

Ipke Wachsmuth

Zwei Modi der Denktätigkeit -  
auch beim Mathematik-Lernen? <sup>1)</sup>

Summary: Not only is logical thinking and language involved in the mathematics process, but also spatial thinking and imagery. The paper tries to summarize some aspects of knowledge representation, deals with the Two-Modes-of-Thinking Model adopted from modern neurology and neuropsychology which yields implications for mathematics learning and teaching, and sketches some projects of recent and current research.

"14:43 Uhr - wie spät ist es denn dann jetzt?" Nie werde ich dieses laute Denken eines Kollegen vergessen, das ihm beim Ablesen seiner neuen Digital-Armbanduhr entfuhr. - Ein Student erzählte mir, daß er nach einem Blick auf seine alte Analoguhr "wußte", wie spät es ist, jedoch kaum später nach der Zeit gefragt nicht antworten konnte, ohne vorher erneut nachzugucken. (Bei seiner neuen Digitaluhr gewöhnte er sich das "Zeitgefühl" an, indem er sich zunächst immer die Zeigerstellung einer Analoguhr vorstellte.)

Was dies im einzelnen sagen kann und inwiefern das alles mit dem Mathematik-Lernen zu tun hat, soll im folgenden erläutert werden. Dabei wollen wir erst noch beim Uhrenbeispiel verweilen.

Was ist der Unterschied zwischen den beiden Uhrenarten? Die Digitaluhr teilt die exakte Zeitinformation durch eine Zeichenreihe sprachlich mit. Die Analoguhr tut das auch, doch hat sie darüber hinaus noch ein charakteristisches Gesicht, eine Gestalt, und sie zeigt die Zeit zusätzlich durch einen "Gesichtsausdruck": die Zeigerstellung. Neben der Möglichkeit, die Zeit 14:43 Uhr exakt mitzuteilen, vermittelt die Analoguhr durch ihren Gesichtsausdruck das (beruhigende) Gefühl, daß es noch ein gutes Stück Zeit bis zur Veranstaltung "um Drei" ist (oder, oft ohne weitere Ablesung, eine runde Viertelstunde später das beunruhigende, daß es jetzt wohl höchste Zeit ist.)

<sup>1)</sup>Erweitertes Manuskript des Vortrags auf der 15. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Darmstadt vom 4.-7.3.1981

OSM Osnabrücker Schriften zur Mathematik

März 1981

Herausgeber: Fachbereich 6  
der Universität Osnabrück  
D-4500 Osnabrück  
Postfach 4469

Geschäftsführer: Prof. Dr. H.J. Reiffen  
Berater: Prof. Dr. E. Cohors-Fresenborg  
(Didaktik der Mathematik)  
Prof. Dr. J. Perl (Angewandte Mathematik)  
Prof. Dr. R. Vogt (Reine Mathematik)

Druck: Hausdruckerei der Universität Osnabrück

Copyright bei den Autoren

Weitere Reihen der OSM:

Reihe V Vorlesungsskripten

Reihe U Materialien zum Mathematikunterricht

Reihe M Mathematische Manuskripte

Reihe D Mathematisch-didaktische Manuskripte

Daß im einen und im anderen Fall unterschiedliche Modi der Denktätigkeit im Spiel sind, ist die im folgenden erläuterte Hypothese. Diese soll zunächst in Relation zu Theorien der Wissensrepräsentation präzisiert werden; ein Exkurs in die Neurologie und experimentelle Psychologie soll dann die Möglichkeit der Existenz solcher Modi (bei aller Skepsis) unterstreichen. Schließlich sollen im dritten Abschnitt Bezüge zum mathematischen Denken und Lernen hergestellt und einige Projekte zur Unterrichtsforschung einbezogen werden.

### 1. Wissensrepräsentation

Norman und Rumelhart (1978) nennen als zwei extreme denkbare Formen der Repräsentation von Wissen (S.33):

- Ein propositionales System, in welchem Begriffe als Aussagen über die begrifflichen Beziehungen zwischen den Elementen in der Proposition ausgedrückt werden.
- Eine analoge Repräsentation, in welcher ein genaues Abbild der ursprünglichen Szene erhalten bleibt."

Ihre "one-system-Hypothese" baut ausschließlich auf der ersten Möglichkeit auf, die eine Bindung an Sprache voraussetzt, und hat mit dem Modell des Aktiven Strukturellen Netzwerks in den letzten Jahren entscheidende Bedeutung in der Theorie der Wissensrepräsentation gewonnen. Sie vernachlässigt jedoch eine wesentliche Komponente der Denktätigkeit, die auch in der Form der Repräsentation ihre Entsprechung haben könnte. Die Tatsache der Bildwahrnehmung nämlich bei der Erinnerung und Verarbeitung von "vorstellungsgebundener" Information wird erklärt mit einer nach Bedarf vorgenommenen Generierung von Bildvorstellungen aus dem propositionalen System (eine sicherlich vorhandene Möglichkeit: Der Student, der sich nach dem Ablesen der Digitaluhr die analoge Zeigerstellung vorstellt, transferiert dabei sprachliche in visuelle Information). Bei ihrer Hypothese stützen sich Norman und Rumelhart auf Versuche mit "unzureichend" erinnerten Bildern bei Versuchspersonen - in ihrem Erklärungsmodell beruhend auf begrifflichen Fehlern in der propositionalen Repräsentation.

Gegen diese Auffassung spricht unseres Erachtens die Tatsache, daß in einer solchen one-system-Repräsentation jedes menschliche Wissen von vornherein sprachgebunden sein müßte, wohingegen die übliche Ansicht, daß der Mensch neben explizitem (niederschreibbarem) Wissen über sog. stummes Wissen ("tacit knowledge") verfügt, es nahelegt, die Existenz von nicht-sprachgebundenem Wissen (wesentlich?) in Überlegungen zur Wissensrepräsentation einzubeziehen.

In einer Theorie der Wahrnehmung erläutert David Marr vom MIT die Möglichkeit einer an "Skizzen", d.h. vergrößerten Abbildern orientierten Erkennung von Bildern und Szenen, die an ein sonst allgemeines Vorverständnis gebunden ist (umfassend referiert in Stent 1981). In einem ersten Verarbeitungsschritt im visuellen Cortex wird dabei das tonige Bild simultan in eine sog. Primär-Skizze übersetzt. Sie besteht aus Linien, die teils den Konturen von Objekten entsprechen, teils nur Veränderungen der Oberflächen-gestalt wiedergeben.

Führen wir Marr's Gedanken fort, so ist eine solchen Wahrnehmungsprozessen adäquate Repräsentation in Neuronennetzen denkbar, deren "Kern" aus einer Speicherung weiter vergrößerter derartiger Skizzen besteht (Piktogramme), an die Netzrepräsentationen komplexerer Strukturmerkmale der wahrgenommenen Szene angehängt sind. In einem Akt des Wieder-Erkennens wäre die Entstehung eines kompletteren Bildes aus dem aktivierten Teilnetz der Kern-Repräsentation nach Art einer Resonanzerscheinung anzunehmen, vergleichbar etwa mit der Möglichkeit, bei einem zunächst ruhigen Saiteninstrument durch Anregung mittels eines zur Hauptresonanz des Korpus passenden reinen Tons (als "Kernskizze") einen obertonreichen Klang (als kompletteres Bild) zu erzeugen.

Mit einem Beispiel wollen wir dies illustrieren: Die Möglichkeit, das nachstehend gezeigte Bild zu erkennen, wäre demnach an die gleiche "analoge" Kern-Repräsentation gebunden wie das Erkennen derselben Person in einer Karikatur, die im Abstraktionsgrad sicherlich über die Marr'sche Primär-Skizze hinausgeht:



Abb. 1

In beiden Fällen "sieht" man schließlich: Das ist die Mona Lisa! M.a.W., die semantische Beschreibung stellt das Endprodukt des Erkennens dar. Die Marr'sche Hypothese schließt an Erkenntnisse der Gestaltpsychologie an, die ein auf ganzheitlicher Wahrnehmung von Szenen beruhendes Vorverständnis postuliert, das erst die Interpretation von Szeneneinzelheiten möglich macht.

Ein weiteres Beispiel (Abb. 2a) soll auf ein im Zusammenhang damit stehendes Phänomen hinweisen: Häufig reicht ein aus dem Szenenkontext oder separat gegebener Hinweis (in diesem Fall: "Katze") aus, eine spontane Wahrnehmung der zunächst verborge-

nen Gestalt zu ermöglichen. Sicherlich ist auch die hiermit demonstrierte Fähigkeit des Hirns, durch "Sehen" - automatisches



Abb. 2a

Ergänzen von Hilfslinien (Abb. 2b) zur Einsicht: das ist eine schlafende Katze! zu gelangen, an eine analoge Repräsentation gebunden. (Übrigens kommt es doch in geometrischen Zusammenhängen häufig gerade darauf an, in einem Linienmuster eine signifikante Teilgestalt, "Beweisfigur" genannt, zu erkennen, wobei das schlichte "Sehen" von ergänzenden Hilfslinien Erfolg bringen kann.)

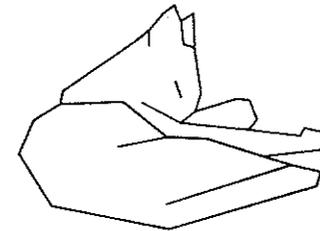


Abb. 2b

Es sprechen also genügend Gesichtspunkte dafür, daß sowohl proportionale als auch analoge Formen der Repräsentation (und Verarbeitung) von Wissensinhalten im menschlichen Denken vorhanden sind. Im Einzelfall tritt möglicherweise eine der Formen als alleinige auf und ist nicht beliebig, wie bei Norman und Rumelhart (1978, S.33) vermutet, geeignet in die jeweils andere Form transferierbar. Es liegt daher nahe, eine beides umfassende Theorie zu formulieren, wie sie etwa die duale Kode-Theorie von Paivio darstellt (hier referiert nach Wippich/Bredenkamp 1979; ausführliche weitere Literaturangaben dort):

Allen Paivios Theorie postuliert, daß zwei voneinander unabhängige Kodierungssysteme "unser Wissen von der Welt" repräsentieren und an der Informationsverarbeitung beteiligt sind; unterschieden werden ein nicht-sprachliches (imaginales) und ein sprachliches Kodierungssystem, in folgender Hinsicht:

1. nach der Art der bevorzugt repräsentierten und verarbeiteten Information,
2. nach der Art der Organisation in umfassenderen Gedächtniseinheiten sowie deren Umstrukturierung,
3. nach der Art der Verarbeitung der enkodierten Information.

Im imaginalen System werden bevorzugt konkrete, "vorstellbare" Inhalte verarbeitet, die in synchronen oder räumlichen Strukturen organisiert sind; man stelle sich im einen Fall etwa musikalische Klangfolgen vor oder die Parallelverschiebung eines Dreiecks in der Ebene, im anderen Fall eine Schachkonfiguration oder eine Raumdiagonale im Würfel und, die Art der Verarbeitung betreffend, z.B. Rubik's Cube oder das Rotieren einer Ellipse um eine der Symmetrie-Achsen. Es handelt sich in diesen Fällen um parallele Verarbeitungsprozesse, bei denen in einem Ablauf jeweils eine Zahl von Informationseinheiten simultan verarbeitet wird.

Das verbale System ist auf die Verarbeitung abstrakter Information ausgerichtet. Solche Informationen sind nach Paivio in sequentiell gearteten Organisationseinheiten repräsentiert. Er nimmt deshalb an, daß solche Einheiten wie Zeichenreihen, Phonetketten etc. grundsätzlich sequentiell verarbeitet werden.

Bereits an dieser Stelle sei angemerkt, daß Wippich und Bredenkamp dies relativieren (1979, z.B. Experiment 4, S.83ff): Auch bei abstrakter Information treten "Integrationsphänomene", d.h. Gestaltprozesse auf! (Als Hinweis mag die Fähigkeit des Menschen zum "diagonalen Lesen" dienen.) Dies wird in der von uns später formulierten Hypothese zum Problemlösen von Bedeutung sein.

Paivio unterscheidet in der Verarbeitung jeder Information drei Stadien:

1. Im repräsentationalen Stadium erzeugen Wahrnehmungsstimuli im "zuständigen" System verbale bzw. imaginale, d.h. kodebezogene Responses;
2. im nachfolgenden referentiellen Stadium wird eine erste Bedeutungszuordnung insofern vorgenommen, als - sofern möglich! - Verbindungen zwischen den beiden Systemen hergestellt werden (Symbole lösen Vorstellungen aus bzw. vorstellungsgebundenen Erscheinungen werden Namen zugeordnet);
3. im assoziativen Stadium erfolgt eine bei abstrakter Information möglicherweise primäre, sonst weitere Bedeutungszuordnung durch repräsentationsentsprechende Assoziationsketten.

(Man denke noch einmal zurück an das Digitaluhr-Beispiel, wo mittels Referenz auf die analoge Zeigerstellung eine Bedeutungszuordnung: Zeitvorstellung erfolgt.)

Inwieweit in einem Lernvorgang bei der Kodierung Bezug auf das jeweils andere System hergestellt wird, hängt nicht nur von der Art der Information ab, sondern auch von äußeren Bedingungen wie Lernabsicht, Dauer, vorstellungsbegünstigende Instruktionen. Jedoch ist die Bedeutung konkreter Objekte und Ereignisse wesentlich imaginal bestimmt, während bei abstrakter Information Bedeutung in erster Linie durch sprachgebundene Verarbeitungsprozesse und Sprachassoziationen zugeordnet wird.

Als Folgerung der dualen Kode-Theorie von Paivio steht die Hypothese: Je konkreter die zu verarbeitende Information, desto größer die Chance für duale Kodierung: verbal und imaginal. An den folgenden Beispielen kann sich jeder selbst dies verdeutlichen:

"Etliche konkrete Gesichtspunkte"

als Beispiel für eine abstrakte Information. (Hatten Sie eben eine Bildvorstellung?)

"Zwei sich schneidende Geraden"

als Beispiel für eine konkretere Information, die Vorstellung aufbaut. Zusätzliches Bildmaterial kann die imaginale Kodierung wie gesagt begünstigen (Abb. 3):

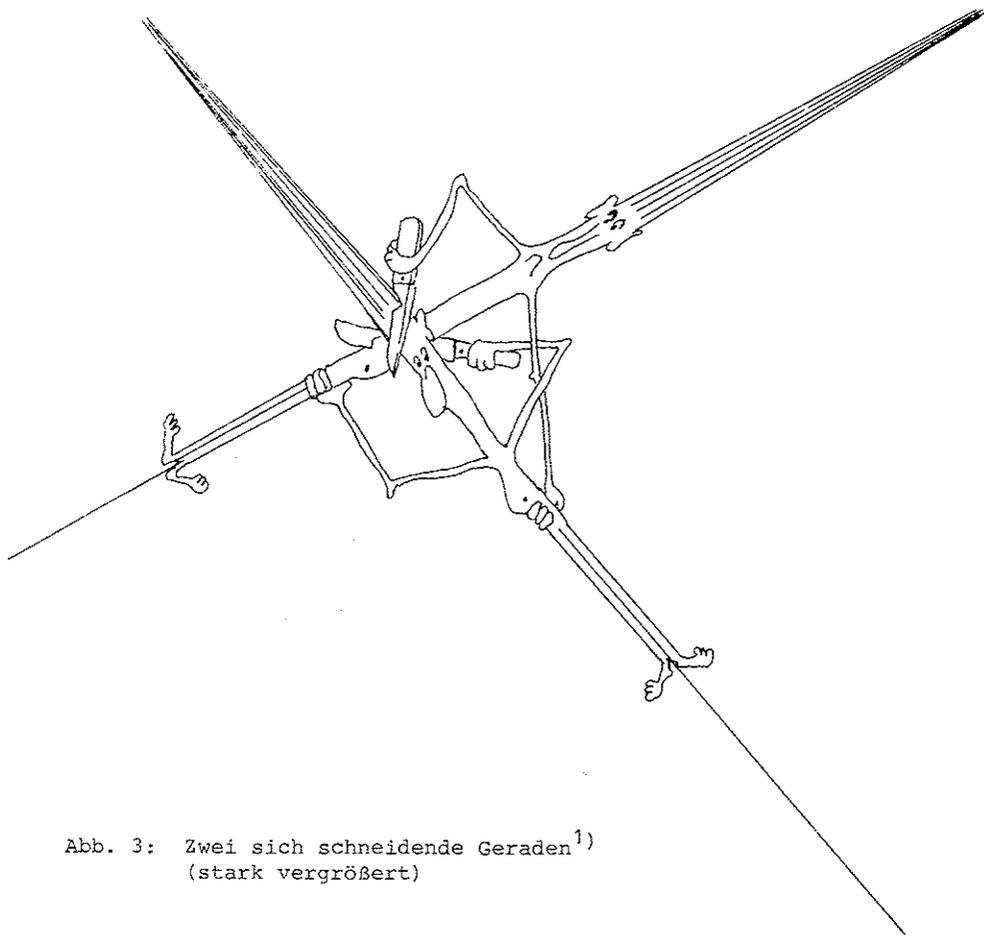


Abb. 3: Zwei sich schneidende Geraden<sup>1)</sup>  
(stark vergrößert)

<sup>1)</sup> Graphik: Marcel Erné

Die Vorteile dualer Kodierung sind sofort einleuchtend; z.B. konnte Paivio zeigen, daß Bilder von Objekten schneller als ihre Namen zum Vergleich von Eigenschaften der Objekte führen. Ferner liegt auf der Hand, daß "zwei sich schneidende Geraden" zur Repräsentation ein Vorstellungsbild, "etliche konkrete Gesichtspunkte" hingegen vermutlich mehr als eine linguistische Einheit erfordert.

Nach dem bisher Gesagten erscheint es also sinnvoll, verschiedene Formen der Wissensrepräsentation in die Überlegungen einzubeziehen; die vorstellungsgebundenen Formen sind dabei nicht auf das Visuelle zu beschränken, wie auch die sprachgebundenen Formen mehrere Aspekte betreffen: Spielt einerseits bei sprachlicher Darbietung von Lerninhalten die zeitliche Folge eine Rolle (eine solche Abhängigkeit von der Darbietungsfolge tritt bei der zeitlich parallelen Wahrnehmung und Verarbeitung eines Bildes nicht auf), so scheint es andererseits beim "logischen" Umgang mit sprachlicher Information weniger auf den zeitlichen Ablauf vor dem Hintergrund einer Beobachtungszeit anzukommen, als vielmehr auf die kausale Folgebeziehung.

Ferner ist eine "äußere", kommunikative Sprache, mittels derer sprachliche Information ins kognitive System des Individuums gelangt bzw. von ihm "entäußert" wird, zu unterscheiden von einer "inneren", der Wissensorganisation dienenden funktionalen Sprache, wie sie in der bei Wygotski (1977, z.B. S.38) betrachteten "egozentrischen Sprache" vorliegt und als "personal metalanguage" bei Davis/McKnight (1979, S.109, siehe auch S.96f, S.101) wieder aufgegriffen wird.

Eine psychologische Theorie müßte wahrscheinlich sehr viel mehr Formen der Informationskodierung berücksichtigen, wie etwa bei Wippich/Bredenkaamp (1979) ausgeführt ist; bleiben wir jedoch bei der groben Unterscheidung: sprachgebunden - sprachfrei, so erhalten wir damit eine für das menschliche Denken, gerade auch in der Mathematik, sehr wesentliche Zweiteilung.

Paivios Theorie beinhaltet unseres Wissens nicht den Gesichtspunkt, daß es imaginal repräsentiertes Wissen gibt, welches von

vornherein kein sprachliches Dual hat. Insbesondere dort, wo Wissen aufgrund von Vorstellungen kreiert wird, stellt es ja nach der Erfahrung fast jeden Mathematikers häufig eine Schwierigkeit dar, dieses in Worte zu "fassen", und es damit sowohl der exakten Überprüfung durch einen formalen Beweis unterziehen zu können, als auch es - gesprochen oder schriftlich - mitteilen zu können.<sup>1)</sup> Häufig gelingt die Explizierung eines neuen mathematischen Begriffs erst und gerade dadurch, daß ein treffender Name die zunächst diffuse Vorstellung davon reproduzierbar macht.

"Ich habe das Wort vergessen,  
Das ich sagen wollte,  
Und körperlos kehrt der Gedanke  
Ins Prunkgemach der Schatten zurück."

beginnt Wygotski (1977, S.291) seine Ausführungen zu "Gedanke und Wort" und verweist damit poetisch auf die Rolle des Worts (Symbols) als Verkörperung des Gedanken, als Träger von und Zugang zu Bedeutung und Vorstellung. Daneben enthält Wygotskis Ausspruch den Hinweis auf die Reichheit des unzugänglichen "dunklen Raums", aus dem Vorstellungen und Bilder entstehen, aus dem möglicherweise Kreation hervorgeht. Diesem Punkt wollen wir uns nun zuwenden.

## 2. L-modales und R-modales Denken

Mathematisches Denken verläuft in unterschiedlichen Modalitäten. Diese bereits angesprochene und wohl kaum umstrittene These soll jetzt aus der Sicht des Vorangegangenen aufgegriffen werden. An vielen Stellen in der Literatur, die hier nicht einzeln genannt werden, finden sich Hinweise darauf; häufig werden sie in Form von sich ergänzenden Gegensatzpaaren genannt, die dann als "komplementär" oder "dual" bezeichnet werden. So wird es nahegelegt,

<sup>1)</sup>Nebenbei: Die formale, syntaktische Logik entwickelte sich gerade aus dem Bedürfnis, die häufig "erfühlten, gesehnen", also semantisch gewonnenen Erkenntnisse der Mathematik in eine rein sprachliche, bedeutungsfreie und daher Fehlinterpretationen nicht unterworfenen Form der Darstellung verlagern zu können. Daß dieses Ziel "nicht vollständig" erreicht werden kann, zeigt der zweite Satz von Gödel; die semantische "Seite" der Mathematik ist also reicher.

sie grob in zwei Gruppen einzuteilen, nach dem Gesichtspunkt ihrer vermutlichen Verarbeitungsart im kognitiven System: Auf der einen Seite kann von einem "logisch-sequentiellen Modus" gesprochen werden, auf der anderen vom "räumlich-parallelen"; "parallel" soll dabei, wie bereits erwähnt, die simultane Durchführung einzelner Denkopoperationen kennzeichnen. Andere Bezeichnungen können verschiedentlich gefunden werden; wir werden im folgenden kurz von L-Modus und R-Modus sprechen. Nachstehend der Versuch einer Auflistung:

L-MODUS	R-MODUS
Konzentration auf Einzelheiten	Absehen von Detail; Gedanken schweifen
Gedanken in eine Bahn bringen (zum Ziel einer systematischen Lösung)	Assoziieren (extrem: "freies" Assoziieren)
kausales Denken (lineare Zeit)	räumliches Denken (kein Zeitbezug)
Verstehen, begründen; Worte, Symbole benutzen	Bilder und Vorstellungen entstehen lassen; erfüllen
Sequentielle Verarbeitung	Parallele Verarbeitung
"konvergierendes Denken", voll bewußt	"divergierendes Denken", zum Teil unterbewußt

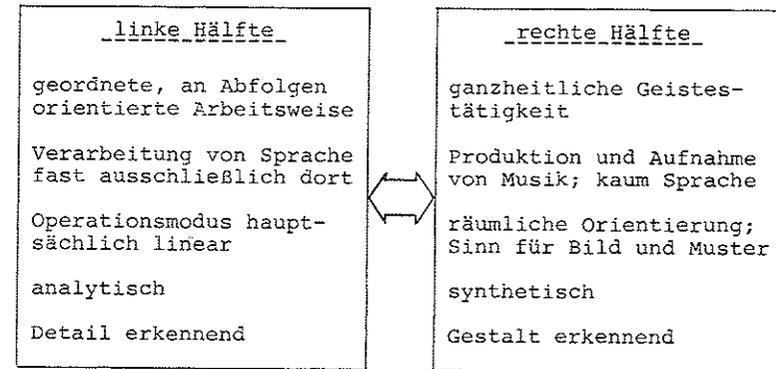
In dieser Liste ist nicht nur ausgedrückt, daß beim Lösen von Problemen auch Vorstellungen eine Rolle spielen, sondern überdies, daß neben dem folgerichtigen Denken eine nicht-kausale, freiere Denktätigkeit beteiligt ist, die auch "unlogische" gedankliche Verbindungen herstellen kann. L-modales Denken bedeutet Konzentration, bedeutet die bewußte Sequentialisierung von sonst nebenläufigen Gedankengängen, zum Ziel etwa einer systematisch gefundenen Problemlösung. R-modales Denken bedeutet Lockerung, Abgehen vom Detail, begünstigt parallele, ganzheitliche Gedankengänge von größerer "Bandbreite", die möglicherweise zu spontanen Einsichten führt.

Gerade das Zusammenwirken solcher Modi beinhaltet unter Umständen das in der Mathematik so wichtige Wechselspiel von kreativer und produktiver Denktätigkeit.

Bereits Descartes setzte in seinen "Regeln für die Lenkung des Verstandes" (Neuaufgabe 1974) Ketten logischer Schlüsse in den Gegensatz zu Intuition und versteht dabei unter Intuition die plötzliche Wahrnehmung von Verbindungen und Beziehungen zwischen verschiedenen Erscheinungsformen. Und Henri Poincaré schreibt in "Mathematical Creation" (deutsche Übersetzung zitiert aus Weizenbaum 1977):

"Das bewußte Selbst ist eng begrenzt, und die Grenzen des unbewußten Selbst kennen wir nicht... Berechnungen ... müssen nach der Phase der Inspiration in einer Phase bewußter Arbeit erfolgen, die die Ergebnisse der Inspiration bestätigt und daraus Konsequenzen ableitet. Die Regeln für diese Berechnungen sind streng und kompliziert. Sie erfordern Disziplin, Aufmerksamkeit, Willen und darum Bewußtheit. Im Gegensatz dazu herrscht im unterbewußten Selbst etwas, das ich Freiheit nennen möchte, wenn wir damit einfach die Abwesenheit von Disziplin bezeichnen dürfen. ... die besonderen Phänomene, die bevorzugt ins Bewußtsein gelangen, sind jene, die mittelbar oder unmittelbar am stärksten unsere emotionale Sensibilität beeinflussen... Die Rolle, die diese unbewußte Arbeit bei mathematischen Erfindungen spielt, ist für mich unbestritten, und ihre Spuren lassen sich gewiß auch an anderer Stelle auffinden, wo sie weniger deutlich zutage tritt."

Die hier vertretene Hypothese der Existenz zweier Denkmodi wird unterstrichen durch Anhaltspunkte für eine unterschiedliche Funktionsspezialisierung der Großhirnhälften beim Menschen, die hier nur skizziert werden können (ausführliche Beschreibungen z.B. in Ornstein 1976, Sinz 1978; angesprochen auch in Weizenbaum 1977). Diese in ihrer äußerlichen Struktur spiegelbildlich angelegten Hemisphären sind durch einen Strang von  $2 \cdot 10^8$  Nervenfasern, den sog. Balken verbunden, über den Milliarden von Impulsen pro Sekunde für einen seitlichen Informationsaustausch sorgen. Ferner gelangt durch eine teilweise Überkreuzung der Sehnerven Information von jedem Auge in die beiden unterschiedlich organisierten Hirnhälften, bei den Ohren ist es ähnlich: Dies kann von Bedeutung für Wahrnehmung und Lernen sein. Schließlich wird ein indirekter Informationsaustausch auf der emotionalen Ebene über das Stammhirn angenommen. Die kooperierenden Hirnhälften kontrollieren überkreuzt die beiden Körperhälften und sollen - bei Rechtshändern - folgende Spezialisierungen in den Denkfunktionen aufweisen:



Hinweise auf die hemisphärische Spezialisierung kamen in den sechziger Jahren aus der klinischen Neurologie und der Neurochirurgie von Sperry und Bogen vom California Institute of Technology. Sie hatten therapeutische Balkendurchtrennungen in Fällen schwerer Epilepsie vornehmen lassen, mit dem dabei tatsächlich erreichten Ziel, daß die Patienten bei Anfällen jetzt wenigstens eine Körperhälfte kontrollieren können. Mit diesen sog. Spalthirn-Patienten wurden viele subtile Tests vorgenommen, von denen einer hier stellvertretend skizziert ist (Quelle: Ornstein 1976; weitere Literaturverweise dort):

Einem Patienten zeigte man in einer Versuchsanordnung das englische Wort "HEART" so, daß er das gesamte Wort "sehen" konnte, jedoch "HE" nur in der rechten und "ART" nur in der linken Hälfte (Abb. 4). Auf die Frage, was er sehe, antwortete er "ART"; aufgefordert mit der (von der rechten Hälfte gesteuerten) linken Hand zwischen Schrifttafeln mit "HE", "ART" und "HEART" auszuwählen, zeigte er dagegen auf "HE" - die für Sprachverarbeitung spezialisierte Hälfte gab eine andere Antwort als die nicht-sprachliche Hälfte! (Im zweiten Fall zeigte der Patient auf das vermeintliche Schriftbild für "ART".)

Experimentalpsychologische Untersuchungen an gesunden Menschen haben inzwischen eine ganze Menge dieser Forschungsergebnisse bestätigt: Die Überlegenheit der rechten Hälfte für simultane

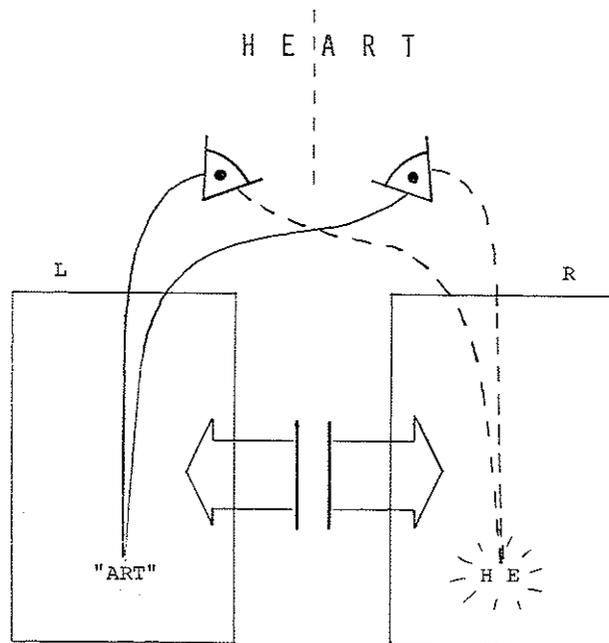


Abb. 4

Informationsverarbeitung wurde nachgewiesen. Verbal-analytische und räumlich-visuelle Geistestätigkeit wurde durch Augenbewegungen (die "motorische Komponente des Vorstellens") und schließlich im beidseitig einzeln gemessenen EEG unterschieden: Das einseitige Auftreten des Entspannung signalisierenden Alpha-Rhythmus scheint eine vorübergehende Abschaltung der Verarbeitung in der durch die Art der dargebotenen Information jeweils nicht angesprochenen Hirnhälfte zu zeigen.

In diesem Zusammenhang sei auch auf Gerhard Steiners Plenarvortrag (1978) auf der 12. Bundestagung in Münster hingewiesen: Er berichtete von Versuchspersonen, die durch Aktivierung verbaler Prozesse arithmetische Aufgaben sogar schneller lösen können, wenn sie "im anderen Kanal" gleichzeitig visuelle Störinformationen in Form eines Filmes mit sinnlosen Folgen von Mustern, Zahlen oder Zahlwörtern verfolgen mußten. Dies ergänzt

weitere in Ornstein (1976) referierte Versuche. Durch die "Ablenkung" der für den jeweils anderen Verarbeitungsmodus zuständigen Hälfte scheint sich in solchen Fällen die Leistung der einen zu erhöhen.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die beiden Hirnhälften die L-Modus und R-Modus verkörpernden "Instanzen" sein könnten. Diese laterale Spezialisierung des Gehirns scheint mit der Evolution der Sprache zu tun zu haben und beim Menschen einzigartig zu sein, allerdings im Einzelfall unterschiedlich stark ausgeprägt. (Bei Linkshändern wird sie - in umgekehrter Zuordnung - in einer schwächeren Ausprägung vorgefunden.) In der rechten Hälfte vermutet man eine Art nicht-sprachliches, daher verborgenes Bewußtsein; ferner gibt es Belege dafür, daß sie der Sitz der Träume ist. R-modales Denken scheint, wenn auch weniger logisch und eindeutig, offenbar für die Kreativität wichtig zu sein: Einstein sprach von einem "kombinatorischen Spielraum", der im Denken vorhanden sei. (Auch Träume lassen sich bekanntlich nicht steuern, kombinieren also in freier Form Bewußtseinsinhalte über bisher Gedachtes hinaus.)

Die Schwierigkeit besteht wie erwähnt darin, Vorstellungen in Sprache zu verlagern, sie zugänglich und mitteilbar zu machen, denn "Was im Denken simultan vorhanden ist, entfaltet sich in der Sprache sukzessiv." (Wygotski 1977, S.353). Häufig gelingt es auf dem Umweg über geeignete Metaphern (auch Bruner hat dies betont), und Ornstein stellt fest: "Der Bereich des Paradigma-Schöpfers ist die "andere" Seite der Wissenschaft."

Die duale Repräsentation gilt auf psychophysiologischer Ebene als objektiviert (Sinz 1978, S.197); wie wenig über die physiologischen Grundlagen noch bekannt ist, zeigt der kürzliche Hinweis englischer Hirnforscher ("Wieviel Gehirn ist nötig?" Der Spiegel Nr.4, 1981): Es scheint weniger auf die Menge als auf die Art der funktionalen Organisation des Gehirns anzukommen. Wir wollen davon ausgehen, daß eins der wichtigsten Organisationsprinzipien die Anlage von Mehrfachrepräsentationen ist, und daß die Verarbeitung derart repräsentierter Information in einem sich ergänzenden Zusammenspiel von L-Modus und R-Modus geschieht.

### 3. Bezüge zum Problemlösen und Lernen von Mathematik

Jede theoretische Beschäftigung mit Lernen bedarf vorab einer Klärung des Problems der Wissensrepräsentation. Wir haben uns eingangs mit sprachgebundenen und sprachfreien Repräsentationsformen beschäftigt und im zweiten Teil ein darauf passendes Modell der Verarbeitung vorgestellt. Nun wollen wir dies in Relation zum Problemlösen und Mathematik-Lernen setzen, wobei - ein Anliegen dieses Vortrags - die "R-modale" Form besondere Berücksichtigung finden soll.

#### 3.1 Thesen zur Rolle von L-Modus und R-Modus beim Problemlösen

Neuere Untersuchungen zeigen, daß eine normale Lerngeschwindigkeit, Kreativität und sprachliche Umsetzung, besonders bei schwierigen Problemen, von der Wechselwirkung beider Modi abhängt; ferner beinhaltet der Schlaf notwendige Phasen der Informationsverarbeitung und Reorganisation des Gedächtnisses (im einzelnen siehe bei Sinz 1978, Kap.V). Dieses als "Überschlafen eines Problems" bekannte Phänomen hat vermutlich einen ähnlichen Bezug zum Problemlösen wie das vorher angesprochene Abwechseln von Phasen der intensiven Beschäftigung mit Phasen der Entspannung:

Die konzentrierte, intensive Beschäftigung mit einem Problem (im L-Modus) bringt u.E. viele einzelne Schnipsel eines Mosaiks in das Gehirn ein, z.B. Fakten und einzelne faktische Zusammenhänge in einem kriminalistischen Fall, oder einzelne in ihrer Auswirkung beobachtete Drehungen und Drehsequenzen mit Rubik's Cube, oder Fragmente probeweise vorgenommener Beweisargumentationen etc.

In Phasen der Entspannung (R-Modus) operiert das Gehirn mit solchen Schnipseln außerhalb der rigiden Steuerung des Bewußtseins, werden sie ohne die kontrollierende (einengende?) Funktion einer die Problemlösung organisierenden Sprache<sup>1)</sup> ("meta-language") versuchsweise zum Mosaik kombiniert, wobei auch

<sup>1)</sup>Achtung: Die Schnipsel selbst können jedoch sprachlich-abstrakt sein, allerdings vorge stellt als Geschriebenes oder Gesprochenes.

nicht naheliegende, auch scheinbar unlogische, auch zufällige Legeversuche durchgespielt werden. Dabei kann es vorkommen, daß plötzlich ein übergeordnetes Ganzes, eine signifikante Gestalt im Mosaik erkannt wird, oder vielleicht auch nur eine "Insel" von Gestalt, die sich dann in bewußter Arbeit (im L-Modus) ergänzen läßt. Häufig bemerkt man erst, wenn solche spontane Einsicht "ins Bewußtsein gelangt", sei es plötzlich und zufällig, oder wenn man sich das nächstemal mit dem Problem (bewußt) beschäftigen will, daß die Gedanken die ganze Zeit "um die Sache gekreist haben".

Diese R-modale Form der Denktätigkeit beinhaltet offenbar auch ein Organisationsprinzip, daß jedoch nicht vom Bewußtsein gesteuert wird und nur an den Resultaten spürbar wird. Am ehesten scheint uns dafür der von Köhler (1929) eingeführte Begriff "silent organization" zu passen.

Bekannt ist auch das Phänomen, daß solche Erkennung von Gestalt häufig von einer zufälligen äußeren Begebenheit, einem Wort, einem Bild, das in die Gedanken einfließt, ausgeht; dieses scheint uns mehr zu bedeuten als nur die Vorgabe eines Ausgangspunkts: Nach Ansicht der Gestaltpsychologie ist eine Wahrnehmung von Gestalt dann möglich, wenn ein Vorverständnis über die (konkrete oder abstrakte) "Szene" besteht. Der von außen kommende Impuls gibt möglicherweise einen (den entscheidenden) Hinweis auf das Vorverständnis, auf den "Rahmen", durch den es gelingt, Gestalt in einem bereits gelegten Teil des Mosaiks zu erkennen (man erinnere sich an das Bild mit der schlafenden Katze).

Den Unterschied zwischen einer logisch-deduktiven (L-modalen) und einer "intuitiven" Problemlösung in der eben beschriebenen Weise sehen wir dabei in folgendem:

Die intuitive Lösung eines Problems durch ein plötzliches Wahrnehmen von Zusammenhängen beinhaltet von vornherein noch nicht, daß man ein "volles Verständnis" hat, also etwa unmittelbar einen Beweis niederschreiben kann. Aber man kennt bereits die Gestalt der Lösung. Es ist wesentlich einfacher, eine schon gesehene Gestalt durch logisch-deduktive Überprüfung zu bestätigen,

als bei dem Bilden von "Ketten logischer Schlüsse" gleichzeitig die noch unbekannte Gestalt der Lösung finden zu müssen!

Andererseits ist bekannt, daß Intuition und Vorstellung auch Irrtum produzieren kann; bei formal-exaktem Vorgehen ist dies wiederum ausgeschlossen. Jedoch scheint erst das Wechselspiel dieser beiden, im Prinzip schon bei Descartes unterschiedenen Modi des Denkens die volle Tiefe der im mathematischen Problemlösen auftretenden Prozesse auszuloten.

Zweierlei gehört jedoch u.E. in jedem Fall dazu, daß ein Problemlöseprozeß in dieser Weise ablaufen kann:

- (L) Das intensive, bewußte Auseinandersetzen mit dem Problem über einen längeren Zeitraum hinweg, wobei z.B. verschiedene Ausschnitte von Beweissequenzen so sehr geläufig werden, daß man sie einzeln im Kopf sich vorstellen und ablaufen lassen kann ("Verinnerlichung der Schnipsel").
  - (R) Das Zurücktreten von einer bewußten weiteren Beschäftigung zwecks Freigabe des Problems für die lockereren Standards des R-Modus (Mosaik legen "lassen" - silent organization).
- (Solange, bis "volles Verständnis" erreicht wird, ist dies im Wechsel zu wiederholen.)

Das Problembewußtsein, welches die Aufmerksamkeit automatisch auf eventuelle spontane Einsichten lenkt, ist nach aller Erfahrung dann vorhanden: Wenn die erste L-Phase entsprechend durchlaufen wurde, läßt "einen das Problem nicht mehr los".

### 3.2 Der R-Modus beim Mathematik-Lernen

Die Rolle von L- und R-modalem Denken beim Mathematik-Lernen wurde vorher bereits angesprochen: Eine möglichst konkrete, anschauliche Aufbereitung von Lerninhalten begünstigt die duale, nicht nur an Sprache gebundene Kodierung, ermöglicht die ökonomischere Repräsentation in Vorstellungsbildern (wie bei "Zwei sich schneidende Geraden"), aus denen nach Bedarf Propositionen ableitbar sind, und macht sie daher sowohl L- als auch R-modalen Verarbeitungsformen zugänglich - kurz: ist die Basis für ein "beziehungshaltigeres" Verständnis. Nicht für jeden mathematischen Bereich aber ist das bekanntlich ohne weiteres möglich.

Voraussetzung für ein Verständnis neuer Lerninhalte ist ein Vorverständnis des Lernenden: In seiner kognitiven Struktur müssen bereits Kategorien vorhanden sein, in denen er das Angebotene interpretieren kann, wenn nicht völlig, so doch daran anschließend, möglicherweise unter Erweiterung seiner Kategorien (Adaption).

Besonders in noch fremden Lernbereichen kann dabei ein "intuitives Vorverständnis" hilfreich sein. Dieses kann implizit bereits vorhanden sein und z.B. durch einen Impuls des Lehrers aktiviert werden, oder aber es muß (durch eine Veränderung der Sichtweise) beim Lernenden erst aufgebaut werden, und zwar mit umso mehr Aufwand, je abstrakter und fremder der anstehende Lernbereich ist. Was hat es damit auf sich?

Aus unserer Sicht ermöglicht ein intuitives Vorverständnis es, die Art der globalen Zusammenhänge zwischen den Objekten des noch unbekanntes Bereichs zu erkennen (oder vorsichtiger: zu erahnen), erleichtert das "Kennen"-Lernen demnach in dem Sinn, daß in den Einzelheiten komplizierte Sachverhalte einfach werden können, wenn die Gestalt des Ganzen vertraut ist. Dabei kann die Gestalt auch durch Verwendung einer völlig anderen Art von "Mosaik Schnipseln" mitgeteilt werden, denn: Gestaltwahrnehmung ist nicht an die Beschaffenheit der Schnipsel gebunden (Beispiel: Mona Lisa aus Abb. 1)! Dieses leistet die ganzheitliche, vom Detail absehende Verarbeitung im R-Modus.

In bemerkenswerter Weise geschieht dies immer wieder in Douglas Hofstadter's Buch "Gödel, Escher, Bach" (1979), wenn etwa (auf S.67ff) der theoretischen Einführung von rekursiv aufzählbaren und rekursiven Mengen eine "Theorie" von "kursiv zeichenbaren" und "rekursiven Figuren" vorangeht: Hier sind die Objekte - Escher-Bilder zum Beispiel - konkret und vorstellbar, und die "Theoreme" haben (im Kontext dieses Bereichs) die gleiche Gestalt und Tragweite wie später die Theoreme über die abstrakten Objekte "rekursiv aufzählbare/rekursive Mengen". Dies eröffnet Vorstellung, "Gefühl" für die "Bedeutung" der Aussagen, die sich auf den abstrakten Bereich überträgt und ermöglicht, daß sich die dort gewonnenen Theoreme schon bald zu einem "Bild" von der

Theorie zusammenfügen. (Die virtuose Ausführung überlassen wir dem genannten Buch; ein Umweg über Bach und Chopin ist dort erst noch eingeplant...)

Soweit zur Rolle von R-modaler Denktätigkeit beim Lernen auch abstrakterer Mathematik. - Zum Abschluß wollen wir noch einige Forschungsprojekte ansprechen, die sich speziell mit Funktions-spezialisierungen bei Schulkindern beschäftigen.

### 3.3 Forschungsprojekte

In Davidson (1979) wird über eine vierjährige Untersuchung (1975-1979) von 300 Kindern im Alter von fünf bis 18 Jahren mit globalen, nicht näher beschreibbaren Lernschwächen berichtet, die am Children's Hospital Medical Center in Boston durchgeführt wurde. Ein sog. Activity Approach wurde benutzt, bei dem in einer Vielzahl von mathematischen "Situationen" die von den Kindern gezeigten Intuitionen, Fertigkeiten und Strategien beobachtet und verglichen wurden. Dabei konnte, eins der Anliegen des Projekts, eine Unterscheidung von zwei Lernstil-Grundtypen nachgewiesen werden, die in Verbindung zu einer Bevorzugung L-modaler oder R-modaler Verarbeitung gesehen werden ("left hemispheric preferring"/"right hemispheric preferring") und sich in viele Einzelheiten aufgliedern: z.B. fällt es dem einen Typ leichter, Wertetabellen von Funktionen fortzusetzen, als dem anderen; beim Finden der allgemeinen Regel ist es eher umgekehrt. Der andere Typ kann spontan richtige Antworten geben, ohne zu wissen, wie er dazu kommt.

Weiterhin wurde in der Untersuchung die Fähigkeit der Kinder, kompensatorische Strategien beim Lernen einzusetzen ermittelt. Man vermutet hier ein höheres Potential als bei Erwachsenen, da eine eindeutige hemisphärische Spezialisierung bei Kindern noch nicht vorzuliegen scheint; ferner reifen die Hemisphären nicht gleich schnell, und es treten Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen auf. Schließlich nimmt der die Hemisphären verbindende Balken seine volle Funktion erst um das 10. Lebensjahr ( $\pm 2$  Jahre) auf. (Anmerkung: Hängt möglicherweise das Erreichen bestimmter Niveaus des formalen Denkens hiermit zusammen?)

Auch die Untersuchung der kompensatorischen Strategien ergab eine Unterscheidung nach dem bevorzugten Verarbeitungsmodus. Die Auswertungen wurden von einem interdisziplinären Spezialisten-Team vorgenommen und führten zu einer umfassenden Einzelbeurteilung für jedes Kind, bei der sein individueller Lernstil in Mathematik und pädagogische Empfehlungen festgelegt wurden. (Eine Vergleichsuntersuchung mit normalen Kindern ist im vorliegenden Paper noch nicht berücksichtigt.) -

Der Zugang zu jeder Art einer strengen Funktionssprache, wie sie in der Mathematik benötigt wird, erfolgt in aller Regel auf dem Umweg über geschriebene Sprache. Schon beim ersten Lesen-Lernen (Bakker 1978) tritt dabei die L/R-Problematik insofern auf, als dem rein-linguistischen Dekodieren von Schrift das (R-modale) Unterscheiden-Können von Schriftzeichen vorangehen muß, das erst später unter die Bewußtseinschwelle absinkt und sofortige Bedeutungszuordnung möglich macht: Grapheme treten im Erstleseunterricht zunächst als neue Form von Mustern auf, die später eng mit der vorher erlernten "gesprochenen" Sprache verknüpft werden müssen. Dies geschieht offenbar leichter innerhalb einer als zwischen den Hirnhemisphären, und es scheint so, daß frühe Lesefertigkeit mit Sprachrepräsentation in der rechten Hemisphäre einhergeht, die später, wenn Grapheme zu linguistischen Einheiten werden, in die linke verlagert wird. (Dies tritt etwa zwischen dem 2. und 3. Schuljahr ein.) Untersuchungen dazu wurden am Department of Developmental and Educational Neuropsychology in Amsterdam, in Zusammenarbeit mit der Northern Illinois University und der Universität Leyden, durchgeführt. Beim Erlernen mathematischer Formelschreibweisen sind vermutlich ähnliche Mechanismen im Spiel: Die unmittelbare Bedeutungszuordnung gelingt erst dann, wenn Zeichen nicht mehr bewußt in linguistische Einheiten übersetzt werden müssen.

Was haben Lesen und Sprache mit dem Lernen von Mathematik noch zu tun? Bereits angesprochen wurde die doppelte Rolle von Sprache als äußere, kommunikative Sprache und als innere Funktionssprache. Die Frage ist, ob diese innere, die Ausrichtung des Individuums auf die Lösung von Problemen organisierende Sprache grundsätzlich an das Beherrschen einer gesprochenen/geschriebenen Sprache gebunden ist.

In diesem Zusammenhang soll schließlich auf ein derzeit in Osnabrück durchgeführtes Projekt hingewiesen werden, bei dem sich diese Frage in ganz besonderer Form stellt: Es handelt sich um Untersuchungen mit gehörlosen Kindern, die aufgrund ihres sprachlichen Handicaps normalerweise in der Mathematik kaum über das elementare Rechnen hinauskommen. Mithilfe einer formalen Darstellung algorithmischer Probleme, die keine Bindung an die natürliche Sprache erfordert, sondern ein "intuitives Verständnis" der gestellten Probleme ermöglicht, können auch sie, wie eine erste Studie zeigt, mit weiterreichenden mathematischen Problemen konfrontiert werden und ihre Lösungen mitteilen (Cohors-Fresenborg/Strüber 1981).

Inwieweit sie dabei die ihrer Vorstellung offenbar zugängliche Darstellung evtl. auch im Sinne einer die Problemlösung organisierenden "Sprache" benutzen, ob sie Probleme intuitiv (R-modal) oder bewußt mithilfe von Plänen (L-modal) lösen, ist bisher ungewiß; eine Klärung könnte unter Umständen weiteren Aufschluß über die Rolle einer inneren Sprache und über das Verhältnis von kommunikativer und egozentrischer Sprache bei kognitiven Prozessen geben.

#### Literatur

- BAKKER, D.J.: A Set of Brains for Learning to Read, preprint (1978), to be published in K.C. Diller (Ed.): Individual Differences and Universals in Language Learning Aptitude (Newbury House Publishers)
- COHORS-FRESENBORG, E. und STRÜBER, H.J.: The learning of algorithmic concepts by action - A study with deaf-mutes, Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe P, Heft 26 (1981), to appear in: Language and Language Acquisition, ed. by F. Lowenthal, Plenum Press, New York 1981
- DAVIDSON, P.S.: Neurological Research and its Implications on Mathematics Education, preprint (1979) to be published in: Journal of the Virginia Council of Teachers of Mathematics (May issue, 1979)
- DAVIS, R.B. and MCKNIGHT, C.C.: Modeling the Processes of Mathematical Thinking, The Journal of Children's Mathematical Behavior (2) 1979, 91-113

- DESCARTES: Regulae ad directionem ingenii, in: Oeuvres de Descartes, publiées par Charles Adam et Paul Tannery, Nouvelle Présentation, Paris 1974
- HOFSTADTER, D.R.: Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid, New York 1979
- KÖHLER, W.: Gestalt Psychology, New York, London 1929
- NORMAN, D.A. and RUMELHART, D.E.: Strukturen des Wissens - Wege der Kognitionsforschung, Stuttgart 1978
- ORNSTEIN, R.: Die Psychologie des Bewußtseins, Frankfurt a.M. 1976
- SINZ, R.: Gehirn und Gedächtnis, Stuttgart, New York 1978
- STEINER, G.: Räumlich-visuelles Vorstellen beim Lösen von geometrischen und arithmetischen Problemen, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover 1978, 260-269
- STENT, G.S.: Wie wir unsere Umwelt erkennen, Psychologie heute, Januar 1981, 62-72; ferner siehe dazu u.a. die MIT AI Memos 446, 451, 557, 558 (alle unter Ko-Autorenschaft D.C. Marr)
- WEIZENBAUM, J.: Die Macht der Computer und die Ohnmacht der Vernunft, Frankfurt a.M. 1977
- WIPPICH, W. und BREDEKAMP, J.: Bildhaftigkeit und Lernen, Darmstadt 1979
- WYGOTSKI, L.S.: Denken und Sprechen, Frankfurt a.M. 1977

#### Abbildungsnachweis

- Abb. 1: nach Scientific American 229, No. 5 (1973), S.70
- Abb. 2: nach "Attneave's sleeping cat", entnommen aus  
Arbib, M.A.: The Metaphorical Brain, New York 1972, S.40
- Abb. 3: Marcel Erné

Dr. Ipke Wachsmuth  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Mathematik  
Albrechtstr. 28  
D-4500 Osnabrück