

Universität Bielefeld/IMW

**Working Papers
Institute of Mathematical Economics**

**Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung**

Nr. 58

Reinhard Selten und Werner Güth

Macht Einigkeit stark? - Spieltheoretische
Analyse einer Verhandlungssituation

August 1977



H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse / Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

Macht Einigkeit stark? - Spieltheoretische Analyse einer Verhandlungssituation

von Reinhard Selten und Werner Güth

Die in der Überschrift gestellte Frage soll im Rahmen eines einfachen Verhandlungsmodells betrachtet werden, in dem ein Spieler A mit zwei unabhängig voneinander handelnden Spielern B_1 und B_2 gleichartige Verträge vereinbaren kann. Können die Spieler B_1 und B_2 ein besseres Ergebnis erreichen, indem sie sich zu einem Spieler zusammenschließen?

Die Spieler B_1 und B_2 sollen im folgenden als B-Spieler bezeichnet werden. Es wird angenommen, daß nur zwei Vertragsformen U und V zur Verfügung stehen, wobei U für B_1 und B_2 günstiger und für A ungünstiger ist als V.

Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, können wir an eine Unternehmung A denken, die ein neues Produkt nicht selbst vertreiben kann und deshalb zwei Unternehmungen B_1 und B_2 mit getrennten Absatzgebieten entweder Produktionslizenzen oder Vertriebsverträge anbieten möchte.

Unser Modell erhebt nicht den Anspruch einer realistischen Beschreibung der Beispielssituation und beschränkt sich auf die möglichst einfache Wiedergabe der für die Fragestellung wesentlichen Züge.

Es wird angenommen, daß A nicht zwischen den B-Spielern diskriminieren kann. Falls mit B_1 und B_2 Verträge geschlossen werden, müssen beiden die gleichen Konditionen eingeräumt werden. Es ist natürlich auch möglich, daß nur mit einem der beiden ein Vertrag abgeschlossen wird oder überhaupt kein Vertrag zustande kommt.

Die spieltheoretische Analyse basiert auf einem Lösungskonzept für nichtkooperative Spiele, das von John C. Harsanyi und Reinhard Selten entwickelt wurde [Harsanyi 1977]. Diese Theorie zielt darauf ab, für jedes endliche extensive Spiel mit vollkommener Erinnerung aus der Menge der perfekten Gleichgewichtspunkte einen als Lösung auszusondern, wobei der verfeinerte Perfektheitsbegriff zugrunde gelegt wird [Selten 1975].

Es zeigt sich, daß ein Zusammenschluß keineswegs immer für die B-Spieler vorteilhaft ist. Es gibt sogar Fälle, in denen sich die Vereinigung nachteilig auswirkt.

1. Das Modell

Das Modell kann am besten als Spiel in Normalform $G = (S_A, S_1, S_2, H)$ beschreiben. Hierbei sind S_A, S_1, S_2 die Mengen der reinen Strategien für die Spieler A, B_1 und B_2 . Jeder der Spieler verfügt über zwei reine Strategien U und V, d.h. es gilt

$$(1) \quad S_A = S_1 = S_2 = \{U, V\}$$

Die Auszahlungsfunktion H ordnet jeder Strategienkombination $s = (s_A, s_1, s_2)$ einen Auszahlungsvektor

$$(2) \quad H(s) = (H_A(s), H_1(s), H_2(s))$$

zu. Die Auszahlungsfunktion H wird durch Tabelle 1 beschrieben. Hierbei sind u und v die zu den Verträgen U und V gehörigen Auszahlungen der B-Spieler. Bei einem Vertragsabschluß können insgesamt 100 verteilt werden. Die B-Spieler haben möglicherweise unterschiedliche Opportunitätskosten, die sich in den Konfliktauszahlungen in der Höhe von 0 bzw. b niederschlagen.

| Strategien | | | Auszahlungen | | |
|------------|-------|-------|--------------|----------|----------|
| s_A | s_1 | s_2 | $H_A(s)$ | $H_1(s)$ | $H_2(s)$ |
| U | U | U | $200-2u$ | u | u |
| U | U | V | $100-u$ | u | b |
| U | V | U | $100-u$ | 0 | u |
| U | V | V | 0 | 0 | b |
| V | U | U | 0 | 0 | b |
| V | U | V | $100-v$ | 0 | v |
| V | V | U | $100-v$ | v | b |
| V | V | V | $200-2v$ | v | v |

Tabelle 1: Auszahlungsfunktion im dezentralisier-
ten Fall.

Es wird angenommen, daß folgendes gilt:

$$(3) \quad 0 \leq b < v < u < 100$$

Ein Konflikt zwischen A und B_i wird nur dann vermieden, wenn diese beiden Spieler dieselbe Vertragsform vorschlagen. Der sogenannte Antikonflikt, in dem jeder die für den anderen günstigere Lösung vorschlägt, wird der Einfachheit halber wie ein Konflikt behandelt. Im Gleichgewicht kann der Antikonflikt nicht auftauchen.

Der Zusammenschluß der B-Spieler führt zu einer 2-Personen-Normalform $G' = (S_A, S_B; H')$ mit

$$(4) \quad S_A = S_B = \{U, V\}$$

und der in Tabelle 2 beschriebenen Auszahlungsfunktion.

| Strategien | | Auszahlungen | |
|------------|-------|--------------|-----------|
| s_A | s_B | $H'_A(s)$ | $H'_B(s)$ |
| U | U | $200-2u$ | $2u$ |
| U | V | 0 | b |
| V | U | 0 | b |
| V | V | $200-2v$ | $2v$ |

Tabelle 2: Auszahlungsfunktion im zentralisierten Fall

Die Auszahlung H'_B ergibt sich als Summe der entsprechenden Auszahlungen H_1 und H_2 .

Es ist unser Ziel, die Lösung des zentralisierten Falls mit derjenigen des dezentralisierten Falls zu vergleichen. Ein Vorteil des Zusammenschlusses liegt vor, wenn sich beim Vergleich der Lösungen für H'_B ein größerer Wert ergibt als für $H_1 + H_2$.

2. Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien

Das Spiel G hat genau zwei Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien, nämlich (U,U,U) und (V,V,V). Man prüft leicht nach, daß dies diejenigen Kombinationen reiner Strategien sind, von denen keiner der Spieler als einziger mit Vorteil abweichen kann. Das zentralisierte Spiel G' hat ebenfalls genau zwei Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien, nämlich (U,U) und (V,V).

Die Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien der Spiele G und G' sind stark in dem Sinne, daß jede Abweichung eines Spielers seine Auszahlung tatsächlich verschlechtert. Starke Gleichgewichtspunkte sind stets perfekt. Dies ergibt sich

ohne Schwierigkeiten aus der Definition des perfekten Gleichgewichtspunktes, die hier nicht näher erläutert werden soll [Selten 1975].

3. Das Lösungskonzept

Das Lösungskonzept sondert im allgemeinen sowohl in G als auch in G' einen der beiden Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien als Lösung aus. In Grenzfällen, die wir hier nicht näher untersuchen werden, kann es auch vorkommen, daß ein Gleichgewichtspunkt in gemischten Strategien die Lösung ist.

Ohne auf die Begriffe der Formation und der Sublösung näher einzugehen, sei hier nur so viel gesagt, daß in den hier vorliegenden Fällen die Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien als Lösungen maximaler Unterformationen Sublösungen sind. Wenn zwei Sublösungen vorliegen, so verlangt das Konzept, daß die Risikodominanzbeziehung zwischen ihnen überprüft wird. Es soll daher kurz erklärt werden, wie das zu geschehen hat.

Die Idee der Risikodominanz beruht auf einem hypothetischen Erwartungsbildungsprozeß, gemäß dem zunächst Unsicherheit darüber besteht, welche der beiden Sublösungen die Lösung ist. Diese Unsicherheit findet ihren Ausdruck in einer Apriori-Strategienkombination, die als Funktion der Sublösungen definiert ist. Ausgehend von der Apriori-Strategienkombination, die allgemein kein Gleichgewichtspunkt ist, gelangt der Erwartungsbildungsprozeß durch eine gleichgewichtserzeugende Erwartungsanpassung zur Lösung des Spieles.

Es soll nun zunächst am Beispiel der Normalform G näher darauf eingegangen werden, wie die Apriori-Strategienkombination zu bestimmen ist. Der Ausgangspunkt ist die Betrachtung der Situation eines Spielers, der davon überzeugt ist, daß die anderen Spieler die Lösung bereits kennen und entsprechend handeln. Der Spieler glaubt, daß mit

Wahrscheinlichkeit p die Sublösung (U,U,U) und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ die Sublösung (V,V,V) die Lösung des Spiels ist. Es wird nun von der Wahrscheinlichkeit p abhängen, welche der beiden Strategien seine Auszahlung maximiert.

Betrachten wir den Fall, daß sich Spieler A in dieser Situation befindet. Falls er die Strategie U wählt, hat er die Auszahlungserwartung

$$(4) \quad E_A = pH_A(U,U,U) + (1-p)H_A(U,V,V).$$

Wählt er dagegen V, so ergibt sich

$$(5) \quad E_A = pH_A(V,U,U) + (1-p)H_A(V,V,V).$$

Wegen

$$(6) \quad H_A(U,V,V) = H_A(V,U,U) = 0$$

ergibt sich in (4) genau dann ein mindestens ebenso grosser Wert wie in (5), falls folgendes gilt:

$$(7) \quad p \geq \frac{H_A(V,V,V)}{H_A(U,U,U) + H_A(V,V,V)}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(8) \quad p \geq \frac{100-v}{200 - (u+v)}$$

Die Apriori-Strategie p_A des Spielers A ergibt sich nun aus der Annahme, daß sich A in der geschilderten Weise verhält, wobei jedoch p eine über dem Intervall $0 \leq p \leq 1$ gleichverteilte Zufallsvariable ist, deren Realisierung nicht bekannt ist. Wir erhalten die folgenden Wahrscheinlichkeiten $p_A(U)$ und $p_A(V)$ dafür, daß A die Strategie U bzw. V wählt:

$$(9) \quad p_A(U) = \frac{100-u}{200 - (u+v)}$$

$$(10) \quad p_A(v) = \frac{100-v}{200 - (u+v)}$$

In derselben Weise bestimmt man Apriori-Strategien p_1 und p_2 für die Spieler B_1 bzw. B_2 :

$$(11) \quad p_1(u) = \frac{u}{u+v}$$

$$(12) \quad p_1(v) = \frac{v}{u+v}$$

$$(13) \quad p_2(u) = \frac{u-b}{u+v-2b}$$

$$(14) \quad p_2(v) = \frac{v-b}{u+v-2b}$$

Die Apriori-Strategienkombination (p_A, p_1, p_2) ist der Ausgangspunkt der durch die Spurprozedur (tracing procedure) modellierten gleichgewichtserzeugenden Erwartungsanpassung [Harsanyi 1975 und 1977].

Die Grundidee der Spurprozedur ist es, eine durch einen Parameter t mit $0 \leq t \leq 1$ gekennzeichnete Familie von Spielen G^t zu betrachten, die sich durch Abänderung der Auszahlungen aus dem untersuchten Spiel G ergeben. Die Auszahlung H^t von G^t für eine Kombination $s = (s_A, s_1, s_2)$ von reinen Strategien ist wie folgt:

$$(15) \quad H_A^t(s) = tH_A(s) + (1-t)H_A(s_A, p_1, p_2)$$

$$(16) \quad H_1^t(s) = tH_1(s) + (1-t)H_1(p_A, s_1, p_2)$$

$$(17) \quad H_2^t(s) = tH_2(s) + (1-t)H_2(p_A, p_1, s_2)$$

Hierbei wird die Definition der Auszahlungsfunktion H in der üblichen Weise auf gemischte Strategien ausgeweitet. Offenbar stimmt G^1 mit G überein. Für $t = 0$ ergibt sich ein Spiel, in dem die Auszahlung eines Spielers nicht von den in G^0 gewählten Strategien der anderen Spieler abhängt.

Hier wählt jeder Spieler eine beste Antwort auf die Apriori-Strategien der anderen. Mit zunehmendem t nimmt der Einfluß der Apriori-Strategien ab und die Abhängigkeit von den in G^t gewählten Strategien der anderen verstärkt sich.

Gemischte Strategien q_A, q_1, q_2 werden hier mit den Wahrscheinlichkeiten für die Wahl von U identifiziert. Kennzeichnet man eine Strategienkombination (q_A, q_1, q_2) für G^t durch das Quadrupel (q_A, q_1, q_2, t) , so bildet die Menge dieser Kombinationen einen 4-dimensionalen Hyperwürfel W . Die Menge M der als Quadrupel beschriebenen Gleichgewichtspunkte der Spiele G^t ist eine Teilmenge von W . Wie John C. Harsanyi gezeigt hat, gibt es in M immer einen in W stetigen Pfad, der einen Vektor bester Antworten auf die Apriori-Strategienkombination (p_A, p_1, p_2) , d.h. einen Gleichgewichtspunkt q^0 von G^0 , mit einem Gleichgewichtspunkt q^1 von G^1 verbindet. Von Ausnahmefällen abgesehen ist dabei q^1 durch (p_A, p_1, p_2) eindeutig bestimmt. (In den Ausnahmefällen kann die Eindeutigkeit durch kompliziertere Definitionen ebenfalls gesichert werden [Harsanyi 1975]).

Auch der Pfad von q^0 nach q^1 ist, von Ausnahmefällen abgesehen, eindeutig bestimmt. In weniger komplizierten Fällen kann der Pfad in "normale" und "horizontale" Abschnitte zerlegt werden. In den normalen Abschnitten entspricht jedem Wert von t auf dem Pfad nur ein Gleichgewichtspunkt von G^t , der als Tripel mit

$$(18) \quad q^t = (q_A^t, q_1^t, q_2^t)$$

bezeichnet wird. Für bestimmte kritische Werte t_k , die sogenannten Umschlagzeiten, kann jedoch der Pfad einen horizontalen Abschnitt haben, der in der Hyperebene $t = t_k$ in W verläuft.

In den normalen Abschnitten wird überdies in den hier betrachteten Fällen q^t fast immer eine Kombination reiner Strategien sein, die in dem betreffenden Abschnitt konstant bleibt. Die zwischen den normalen Abschnitten liegenden horizontalen Ab-

schnitte gehören zu kritischen Werten von t , für die G^t eine Menge von unendlich vielen Gleichgewichtspunkten hat. Der Pfad bewegt sich in dieser Menge zumeist von einer Kombination reiner Strategien zu einer anderen.

Falls in einem der von uns betrachteten Spiele $q^1 = (U,U,U)$ erreicht wird, so sprechen wir davon, daß (U,U,U) risikodominant gegenüber (V,V,V) ist. Die Risikokomianz von (V,V,V) gegenüber (U,U,U) ist natürlich entsprechend definiert.

Bei der Anwendung der Spurprozedur kann man von folgender Tatsache Gebrauch machen: Falls q^t bereits ein starker Gleichgewichtspunkt von G ist, so liegt q^t auf einem bis $t = 1$ verlaufenden normalen Abschnitt, und es ist $q^1 = q^t$. Man braucht also die Spurprozedur nur soweit zu verfolgen, bis zum ersten Mal ein starker Gleichgewichtspunkt von G auftaucht.

Eigentlich müßte das Lösungskonzept nicht auf G selbst, sondern auf die zugehörigen gestörten Spiele angewandt werden. Da (U,U,U) und (V,V,V) starke Gleichgewichtspunkte sind, ist nicht damit zu rechnen, daß sich dabei andere Resultate ergeben würden. Deshalb soll hier der Einfachheit halber das Konzept direkt auf G angewandt werden.

Die Anwendung des Lösungskonzeptes auf die Normalform G' ist besonders einfach, da es sich hier um ein sogenanntes Einstimmigkeitsspiel (unanimity game) handelt. Von derartigen Spielen wissen wir, daß, von Grenzfällen abgesehen, derjenige Gleichgewichtspunkt die Lösung ist, der das Nash-Produkt maximiert [Harsanyi 1977]. Im Falle von G' ergeben sich für (U,U) und (V,V) die folgenden Nash-Produkte P_U und P_V :

$$(19) \quad P_U = (2u-b)(200-2u)$$

$$(20) \quad P_V = (2v-b)(200-2v)$$

Daraus ergibt sich die kritische Grenze

$$(21) \quad b_z = 2(u+v) - 200.$$

Für zuverlässige b mit $b < b_z$ ist (V,V) und für $b > b_z$ ist (U,U) die Lösung von G' . Der Grenzfall $b = b_z$ soll hier nicht betrachtet werden.

4. Die Lösung des dezentralen Falls

Für das Verständnis der rechnerischen Durchführung der Spurprozedur ist es wichtig, ein Bild der Situation vor Augen zu haben, die sich typischerweise dabei ergibt.

Es kann sein, daß q^0 bereits ein starker Gleichgewichtspunkt von G ist; die Prozedur braucht dann nicht weiter verfolgt zu werden. Wenn das nicht der Fall ist, beginnt der Pfad mit einem normalen Abschnitt.

$$(22) \quad q^t = q^0 \quad \text{für } 0 \leq t < t_1,$$

auf den bei t_1 ein horizontaler Abschnitt folgt, der zu einem neuen normalen Abschnitt überleitet. Ist für diesen neuen normalen Abschnitt q^t bereits ein starker Gleichgewichtspunkt von G , so ist q^1 gefunden und es ist nicht mehr nötig, die Prozedur weiter zu verfolgen. Andernfalls endet der zweite normale Abschnitt mit einem zweiten kritischen Wert t_2 , bei dem wieder ein horizontaler Abschnitt zu einem neuen normalen Abschnitt überleitet. Wir bezeichnen die kritischen Werte von t als Umschlagszeiten. Nach endlich vielen Umschlagszeitpunkten t_1, \dots, t_k wird schließlich der Gleichgewichtspunkt q^1 von G erreicht.

Abweichungen von diesem typischen Bild können sich insbesondere dann ergeben, wenn von einem t_i ab mehrere oder sogar unendlich viele Pfade vorhanden sind, die dazu geeignet sind, q^t stetig fortzusetzen. Dies kommt auch in den von uns untersuchten Spielen zuweilen vor, aber nur in Grenzfällen, die hier der Einfachheit halber überhaupt nicht behandelt werden.

Im folgenden werden wir es niemals mit mehr als zwei Umschlagszeiten t_1 und t_2 zu tun haben, wobei überdies eine explizite

Berechnung von t_2 nicht erforderlich sein wird.

4.1 Beste Antworten auf die Apriori-Strategienkombination:

Falls die beste Antwort auf die Apriori-Strategienkombination schon ein starker Gleichgewichtspunkt von G ist, so ist damit bereits die Lösung von G gefunden. Andernfalls ist diese beste Antwort der Wert von q^t im ersten normalen Abschnitt. Man muß damit bestimmen, welche besten Antworten auf die Apriori-Strategienkombination sich in verschiedenen Bereichen des Raums der möglichen Parameterkombinationen (u, v, b) ergeben.

U ist ausschließliche beste Antwort des A auf (p_A, p_1, p_2) , falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(23) \quad (p_1(U) + p_2(U)) (100 - u) > (p_1(V) + p_2(V)) (100 - v)$$

Ähnliche Ungleichungen können auch für die anderen Spieler aufgestellt werden. Durch Umformung kommt man zu dem folgenden Ergebnis:

(a) Spieler A hat ausschließlich U als beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) für

$$(24) \quad 2(u+v)(100 - (u+v)) > b(200 - 3(u+v)).$$

(b) Spieler B_1 hat ausschließlich U als beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) für

$$(25) \quad 100 > u+v.$$

(c) Spieler B_2 hat ausschließlich U als beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) für

$$(26) \quad 100 > u+v-b.$$

Die Bedingungen für V als ausschließliche beste Antworten ergeben sich durch Umkehrung der jeweiligen Ungleichung. Der Grenzfall der Gleichheit wird hier nicht betrachtet.

4.2 Die Lösung für $u+v < 100$: Im folgenden soll gezeigt werden, daß für $u+v < 100$ stets (U, U, U) die Lösung des dezentralen Falles ist. Hierbei spielt es keine Rolle, welchen Wert b in dem Intervall $0 < b < v$ annimmt.

Wie wir sehen werden, ist für $u+v < 100$ die Wahl von U für alle Spieler einzige beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) . Daraus ergibt sich das angekündigte Resultat.

An den Ungleichungen (25) und (26) erkennt man sofort, daß für $u+v < 100$ die Wahl von U für B_1 und B_2 einzige beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) ist. Es muß daher nur noch gezeigt werden, daß dies auch für Spieler A zutrifft.

Für $u+v < 100$ ist die linke Seite von (24) stets positiv. Die Behauptung ist also richtig, falls die rechte Seite von (24) nicht positiv ist. Wir brauchen daher nur den Fall

$$(27) \quad u+v < 66\frac{2}{3}$$

zu betrachten. Hier kann die rechte Seite von (24) dadurch nach oben abgeschätzt werden, daß b durch $(u+v)/2$ ersetzt wird. Die Ungleichung

$$(28) \quad 2(u+v)(100-(u+v)) > \frac{u+v}{2} (200-3(u+v))$$

kann auf die Form

$$(29) \quad 200 > u+v$$

gebracht werden, womit gezeigt ist, daß für $u+v < 100$ der Gleichgewichtspunkt (U, U, U) die Lösung des dezentralen Falles ist.

4.3 Die Lösung für $u+v > 100+b$: Auch hier brauchen noch keine Umschlagzeiten betrachtet zu werden, da für alle Spieler die Wahl von V einzige beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) ist.

Der Gleichgewichtspunkt (V, V, V) ist die Lösung des dezentralen Falles für

$$(30) \quad u+v > 100+b$$

Aus (30) folgt sofort, daß für die Spieler B_1 und B_2 die Bedingungen für V als einzige beste Antwort auf (p_A, p_1, p_2) erfüllt sind. Die Ungleichung

$$(31) \quad 2(u+v)(u+v-100) > b(3(u+v)-200)$$

ist die entsprechende Bedingung für Spieler A. Hier kann auf der rechten Seite b durch $u+v-100$ nach oben abgeschätzt werden. Die veränderte Ungleichung ist gleichbedeutend mit $u+v < 200$. Damit ist gezeigt, daß der Gleichgewichtspunkt (V, V, V) die Lösung des dezentralen Falles ist, falls (30) erfüllt ist.

4.4 Noch verbleibende Fälle: Von Grenzfällen abgesehen sind die in 4.2 und 4.3 noch nicht erfaßten Parameterkombinationen (u, v, b) durch die Bedingung

$$(32) \quad 100 < u+v < 100+b$$

gekennzeichnet. Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß (32) erfüllt ist. Daraus ergibt sich, daß Spieler B_1 die einzige beste Antwort V und Spieler B_2 die einzige beste Antwort U auf (p_A, p_1, p_2) hat. Für den Gleichgewichtspunkt q^t im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ kommen also nur noch die Strategiekombinationen

$$(33) \quad q^t = (V, V, U) \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_1$$

und

$$(34) \quad q^t = (U, V, U) \quad \text{für } 0 \leq t \leq t_1$$

infrage. Für diese Fälle muß untersucht werden, welche Strategiekombination sich für q^t nach t_1 ergibt.

4.5 Der Fall (33): Dieser Fall liegt dann vor, wenn die Ungleichungen (31) und (32) erfüllt sind. Wir werden zeigen, daß für derartige Parameterkombinationen der Gleichgewichtspunkt (V, V, V) die Lösung des dezentralen Falles ist.

Die Umschlagzeit t_1 ist im Fall (33) dadurch gekennzeichnet, daß (V, V, U) für $t = t_1 + \epsilon$ mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$ nicht mehr Gleichgewichtspunkt von G^t ist, weil nun für einen der Spieler die Gleichgewichtsbedingung verletzt ist. Von Grenzfällen abgesehen wird das nicht für zwei Spieler gleichzeitig der Fall sein. Wir bezeichnen den Spieler, dessen Gleichgewichtsbedingung zuerst verletzt wird, als ersten Umschalter.

Wie wir sehen werden, kann A im Fall (33) nicht der erste Umschalter sein. Ersetzt man in (15) die Kombination s durch (V, V, U) , so erkennt man, daß für alle t mit $0 \leq t \leq 1$ die Wahl von V einzige beste Antwort auf (V, V, U) ist. Nach Voraussetzung gilt dies für den zweiten Bestandteil der Auszahlung, der für $t = 0$ ausschlaggebend ist. Auch im Hinblick auf $H_A(s_A, V, U)$ ist $s_A = V$ günstiger als $s_A = U$.

Ebenso erkennt man sofort, daß Spieler B_1 nicht der erste Umschalter sein kann.

Aus dem bisherigen ergibt sich, daß Spieler B_2 der erste Umschalter sein muß. Einer der Spieler muß nämlich erster Umschalter sein, da (V, V, U) kein Gleichgewichtspunkt von G ist. Es muß also einen Umschaltzeitpunkt t_1 geben. Da B_2 erster Umschalter ist, gibt es in G^{t_1} unendlich viele Gleichgewichtspunkte, in denen A und B_1 beide V wählen, während B_2 eine gemischte Strategie spielt. Andere als diese Gleichgewichtspunkte können auf dem horizontalen Abschnitt bei t_1 nicht erreicht werden. Da für A und B_1 die Wahl von V unabhängig von dem Verhalten des B_2 nicht nur für t_1 , sondern auch für $t = t_1 + \epsilon$ mit einem dem Betrag noch hinreichend kleinen ϵ einzige beste Antwort ist, kann sich der Pfad nur mit

einem normalen Abschnitt fortsetzen, für den q^t der Gleichgewichtspunkt (V,V,V) ist. Daraus ergibt sich, daß (V,V,V) die Lösung des dezentralen Falles ist, falls die Ungleichungen (31) und (32) erfüllt sind.

4.6 Der Fall (34): Dieser Fall liegt dann vor, wenn die Ungleichungen (24) und (32) erfüllt sind. Hier hängt dies Ergebnis davon ab, ob b den kritischen Wert

$$(35) \quad b_d = \frac{2(u+v)-200 + \frac{(u^2-v^2)(u+v-100)}{u(200-(u+v))}}{\frac{3(u+v)-200}{u+v} + 2 \frac{(u-v)(u+v-100)}{u(200-(u+v))}}$$

übersteigt oder nicht. Für $b > b_d$ ist (U,U,U) und für $b < b_d$ ist (V,V,V) die Lösung des dezentralen Falles, falls (24) und (32) gilt. Hierbei muß natürlich b im zulässigen Bereich $0 \leq b < v$ liegen; es kann vorkommen, daß b_d nicht in diesem Bereich liegt.

Zunächst soll gezeigt werden, daß B_2 nicht der erste Umschalter sein kann. Später wird sich dann herausstellen, daß je nachdem, ob $b < b_d$ oder $b > b_d$, Spieler A oder Spieler B_1 erster Umschalter ist.

Spieler B_2 hat U als einzige beste Antwort auf die Apriori-Strategienkombination. Im ersten normalen Abschnitt wählt Spieler A Strategie U als Gleichgewichtsstrategie in G^t . Daher hat dort wegen (17) auch Spieler B_2 stets die beste Antwort U .

Ist Spieler A erster Umschalter, so ist die Umschaltzeit t_1 eine durch die Auszahlungsfunktion des Spielers A bestimmte Größe t_A mit der Eigenschaft, daß für $t=t_A$ zum ersten Mal U und V beste Antworten von A in G^t sind. Aus (15) ergibt sich

$$(36) \quad \begin{aligned} t_A H_A(U,V,U) + (1-t_A) H_A(U,p_1,p_2) &= \\ &= t_A H_A(V,V,U) + (1-t_A) H_A(V,p_1,p_2) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Tabelle 1 und den Gleichungen (11) bis (14) erhält man

$$(37) \quad \frac{t_A}{1-t_A} = \frac{1}{u+v-2b} \left(\frac{3(u+v)-200}{u+v} b - 2(u+v-100) \right)$$

Ist B_1 erster Umschalter, so ist die Umschaltzeit t_1 eine durch die Auszahlungsfunktion des Spielers B_1 bestimmte Grösse t_{B_1} , die entsprechend berechnet werden kann:

$$(38) \quad \frac{t_{B_1}}{1-t_{B_1}} = \frac{u-v}{u} \cdot \frac{u+v-100}{200-(u+v)}$$

A ist erster Umschalter, falls $t_A < t_{B_1}$ ist; für $t_{B_1} < t_A$ ist B_1 erster Umschalter. Es genügt, die rechten Seiten von (37) und (38) zu vergleichen. Die Gleichsetzung führt zur Bestimmung der kritischen Grenze b_d . Für $b < b_d$ ist A erster Umschalter und für $b > b_d$ ist B_1 erster Umschalter.

Wir betrachten nun zunächst den Fall $b > b_d$. Der an den ersten normalen Abschnitt anschließende horizontale Abschnitt kann nur Gleichgewichtspunkte von G^1 erreichen, in denen die Spieler A und B_2 die Strategie U wählen. Auf derartige Strategienkombination ist die Strategie U auch in den Spielen G^t mit $|t-t_1| < \epsilon$ für hinreichend kleines ϵ einzige beste Antwort von A und B_2 . Der Pfad kann sich daher nur mit einem normalen Abschnitt fortsetzen, für den q^t der Gleichgewichtspunkt (U,U,U) ist. Damit ist gezeigt, daß für $b > b_d$ der Gleichgewichtspunkt (U,U,U) Lösung des dezentralen Falles ist.

Wir untersuchen nun den Fall $b < b_d$. Hier ist A der erste Umschalter. Wir müssen hinsichtlich des bei $t_1 = t_A$ befindlichen horizontalen Abschnittes zwei Unterfälle (i) und (ii) unterscheiden. Im Fall (i) sind in dem Spiel G^1 sämtliche Strategienkombinationen Gleichgewichtspunkte, gemäß denen B_1 die Strategie V und B_2 die Strategie U wählt. Es kommt dabei nicht darauf an, welche gemischte Strategie Spieler A wählt. Im Fall (ii) dagegen sind solche Kombinationen genau dann

Gleichgewichtspunkte, wenn die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler A die Strategie V verwendet, einen bestimmten Wert $q_A^*(V) < 1$ nicht überschreitet.

Im Unterfall (i) kann man in derselben Weise wie in ähnlichen, bereits behandelten Fällen sehen, daß eine Fortsetzung des Pfades nur entlang eines normalen Abschnittes mit $q^t = (V, V, U)$ möglich ist. Da dies noch kein Gleichgewichtspunkt von G ist, muß noch ein zweiter Umschaltzeitpunkt t_2 auftauchen. Die Situation ist im wesentlichen dieselbe wie im Fall (33). Was dort bezüglich t_1 gesagt wurde, kann nun auf t_2 übertragen werden. Man erkennt so, daß sich schließlich (V, V, V) als Lösung ergibt.

Der Unterfall (ii) ist komplizierter, da hier der Pfad eine Abweichung vom typischen Bild zeigt. Auf den horizontalen Abschnitt folgt nicht ein normaler, sondern ein "rückläufiger", auf dem der Parameter t sich in umgekehrter Richtung bewegt, d.h. t wird im Prozeß der Erwartungsanpassung zunächst kleiner, um erst später wieder größer zu werden.

Der horizontale Abschnitt bei G^{t_1} verläuft von (U, V, U) bis zu (q_A^*, V, U) , wobei q_A^* die der oben erwähnten Grenze $q_A^*(V)$ entsprechende gemischte Strategie ist. Von dort aus muß der Pfad rückläufig fortgesetzt werden. Um zu sehen, daß keine andere stetige Fortsetzungsmöglichkeit besteht, muß man sich folgendes vor Augen halten: Spieler B_1 hat in G^{t_1} überall V als einzige beste Antwort; das gilt auch für die Spiele G^t in einer hinreichend kleinen Umgebung von t_1 . In Gleichgewichtspunkten von G^{t_1} wählt Spieler B_1 also stets V. Wählt Spieler B_1 die Strategie V und verwendet B_2 die Strategie V mit positiver Wahrscheinlichkeit, so hat A nur V als beste Antwort. Wählt B_1 die Strategie V und verwendet A seine Strategie V mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $q_A^*(V)$, so hat Spieler B_2 nur V als beste Antwort. In G^t ist daher neben den Kombinationen (q_A, V, U) mit $q_A(V) \leq q_A^*$ nur noch ein Gleichgewichtspunkt vorhanden, nämlich (V, V, V) , der jedoch in der Hyperebene $t = t_1$ von den anderen Gleichgewichtspunkten isoliert ist.

Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ ist für $t = t_1 + \epsilon$ die Kombination (V, V, V) einziger Gleichgewichtspunkt. Daher kann der Pfad nur über (V, V, V) in den Bereich $t > t_1$ gelangen. Dies geschieht auf dem Umweg einer zunächst rückläufigen Bewegung entlang eines Abschnitts, auf dem q^t ein gemischter Gleichgewichtspunkt mit von t abhängigen Strategien ist. Der rückläufige Abschnitt beginnt in (q_A^*, V, U) für $t = t_1$ und erreicht schließlich für ein t_2 mit $0 < t_2 < t_1$ den Gleichgewichtspunkt (V, V, V) . Dort schließt sich ein normaler Abschnitt an, der zu der Lösung (V, V, V) führt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß im Fall (34) für $b < b_d$ der Gleichgewichtspunkt (V, V, V) und für $b > b_d$ der Gleichgewichtspunkt (U, U, U) die Lösung des dezentralen Falles ist.

4.7 Ergebnis: Die Parameterbereiche, in denen sich (U, U, U) bzw. (V, V, V) als Lösung des dezentralen Falles ergeben, können mit den in Abbildung 1 und 2 wiedergegebenen Diagrammen beschrieben werden. Das (u, v) -Diagramm in Abb. 1 enthält einen Bereich, in dem unabhängig von b stets (U, U, U) die Lösung ist, und einen Bereich, in dem die Lösung von b abhängt. Wegen $v < u$ ist der über der 45° -Linie befindliche Teil des Diagramms ohne Bedeutung.

Für den Bereich, in dem die Lösung von b abhängt, ist das $(b, u+v)$ -Diagramm in Abbildung 2 von Bedeutung. Unterhalb der dort eingezeichneten gekrümmten Linie ist (V, V, V) die Lösung. Diese Kurve ergibt sich aus (24) durch Gleichsetzen der beiden Seiten. Oberhalb der Kurve findet man den Fall (34), in dem b_d ausschlaggebend ist. Da b_d von $u+v$ und $u-v$ abhängt, ist eine einfache zweidimensionale Darstellung der Lösungsbereiche für den Fall (34) nicht möglich.

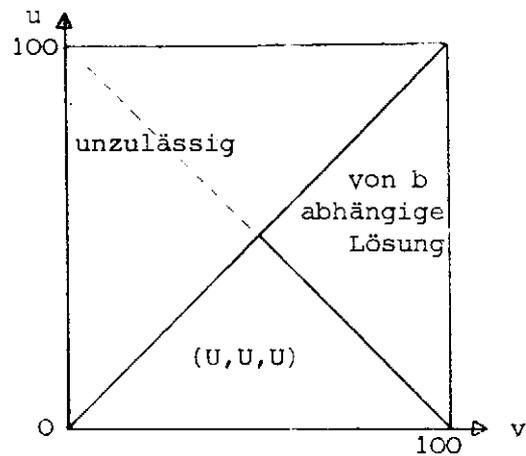


Abbildung 1: (u, v) -Diagramm für die Lösung des dezentralen Falles.

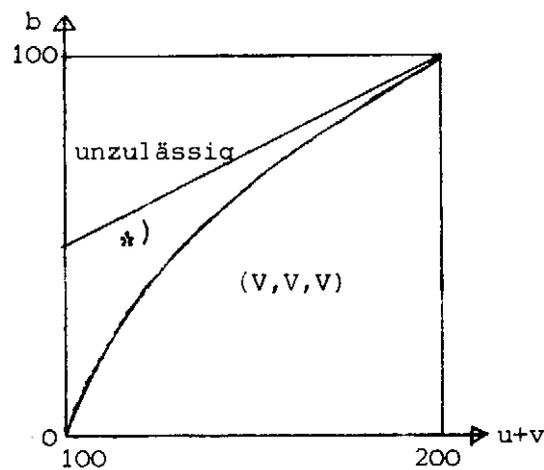


Abbildung 2: $(b, u+v)$ -Diagramm für die Lösung des dezentralen Falles.

*) Hier ist (U, U, U) für $b < b_d$ und (V, V, V) für $b > b_d$ die Lösung. Die untere Begrenzung ergibt sich aus (24) durch Gleichsetzen beider Seiten.

5. Vergleich der Lösungen für den zentralen und den dezentralen Fall.

Wir können nun, von Grenzfällen abgesehen, stets entscheiden, ob für eine Parameterkombination (u,v,b) der Zusammenschluß vorteilhaft oder nachteilig für die B-Spieler ist. Ein Vorteil liegt dann vor, wenn im dezentralen Fall (V,V,V) und im zentralen Fall (U,U) die Lösung ist. Umgekehrt tritt ein Zentralisationsnachteil auf, falls im dezentralen Fall (U,U,U) und im zentralen Fall (V,V) die Lösung ist. Wie wir sehen werden, gibt es sowohl Parameterkombinationen, die mit einem Zentralisationsvorteil verbunden sind, als auch solche, für die ein Zentralisationsnachteil entsteht.

Wir können uns auf die Untersuchung von Bereichen im (u,v) -Diagramm beschränken. Es wird sich nämlich zeigen, daß, von Grenzfällen abgesehen, für jedes Paar (u,v) genau eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(I) Die Lösung des zentralen Falles von (u,v,b) stimmt für alle zulässigen Werte von b mit der des dezentralen Falls überein.

(II) Es gibt zulässige Werte von b , für die (u,v,b) mit einem Zentralisationsvorteil verbunden ist, und es gibt keine zulässigen Werte von b , für die (u,v,b) mit einem Zentralisationsnachteil verbunden ist.

(III) Es gibt zulässige Werte von b , für die (u,v,b) mit einem Zentralisationsnachteil verbunden ist, und es gibt keine zulässigen Werte von b , für die (u,v,b) mit einem Zentralisationsvorteil verbunden ist.

Mit Übereinstimmung der Lösungen ist in (I) natürlich gemeint, daß sich entweder (U,U,U) und (U,U) oder (V,V,V) und (V,V) als Lösungen ergeben.

Die Tatsache, daß nur die oben beschriebenen drei Möglichkeiten vorliegen können, legt es nahe, davon zu sprechen, daß bezüglich eines Parameterpaares (u,v) im Fall I eine Lösungsübereinstimmung, im Falle II ein Zentralisationsvorteil und im Fall III ein Zentralisationsnachteil besteht.

5.1 Bereiche im (u,v) -Diagramm: Abbildung 3 zeigt, in welchen Bereichen des (u,v) -Diagramms die Fälle I, II, III der Lösungsübereinstimmung, des Zentralisationsvorteils und -nachteils vorliegen. In den durch die Symbole U und V gekennzeichneten Bereichen besteht Lösungsübereinstimmung bei der Vertragsform U bzw. V. Die Worte "Vorteil" und "Nachteil" kennzeichnen die Bereiche, in denen sich ein Zentralisationsvorteil bzw. -nachteil ergibt.

Im Bereich U gilt $u+v < 100$. Gemäß Abbildung 1 ist hier (U,U,U) die Lösung des dezentralen Falles. Aus Gleichung (21) erkennt man, daß außerdem b_z negativ ist und deshalb stets (U,U) die Lösung des zentralen Falles ist.

Der Bereich V liegt einerseits rechts von der durch die Bedingung $b_d=v$ bestimmten Kurve, weil dort (V,V,V) die Lösung des dezentralen Falles ist, und andererseits oberhalb von der durch die Bedingung $b_z=v$ gegebenen Geraden $v=200-2u$, weil dort (V,V) die Lösung des zentralen Falles ist. Die Gerade $b_z=v$ schneidet die Kurve $b_d=v$ in der Nähe von $u=86$ und bei $u=100$. Dazwischen verläuft die Gerade rechts von der Kurve $b_d=v$.

Die Bereiche "Vorteil" und "Nachteil" sind durch die Kurve getrennt, auf der Punkte mit $b_d=b_z$ liegen. Es soll nun gezeigt werden, warum in den so abgegrenzten Bereichen ein Zentralisationsvorteil bzw. -nachteil vorliegt. Als erstes muß gezeigt werden, daß die Kurve $b_z=b_d$ tatsächlich den in Abbildung 3 gezeigten Verlauf hat.

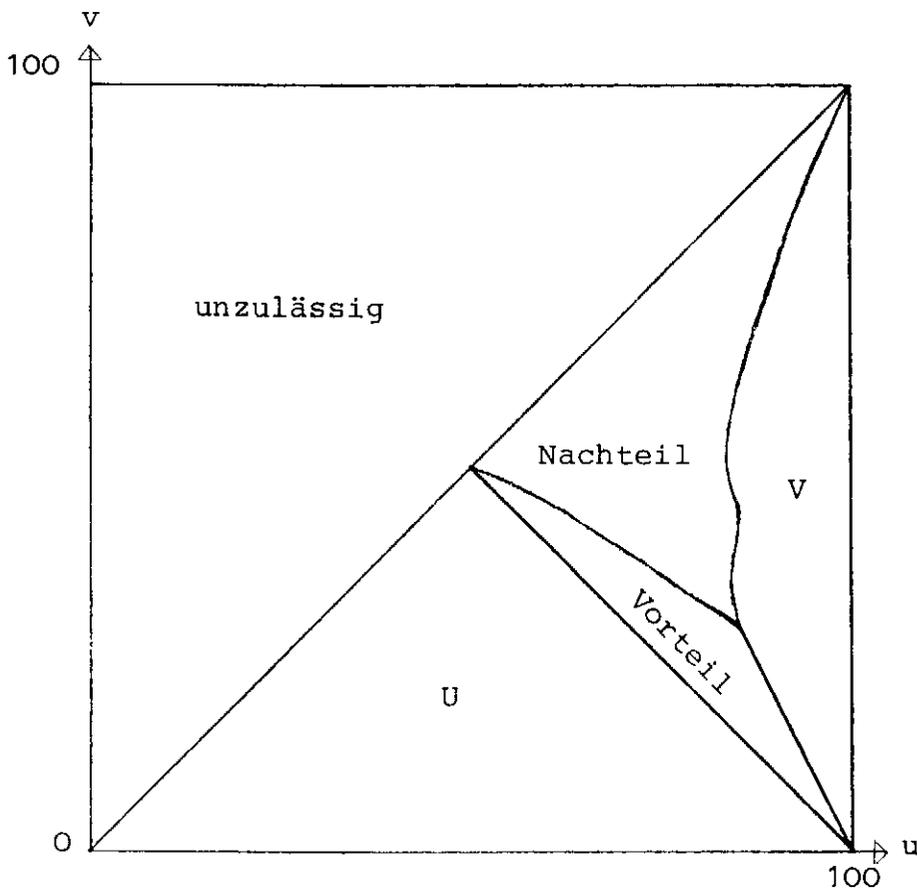


Abbildung 3: Zentralisationsvorteils- und-nachteilsbereiche im (u,v) -Diagramm.

5.2 Verlauf von $b_z = b_d$: Für $u+v=100$ gilt $b_z = b_d = 0$. Dieser Teil der Kurve $b_z = b_d$ ist für uns nicht interessant und soll deshalb im folgenden außer acht gelassen werden, wenn von der Kurve $b_z = b_d$ gesprochen wird. Unter der Voraussetzung $u+v \neq 100$ kann die Gleichung $b_z = b_d$ nach einigen Umformungen auf die Gestalt (39) gebracht werden:

$$(39) \quad \frac{v}{u} = \frac{\frac{u+v}{4} + \frac{20000}{u+v} - 200}{100 - \frac{3}{4}(u+v)}$$

Diese Kurve ist für die Abgrenzung der Bereiche nur dort von Bedeutung, wo b_d und b_z beide kleiner als v sind. Das ergibt sich aus der folgenden Überlegung:

Ist $b_z \geq v$ und $b_d < v$, so ist stets (V, V) die Lösung des zentralen Falles. Im Intervall

$$(40) \quad b_d < b < v$$

ist jedoch (U, U, U) die Lösung des dezentralen Falles. Es liegt dann also ein Zentralisationsnachteil vor.

Ist $b_d \geq v$ und $b_z < v$, so liegt aus ganz ähnlichen Gründen ein Zentralisationsvorteil vor.

Wir brauchen also den Verlauf der Kurve von (39) nur für $b_z < v$ zu untersuchen. Wegen (21) gilt diese Bedingung genau dann, wenn die Ungleichung

$$(41) \quad u+v < 100 + \frac{v}{2}$$

erfüllt ist. Ersetzt man in (41) rechts v durch $(u+v)/2$, so erkennt man, daß wegen $v < u$

$$(42) \quad \frac{3}{4}(u+v) < 100$$

eine notwendige Bedingung für $b_z < v$ ist. Der Nenner der rechten Seite von (39) ist also in dem uns interessierenden Bereich

positiv. Der Zähler ist nur für

$$(43) \quad u+v \leq 400 - 100\sqrt{3} = 117.15$$

nicht negativ. Bildet man die Ableitung der rechten Seite von (39) nach $u+v$ und bedenkt man, daß

$$(44) \quad \frac{u+v}{4} + \frac{20000}{u+v} - 200 = \frac{v}{u} \left(100 - \frac{3}{4}(u+v) \right)$$

gilt, so erkennt man mit Hilfe von (42), daß diese Ableitung für

$$(45) \quad \frac{1}{4} - \frac{20000}{(u+v)^2} + \frac{3}{4} \frac{v}{u} < 0$$

negativ ist. (45) ist wegen (43) und $v < u$ in dem uns interessierenden Bereich stets erfüllt. Die rechte Seite von (39) ist also dort eine monoton fallende Funktion von $u+v$. Deshalb gehört dort auf der Kurve $b_z = b_d$ zu jedem u genau ein v . Diese Kurve hat also außerhalb der Bereiche U und V und ihrer Grenzen den in Abbildung 3 gezeigten Verlauf.

5.3 Zentralisationsvorteils- und -nachteilsbereiche: Die Bedingung $b_d < b_z$ ist, wie man leicht nachprüfen kann, oberhalb der Kurve (39) erfüllt, während unterhalb der Kurve die umgekehrte Ungleichung $b_d > b_z$ besteht.

Wir wissen, daß in den Bereichen U und V Lösungsübereinstimmung besteht. Aus den Abbildungen 1 und 2 ergibt sich deshalb, daß Zentralisationsvorteile und -nachteile nur für die in der Abbildung 2 erfaßten Parameterkombinationen (u, v, b) auftreten können. Für alle (u, v, b) im Bereich (V, V, V) der Abbildung 2 gilt $b_z > b$. Man sieht dies folgendermaßen ein: Für das durch Gleichsetzen beider Seiten in (24) sich ergebende b gilt

$$(46) \quad b_z - b = \frac{4(u+v-100)^2}{3(u+v)-200}$$

Die rechte Seite von (46) ist im betrachtenden Bereich stets

positiv.

Für Parameterkombinationen (u,v,b) im Bereich (V,V,V) der Abbildung 2 ist also stets (V,V) Lösung des zentralen Falles. Zentralisationsvor- und -nachteile können sich also nur für Parameterkombinationen (u,v,b) im Bereich ^{*} der Abbildung 2 ergeben. Für diese Kombinationen (u,v,b) hängt die Lösung des dezentralen Falles davon ab, ob $b > b_d$ oder $b < b_d$ gilt. Daraus ergibt sich, daß sich alle Fälle von Paaren (u,v) mit Zentralisationsvor- oder -nachteilen tatsächlich in den entsprechenden Bereichen der Abbildung 3 befinden müssen.

In den Bereichen "Vorteil" und "Nachteil" ist stets mindestens einer der Werte b_d und b_z kleiner als v . Daher gibt es für $b_z \neq b_d$ dort stets ein Intervall zwischen b_d und b_z , in dem für (u,v,b) ein Zentralisationsvorteil oder -nachteil gegeben ist. Außerhalb dieses Intervalls herrscht Lösungsübereinstimmung. Es ist klar, daß für ein Paar (u,v) nicht gleichzeitig Zentralisationsvorteile und -nachteile bei verschiedenen b auftreten können. Es gilt nämlich entweder stets $b_d > b > b_z$ oder stets $b_z > b > b_d$. Dies sind aber gerade die Bedingungen dafür, daß ein Zentralisationsvorteil bzw. -nachteil bei (u,v,b) vorliegt.

Damit ist gezeigt, daß die in Abbildung 3 eingezeichneten Bereiche die Situation, abgesehen von Grenzfällen auf den Begrenzungslinien, vollständig beschreiben.

5.4 Interpretation: Für das Verständnis des in Abbildung 3 dargestellten Ergebnisses ist es nützlich, eine senkrechte Linie im (u,v) -Diagramm zu betrachten, für die u konstant ist. Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Linie mit $u = 75$.

Für kleine v mit $0 < v < 25$ besteht auf dieser Linie Lösungsübereinstimmung bei der Vertragsform U. Hier ist die Vertragsform V noch so unattraktiv im Vergleich zur Vertragsform U, daß selbst bei $b = 0$ nur U infrage kommt.

Für mittlere v mit $25 < v < 35,91$ liegt für $u = 75$ ein Zentralisationsvorteil vor. Auf der Begrenzungslinie $u+v = 100$ ist

$b_z = b_d = 0$. Abbildung 4 zeigt den weiteren Verlauf von b_z und b_d in Abhängigkeit von v . Sowohl b_z als auch b_d sind steigende Funktionen von v , wobei jedoch nach $v=25$ der kritische Wert b_d zunächst stärker ansteigt als b_z . Dadurch entsteht für $25 < v < 35.91$ die folgende Situation:

$0 < b < b_z$: Lösungsübereinstimmung bei V

$b_z < b < b_d$: Zentralisationsvorteil

$b_d < b < v$: Lösungsübereinstimmung bei U

Für große v mit $35.91 < v < 75$ liegt für $u=75$ ein Zentralisationsnachteil vor. Hier gilt $b_d < b_z$. Für $35.91 < v < 50$ entsteht die folgende Situation:

$0 < b < b_d$: Lösungsübereinstimmung bei V

$b_d < b < b_z$: Zentralisationsnachteil

$b_z < b < v$: Lösungsübereinstimmung bei U

Für $50 < v < 75$ ergibt sich ein Zentralisationsnachteil im Intervall $b_d < b < v$. Hier entfällt das für $35.91 < v < 50$ vorhandene Intervall mit Lösungsübereinstimmung bei U.

Für andere Werte von u kann sich unter Umständen eine kompliziertere Situation ergeben. Aus Abbildung 3 ist aber zu erkennen, daß Zentralisationsvorteile bei "mittleren" v und Zentralisationsnachteile bei "großen" v vorliegen.

Zentralisationsvorteile bestätigen die in der Spruchweisheit "Einigkeit macht stark" zum Ausdruck kommenden naiven Erwartungen. Es fällt auf, daß in unseren Ergebnissen Zentralisationsnachteile mindestens ebenso wichtig sind wie Zentralisationsvorteile.

Zentralisationsnachteile scheinen damit zusammenzuhängen, daß der Spieler B_2 in hinreichend asymmetrischen Situationen

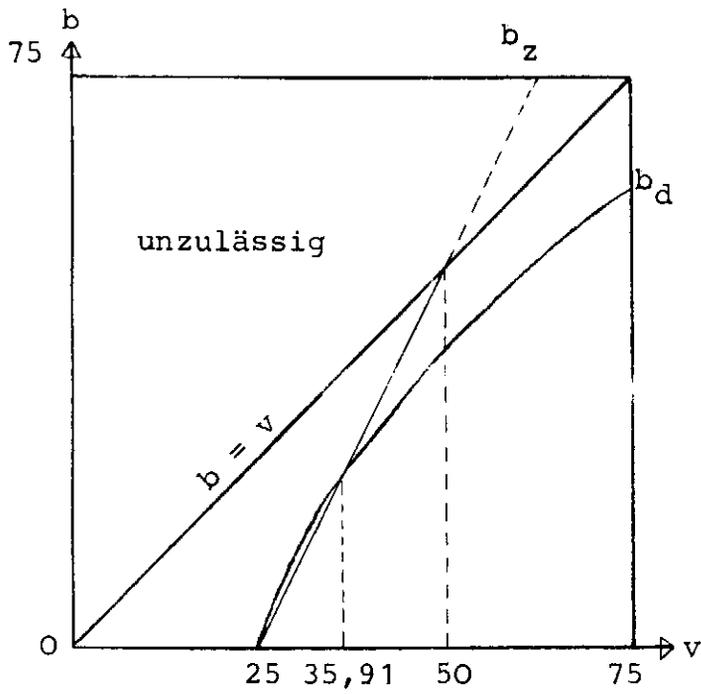


Abbildung 4: Der Verlauf von b_z und b_d für $u=75$ in Abhängigkeit von v .

einen sehr großen Anreiz hat, die Vertragsform U durchzusetzen, da er bei V im Vergleich zu U nur einen geringen Vorteil hat. Diese Tatsache ist in diesen Situationen für die Lösung des dezentralen Falles bestimmend. Der zentralisierte Spieler B trägt ein weit größeres Risiko, wenn er auf U beharrt und die Gefahr besteht, daß A die Strategie V wählt. Der mit V verbundene Vorteil wiegt für den zentralisierten Spieler B schwerer.

Literatur:

Harsanyi, J.C.: The Tracing Procedure: A Bayesian Approach to Defining a Solution for n-Person Noncooperative Games, International Journal of Game Theory 4, 1975, 61-94

A Solution Concept for n-Person Noncooperative Games, International Journal of Game Theory 5, 1976, 211-225

Selten, R.: Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games, International Journal of Game Theory 4, 1975, 25-55