ursprung ist, und untersuchen, welchen Beschränkungen dann $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ unter der Voraussetzung 3.2.3a) in bezug auf Einholungen unterliegt.

Betrachten wir zunächst die für gegebenes n durch einen realen Automaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ zur Verfügung stehenden Zellanzahlen. Wegen der zugrundegelegten von-Neumann-Nachbarschaft belegt der zu festem n gehörende Bereich von Zellen α mit $d(\alpha, o) \leq n$ einen rautenförmigen Ausschnitt der Ebene Z^2 mit $2n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 + n^2$ Zellen. Daneben wollen wir die maximale Anzahl von in Rechteckanordnung verfügbaren Zellen angeben. Für gerades n beträgt die Anzahl: $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, für ungerades n : $((n+1)+1)((n+1)-1) = n^2 + 2n$. D.h. für $n=100$ verfügt $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ über ~ 20000 (10000) und für $n=1000$ über $\sim 2\,000\,000$ (1\,000\,000) Zellen. (Bei einigen Millionen von

¹ Selbstverständlich sind unter der Annahme begrenzter Ressourcen prinzipiell rekursiv lösbare Aufgaben denkbar, die durch keinen Automaten effektiv lösbar sind

² Gedacht ist an physikalisch realisierbare Größenordnungen von n .

Zellen stellt ein realisierter Zellularautomat von Codd [COD] nach Schätzungen der auf dieses Ziel hinarbeitenden ICRA- Gruppe/Ungarn ein mit herkömmlichen Computern vergleichbares Medium dar [FAY1] .)

Betrachten wir nun für beliebiges, aber festes n einen realen Automaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ und Taktsignale T_1 und T_2 , so läßt sich eine Einholung mit Sicherheit dann ausschließen, wenn mit der Eingabe von T_2 gewartet wird, bis an allen Zellen α mit $d(\alpha, o) = n$ der durch T_1 initiierte Zustandsübergang vollzogen und α wieder im T -Zustand ℓ ist, d.h. wenn der Abstand zwischen der Eingabe von T_1 und T_2 (mindestens)

$$3.6.1 \quad D_{\text{TAKT}} = n \cdot v_{\text{max}} + D_{\text{min}}$$

beträgt, wobei wir $D_{\text{min}} = v_{\text{max}} + s_{\text{max}} + \bar{v}_{\text{max}}$ gesetzt hatten (3.5). D.h. für festes n geht $D_{\text{TAKT}} \rightarrow D_{\text{min}}$, wenn $v_{\text{max}} \rightarrow 0$; wegen (P1)/(P4) kann jedoch die Verzögerung im T -Zellnetz nicht beliebig klein werden. Bei dieser Wahl (3.6.1) des Taktabstandes wird dann, einer globalen Synchronisierung ähnelnd, jeweils eine "synchrone Konfiguration" von $(\hat{Z}, T)^{(n)}$: das totale Ergebnis eines Ableitungsschritts des von $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ ausgeführten Kalküls erzeugt, bevor ein neues Taktsignal eingegeben wird.

Für lokal-synchrone Arbeitsweise von $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ ist es jedoch hinreichend, wenn die Zeitpunkte des Auftretens je zweier aufeinanderfolgender Signale T und T' (als T -Inputs) an jeder Zelle mindestens den Abstand D_{min} haben (3.5.4). Wird der Abstand bei der Takteingabe gerade so groß gewählt, daß im nach 3.2.3a) zulässigen Extremfall - ein Signal T erfährt an allen durchlaufenen Zellen v_{max} , aber T' jeweils v_{min} - an den äußersten Zellen D_{min} gerade noch nicht unterschritten wird, also keine Einholung auftritt, so arbeitet $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ lokal-synchron.

Unter diesen Umständen würde ein Signal T' an jeder durchlaufenen Zelle gegenüber T um den Betrag $v_{\text{max}} - v_{\text{min}}$ aufholen, so daß der Zeitabstand des T - und des T' -Inputs an einer Zelle α mit $d(\alpha, o) = n$ gerade dann D_{min} betrüge, wenn

$$3.6.2 \quad D_{\text{TAKT}} = n \cdot (v_{\text{max}} - v_{\text{min}}) + D_{\text{min}}$$

gesetzt wird. D.h. unter der schwachen Voraussetzung 3.2.3a) gilt:

3.6.3 $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ arbeitet mit Sicherheit lokal-synchron, wenn der Zeitabstand bei der Taktsignaleingabe mindestens $n \cdot (v_{\max} - v_{\min}) + D_{\min}$ beträgt.

Da $v_{\max} - v_{\min} < v_{\max}$ ist, liegt bei lokal-synchroner Arbeitsweise also ein echter (mit n wachsender!) Zugewinn betreffs der Anzahl pro Zeiteinheit eingegebener Taktsignale, m.a.W. bei der Taktfrequenz vor; insbesondere ist aber D_{TAKT} nicht mehr abhängig von der maximalen Größe der Verzögerungen in den Komponenten des T-Netzes, sondern nur noch von der Größe der Toleranz: Mit $v_{\max} - v_{\min} \rightarrow 0$ geht $D_{\text{TAKT}} \rightarrow D_{\min}$, d.h. je schärfer die Zeit"konstanten" der Verzögerungsglieder sind, desto mehr nähert sich (bei festem n) der lokal-synchrone Fall dem spontan-synchronen (3.1.4).

Da aufgrund von (P2) bzw. 3.2.3a) eine zeitlich absolut konstante Verzögerung in den einzelnen T-Zellnetzen nicht angenommen werden kann, gilt aber wie im vorher diskutierten Fall: $D_{\text{TAKT}} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$; jedoch wächst D_{TAKT} linear mit n , die mit Sicherheit lokal-synchron arbeitende Anzahl von Zellen dagegen mit n^2 .

Nun scheint der für das Ergebnis 3.6.3 betrachtete Extremfall im Hinblick auf die Eigenschaften realer (physikalischer) Verzögerungsglieder gleichfalls "extrem unwahrscheinlich" zu sein: Man würde eher erwarten, daß, bei einer großen Anzahl von wiederholten Experimenten, die in einer beliebigen Komponente eines T-Netzes auftretenden Verzögerungen sich "ausmitteln", wobei sich die Abweichungen nach oben und unten in einem gewissen Bereich des nach 3.2.3 zu betrachtenden Intervalls $[v_{\min}, v_{\max}]$ häufen, so daß bei einer "maßvollen" Verkleinerung des in 3.6.2 angegebenen Taktabstandes für einen Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ noch mit "ziemlicher Sicherheit" Einholungen ausgeschlossen werden könnten. Wenn also, kurz gesagt, die Existenz von Mittelwerten und Varianzen gesichert ist, liegt es nahe, mit einer stochastischen Betrachtung die Möglichkeiten der Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ weiter zu erschließen.

Offenbar wird der Grad an Sicherheit mit sinkendem Taktabstand (bei festem n) bzw. zunehmendem n (bei festem D_{TAKT}) abnehmen, so daß auch bei dieser Betrachtung die Frage nach den Grenzen entsteht: In beiden Fällen wird man, bei gewünschter hoher Einholungssicherheit, nicht über bestimmte Werte hinausgehen können.

Der Bereich einer verlässlich lokal-synchronen Arbeitsweise eines Automaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ unterliegt in Hinsicht auf n und D_{TAKT} Beschränkungen, deren "Trade-offs" wir untersuchen wollen. Zur Einordnung kann einmal 3.6.3 herangezogen werden; auf der anderen Seite interessiert uns, wie weit wir den durch 3.6.2 gegebenen Wert $D_{\text{TAKT}}(n)$ bzw. $n(D_{\text{TAKT}})$ allenfalls unter- bzw. überschreiten können.

Es sollen also nun Wahrscheinlichkeiten von Einholungen untersucht werden (ohne Vorliegen eines Regelungsprozesses). Dabei wird davon ausgegangen, daß die Auftreten bestimmter Verzögerungen v_k^α (an einer Zelle α , verursacht durch die Signale T_k , $k = 1, 2, \dots$) Zufallseignisse sind, oder anders gesprochen: Realisierungen von Zufallsvariablen V^α , die einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung genügen. Da jeder beliebige Wert aus dem Intervall $[v_{\min}, v_{\max}]$ als Verzögerung realisiert werden kann - die zugrundeliegende Zeit t ist kontinuierlich -, muß dies eine stetige Verteilung sein.

Wir wollen hier annehmen, daß die für eine Folge von Taktsignalen T_1, T_2, \dots an einer Zelle α realisierbaren Verzögerungen $v_1^\alpha, v_2^\alpha, \dots$ normalverteilt sind mit dem Mittelwert μ^α und der Standardabweichung σ^α ; dies ist sinnvoll, wenn man annimmt, daß sie jeweils Resultate des gleichen, mit gewissen Ungenauigkeiten behafteten physikalischen Prozesses sind (Variieren der Zeit-"konstanten" eines Verzögerungsgliedes).

Ferner setzen wir voraus, daß die an den verschiedenen Zellen α, β, \dots des betrachteten Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ beim k -ten Taktsignal realisierten Verzögerungen $v_k^\alpha, v_k^\beta, \dots$ unabhängige Zufallseignisse sind (für $k = 1, 2, 3, \dots$), m.a.W. daß die Zufallsvariablen V^α, V^β, \dots unabhängig sind.

Für die Mittelwerte μ^α der Zellen α können wir annehmen, daß sie mit einem Mittelwert μ und einer Standardabweichung σ' normalverteilt sind; dies ist insofern vernünftig, als die Zellen als Objekte desselben Herstellungsprozesses (mit "statistischer Qualitätskontrolle") anzusehen sind. Es vereinfacht hier die Überlegungen - und stellt keine prinzipielle Verfälschung dar -, wenn wir im folgenden davon ausgehen, daß die Zufallsgrößen V^α aller betrachteten Zellen α die gleichen Parameter μ und σ haben (der ungünstigste Fall wird betrachtet, wenn wir $\sigma = \max_{\alpha} \sigma^\alpha$ annehmen).

Dabei wollen wir $v_{\min} = -3\sigma$ und $v_{\max} = +3\sigma$ (nach Bedarf $\pm k\sigma$, $k > 3$) setzen und vernachlässigen, daß nach 3.2.3 Realisierungen der V^α , die außerhalb des Intervalls $[v_{\min}, v_{\max}]$ liegen, auszuschließen sind (ein solcher Ausfall könnte mit einem Defekt des betroffenen Bauteils gleichgesetzt werden); der geringe dadurch entstehende Fehler beeinflußt die Wahrscheinlichkeitsbetrachtung nur unwesentlich.

Wir betrachten nun zwei aufeinanderfolgende Signale, T_1 und T_2 . Unter der Annahme zeitlich nicht variierender Verzögerungen beträgt dann, falls D_{TAKT} der Zeitabstand bei der Takteingabe am Ursprung o ist, an jeder Zelle α der Abstand des jeweils frühesten T_1 -Inputs und T_2 -Inputs auch D_{TAKT} (vgl. Anfang 3.5). Existiert - nun unter der Annahme zeitlich variierender Verzögerungen - aber eine Zelle α ($\alpha \neq o$), bei der dieser Abstand $< D_{\text{TAKT}}$ ist, und zwar um den Betrag D , so hat das Signal T_2 auf dem Weg von o zu α insgesamt die summierte Verzögerung dieses Betrages D weniger erfahren. (Es sei hier immer vorausgesetzt, daß vorher keine Einholung auftritt.)

Wie aus den vorangegangenen Abschnitten hervorgeht, kann T_2 dabei durchaus auf einem anderen Weg zu α gelangt sein als T_1 . Dabei ist ein Weg (der Länge n) von o zu α eine endliche Folge von Zellen $o = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$ mit $\alpha_v \in N(\alpha_{v-1}) \setminus \{\alpha_{v-1}\}$ für $v = 1, \dots, n$, wobei alle α_v paarweise verschieden sind. Falls dann für ein zum Zeitpunkt \underline{t}_k^o am Ursprung o eingegebenes Signal T_k : $\langle \bar{t}_{k,j}^{\alpha_v-1} \rangle \equiv \langle \underline{t}_k^{\alpha_v} \rangle$ für $v = 1, \dots, n$ gilt, sprechen wir auch von einem Signalweg. (Bemerkung: Es ist zugelassen, daß für ein Signal T_k mehr als ein Weg von o zu α ein Signalweg ist.)

Jedes der beiden Signale T_1 und T_2 hat dann auf einem Weg von o zu α mindestens ℓ Verzögerungsglieder (T-Zellnetze) zu durchlaufen, falls $d(\alpha, o) = \ell$ ist, bevor es als T-Input an α auftritt. Ist etwa T_1 auf einem Weg $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ und T_2 auf einem Weg β_0, \dots, β_m (mit $\alpha_0 = \beta_0 = o$ und $\alpha_n = \beta_m = \alpha$) zu α gelangt, d.h. $\langle \bar{t}_{1,j}^{\alpha_n-1} \rangle$ ist ursächlicher T_1 -Input und $\langle \bar{t}_{2,j}^{\beta_m-1} \rangle$ ursächlicher T_2 -Input an α , so sind für T_1 und T_2 dabei die Gesamtverzögerungen

$$3.6.4 \quad V_1 = \sum_{i=0}^{n-1} v_1^{\alpha_i} \quad \text{bzw.} \quad V_2 = \sum_{j=0}^{m-1} v_2^{\beta_j}$$

aufgetreten. Ist dann $D = V_1 - V_2 > 0$, so hat an α das zweite Signal gegen-

über dem ersten um D aufgeholt (in bezug auf die Zeitpunkte des frühesten Auftretens eines T_1 - bzw. T_2 -Inputs an α).

Da nach obiger Annahme die v_k^α ($k = 1, 2, \dots$) Realisierungen von (normalverteilten, unabhängigen) Zufallsvariablen V^α (mit denselben Parametern μ und σ bei allen betrachteten α) sind, können auch V_1 und V_2 als Realisierungen von Zufallsvariablen X bzw. Y sowie D als Realisierung der Zufallsvariablen $X-Y$ aufgefaßt werden. Bei einem "zu großen" Ausfall D von $X - Y$ kann dann der als T_2 -Output von β_{m-1} auftretende T_2 -Input an α : $\langle \bar{t}_{2,j}^{\beta_{m-1}}(\alpha) \rangle$ nicht-ursächlich sein: In diesem Fall gelangt T_2 nicht mehr - von T_1 unterscheidbar - zu α , hätte also das vorhergehende Signal T_1 an α eingeholt!

Im folgenden wollen wir nun, ausgehend vom Eingabetaktabstand $D_{\min} + D$, im Rahmen der obigen und folgender Annahmen eine Näherung der Wahrscheinlichkeit einer Einholung an einer Zelle α mit $d(\alpha, 0) = n$ kalkulieren - in Abhängigkeit vom Parameter D . Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung der kürzestmöglichen Signalwege von T_1 und T_2 , nämlich Wege der Länge n (und vernachlässigen "Umwege"; ferner wird die Anisotropie des T-Netzes vernachlässigt.)

Es interessieren uns also, in Entsprechung zu 3.6.4, Realisierungen der T_1 bzw. T_2 betreffenden Zufallsvariablen

$$3.6.5 \quad X = \sum_{i=0}^{n-1} V^{\alpha_i} \quad \text{und} \quad Y = \sum_{j=0}^{n-1} V^{\beta_j}$$

wobei $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ bzw. β_0, \dots, β_n mit $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ und $\alpha_n = \beta_n = \alpha$ zwei solche Signalwege sind. (Da hier die Zufallsvariablen V^α aller betrachteten Zellen α dieselben Parameter haben sollen, unterscheiden sich verschiedene Signalwege der Länge n in bezug auf die Wahrscheinlichkeit bestimmter Gesamtverzögerungen nicht.) Als Summen unabhängiger normalverteilter Variablen sind dann auch X und Y normalverteilte Zufallsvariablen, wobei sich die Mittelwerte sowie die Varianzen der Summanden addieren [KRE, S.188], so daß also

$$\begin{aligned} \mu_X &= \mu_Y = n\mu && \text{und} \\ \sigma_X^2 &= \sigma_Y^2 = n\sigma^2 && \text{bzw.} \\ \sigma_X &= \sigma_Y = \sigma\sqrt{n} \end{aligned}$$

gilt. Da alle betrachteten Zufallsvariablen V^α nach Voraussetzung insgesamt

unabhängig sind, sind offenbar auch ihre Summen X und Y (3.6.5) unabhängig. D.h. der Zufallsvektor (X, Y) genügt einer Verteilung mit der Funktion

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x', y') dx' dy'$$

mit $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, wobei F_1 und F_2 die Funktionen der Randverteilungen von X und Y bezüglich der Verteilung von (X, Y) sind (das Entsprechende gilt für die Dichten). In unserem Fall gilt also

$$F(x, y) = \Phi_{n\mu, \sigma\sqrt{n}}(x) \cdot \Phi_{n\mu, \sigma\sqrt{n}}(y)$$

wobei $\Phi_{n\mu, \sigma\sqrt{n}}$ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit den Parametern $n\mu$ und $\sigma\sqrt{n}$ bezeichnet.

Um ggfs. die in [KRE, S.393f] tabellierten Werte für die normierte Normalverteilung mit der Funktion

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

verwenden zu können, stellen wir uns vor, daß die Zufallsvariablen V^α bereits zentriert (nullpunktsverschoben) sind, wovon die Varianzen unberührt bleiben, daß sie also die Parameter 0 und σ und X und Y die Parameter 0 und $\sigma\sqrt{n}$ haben sollen. Wir setzen dann

$$3.6.6 \quad \bar{\Phi}^{(n)}(x) := \bar{\Phi}_{0, \sigma\sqrt{n}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x'}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} dx'$$

und erhalten mit der Substitution $u = \frac{x'}{\sigma\sqrt{n}}$ die Werte von $\bar{\Phi}^{(n)}(x)$ durch $\bar{\Phi}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einer Zelle α , mit dem Abstand n vom Ursprung, das Signal T_2 gegenüber T_1 um mehr als D aufholt, zu berechnen durch

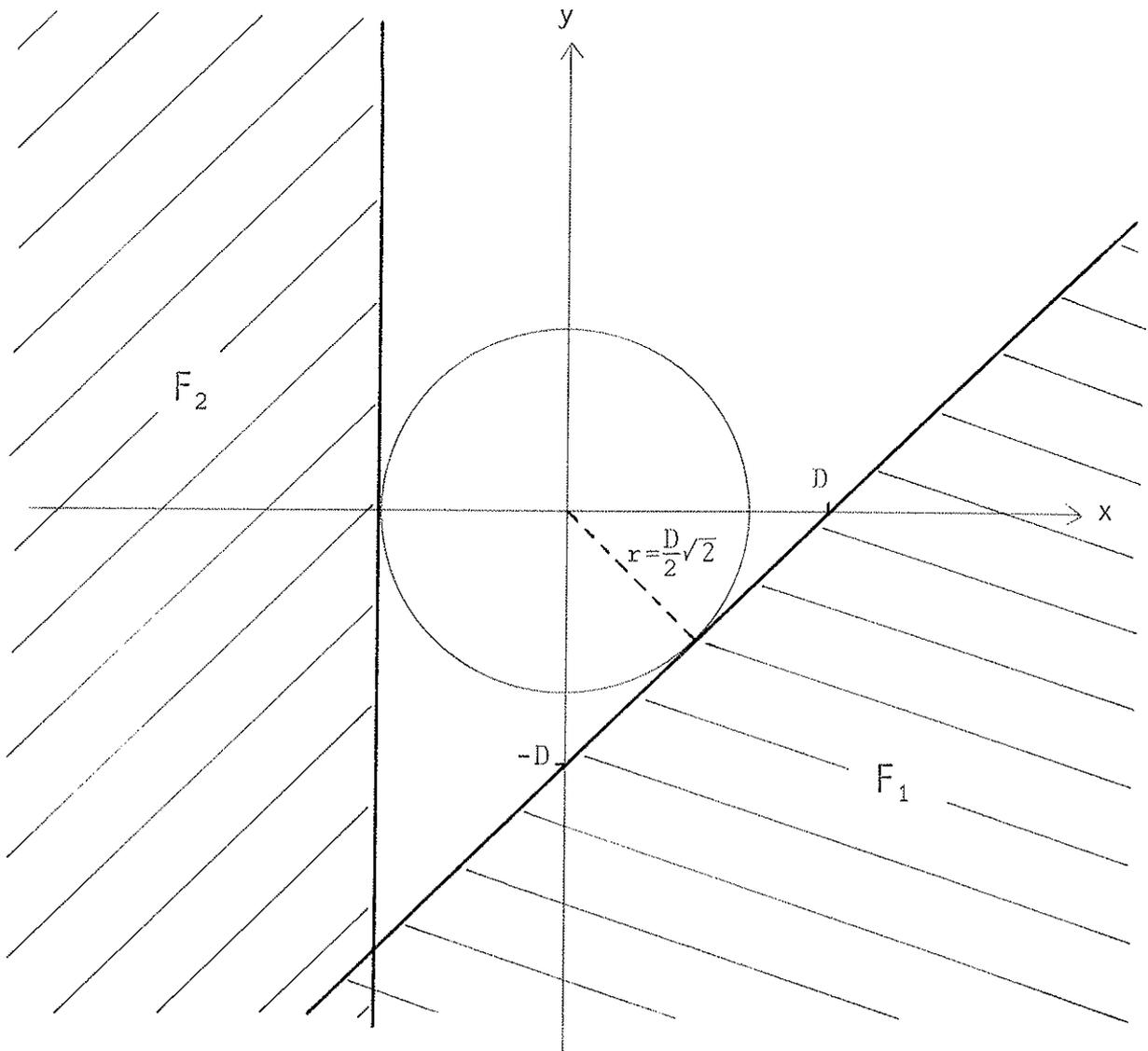
$$3.6.7 \quad P(X-Y > D) = \frac{1}{2\pi n\sigma^2} \iint_{x-y>D} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x'}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y'}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} dx' dy'$$

Die umseitige Abbildung erlaubt eine geometrische Interpretation dieses Ausdrucks: Unter den obigen Voraussetzungen ist $P(X-Y > D)$ bestimmt durch das Volumen des über dem schraffierten Teil F_1 der xy -Ebene gelegenen Abschnitts der "Gaußschen Glocke", die man sich durch Rotation der zu

einer der beiden Randverteilungen gehörigen Dichtekurven um die (nicht eingezeichnete) z-Achse entstanden denken kann [vgl. auch KRE, S.312f]. Wegen der Rotationsinvarianz bezüglich dieser Achse verändert sich das Volumen nicht, wenn wir stattdessen den über F_2 gelegenen Abschnitt der Glocke betrachten, dessen Volumen bestimmt ist durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{D}{2}\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y'}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} dy' \right] e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} dx'$$

wobei der in eckigen Klammern stehende Ausdruck gleich 1 ist, d.h. wir können



in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Funktion der Randverteilung von X (oder Y) bezüglich (X,Y) berechnen:

$$3.6.8 \quad P(X-Y > D) = P(X < -\frac{D}{2} \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{D}{2}\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} dx'$$

Mit 3.6.6 ist also $P(X-Y > D) = \bar{\Phi}^{(n)}\left(-\frac{D}{2}\sqrt{2}\right)$.

Von $D_{\text{TAKT}} = D_{\text{min}} + D$ ausgehend, sollen nun Einholungswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von D untersucht werden. Für $D = n \cdot (v_{\text{max}} - v_{\text{min}})$ tritt nach 3.6.3 mit Sicherheit keine Einholung in einem Automaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ auf. Entsprechend obiger Festlegung: $v_{\text{max}} = +3\sigma$, $v_{\text{min}} = -3\sigma$ ist hier $D = n \cdot 6\sigma$; die geringe sich unter den obigen Annahmen für dieses D ergebende Wahrscheinlichkeit sollte hier - wie vorher gesagt - vernachlässigt werden.

Wir wollen nun, bei festem n, kleinere Taktabstände betrachten, wobei wir

$$D = m \cdot 6\sigma \quad (m < n)$$

setzen wollen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß an einer Zelle mit dem Abstand n vom Ursprung eine Einholung auftritt: $P(X-Y = D)$ in diesem Fall (mit 3.6.8) gleich:

$$P(X < -\frac{6m\sigma}{2}\sqrt{2}) = \bar{\Phi}^{(n)}(-3m\sigma\sqrt{2}) = \bar{\Phi}\left(-\frac{3m\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

das bedeutet also:

$$3.6.9 \quad P(X-Y > m \cdot 6\sigma) \sim \bar{\Phi}\left(-4,24 \frac{m}{\sqrt{n}}\right)$$

Dabei erhalten wir für den Grenzfall $m = \sqrt{n}$: $P = \bar{\Phi}(-4,24) \sim 0,001$. Das bedeutet, daß unter den obigen Annahmen gilt:

3.6.10 Mit größter Wahrscheinlichkeit tritt an einer Zelle mit dem Abstand n vom Ursprung keine Einholung zweier Signale auf, wenn der Zeitabstand bei der Taktsignaleingabe $D_{\text{TAKT}}(n)$ mindestens $D_{\text{min}} + (v_{\text{max}} - v_{\text{min}})\sqrt{n}$ beträgt.

Jedoch folgt aus 3.6.9: Bei festem m für $n \rightarrow \infty$ bzw. bei festem n für $m \rightarrow 0$ geht die Wahrscheinlichkeit für eine Einholung an einer Zelle mit Abstand n vom

Ursprung: $P \rightarrow \frac{1}{2}$; wegen 3.6.10 wird dies allerdings erst problematisch, wenn $m < \sqrt{n}$ wird.

Um die Einholungswahrscheinlichkeit in einem Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ allgemein zu betrachten, müssen alle α mit $d(\alpha, o) = n$ berücksichtigt werden. Das sind $(n+1)^2 + n^2 - n^2 - (n-1)^2 = 4n$ Zellen: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{4n}$. Wären diese $4n$ möglichen Ereignisse einer Einholung an einer Zelle α_k insgesamt unabhängig, so erhielte man, falls p die Wahrscheinlichkeit für ein solches Ereignis ist, die Gesamtwahrscheinlichkeit $4np$, wären sie koinzident, so wäre auch die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich p .

Weder das eine noch das andere ist der Fall: Einholungen an zwei Zellen α und $\tilde{\alpha}$, die spiegelsymmetrisch zum Ursprung angeordnet sind, können sicher als unabhängige Ereignisse angesehen werden. Dagegen sind die an zwei Zellen α und β mit $d(\alpha, \beta) = 2$ und $d(\alpha, o) = d(\beta, o) = n$ möglicherweise auftretenden Einholungen hochgradig abhängig, da beide Zellen einen gemeinsamen Nachbarn γ mit $d(\gamma, o) = n-1$ besitzen, so daß die bedingte Wahrscheinlichkeit einer Einholung an β unter der Hypothese, daß an α eine Einholung auftritt (und umgekehrt), sehr groß wird (am gemeinsamen Nachbarn γ muß es dann nämlich fast zu einer Einholung gekommen sein).

Offenbar sind hier die Grenzen einer einfachen Betrachtung erreicht; wir wollen die stochastische Überlegung nicht weiter verfolgen. Es sei jedoch dazu angemerkt, daß in einer Reihe von Fällen ein Zellularautomat zur Lösung ihm übertragener Aufgaben gar nicht in jeder Ausdehnungsrichtung der Ebene große, von der maximalen Ausdehnung n abhängige Zellanzahlen benötigt. Z.B. erfordert ein wachsender Turing-Bandbereich, wie er etwa in Codds Zellularraum bei der Lösung rekursiver Aufgaben eingesetzt wird [COD], nur einen "Zellstreifen" der Breite 5, so daß nach jeder zur Verlängerung eines Turing-Bandes um ein Feld durchgeführten Erweiterung des Automaten nur jeweils fünf neue Zellen zu betrachten sind.

Zu bemerken ist ferner, daß sich durch einen lokalen Regelungsprozeß (wie in 3.5 beschrieben) die Wahrscheinlichkeit für Einholungen noch verringern lassen wird.

Insgesamt haben wir also folgende Aussagen über den Bereich verlässlicher lokal-synchroner Arbeitsweise von Polyautomaten $(\hat{Z}, T)^{(n)}$ gewonnen:

Wird der Zeitabstand bei der Eingabe aufeinanderfolgender Taktsignale durch

$$D_{\text{TAKT}}(n) = m \cdot (v_{\text{max}} - v_{\text{min}}) + D_{\text{min}}$$

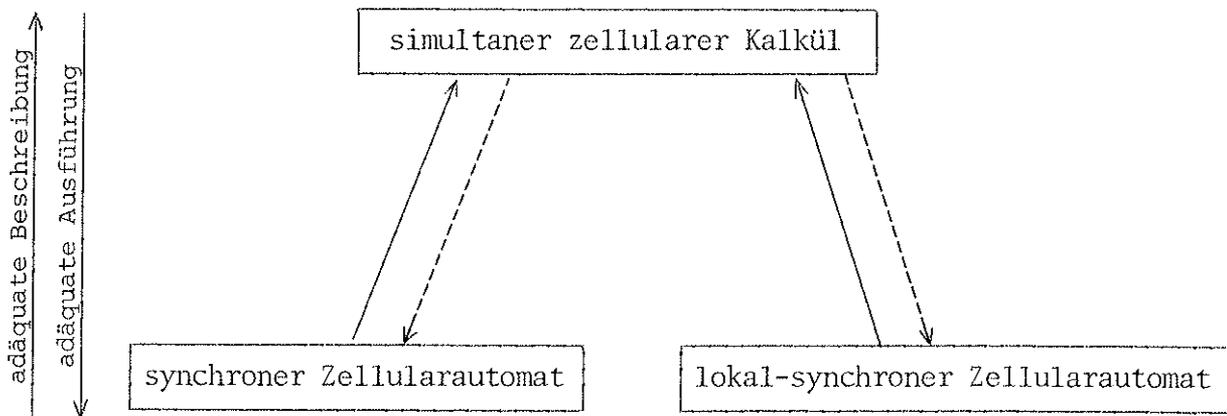
angegeben, so ist für $m \geq n$ die lokal-synchrone Arbeitsweise gemäß Definition 2 aus 3.1 aufgrund des Ergebnisses 3.6.3 gewährleistet. Dies stellt in mehrfacher Hinsicht (S.86) einen Zugewinn gegenüber dem Fall synchroner Arbeitsweise gemäß Definition 1 aus 3.1 dar.

Unter bestimmten Annahmen über die Verteilung der in den T-Zellnetzen über eine Taktfolge auftretenden Verzögerungen kann m und damit der Taktabstand noch verkleinert werden, wobei die untere Zuverlässigkeitsgrenze für lokal-synchrone Arbeitsweise für m zwischen \sqrt{n} und n liegt.

Nachwort

Mit der vorliegenden Arbeit sind zwei Gesichtspunkte verfolgt worden:

1. Mit 3.4.3/3.5.0 wurde nachgewiesen, daß ein simultaner zellularer Kalkül, wie er mit der mathematischen Beschreibung eines synchronen Zellularautomaten gegeben ist (3.1.1), nicht nur durch einen synchronen (3.1.2), sondern auch durch einen lokal-synchronen Zellularautomaten adäquat ausgeführt werden kann (3.3.1). Da ein lokal-synchroner Zellularautomat offenbar nur durch einen Simultankalkül adäquat beschrieben werden kann, haben wir die folgenden Korrespondenzen:



(Das Attribut "adäquat" soll dabei die Korrespondenz von je einem Ableitungsschritt im Kalkül mit dem von jeweils einem Taktsignal erzeugten Prozeß im Automaten kennzeichnen, vgl. Seite 30.)

Damit hat sich gezeigt, daß die Voraussetzung globaler Synchronität für einen Zellularautomaten, der einen Simultankalkül ausführt, die (durch ausschließlich lokale Aktion gegebenen) Möglichkeiten eines derartigen Zellularraums nicht ausschöpft.

2. Unter Beachtung der in 3.1 formulierten Postulate wurde untersucht, ob ein mit physikalischen Annahmen vereinbarer Polyautomat angegeben werden kann, der einen Kalkül (Z, sim) adäquat ausführt. Hier konnte nur gezeigt werden: auch bei lokal-synchroner Arbeitsweise nicht uneingeschränkt! Jedoch

sind die Einschränkungen gegenüber einem synchronen Automaten geringer: Ein Polyautomat (\hat{Z}, T) kann beliebig oft erweitert werden, ohne daß irgendwann globale Änderungen des physikalischen Aufbaus erforderlich werden (betrifft 3.1.0). Allerdings muß der Zeitabstand der an der Ursprungszelle einzugebenden Taktsignale auf den jeweils größten Abstand einer Zelle zum Ursprung bezugnehmen. Dabei sind jedoch die erreichbaren Taktfrequenzen wiederum höher als im Fall globaler Synchronisierung (eines endlichen Polyautomaten).

In unserem Ansatz haben wir - mit der Intention, im Zellularautomaten eine parallele lokale Informationsverarbeitung höchster Effizienz zu erreichen, wie sie eben nur bei adäquater Ausführung eines Simultankalküls gegeben ist - auf irgendeine Art von Rückmeldungen bei der Signalübermittlung, und seien es lokale, wie sie mit den bei [PRI1] verwendeten "Warter"-Bausteinen vorliegen (auch in der auf Petris Arbeit basierenden Netztheorie gibt es ein solches Prinzip, vgl. [GEN]) verzichtet und sind in dieser Hinsicht an die Grenzen gegangen.

Ein der weiteren Untersuchung bedürftiges Problem sehen wir darin, ob bei Verwendung derartiger lokaler Rückmeldungen ein mit Postulaten wie in 3.1 vereinbarere Automat angegeben werden kann, der mit ähnlicher Potenz wie (\hat{Z}, T) einen simultanen zellularen Kalkül ausführt.

Eine andere Möglichkeit sehen wir in einer positiven Antwort auf die - von der Mathematik nicht zu beantwortenden - Frage, ob eine Methode der Signalübertragung in einem T-Netz besteht, bei der ein zeitliches Variieren der Komponentenverzögerungen praktisch ausgeschlossen werden kann. Diese in unseren Untersuchungen als Parameter auftretende Variabilität betreffend, können wir nur auf das Ergebnis 3.6.3 verweisen: Mit verschwindender Variabilität erhält man als Taktabstand die für den fiktiven Fall spontaner Synchronität (siehe S.34) anzusetzende Konstante.

In der Arbeit sind wir nicht eingegangen auf die Art und Weise, in der ein lokal-synchroner Zellularautomat eine berechenbare (partiell rekursive) Funktion berechnet oder eine Selbstreproduktion ausführt. Das soll hier noch angesprochen werden. In [COD, S.10ff] wird allgemein definiert, wann ein (deterministischer) zweidimensionaler, sonst beliebiger Zellularraum Z

derartige Fähigkeiten hat (es werden u.a. Turingmaschinen in Z repräsentiert) und schließlich, wann Z "computation-construction universal" ist; dies wird dann hinsichtlich des dort von Codd eingeführten speziellen Zellularraums (mit acht verschiedenen Zellzuständen und von-Neumann-Nachbarschaft) konkretisiert.

Alle Begriffe dieser Art werden über die Existenz gewisser Konfigurationen und deren unter der Globaltransformation auftretenden Nachfolgern definiert; sie drücken Eigenschaften des mit Z gegebenen Simultankalküls aus.

Wird nun ein solcher Kalkül (Z, sim) durch einen lokal-synchronen Zellularautomaten (\hat{Z}, T) adäquat ausgeführt, so können dabei sämtliche, den obigen und sonstigen auf den Kalkül bezogenen Definitionen entsprechenden "Berechnungen" bewältigt werden. Jedoch ist es schwierig, sich - bezogen auf einen absoluten Zeitbegriff - Rechengänge von (\hat{Z}, T) als Abfolge von Konfigurationen (wie im Synchronfall üblich) vorzustellen:

Verglichen mit der auf die Ursprungszelle bezogenen Beobachtungszeit t , arbeitet (\hat{Z}, T) die Berechnung einer Nachfolgekonfiguration nicht "auf einen Schlag", sondern sukzessive von innen nach außen ab. Jedoch kann - dazu parallel - mit der Berechnung eines weiteren Nachfolgers (nach der Dauer D_{TAKT}) schon begonnen werden, ehe die erste beendet ist; d.h. es prägt sich zu keiner Zeit t ($t \in \mathcal{t}$) ein Globalzustand in dem auf Seite 14 angegebenen Sinne aus (dort wird auf gleichzeitiges Vorliegen definierter Zustände bei allen Zellen bezuggenommen).

Zu einem Begriff der "Konfiguration eines lokal-synchronen Zellularautomaten" können wir nun gelangen, wenn wir einen neuen Gleichzeitigkeitsbegriff einführen, der auf "relativen Beobachtungszeiten" basiert. Dies soll konkretisiert werden:

Wir betrachten, für jeden Takt T_k , lokale Zeitskalen t_k^α für jede einzelne Zelle α : $t_k^\alpha = (R, \leq, \underline{t}_k^\alpha)$, $k = 1, 2, \dots$ (\underline{t}_k^α jeweils auf t bezogen). D.h. für jede Zelle α beginnt mit jedem ursächlichen T-Input an α : $\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle$ eine neue Beobachtungszeit (" $\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle$ bringt die Zeit mit"; verglichen mit t sind die Startzeitpunkte der lokalen Zeitskalen benachbarter Zellen jeweils höchstens um die maximale im T-Netz auftretende Komponentenverzögerung v_{max} gegen-

einander verschoben.) Dann sind für jedes $k = 1, 2, 3, \dots$ bei lokal-synchroner Arbeitsweise, wie in der Arbeit aufgezeigt wurde, alle betrachteten Zellen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ jeweils zu den Startzeitpunkten $\underline{t}_k^\alpha, \underline{t}_k^\beta, \underline{t}_k^\gamma, \dots$ der lokalen Zeitskalen in definiertem Zustand (vgl. auch S.57), und zwar jeweils bevor an den Zellen das k -te Taktsignal (repräsentiert durch den k -ten Taktzeitpunkt) auftritt, denn für jedes α und für jedes k gilt in bezug auf die Ereignisse $\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle, \langle \underline{t}_k^\alpha \rangle: \underline{t}_k^\alpha < t_k^\alpha$ (S.56).

Definieren wir nun die Gleichzeitigkeit von Ereignissen (ursächlicher T-Inputs an einer Zelle) nicht wie bisher durch das Übereinstimmen der Zeitpunkte (innerhalb \mathcal{t}) ihres Eintretens, d.h.

$$\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle \text{ gleichzeitig } \langle \underline{t}_\ell^\beta \rangle : \Leftrightarrow \underline{t}_k^\alpha = \underline{t}_\ell^\beta$$

sondern durch "Zur-Deckung-Bringen" der (mit jeweils dem k -ten Taktsignal korrespondierenden) Startzeitpunkte der lokalen Zeitskalen, d.h.

$$\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle \text{ T-gleichzeitig } \langle \underline{t}_\ell^\beta \rangle : \Leftrightarrow k = \ell$$

so ist, bei gegebener lokal-synchroner Arbeitsweise, der Begriff der T-Gleichzeitigkeit wohldefiniert, da mit jedem Taktsignal T_k an jeder Zelle α genau ein Taktzeitpunkt $\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle$ und folglich genau ein dafür ursächlicher T-Input $\langle \underline{t}_k^\alpha \rangle$ auftritt.

"T-gleichzeitig" ist Äquivalenzrelation in kanonischer Weise auf der (Ereignis-)Menge ursächlicher T-Inputs; ihre abzählbar vielen Klassen enthalten jeweils alle T-gleichzeitigen, d.h. vom gleichen Taktsignal erzeugten T-Inputs. Die wie folgt definierten Mengen:

$$\underline{t}_k := \{ \underline{t}_k^\alpha \mid \langle \underline{t}_k^\alpha \rangle \text{ T-gleichzeitig } \langle \underline{t}_k^0 \rangle \}$$

wollen wir (k -te) Zeitschnitte nennen und sie durch die natürliche Reihenfolge der Zeitpunkte \underline{t}_k^0 in \mathcal{t} , also entlang k anordnen ($\langle \underline{t}_k^0 \rangle$ ist der k -te ursächliche T-Input an der Ursprungszelle, d.h. die k -te Eingabe eines Taktsignals, $k = 1, 2, \dots$). Ein Zeitschnitt \underline{t}_k enthält also gerade die (auf \mathcal{t} bezogenen) Zeitpunkte von allen T-gleichzeitigen Ereignissen k -ter ursächlicher T-Inputs: jeweils die Startzeitpunkte der lokalen Zeiten t_k^α . Wir können die \underline{t}_k auch wie folgt ausdrücken:

$$\underline{t}_k = \{ \underline{t}_k^\alpha \mid \underline{t}_k^\alpha \in t \ \& \ \exists \alpha \langle \underline{t}_k^\alpha \rangle \}$$

Ein Element von \underline{t}_k kann Startzeitpunkt mehrerer lokaler Zeitskalen $t_k^\alpha, t_k^\beta, \dots$ (k fest) sein, falls nämlich mehrere T-gleichzeitige Ereignisse k -ter ursächlicher T-Inputs (im ursprünglichen Sinne) gleichzeitig eintreten. Jeder Zeitschnitt enthält also höchstens sovielen Zeitpunkte, wie Zellen betrachtet werden, da bei lokal-synchroner Arbeitsweise keine Zelle mehr als einen k -ten ursächlichen T-Input erhält ($k = 1, 2, \dots$).

Zu jedem Zeitschnitt $\underline{t}_1, \underline{t}_2, \underline{t}_3, \dots$ sind aber sämtliche betrachteten Zellen (T-)gleichzeitig in definiertem Zustand, und es ist sinnvoll, dann von einem Globalzustand, einer Konfiguration des lokal-synchronen Zellularautomaten zu sprechen. Ebenso können wir jetzt den Begriff des globalen Übergangs eines lokal-synchronen Zellularautomaten erhalten:

In der ursprünglichen Interpretation des zellularen Automaten ist die folgende Sprechweise üblich: Die Zeit verläuft in diskreten Schritten $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \dots$; jedesmal, wenn ein Schritt $t_k \rightarrow t_{k+1}$ abgelaufen ist, muß jede Zelle α einen Zustandsübergang vollzogen haben. Bei synchroner Arbeitsweise ist dies gleichbedeutend mit: Zwischen je zwei Zeitpunkten t_k, t_{k+1} erfolgt ein globaler Übergang einer Konfiguration c zu einem Nachfolger $c' : c \mapsto c'$.

Hier können wir jetzt sagen: Lokal, d.h. an jeder einzelnen Zelle α , verläuft die Zeit in diskreten Schritten $\underline{t}_1^\alpha \rightarrow \underline{t}_2^\alpha \rightarrow \underline{t}_3^\alpha \rightarrow \dots$; jedesmal, wenn ein Schritt $\underline{t}_k^\alpha \rightarrow \underline{t}_{k+1}^\alpha$ (mit dem Auftreten von $\langle \underline{t}_{k+1}^\alpha \rangle$) abgelaufen ist, muß α einen Zustandsübergang vollzogen haben. Bei lokal-synchroner Arbeitsweise ist dies gleichbedeutend mit: Zwischen je zwei Zeitschnitten $\underline{t}_k, \underline{t}_{k+1}$ erfolgt ein globaler Übergang $c \mapsto c'$.

Bei jeweils gleicher Ausgangskonfiguration c (und deterministischen Regeln) erhält man, wie aus den Untersuchungen der Arbeit hervorgeht, im synchronen wie im lokal-synchronen Fall den gleichen Nachfolger c' .

In [GOL2, S.24] ist in bezug auf die dort besprochenen "Schaltarten" angemerkt:

"Als einzige liefert die synchrone Arbeitsweise bei deterministischen Operationen immer deterministische Ergebnisse."

Wir fügen dem nun hinzu: und die in der vorliegenden Arbeit definierte lokal-

synchrone Arbeitsweise: Zu jedem Zeitschnitt t_k liegt in einem lokal-synchronen Zellularautomaten die gleiche Konfiguration vor wie im korrespondierenden synchronen Zellularautomaten zum Zeitpunkt t_k . Wie die Betrachtungen der Arbeit zum Ausdruck gebracht haben, ist es gleichgültig, ob eine Konfiguration als Globalzustand eines Zellularautomaten in bezug auf eine absolute Zeit existiert (synchroner Zellularautomat), oder ob sie in bezug auf Zeitschnitte existiert; ein Ableitungsschritt eines simultanen zellularen Kalküls wird in jedem Fall zur Ausführung gebracht, ob durch einen synchronen oder einen lokal-synchronen Zellularautomaten.

Literaturverzeichnis

- [ARB] Arbib, M.A.: Theories of Abstract Automata, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [BAN] Banks, E.R.: Information Processing and Transmission in Cellular Automata, AD-717 951, N.T.I.S., Springfield, Virginia, 1971.
- [BÖH] Böhling, K.H., Schütt, D.: Endliche Automaten II, Mannheim, Wien, Zürich 1970.
- [BUR] Burks, W. (ed.): Essays on Cellular Automata, Urbana, Ill., 1970.
- [COD] Codd, E.F.: Cellular Automata, New York and London 1968.
- [FAY1] Fay, G.: DPL ALPHA system and Codd's cellular space, Journal of Cybernetics 4, 3 (1974), 97-110.
- [FAY2] Fay, G.: Cellular Design Principles. A Case Study of Maximum Selection in Codd-ICRA Cellular Space, Part One: Tool Preparations, Technical Report, Budapest 1976.
- [GEN] Genrich, H.J., Lautenbach, K.: Synchronisationsgraphen, Acta Informatica 2 (1973), 143-161.
- [GOL1] Golze, U.: Destruction and total self-reproduction of universal computers in Codd's cellular space, Progress in Cybernetics and Systems Research 1 (1975), 58-68.
- [GOL2] Golze, U.: Schaltarten für parallele Programmschemata und Zellräume, Habilitationsschrift, Technische Universität Hannover 1978.
- [GOL3] Golze, U.: (A-)synchronous (non-)deterministic cell spaces simulating each other, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 17, No.2 (1978), 176-193.
- [HAR] Hartmanis, J., Stearns, R.E.: Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Englewood Cliffs, N.J., 1966.
- [HIN] Hindley, J.R., Lercher, B., Seldin, J.P.: Introduction to Combinatory Logic, Cambridge 1972.
- [KRE] Kreyszig, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen 1973.

- [LIP] Lipton, R.J., Miller, R.E., Snyder, L.: Synchronization and computing capabilities of linear asynchronous structures, Journal of Computer and System Sciences, Vol.14 (1977), 49-72.
- [MAL] Malcev, A.I.: Algorithmen und rekursive Funktionen, Braunschweig 1974.
- [MER] Merzenich, W.: Algebraische Charakterisierung additiver Automaten-Arrays, GMD-Bericht Nr.88, St.Augustin 1974.
- [NAK] Nakamura, K.: Asynchronous cellular automata and their computational ability, Systems. Computers. Controls, Vol.5, No.5 (1974), 58-66.
- [NEU] von Neumann, J.: Theory of Automata: Construction, Reproduction, Homogeneity; in: The Theory of Self-Reproducing Automata (herausgeg. und vervollst. von A.W. Burks), Urbana, Ill., 1966.
- [NOE] Noe, J.D.: Applications of net-based models; erscheint in: General Net Theory of Processes and Systems, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [PET] Petri, C.A.: Kommunikation mit Automaten, Dissertation, Universität Bonn 1962.
- [PRI1] Priese, L.: Über einfache unentscheidbare Probleme: computational- und constructional-universelle cellulare Räume, Dissertation, Universität Münster 1974.
- [PRI2] Priese, L.: A note on asynchronous cellular automata, Journal of Computer and System Sciences, Vol.17, No.2 (1978), 237-251.
- [RAM] Ramchandani, C.: Analysis of asynchronous concurrent systems by timed Petri nets, Ph.D. thesis, M.I.T., Cambridge, Mass., 1973.
- [SIF] Sifakis, J.: Use of Petri nets for performance evaluation; erscheint in: General Net Theory of Processes and Systems, Lecture Notes in Computer Science, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [SIM] Simon, J.: Physical Limits for the Speed of Computing, Technical Report, Universidade estadual de Campinas, Brasil.

- [SMI1] Smith III, A.R.: Cellular automata complexity trade-offs, Information and Control 18 (1971), 466-482.
- [SMI2] Smith III, A.R.: Simple computation-universal cellular spaces, Journal of the ACM 18 (1971), 339-353.
- [SMI3] Smith III, A.R.: Introduction to and survey of polyautomata theory; in: Lindenmayer, A., Rozenberg, G. (eds.): Automata, Languages, Development; Amsterdam, New York, Oxford 1976, 405-422.
- [VOL] Vollmar, R.: Cellular spaces and parallel algorithms - an introductory survey; in: Proceedings of the conference "Parallel Computers - Parallel Mathematics", Hrsg. Feilmeier, M., Amsterdam 1977, 49-58.
- [WUN] Wunsch, G.: Zellulare Systeme - Mathematische Theorie kausaler Felder, Braunschweig 1977.
- [YAN] Yanase, T., Inagaki, Y., Fukumura, T.: Recursive structure of configuration transition relation of asynchronous cellular automaton and its Garden of Eden problem; in: Proceedings of the International Symposium on Uniformly Structured Automata and Logic, Tokio 1975, 119-125.
- [ZUS] Zuse, K.: Rechnender Raum, Braunschweig 1969.

Lebenslauf

- 27.3.1950 geboren in Rehren A.O. als Sohn des Versicherungskaufmanns Karl-Otto Wachsmuth und seiner Frau Gladys, geb. Hennek
- 4/56 - 4/60 Volksschule in Rinteln
- 4/60 - 6/68 Gymnasium Ernestinum in Rinteln (mathematisch-naturwissenschaftlicher Zweig); Abitur
- 10/68 -3/75 Physik- und ab 10/69 Mathematik-Studium mit dem Nebenfach Informatik an der Technischen Universität Hannover;
während des Studiums (ab 4/69) Tätigkeit als Hilfsassistent am Rechenzentrum der TU
- 3/75 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik
- 9/76 Aufnahme in die Graduiertenförderung an der Technischen Universität Hannover
- seit 1/78 Wissenschaftlicher Assistent am Fachbereich Mathematik/
Philosophie der Universität Osnabrück mit den Arbeitsgebieten Didaktik der Mathematik und Grundlagen der Mathematik
- 10/78 -7/79 nebenamtliche Lehrtätigkeit im Fach Mathematik an einem Osnabrücker Gymnasium