Universität Bielefeld/IMW

Working Papers
Institute of Mathematical Economics

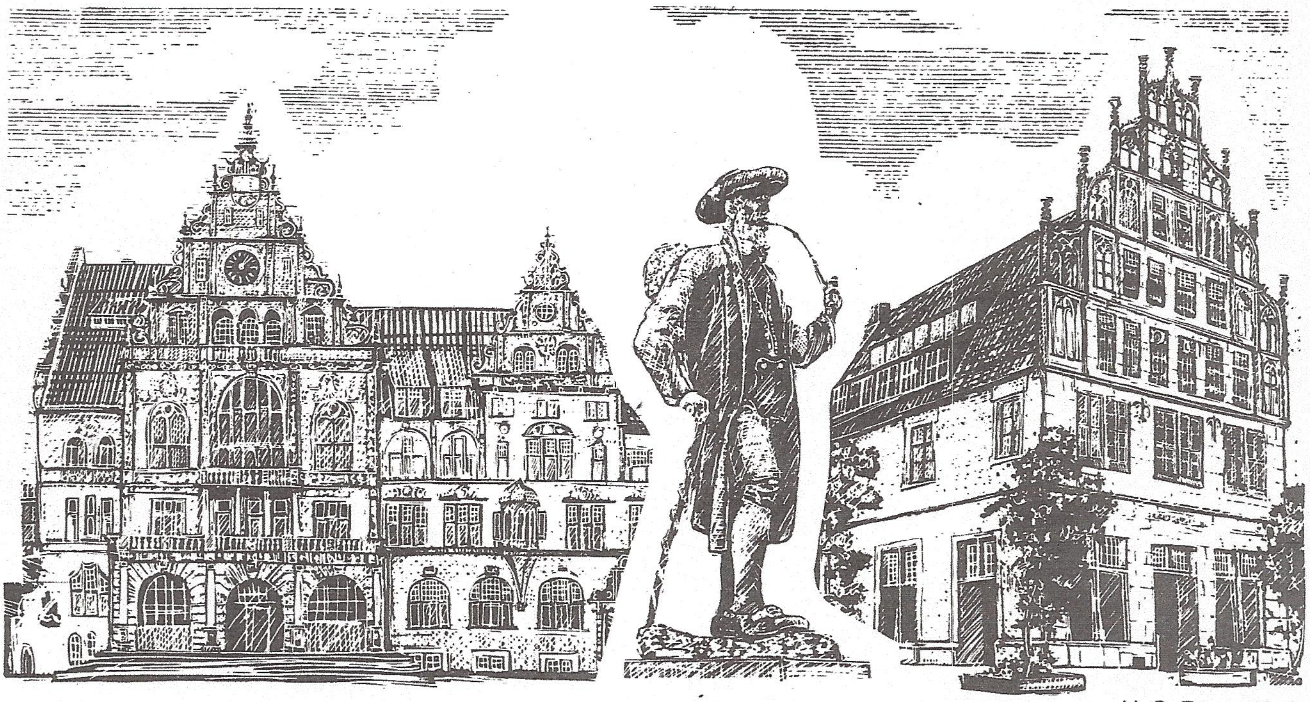
Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 99

Hans-Martin Wallmeier

Der Kern für n-Personen -
Einfache - Produktionsspiele

Juli 1980



H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

Inhaltsverzeichnis

Der Kern für n-Personen-Einfache-Produktionsspiele

In dieser Arbeit betrachten wir das spieltheoretische Lösungskonzept "Kernel" (Maschlers Kern) für eine Klasse von kooperativen Spielen mit Seitenzahlungen, die n-Personen-Einfachen Produktionsspiele (EPS). Es soll gezeigt werden, daß sich der Kern, aufgefaßt als Funktion der Ressourcenverteilung auf der Spielermenge, stückweise affin-linear verhält.

Dazu wird eine Überdeckung der Menge der n-Personen-EPS, mithin eine Überdeckung der Menge der WVen auf der Spielermenge angegeben und innerhalb jeder dieser Überdeckungsmengen gezeigt, daß der Kern einer Konvex-Kombination von Spielen (resp. der zugehörigen WVen) ebendiese Konvex-Kombination der Kerne ist.

Da dieses Ergebnis konstruktiv erzielt wird und daher der Kern immer in expliziter Form vorhanden ist, ist hiermit der Kern angebbar für die gesamte Klasse der EPS (bei bel. Anzahl von Spielern).

Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, daß das obige Ergebnis für 3-Personenspiele schon in [1] erzielt wurde. Die dort gewählte Notation werden wir im Wesentlichen beibehalten und verweisen für die Mehrzahl der im folgenden Abschnitt 0 zitierten Lemmata und Sätze auf die dort durchgeführten Beweise.

0. Grundlagen

Es sollen zunächst die Einfachen-Produktionsspiele definiert werden.

0.1 Definition

Sei $\alpha \in [0,1)$,

$$f^{\alpha} : [0,1] \to [0,1]$$

definiert durch

$$f^{\alpha}(t) := \frac{1}{1-\alpha}(t-\alpha)^{+} \quad ,$$

wobei $\quad (t-\alpha)^{+} := \max\{0, t-\alpha\}.$

Sei m eine WV auf $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ (der Spielermenge).
Dann heißt

$$\Gamma_{\alpha} := (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), v) \text{ mit}$$

$$v := v(\alpha,m) := f^{\alpha} \circ m \text{ ein}$$

<u>n-Personen-Einfaches Produktionsspiel.</u>

Wir fassen im folgenden Lemma einige bekannte Ergebnisse zusammen ([2]):

<u>0.2 Lemma</u>

(1) n-Personen-EPS sind konvexe Spiele
(2) Der Kern eines konvexen Spieles ist ein-elementig
(3) Kern und Prä-Kern sind für konvexe Spiele identisch
(4) Der Kern liegt im Core

Wir merken hier schon an, daß wir wegen (3) nur die technisch einfacher handhabbaren Prä-Kernel-Bedingungen nachzuweisen haben.

Es sollen nun die aus [1] benötigten Ergebnisse in komprimierter Form aufgelistet werden. Es soll nur Lemma 0.4 bewiesen werden, die anderen Beweise können in [1] nachgeschlagen werden.

Jede Permutation $\pi : \Omega \to \Omega$ (Umnumerierung der Spieler) wirkt in natürlicher Weise auf Mengen aus der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ sowie auf Vektoren und Mengenfunktionen (Spiele). Es gilt:

0.3 Lemma

Der Kern von EPS ist „permutationsinvariant",
genauer:

Ist π eine Permutation von Ω , so gilt:

$$\mathcal{K}(\pi(v)) = \pi(\mathcal{K}(v))$$

0.4 Lemma

Sei $m = (m_1, \ldots, m_n)$ eine Ressourcenverteilung
auf $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in [0,1)$ beliebig und

$$v := f^{\alpha} \circ m$$

das zugehörige EPS. Sei $m_k = 0$ vorausgesetzt.
Dann gilt für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x = \mathcal{K}(v)$:

$$x_k = 0.$$

Beweis:

Wegen $m_k = 0$ gilt:

$$1 - m_k = 1 \text{ , also}$$

$$1 = v(\Omega) = v(\Omega - \{k\}).$$

Da für EPS der Kern ein Element des Core ist (vergl. Lemma 0.3, (1) und (4)), so muß insbesondere gelten:

$$x(\Omega - \{k\}) \geq v(\Omega - \{k\})$$

also

$$x(\Omega - \{k\}) \geq 1.$$

da aber $x(\Omega) = v(\Omega) = 1$, folgt

$$x_k = x(\Omega) - x(\Omega - \{k\})$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

q.e.d.

0.5 Lemma

Sei $\alpha \in [0,1)$ und sei durch $m = (m_1, \ldots, m_n)$ eine WV auf Ω gegeben. Gelte $m_{k_1} = m_{k_2}$ für $k_1, k_2 \in \Omega$.

Sei weiterhin $v := v_\alpha(\alpha, m)$ das zu α, m gehörende EPS und $x = (x_1, \ldots, x_n)$ so, daß $x = \mathcal{K}(v)$. Dann gilt:

$$x_{k_1} = x_{k_2} .$$

Sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Wegen der Permutationsinvarianz des Kerns (resp. Prä-Kerns) nach Lemma 0.3 können wir uns auf die Betrachtung von solchen Ressourcenverteilungen $m = (m_1, \ldots, m_n)$ auf Ω beschränken, welche die Bedingung

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$$

erfüllen. Die Menge dieser Vektoren sei mit M_n bezeichnet.

Für einige durch Vektoren aus M_n bestimmte EPS kann der Kern direkt analytisch hergeleitet werden, wie in [1] gezeigt wird. Es sind dies solche Spiele, für die die Spielermenge in zwei Gruppen, die Privilegierten und die Diskriminierten zerfällt, so daß innerhalb einer Gruppe alle Spieler den selben Anteil an den Ressourcen besitzen, also wegen Lemma 0.5 auch im Lösungskonzept „Kernel" dasselbe bekommen.

Wir wollen der Einfachheit halber im Folgenden von WV $m = (m_1, \ldots, m_n)$ sprechen und damit die durch m induzierte WV auf $\{1, \ldots, n\}$ meinen.

0.6 Definition

Ein WV $m = (m_1, \ldots, m_n) \in M_n$ heißt

(k,β) - privilegierend, wenn

$$m_i := m_i^{(k,\beta)} = \begin{cases} \frac{1}{n} + \beta \text{ für } 1 \leq i \leq k \\ \\ \frac{1}{n} - \frac{k}{n-k}\,\beta \text{ für } k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

mit $(k,\beta) \in \Omega \times [0, \frac{n-k}{k \cdot n}]$

Für diese Ressourcenverteilungen ist der Kern durch den folgenden Satz bestimmt:

0.7 Satz (Esguerra)

Sei $m = m^{(k,\beta)}$ eine (k,β) - privilegierende WV.,

$v = v\,(m^{(k,\beta)})$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \mathcal{K}(v)$.

Dann gilt:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\,(m_1^{(k,\beta)} - \frac{\alpha}{n}, \ldots, m_n^{(k,\beta)} - \frac{\alpha}{n}) \\ \qquad \text{falls } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta \\ \\ \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot (m_1^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, \ldots, m_k^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, \\ \qquad m_{k+1}^{(k,\beta)}, \ldots, m_n^{(k,\beta)}) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\quad \text{falls } \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta \leq \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta \\[2ex]
(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \\[2ex]
\quad \text{falls } 1 > \alpha \geq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta
\end{cases}
$$

Wir weisen darauf hin, daß für festes $\alpha \in [0,1)$ nicht alle drei Fälle, sondern nur jeweils zwei Fälle auftreten können, nämlich der erste und zweite für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ und der zweite und dritte für $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Wir können natürlich die Fallunterscheidung auch als Funktion der Verteilung selbst beschreiben und erhalten dann das zu Satz 0.7 äquivalente

0.8 Korollar

Voraussetzungen wie in Satz 0.7.

I) Sei $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$
x = \begin{cases}
\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot (m_1^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, \ldots, m_k^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, \\
\qquad\qquad m_{k+1}^{(k,\beta)}, \ldots, m_n^{(k,\beta)}) \\[2ex]
\qquad \text{falls } 1 - \alpha \geq m_n \cdot \frac{n}{2} \\[2ex]
(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \\[2ex]
\qquad \text{falls } 1 - \alpha \leq m_n \cdot \frac{n}{2}
\end{cases}
$$

II) Sei $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \cdot (m_1^{(k,\beta)} - \frac{\alpha}{n}, \ldots, m_n^{(k,\beta)} - \frac{\alpha}{n}) \\ \qquad \text{falls} \quad \alpha \leq \frac{n}{2} \cdot m_n \\ \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} (m_1^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, \ldots, m_k^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, m_{k+1}^{(k,\beta)}, \ldots, m_n^{(k,\beta)}) \\ \qquad \text{falls} \quad \alpha \geq \frac{n}{2} \cdot m_n \end{cases}$$

Beweis:

zu I):
Nach Satz 0.7 gilt:

$$x = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} (m_1^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, \ldots, m_k^{(k,\beta)} + \frac{1-2\alpha}{k}, m_{k+1}^{(k,\beta)}, \ldots, m_n^{(k,\beta)})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$$

Wir können β für (k,β) - privilegierende WVen durch m_n ausdrücken (vergl. Def. 0.6):

$$m_n = \frac{1}{n} - \frac{k}{(n-k)} \cdot \beta$$

$$\Longleftrightarrow \quad \beta = \frac{(n-k)}{k} \quad (\frac{1}{n} - m_n).$$

Damit ist $\qquad \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$

äquivalent zu:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \frac{(n-k)}{k} \cdot (\frac{1}{n} - m_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - m_n \cdot \frac{n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_n \cdot \frac{n}{2} \leq 1 - \alpha$$

Zu II):

Aufgrund Satz 0.7:

$$x = \frac{1}{1-\alpha} \left(m_1^{(k,\beta)} - \frac{\alpha}{n}, \ldots, m_n^{(k,\beta)} - \alpha\right)$$

genau dann, wenn

$$\alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta \quad .$$

Ersetzen von β durch Ausdruck in $m_n^{(k,\beta)}$ liefert mit der Definition von $m^{(k,\beta)}$:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2(n-k)} \cdot \beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \frac{(n-k)}{k} \cdot \left(\frac{1}{n} - m_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - m_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{n}{2} \cdot m_n$$

q.e.d.

Wir betrachten nun noch einmal die Fallunterscheidung aus Satz 0.7. Für jedes feste $\alpha \in [0,1)$ reduziert sich, wie schon erwähnt, die Fallunterscheidung auf zwei Fälle, nämlich:

$$\alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2.(n-k)} \cdot \beta$$

$$\alpha \geq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$$

für $\alpha \geq \frac{1}{2}$,

sowie auf

$$\alpha \leq \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$$

$$\alpha \geq \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$$

für $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Die Gleichungen $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$ für $\alpha \geq \frac{1}{2}$

resp. $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{2 \cdot (n-k)} \cdot \beta$ für $\alpha \leq \frac{1}{2}$

liefern jeweils ein β, dieses eingesetzt in Definition 0.6 liefert eine (k,β) - privilegierende WV, und diese soll als Zerlegungspunkt bezeichnet werden.

Für $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ erhalten wir die Zerlegungspunkte

$$m^{(n,k)^+} := (\underbrace{\frac{2}{n} \cdot (1-\alpha) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1), \ldots .\ \frac{2}{n} \cdot (1-\alpha) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)}_{k\ -\ \text{mal}},$$

$$\underbrace{\frac{2}{n} \cdot (1-\alpha), \ldots, \frac{2}{n} \cdot (1-\alpha)}_{(n-k)\text{-mal}})$$

resp. für $\alpha \leq \frac{1}{2}$:

$$m^{(n,k)^-} := (\underbrace{\frac{2}{n} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha), \ldots, \frac{2}{n} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)}_{k\ -\ \text{mal}},$$

$$\underbrace{\frac{2}{n} \cdot \alpha, \ldots \frac{2}{n} \cdot \alpha}_{(n-k)\text{-mal}}) .$$

Weitere Zerlegungspunkte erhalten wir durch Ersetzen von n durch $t \in \{1, \ldots, n\}$ in den vorhergehenden Definitionen und Sätzen mit der Konvention, daß die letzten $(n-t)$-Komponenten alle Null zu setzen sind. Die Gültigkeit des so abgeänderten

Satzes 0.7 erhalten wir aus der ursprünglichen Form und Lemma 0.4, welches besagt, daß Spieler, die keinen Anteil an den Ressourcen besitzen, auch im Lösungskonzept "Kernel" nichts bekommen.

Wir definieren also Zerlegungspunkte $m^{(t,k)^+}$, $m^{(t,k)^-}$ durch:

$$m^{(t,k)^+} := (\underbrace{\tfrac{2}{t}\cdot(1-\alpha)+\tfrac{1}{k}\cdot(2\alpha-1),\ldots,\tfrac{2}{t}\cdot(1-\alpha)+\tfrac{1}{k}\cdot(2\alpha-1)}_{k\text{ - mal}},$$

$$\underbrace{\tfrac{2}{t}\cdot(1-\alpha),\ \ldots,\ \tfrac{2}{t}\cdot(1-\alpha)}_{(t-k)\text{-mal}},$$

$$\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{(n-t)\text{-mal}}) \qquad \text{für} \quad \alpha \geq \tfrac{1}{2}$$

resp.

$$m^{(t,k)^-} := (\underbrace{\tfrac{2}{t}\cdot\alpha+\tfrac{1}{k}\cdot(1-2\alpha),\ \ldots,\ \tfrac{2}{t}\cdot\alpha+\tfrac{1}{k}\cdot(1-2\alpha)}_{k\text{ - mal}},$$

$$\underbrace{\tfrac{2}{t}\cdot\alpha,\ \ldots,\ \tfrac{2}{t}\cdot\alpha}_{(t-k)\text{-mal}},$$

$$\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{(n-t)\text{-mal}}) \quad .$$

Für weitere Ausführungen in diesem Zusammenhang kann auf [1] verwiesen werden.

1. Ein Überdeckungssatz

Gegeben seien n Punkte $\mu^{(p,p)}$, $p = 1, \ldots, n$ im $\mathbb{R}^n$ mit $\mu^{(p,p)} \neq \mu^{(p',p')}$ für $p \neq p'$. Es sei vorausgesetzt, daß sie ein (n-1) - dim. Simplex aufspannen. Weiterhin sei mit $\mu^{(p,p')}$ ein Element der Menge der Konvex-Kombinationen von $\mu^{(p,p)}$ und $\mu^{(p',p')}$ bezeichnet, also

$$\mu^{(p,p')} \in \mathrm{conv}\,(\{\mu^{(p,p)}, \mu^{(p',p')}\})$$

mit der Eigenschaft:

$$\mu^{(p,p')} \neq \mu^{(p,p)}, \mu^{(p',p')}$$

für alle $p, p' \in \{1, \ldots, n\}$, $p' < p$.

Es sei eine quadatrische Matrix $\mathcal{M}^n$ definiert durch:

$$\mathcal{M}^n := \begin{pmatrix} \mu^{(1,1)} & \mu^{(2,1)} & \mu^{(3,1)} & \cdots & \mu^{(n,1)} \\ \emptyset & \mu^{(2,2)} & \mu^{(3,2)} & \cdots & \mu^{(n,2)} \\ \emptyset & \emptyset & \mu^{(3,3)} & \cdots & \mu^{(n,3)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \emptyset & & \cdots & \emptyset & \mu^{(n,n)} \end{pmatrix},$$

wobei $\emptyset$ ein leeres Zeichen ohne Bedeutung ist.

Definiere:

$$P_p^n := \{\mu^{(i,j)} \mid i = p, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, p\}$$

1.1. Beispiel: Für $n = 4$ ergibt sich:

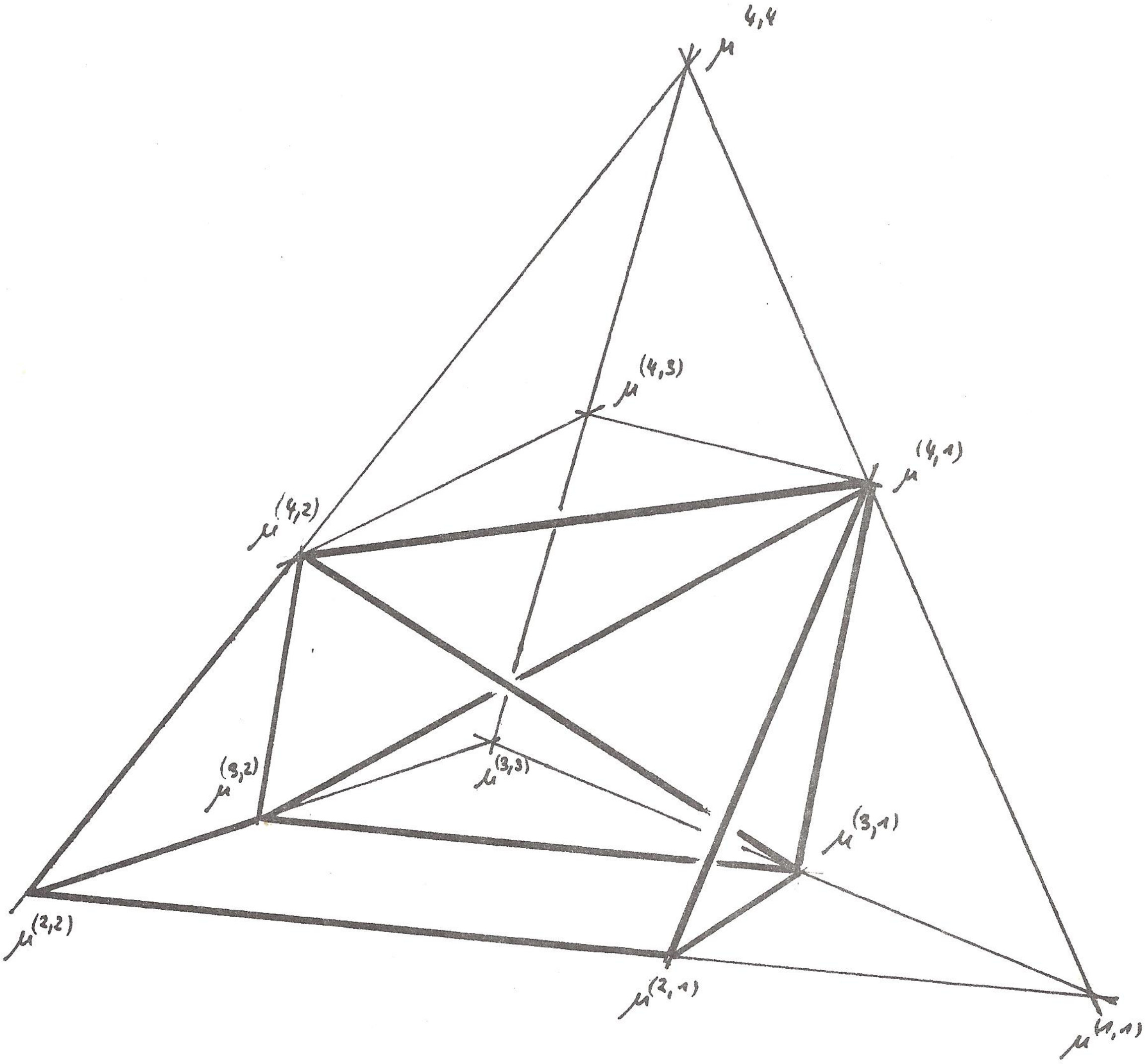
Figur 1:

$$\mathcal{M}^4 = \left(\begin{array}{c|ccc|} \cline{2-4} \mu^{(1,1)} & \mu^{(2,1)} & \mu^{(3,1)} & \mu^{(4,1)} \\ \emptyset & \mu^{(2,2)} & \mu^{(3,2)} & \mu^{(4,2)} \\ \cline{2-4} \emptyset & \emptyset & \mu^{(3,3)} & \mu^{(4,3)} \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \mu^{(4,4)} \end{array} \right)$$

Setze $p = 2$, dann ist

$$P_2^4 = \{\mu^{(2,1)}, \mu^{(3,1)}, \mu^{(4,1)}, \mu^{(2,2)}, \mu^{(3,2)}, \mu^{(4,2)}\}$$

Figur 2:



Die Kanten von conv (P_2^4) sind in Figur 2 herausgehoben, die Eckpunkte von conv (P_2^4) sind in Figur 1 eingerahmt.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Überdeckungssatz zu beweisen.

1.2. Satz

$$\text{conv}\,(\{\mu^{(p,p)} \mid p = 1, \ldots, n\}) = \bigcup_{p=1}^{n} \text{conv}\,(P_p{}^n)$$

Bemerkung

Die Inklusion "$\supset$" ist völlig trivial, denn jedes Element einer Menge $P_{p_o}{}^n$ ist nach Konstruktion eine Konvex-Kombination von zwei Elementen aus $\{\mu^{(p,p)} / p = 1, \ldots, n\}$.

Die Schwierigkeit wird also darin bestehen, die Inklusion "$\subset$", mithin die Überdeckungseigenschaft von

$$\bigcup_{p=1}^{n} \text{conv}\,(P_p{}^n)$$

zu zeigen.

Es sei an dieser Stelle schon bemerkt, daß der Beweis des Satzes die Konvexität von

$$\bigcup_{p=1}^{k} \text{conv}\,(P_p{}^n) \quad , k = 1, \ldots, n$$

ausnutzen wird. Dieses kann man sich am obigen Beispiel (für n = 4) leicht veranschaulichen. Wir beweisen zunächst einige

Lemmata.

1.3. Lemma

Sei $T \subset A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und T und A seien konvex.
Gelte weiterhin:

$$B \subset \text{Kegel}\ (T,a) \text{ für alle } a \in A - T.$$

Dann ist die Menge

$$A \cup \text{conv}\ (T \cup B)$$

konvex.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß die Verbindungsstrecken zwischen allen Punkten aus $A \cup \text{conv}\ (T \cup B)$ wieder vollständig in $A \cup \text{conv}\ (T \cup B)$ liegen. Wegen der Konvexität von A und $\text{conv}\ (T \cup B)$ reicht es natürlich, Punkte x, y mit $x \in A$, $y \in \text{conv}\ (T \cup B)$ zu betrachten. Weiterhin kann $x \in A - T$ vorausgesetzt werden, denn für $x \in T$, $y \in \text{conv}\ (T \cup B)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\text{conv}\ (\{x\} \cup \{y\}) &= \text{conv}\ (\{x,y\}) \\
&\subset \text{conv}\ (T \cup \text{conv}\ (T \cup B)) \\
&= \text{conv}\ (T \cup T \cup B) \\
&= \text{conv}\ (T \cup B).
\end{aligned}$$

Seien also $x \in A - T$, $y \in \text{conv}\ (T \cup B)$ gegeben.

Aufgrund von

$$B \subset \text{Kegel}\ (T,x) \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

und

$$T \subset \text{Kegel}\ (T,x)$$

folgt wegen der Konvexität von Kegel (T,x):

$$\text{conv}\ (B \cup T) \subset \text{Kegel}\ (T,x).$$

Aber $y \in$ Kegel (T,x) besitzt eine Darstellung

$$y = \alpha \cdot (t - x) + x$$

$$\text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \ t \in T.$$

Es kann nun $\alpha > 1$ angenommen werden, denn für $\alpha \leq 1$ ist

$$\begin{aligned} y &= \alpha \cdot (t - x) + x \\ &= \alpha\, t + (1 - \alpha)\, x, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} y &\in \text{conv}\ (\{t\} \cup \{x\}) \\ &\subset \text{conv}\ (T \cup \{x\}) \\ &\subset \text{conv}\ (T \cup (A - T)) \\ &\subset \text{conv}\ (A) \end{aligned}$$

und dann gilt auch

$$\text{conv}\ (\{x\} \cup \{y\}) \subset \text{conv}\ (A)\ .$$

Sei also $\alpha > 1$. Dann definieren wir

$$\lambda := \frac{\alpha - 1}{\alpha} \in (0,1),$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \\ = & \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot x + \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha (t-x) + x) \\ = & \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot x + t - x + \frac{1}{\alpha} \cdot x \\ = & \frac{\alpha - 1 + 1}{\alpha} \cdot x - x + t \\ = & t . \end{aligned}$$

Da $t \in T$ folgt somit

$$t = \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in T.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\operatorname{conv}(\{x\} \cup \{y\}) = \operatorname{conv}(\{x\} \cup \{t\}) \cup \operatorname{conv}(\{t\} \cup \{y\}).$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{conv}(\{x\} \cup \{t\}) & \subset \operatorname{conv}(A-T \cup T) \\ & = \operatorname{conv}(A) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{conv}(\{t\} \cup \{y\}) & \subset \operatorname{conv}(T \cup \operatorname{conv}(T \cup B)) \\ & = \operatorname{conv}(T \cup B), \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{conv}(\{x\} \cup \{y\}) \subset \operatorname{conv}(A) \cup \operatorname{conv}(T \cup B)$$

q.e.d.

Mit Hilfe der nun folgenden Lemmata werden wir für $k \in \{1, \ldots, n\}$ und A_k, T_k, B_k definiert durch

$$A_k := \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}(P_p{}^n)$$

$$T_k := \operatorname{conv}(P_k{}^n \cap P_{k-1}{}^n)$$

$$B_k := P_k{}^n - P_{k-1}{}^n$$

eine der Voraussetzungen von Lemma 1, nämlich

$$B_k \subset \text{Kegel}(T_k, a)$$

für alle $a \in A_k - T_k$ nachweisen.

<u>1.4 Lemma</u>

Seien $b, t, x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_x^b \in \mathbb{R}$. Sei

$$b := \alpha_x^b (t - x) + x \quad \text{mit} \quad \alpha_x^b > 1.$$

Dann existiert eine Darstellung

$$x = \alpha_b^x (t - b) + b$$

für geeignetes $\alpha_b^x \in \mathbb{R}$, $\alpha_b^x > 1$.

Beweis:

Setze $\alpha_b^x := \dfrac{\alpha_x^b}{\alpha_x^b - 1}$. Dann ist $\alpha_b^x > 1$

und einfaches Nachrechnen liefert die Behauptung.

q.e.d.

1.5 Lemma

Seien $b_1, b_2, t^{b_1}, t^{b_2}, x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha^{b_1}, \alpha^{b_2} \in \mathbb{R}$

mit

$$b_1 = \alpha^{b_1} (t^{b_1} - x) + x$$

$$b_2 = \alpha^{b_2} (t^{b_2} - x) + x,$$

wobei $\alpha^{b_1}, \alpha^{b_2} \geq 1$.

Dann existiert für alle $\lambda \in (0,1)$ ein $t^\lambda \in \operatorname{conv}(\{t^{b_1}\} \cup \{t^{b_2}\})$,

so daß

$$\lambda \cdot b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2 = \alpha^\lambda (t^\lambda - x) + x \quad \text{mit}$$

$$\alpha^\lambda \geq 1 \quad \text{und:} \quad \alpha^\lambda = 1 \iff \alpha^{b_1} = \alpha^{b_2} = 1.$$

Beweis:

$$\lambda \cdot b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \lambda \cdot (\alpha^{b_1}(t^{b_1}-x)+x)+(1-\lambda) \cdot (\alpha^{b_2}(t^{b_2}-x)+x)$$

$$= \lambda \cdot \alpha^{b_1} t^{b_1} + \lambda \cdot (1-\alpha^{b_1})\, x$$

$$+ (1-\lambda) \cdot \alpha^{b_2} \cdot t^{b_2} + (1-\lambda) \cdot (1-\alpha^{b_2}) \cdot x$$

Definiere α^{λ} durch

$$\lambda \cdot (1-\alpha^{b_1}) + (1-\lambda) \cdot (1-\alpha^{b_2}) =: 1-\alpha^{\lambda},$$

dann ist

$$\lambda - \lambda \cdot \alpha^{b_1} + 1-\lambda-\lambda\cdot\alpha^{b_2} - \alpha^{b_2} = 1 - \alpha^{\lambda},$$

also

$$- \lambda \cdot (\alpha^{b_1} - \alpha^{b_2}) - \alpha^{b_2} = - \alpha^{\lambda}$$

und

$$\lambda \cdot (\alpha^{b_1} - \alpha^{b_2}) + \alpha^{b_2} = \alpha^{\lambda}$$

Daraus ergibt sicht:

$$\text{(1)} \qquad \lambda \cdot b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2 = \lambda \cdot \alpha^{b_1} \cdot t^{b_1} + (1-\lambda) \cdot \alpha^{b_2} \cdot t^{b_2} + (1-\alpha^{\lambda}) \cdot x.$$

Wir definieren nun:

$$t^{\lambda} := \frac{\lambda \cdot \alpha^{b_1}}{\lambda \cdot \alpha^{b_1}+(1-\lambda)\cdot\alpha^{b_2}} \cdot t^{b_1} + \frac{(1-\lambda) \cdot\alpha^{b_2}}{\lambda \cdot \alpha^{b_1}+(1-\lambda)\cdot\alpha^{b_2}} \cdot t^{b_2}$$

dann ist $t^{\lambda} \in \operatorname{conv}(\{t^{b_1}, t^{b_2}\})$ wegen $\alpha^{b_1}, \alpha^{b_2} \geq 0$

und es gilt

$$\alpha^{\lambda} \cdot (t^{\lambda} - x) + x$$

$$= (\lambda\cdot(\alpha^{b_1}-\alpha^{b_2})+\alpha^{b_2}) \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \alpha^{b_1}}{\lambda \cdot \alpha^{b_1}+(1-\lambda)\cdot\alpha^{b_2}} \cdot t^{b_1} + \frac{(1-\lambda) \cdot \alpha^{b_2}}{\lambda \cdot \alpha^{b_1}+(1-\lambda)\cdot\alpha^{b_2}} \cdot t^{b_2} - x\right) + x$$

$$= \lambda \cdot \alpha^{b_1} \cdot t^{b_1} + (1-\lambda) \cdot \alpha^{b_2} \cdot t^{b_2} - \alpha^{\lambda} \cdot x + x$$

$$= \lambda \cdot \alpha^{b_1} \cdot t^{b_1} + (1-\lambda) \cdot \alpha^{b_2} \cdot t^{b_2} + (1-\alpha^{\lambda}) \cdot x$$

$$= \lambda \cdot b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2 \quad ,$$

wobei die letzte Gleichung aus (1) folgt.

Wegen:

$$\begin{aligned} \alpha^{\lambda} &= \lambda \cdot (\alpha^{b_1} - \alpha^{b_2}) + \alpha^{b_2} \\ &= \lambda \cdot \alpha^{b_1} + (1-\lambda) \cdot \alpha^{b_2} \\ &\geq \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ist also eine Darstellung

$$\lambda \cdot b_1 + (1-\lambda) \cdot b_2 = \alpha^{\lambda} \cdot (t^{\lambda}-x) + x$$

gefunden worden mit $\alpha^{\lambda} \geq 1$, wobei $\alpha^{\lambda} = 1$ genau dann gilt, wenn $\alpha^{b_1} = \alpha^{b_2} = 1$. (beachte $\lambda \in (0,1)$)

q.e.d.

1.6 Lemma

Sei $T \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Seien $x,y \in \mathbb{R}^n - T$

und $B \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$B \subset \text{Kegel } (T,x) \cap \text{Kegel } (T,y)$$

so daß gilt:

$$\bigwedge_{b\in B-T} \ \bigvee_{t_x,t_y\in T} \ \bigvee_{\alpha_x,\alpha_y>1} \quad \begin{aligned} b &= \alpha_x\ (t_x-x)+x \\ &= \alpha_y\ (ty-y)+y \end{aligned}$$

Dann gilt:

(2) $$\bigwedge_{\lambda\in[0,1]} \quad B \subset \text{Kegel } (T,\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y),$$

(3) genauer:

$$\bigwedge_{\lambda\in[0,1]} \ \bigwedge_{b\in B} \ \bigvee_{t_\lambda\in T} \ \bigvee_{\alpha_\lambda>1} \quad b = \alpha_\lambda\ (t_\lambda-(\lambda x+)1-\lambda)\cdot y))+(\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y)$$

Beweis:

Es ist nur $\lambda \in (0,1)$ zu betrachten.
Seien $b \in B$ und $\lambda \in (0,1)$ gegeben und

$$b = \alpha_x\ (t_x-x)+x$$

$$= \alpha_y\ (t_y-y)+y$$

mit $\alpha_x,\ \alpha_y > 1$.

Dann existieren aufgrund Lemma 1.4 reelle Zahlen $\alpha^x,\ \alpha^y > 1$ mit

$$x = \alpha^x\ (t_x-b)+b$$

$$y = a^y\ (t_y-b)+b.$$

Nach Lemma 1.5 existiert nun ein $t_\lambda \in \operatorname{conv}\ (\{t_x,\ t_y\}) \subset T$ und α^λ reell, > 1 mit

$$\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y = \alpha^\lambda\cdot(t_\lambda-b)+b.$$

Mit Hilfe Lemma 1.4 folgt aber nun:

$$b = \alpha_\lambda\ (t_\lambda - (\lambda\ x + (1-\lambda)y)) + \lambda\ x + (1-\lambda)\ y$$

für geeignetes $\alpha_\lambda > 1$.

Dies aber bedeutet:

$b \in$ Kegel $(T, \lambda \cdot x + (1-\lambda)y)$. Da $b \in B$ beliebig gewählt war, folgt unmittelbar die Behauptung.

q.e.d.

1.7 Lemma

Sei $T \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $x \in T$, $y \notin T$. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ mit

$B \subset$ Kegel (T,y)

und insbesondere:

$$\bigwedge_{b \in B}\ \bigvee_{t_y \in T}\ \bigvee_{\alpha_y > 1}\ b = \alpha_y\ (t_y - y) + y$$

Dann gilt:

(4) $$\bigwedge_{\lambda \in [0,1)} B \subset \text{Kegel}\ (T, \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y),$$

genauer:

(5) $$\bigwedge_{\lambda \in [0,1)}\ \bigwedge_{b \in B}\ \bigvee_{t_\lambda \in T}\ \bigvee_{\alpha_\lambda > 1}\ b = \alpha_\lambda \cdot (t_\lambda - (\lambda x + (1-\lambda)y)) + \lambda x + (1-\lambda)y$$

Beweis:

Es genügt $\lambda \in (0,1)$ zu betrachten.

Seien $\lambda \in (0,1)$, $b \in B$ beliebig gewählt und

$$b = \alpha_y \, (t_y - y) + y$$

$$\text{mit} \quad \alpha_y > 1.$$

Dann existiert aufgrund Lemma 1.4 $\alpha^y > 1$ mit

$$y = \alpha^y \, (t_y - b) + b \text{ , d.h. } y \in \text{Kegel } (T,b).$$

Nun aber ist $x \in T$, also insbesondere $x \in$ Kegel (T,b) , daher gibt es eine Darstellung von x derart, daß

$$x = \alpha \, (t^x - b) + b \text{ , } \alpha = 1, \, (t^x = x).$$

Wegen der Konvexität von Kegeln folgt

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in \text{Kegel } (T,b),$$

wobei eine Darstellung

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y = \alpha^\lambda (t_\lambda - b) + b \quad \text{mit}$$

$\alpha^\lambda > 1$ aufgrund Lemma 1.5 gewählt werden kann. Mit Lemma 1.4 aber ergibt sich hieraus:

$$b = \alpha_\lambda \, (t_\lambda - (\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y)) + (\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y).$$

q.e.d.

Wir wenden uns nun einer weiteren Gruppe von Lemmata zu in der wir mit Hilfe der Lemmata 1.6 und 1.7 Inklusionen der Art

$$\bigwedge_{a \in A} \quad B \subset \text{Kegel } (T,a)$$

für bestimmte Mengen A und B beweisen. An dieser Stelle werden erstmals die $\mu^{(p,p')}$ und die Definitionen der Überdeckungsmengen ins Spiel gebracht, während die Lemmata 1.3 - 1.7 von allgemeiner Struktur waren.

Es sei von nun an

$$T_k := \operatorname{conv}(P_k^n \cap P_{k-1}^n).$$

<u>1.8 Lemma</u>

Es seien B_k', A_k' definiert durch

$$B_k' := \{\mu^{(t,t)} \,/\, t \geq k\}$$

$$A_k' := \{\mu^{(t,t)} \,/\, t < k\} .$$

Dann gilt:

(6) $$\bigwedge_{a \in A_k'} B_k' \subset \text{Kegel}\,(T_k, a)$$

genauer

(7) $$\bigwedge_{b \in B_k'} \bigwedge_{a \in A_k'} \bigvee_{t_a^b \in T_k} \bigvee_{\alpha_a^b > 1} b = \alpha_a^b (t_a^b - a) + a .$$

<u>Beweis:</u>

Sei $a \in A_k'$, d.h.

$a = \mu^{(t_o,t_o)}$ mit $t_o < k$

und $b \in B_k'$,

$b = \mu^{(t_1,t_1)}$ mit $t_1 \geq k$, Dann ist

$$\mu^{(t_1,t_o)} \in \operatorname{conv}(\{\mu^{(t_1,t_1)}, \mu^{(t_o,t_o)}\})$$

und es gilt

$$\mu^{(t_1,t_o)} \in P_k^n \cap P_{k-1}^n,$$

denn:

$$P_k^n \cap P_{k-1}^n = \{\mu^{(i,j)} \mid i \geq k,\ j \leq k\} \cap \{\mu^{(i,j)} \mid i \geq k-1,\ j \leq k-1\}$$

$$= \{\mu^{(i,j)} \mid i \geq k,\ j \leq k-1\}.$$

Da fernerhin vorausgesetzt war:

$$\bigwedge_{i,j} \quad \mu^{(i,j)} \neq \mu^{(i,j)},\ \mu^{(i,j)}$$

gilt:

$$\mu^{(t_1,t_o)} = \lambda \cdot \mu^{(t_1,t_1)} + (1-\lambda) \cdot \mu^{(t_o,t_o)}$$

für geeignetes $\lambda \in (0,1)$,

also

$$\mu^{(t_1,t_1)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \mu^{(t_1,t_o)} - \frac{1-\lambda}{\lambda}\, \mu^{(t_o,t_o)}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot (\mu^{(t_1,t_o)} - \mu^{(t_o,t_o)}) + \mu^{(t_o,t_o)} .$$

Mit den Definitionen:

$$\alpha_a^b := \frac{1}{\lambda}, \qquad t_a^b = \mu^{(t_1,t_o)} \in T_k$$

ergibt sich:

$$b = \alpha_a^b \; (t_a^b - a) + a\ , \quad \text{wobei} \quad \alpha_a^b > 1,$$

insbesondere

$$\bigwedge_{a \in A_k'} B_k' \subset \text{Kegel } (T_k, a)$$

da $b \in B_k'$ beliebig gewählt war.

q.e.d.

<u>1.9 Lemma</u>

Sei B_k' wie oben, definiere

$$A_k'' := \text{conv } \{m^{(t,t)} \; / \; t < k\} .$$

Dann gilt:

(8) $$\bigwedge_{a \in A_k''} B_k' \subset \text{Kegel } (T_k, a) ,$$

genauer:

(9) $$\bigwedge_{b \in B_k'} \; \bigwedge_{a \in A_k''} \; \bigvee_{t_a^b \in T_k} \; \bigvee_{\mu_a^b > 1} \quad b = \alpha_a^b \, (t_a^b - a) + a$$

<u>Beweis:</u>

Die Behauptung ist aufgrund Lemma 1.8 richtig für $a \in A_k'$. Dann aber liefert Lemma 1.6 die Aussage von Lemma 1.9, denn $T_k \cap A_k' = \emptyset$.

q.e.d.

<u>1.10 Lemma</u>

Sei A_k'' wie oben. Wir definieren

$$B_k'' := P_k^n - P_{k-1}^n .$$

Dann gilt:

$$(10) \qquad \bigwedge_{a \in A_k''} \quad B_k'' \subset \text{Kegel } (T_k, a),$$

genauer:

$$(11) \qquad \bigwedge_{b \in B_k''} \quad \bigwedge_{a \in A_k''} \quad \bigvee_{t_a^b \in T_k} \quad \bigvee_{\alpha_a^b > 1} \qquad b = \alpha_a^b \, (t_a^b - a) + a$$

Beweis:

Gemäß Lemma 1.9 ist die Behauptung richtig für $b \in B_k'$.

Jedes $b \in B_k'' = P_k^n - P_{k-1}^n$ aber besitzt die Form

$$b = \mu^{(t_1, t_o)} \text{ mit } t_1 \geq k \text{ , } t_o = k, \text{ denn}$$

$$P_k^n - P_{k-1}^n = \{\mu^{(i,j)} / \; i \geq k, \; j = k\}; \text{ das folgt}$$

sofort aus der Definition von P_p^n .

Nun aber ist $\mu^{(t_1, t_o)} \in \text{conv } (\{\mu^{(t_1, t_1)}, \mu^{(t_o, t_o)}\})$ und für

$$t_1 \geq k \text{ , } t_o = k \text{ sind } \mu^{(t_1, t_1)}, \mu^{(t_o, t_o)} \in B_k'$$

nach Definition von B_k' .

Daher gilt:

$$B_k'' \subset \text{conv } (B_k').$$

Anwendung von Lemma 1.5 liefert nun die Behauptung von Lemma 1.10.
Das nun folgende Lemma 1.11 wird uns in die Lage versetzen, eine der Voraussetzungen von Lemma 1.3 zu verifizieren.

1.11 Lemma

Sei B_k'' wie oben und A_k definiert durch

$$A_k := \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}(P_p{}^n). \text{ Dann gilt:}$$

(12) $B_k" \subset \text{Kegel}\ (T_k, a)$ für alle $a \in A_k - T_k$.

Beweis:

Nach Lemma 1.10 gilt die Behauptung für alle $a \in A_k"$ und sogar:

(13) $$\bigwedge_{b\in B_k"} \ \bigwedge_{a\in A_k"} \ \bigvee_{t_a^b\in T_k} \ \bigvee_{\alpha_a^b>1} \quad b = \alpha_a^b\,(t_a^b - a) + a$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} A_k &= \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}\ (P_p^n) \\ &\subset \operatorname{conv}\left(\bigcup_{p=1}^{k-1} P_p^n \right) \\ &\subset \operatorname{conv}\ (\{\mu^{(t,t)} / \ t \leq k-1\} \cup (P_k^n \cap P_{k-1}^n)) \ , \end{aligned}$$

wobei die letzte Inklusion wegen

$$\begin{aligned} \bigcup_{p=1}^{k-1} P_p^n &= \{\mu^{(i,j)} / \ i \geq 1,\ j \leq k-1\} \\ &= \{\mu^{(i,j)} / \ i \leq k-1,\ j \leq k-1\} \\ &\quad \cup \{\mu^{(i,j)} / \ i \geq k,\ j \leq k-1\} \\ &\subset \operatorname{conv}\ (\{\mu^{t,t)} / \ t \leq k-1\}) \\ &\quad\quad \cup \{\mu^{i,j)} / \ i \geq k,\ j \leq k-1\} \\ &= \operatorname{conv}\ (\{\mu^{(t,t)} / \ t \leq k-1\}) \cup (P_k^n \cap P_{k-1}^n) \end{aligned}$$

$$\subset \operatorname{conv}\left(\{\mu^{(t,t)} / t \leq k-1\} \cup (P_k^n \cap P_{k-1}^n)\right)$$

richtig ist.

Ferner gilt:

$$\operatorname{conv}\left(\{\mu^{(t,t)} / t \leq k-1\} \cup (P_k^n \cap P_{k-1}^n)\right)$$

$$= \operatorname{conv}\left(\{\mu^{(t,t)} / t \leq k-1\} \cup \operatorname{conv}(P_k^n \cap P_{k-1}^n)\right)$$

$$= \operatorname{conv}\left(\operatorname{conv}(\{\mu^{(t,t)} / t \leq k-1\}) \cup \operatorname{conv}(P_k^n \cap P_{k-1}^n)\right)$$

$$= \operatorname{conv}(A_k'' \cup T_k)$$

und also

(14) $\quad A_k \subset \operatorname{conv}(A_k'' \cup T_k)$.

Mit Hilfe von (13) und (14) aber folgt nun aus Lemma 1.7:

$$B_k'' \subset \text{Kegel}(T_k, a) \quad \text{für alle} \quad a \in A_k - T_k$$

q.e.d.

Es sind nun alle Hilfsmittel zum Beweis des Überdeckungssatzes bereitgestellt.

<u>Beweis:</u> (Überdeckungssatz)

Wir führen den Beweis per (endlicher) Induktion.

(I) Die Mengen $\operatorname{conv}(P_p^n)$, insbesondere also $\operatorname{conv}(P_1^n)$ sind per Definition konvex.

(II) Wir nehmen nun an, daß

(15) $$A_k = \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}(P_p^n)$$

konvex sei.

Weiterhin ist

$$T_k = \operatorname{conv}(P_k^n \cap P_{k-1}^n) \text{ konvex.}$$

Definiere

$$B_k := P_k^n - P_{k-1}^n.$$

Dann sind für A_k, T_k, B_k die Voraussetzungen von Lemma 1 wegen (15) und Lemma 9 erfüllt und Anwendung von Lemma 1.3 liefert die Konvexität der Menge

$$A_k \cup \operatorname{conv}(B_k \cup T_k).$$

Aber

$$A_k \cup \operatorname{conv}(B_k \cup T_k)$$

$$= \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}(P_p^n) \cup \operatorname{conv}((P_k^n - P_{k-1}^n) \cup \operatorname{conv}(P_k^n \cap P_{k-1}^n))$$

$$= \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}(P_p^n) \cup \operatorname{conv}((P_k^n - P_{k-1}^n) \cup (P_k^n \cap P_{k-1}^n))$$

$$= \bigcup_{p=1}^{k-1} \operatorname{conv}(P_p^n) \cup \operatorname{conv}(P_k^n)$$

$$= \bigcup_{p=1}^{k} \operatorname{conv}(P_p^n) \text{ , d.h.}$$

$$\bigcup_{p=1}^{k} \operatorname{conv}(P_p^n) \text{ ist konvex!}$$

Damit ist gezeigt, daß

(16) $$\bigcup_{p=1}^{n} \operatorname{conv}(P_p^n) \text{ konvex ist.}$$

Nun gilt für alle $\quad p \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mu^{(p,p)} \in P_p^n$$

und also

$$\{\mu^{(p,p)} \mid p = 1, \ldots, n\} \subset \bigcup_{p=1}^{n} \operatorname{conv} (P_p^n)$$

und somit

$$\begin{aligned} &\operatorname{conv} \{\mu^{(p,p)} \mid p = 1, \ldots, n\} \\ (17) \qquad &\subset \operatorname{conv} \Big(\bigcup_{p=1}^{n} \operatorname{conv} (P_p^n)\Big) \\ &= \bigcup_{p=1}^{n} \operatorname{conv} (P_p^n) \;, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund der Konvexität von

$$\bigcup_{p=1}^{n} \operatorname{conv} (P_p^n) \qquad ((16)) \text{ gilt.}$$

(17) aber war gerade die noch für den Überdeckungssatz zu zeigende Inklusion.

q.e.d.

2. Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 1

2.1. Lemma:

Sei $M_n := \{m=(m_1,\dots,m_n) / \sum_{i=1}^{n} m_i = 1,\ m_i \geq 0,\ m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n\}$

und $m^{(t,t)} := (\underbrace{\tfrac{1}{t},\dots,\tfrac{1}{t}}_{t\text{-mal}},0,\dots,0)$.

Dann gilt:

$$M_n = \operatorname{conv}(\{m^{(t,t)} / t=1,\dots,n\})$$

Beweis:

zu „$\supset$"

Jeder der Vektoren $m^{(t,t)}$ erfüllt die Bedingung $m_i \geq m_j$ für $i \leq j$, liegt also in M_n. Dann folgt aus der Konvexität von M_n (die offensichtlich ist) die behauptete Inklusion.

Zu „$\subset$"

Die Koeffizienten λ_t von $m^{(t,t)}$ für $t=1,\dots,n$ seien sukzessiv definiert durch

$$\lambda_n \cdot \frac{1}{n} = m_n$$

$$\iff \lambda_n = n \cdot m_n$$

$$\lambda_{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} + \lambda_n \cdot \frac{1}{n} = m_{n-1}$$

$$\iff \lambda_{n-1} = (n-1) \cdot (m_{n-1} - m_n)$$

$$\lambda_{n-2} \cdot \frac{1}{n-2} + \lambda_{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} + \lambda_n \cdot \frac{1}{n} = m_{n-2}$$

$$\iff \lambda_{n-2} = (n-2)\cdot(m_{n-2} - m_{n-1} + m_n - m_n)$$

$$= (n-2)\cdot(m_{n-2} - m_{n-1})$$

allgemein:

$$\lambda_{n-j} = (n-j) \cdot (m_{n-j}-m_{n-j+1}).$$

Die so definierten λ_t, $t = 1,\dots,n$ liefern:

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda_t \cdot m^{(t,t)} = m.$$

Nun gilt wegen $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$:

$$\bigwedge_{t\in\{1,\dots,n\}} \lambda_t \geq 0$$

und weiterhin:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} \lambda_t &= n \cdot m_n + (n-1)\cdot(m_{n-1} - m_n)\\ &+ (n-2)\cdot(m_{n-2}-m_{n-1}) + \dots\\ &+ n-(n-1)\cdot(m_{n-(n-1)}-m_{n-(n-2)})\\ &= m_n + m_{n-1} + \dots + m_1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$M_n \subset \operatorname{conv}(\{m^{(t,t)} / t = 1,\dots,n\})$$

q.e.d.

Wir greifen nun die Definitionen von $m^{(t,k)+}$ und $m^{(t,k)-}$ aus Abschnitt 0 wieder auf und setzen

<u>2.2. Definition:</u>

$${}_{\alpha}P_{p}^{n+} := \{m^{t,k)+} / t = p,\dots,n, k=1,\dots,p\}$$

für $\alpha \geq \frac{1}{2}$, sowie

$$_{\alpha}P_p^{n-} := \{m^{(t,k)-} / \ t=p,\dots,n, \ k=1,\dots,p\}$$

$$\text{für} \quad \alpha \leq \tfrac{1}{2}.$$

Es soll gezeigt werden, daß für alle $\alpha \in [0,1)$ die Vereinigung der Polyeder conv $({}_{\alpha}P_p^n)$ eine Überdeckung von M_n bilden. Dazu werden wir die Voraussetzungen des in Abschnitt 1 bewiesenen Überdeckungssatzes für $m^{(t,k)+}$, $m^{(t,k)-}$ und die durch sie definierten Polyeder verifizieren müssen.

Zunächst sollen die Polyeder für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ betrachtet werden.

2.3. Bemerkung

Sei $\alpha = \frac{1}{2}$, dann stimmen die Definitionen von $m^{(t,k)+}$ und $m^{(t,k)-}$ (und also auch die zugehörige Polyeder überein, weswegen wir den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ im späteren unter beide Fälle „+" und „-" subsummieren können) und es gilt darüber hinaus

$$m^{(t,k)+} = m^{(t,k)-} = (\underbrace{\tfrac{1}{t},\dots,\tfrac{1}{t}}_{t\text{-mal}}, \underbrace{0,\dots,0}_{(n-t)\text{-mal}})$$

für alle $k \in \{1,\dots,t\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{2}}P_p^n &= \{m^{(t,k)+} / \ t \geq p, \ k \leq p\} \\ &= \{m^{(t,t)+} / \ t \geq p\} \end{aligned}$$

und somit

$$\text{conv}\ ({}_{\frac{1}{2}}P_p^n) = \text{conv}\ (\{m^{(t,t)+} / \ t \geq p\}),$$

insbesondere gilt also:

$$\bigcup_{p=1}^{n} \text{conv}\ ({}_{\frac{1}{2}}P_p^n) = \bigcup_{p=1}^{n} \text{conv}\ (\{m^{(t,t)+} / t \geq p\})$$

$$= \text{conv}\,(\{m^{(t,t)+}/\ t \geq 1\}$$

$$= M_n\ ,$$

wobei die letzte Gleichung aus Lemma 2.1 folgt.

M.a.W.: Die Mengen $\text{conv}\,({}_{\frac{1}{2}}P^n_p)$, $p = 1,\ldots,n$ bilden eine (allerdings ziemlich triviale) Überdeckung von M_n.

2.4. Bemerkung:

Sei $\alpha = 0$. Dann gilt aufgrund der Definition von $m^{(t,k)-}$:

$$m^{(t,k)-} = (\underbrace{\tfrac{1}{k},\ \ldots,\tfrac{1}{k}}_{k\text{-mal}},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{(n-k)\text{-mal}})$$

für alle $t \in \{k,\ldots,n\}$,

damit ist

$${}_oP^{n-}_p = \{m^{(t,k)-}/\ t \geq p,\ k \leq p\}$$

$$= \{m^{(k,k)-}/\ k \leq p\}$$

und

$$\text{conv}\,({}_oP^{n-}_p) = \text{conv}\,(\{m^{(t,k)-}/\ k \leq p\}.$$

Insbesondere folgt:

$$\bigcup_{p=1}^{n} \text{conv}\,({}_oP^{n-}_p) = \bigcup_{p=1}^{n} \text{conv}\,(\{m^{(t,k)-}/\ k \leq p\{)$$

$$= \text{conv}\,\{m^{(k,k)-}/\ k \leq n\}$$

$$= M_n\ ,$$

d.h., die Mengen $\text{conv}\,({}_oP^n_p)$, $p=1,\ldots,n$ bilden eine (triviale)

Überdeckung von M_n.

2.5 Lemma:

Sei $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Dann erfüllen die (Ressourcenverteilungen) $m^{(t,k)+}$ (auf der Spielermenge) die folgenden Bedingungen:

(i) $m^{(p,p)+} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $m^{(p,p)+} \neq m^{(p',p')+}$ für $p \neq p'$

(iii) $\{m^{(p,p)+} \;/\; p = 1,\ldots,n\}$ spannt ein (n-1) - dimensionales Simplex auf.

(iv) $m^{(p,p')+} \in \text{conv}\,(\{m^{(p,p)+}\; m^{(p',p')+}\})$

$$\text{mit } m^{(p,p')+} \neq m^{(p,p)+},\; m^{(p',p')+} .$$

Beweis:

zu (i): Hier ist nichts zu zeigen

zu (ii): Nach Definition der $m^{(t,k)+}$ gilt:

$$m^{(p,p)+} = (\underbrace{\tfrac{2}{p}\cdot(1-\alpha) + \tfrac{1}{p}\cdot(2\alpha-1),\ldots,}_{p\text{-mal}}\; \underbrace{0,\ldots,0}_{(n-p)\text{-mal}})$$

$$= (\tfrac{1}{p},\ldots,\tfrac{1}{p}, 0,\ldots,0) .$$

Nun ist klar, daß für $p \neq p'$

$$m^{(p,p)+} \neq m^{(p',p')}.$$

zu (iii): Man schaue sich die in (ii) hergeleitete Struktur der $m^{(p,p)+}$ an, dann ist die Behauptung klar.

zu (iv): Sei $m^{(p,p')+}$ mit $p > p'$ gegeben.

Wähle $\lambda := 2\cdot(1-\alpha)$, dann gilt wegen

$\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$:

$$\lambda \in (0,1)$$

und weiter:

$$\lambda \cdot m^{(p,p)} + (1-\lambda) \cdot m^{(p',p')}$$

$$= 2\cdot(1-\alpha)(\frac{1}{p},\ldots,\frac{1}{p}, 0,\ldots,0)+(1-2\cdot(1-\alpha))\cdot(\frac{1}{p'},\ldots,\frac{1}{p'},0,\ldots,0)$$

$$= (\underbrace{\frac{2}{p}\cdot(1-\alpha)+\frac{1}{p'}\cdot(2\alpha-1),\ldots}_{p'\text{-mal}}, \underbrace{\frac{2}{p}\cdot(1-\alpha),\ldots}_{(p-p')\text{-mal}}, \underbrace{0\ldots}_{(n-p)\text{-mal}})$$

$$= m^{(p,p')} \qquad \text{nach Definition,}$$

also $\quad m^{(p,p')} \in \operatorname{conv}(\{m^{(p,p)}, m^{(p',p')}\})$.

Wegen $\quad \alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \quad$ ist

$$0 < \frac{2}{p} \cdot (1-\alpha) < \frac{1}{p}.$$

Betrachtung der p-ten Komponente der Vektoren $m^{(p,p)+}$, $m^{(p',p')+}$ und $m^{(p,p')+}$ liefert aufgrund der linken Ungleichung

$$m^{(p,p')+} \neq m^{(p',p')+}$$

aufgrund der rechten Ungleichung

$$m^{(p,p')+} \neq m^{(p,p)+} .$$

q.e.d.

<u>2.6 Lemma:</u>

Sei $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Dann erfüllen die Zerlegungspunkte $m^{(t,k)-}$ die folgenden Bedingungen:

(i) $m^{(p,p)-} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $m^{(p,p)-} \neq m^{(p',p')-}$ für $p \neq p'$

(iii) $\{m^{(p,p)-} \;/\; p = 1,\dots,n\}$ spannt ein (n-1) - - dimensionales Simplex auf.

(iv) $m^{(p,p')} \in \operatorname{conv}(\{ m^{(p,p)-}, m^{(p',p')-}\})$

mit $m^{(p,p')-} \neq m^{(p,p)-}, m^{(p',p')-}$

Beweis:

zu (i): klar

zu (ii): klar wegen
$m^{(p,p)-} = (\frac{1}{p},\dots,\frac{1}{p}, 0,\dots,0)$.

zu (iii): verwende (ii).

zu (iv): wähle $\lambda := 2\alpha$, dann ergibt einfaches Nachrechnen
$\lambda \cdot m^{(p,p)-} + (1-\lambda) \cdot m^{(p',p')-} = m^{(p,p')}$.
Weiterhin gilt

$$\lambda \in (0,1) \quad \text{wegen} \quad \alpha \in (0,\tfrac{1}{2}).$$

Betrachtung der p-ten Komponente der Vektoren liefert wieder

$$m^{(p,p)-} \neq m^{(p,p)-},\ m^{(p',p')-} \quad \text{wie in}$$

Lemma 2.5, denn es gilt

$$0 < \frac{2}{p} \cdot \alpha < \frac{1}{p}\,.$$

q.e.d.

Die Lemmata 2.5 und 2.6 liefern nun die Voraussetzungen des Überdeckungssatzes aus Abschnitt 1 für die Zerlegungspunkte $m^{(t,k)+}$ resp. $m^{(t,k)-}$ und die Polyeder ${}_{\alpha}P_p^{n+}$, ${}_{\alpha}P_p^{n-}$; zusammen mit den Bemerkungen 2.3 und 2.4 ergibt sich also:

$$\bigwedge_{\alpha\in[0,1)} \bigcup_{p=1}^{n} \operatorname{conv}\,({}_{\alpha}P_p^{n\pm}) \supset M_n .$$

Wenn also, was im Folgenden geschehen soll, wir gezeigt haben, daß innerhalb eines Polyeders

$$\operatorname{conv}\,({}_{\alpha}P_p^{n+}) \quad \text{resp.} \quad \operatorname{conv}\,({}_{\alpha}P_p^{n-})$$

die Funktion

$$m \longmapsto \mathcal{K}\,(v^m)$$

affin-linear ist, so haben wir gezeigt, daß auf M_n die Funktion

$$m \longmapsto \mathcal{K}\,(v^m)$$

stückweise affin-linear ist, wobei die Funktion aus höchstens n Teilstücken aufgebaut ist.

3. Der Kern von n-Personen EPS mit Parameter $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Notation:

Wir werden in diesen Abschnitt setzen:

$$m^{(t,k)} := m^{(t,k)-} ,$$

weiterhin soll der Parameter α an den Polyedern unterdrückt werden, also

$$\text{conv}\ (P_p^n) = \text{conv}\ ({}_\alpha P_p^{n+})$$

um Schreibarbeit zu ersparen.

Bezeichne $v^{m^{(t,k)}}$ das durch $m^{(t,k)}$ definierte EPS für vorgegebenes α . (vergl.Definition 0.1). Dann besitzt der Kern des Spieles $v^{m^{(t,k)}}$ eine sehr einfache Struktur, denn es gilt

3.1 Lemma

$$\mathcal{K}\ (v^{m^{(t,k)}}) = (\underbrace{\tfrac{1}{t},\ldots,\tfrac{1}{t}}_{t\text{-mal}},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{(n-t)\text{-mal}})$$

Beweis:

Aufgrund Lemma 0.4 reicht es, $t = n$ zu betrachten. Sei nun $k \in \{1,\ldots,n\}$ beliebig. Dann ist $m^{(t,k)}$ eine (k,β)-privilegierende Ressourcenverteilung (im Sinne von Definition 06), wobei β durch die folgende Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{1}{n} + \beta = \frac{2}{n}\ (1-\alpha) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1),$$

also:

$$\beta = \frac{1}{n}\ (2-2\alpha-1) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (1-2\alpha) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= \frac{n-k}{k \cdot n} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= \geq 0 .$$

Der Kern solcher zu (k,β)-privilegierender WVen gehörender Spiele ist nach Satz 0.7 gegeben durch:

$$\frac{1}{2\cdot(1-\alpha)}\ (\underbrace{\frac{2}{n}\cdot(1-\alpha)+\frac{1}{k}\cdot(2\alpha-1)+\frac{1-2\alpha}{k},\ldots,\frac{2}{n}\cdot(1-\alpha)+\frac{1}{k}\cdot(2\alpha-1)+\frac{1-2\alpha}{k}}_{k\text{-mal}},$$

$$\underbrace{\frac{2}{n}\cdot(1-\alpha),\ldots,\frac{2}{n}\cdot(1-\alpha)}_{(n-k)\text{-mal}})$$

$$= \frac{1}{2\cdot(1-\alpha)}\cdot(\frac{2}{n}\cdot(1-\alpha),\ldots\quad,\frac{2}{n}(1-\alpha)$$

$$= (\frac{1}{n},\ \ldots\ ,\frac{1}{n})$$

und zwar für

$$\text{(0)}\qquad \frac{1}{2}-\frac{k\cdot n}{2\cdot(n-k)}\cdot\beta\leq\alpha\leq\frac{1}{2}+\frac{k\cdot n}{2\cdot(n-k)}\cdot\beta\ .$$

Nun ist wegen $\alpha\geq\frac{1}{2}$ die linke der beiden Ungleichungen trivialerweise erfüllt. Die recht aber ergibt sich wie folgt:

$$\alpha\leq\frac{1}{2}+\frac{k\cdot n}{2\cdot(n-k)}\cdot\beta$$

$$<=>\quad \alpha\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(2\alpha-1)$$

$$<=>\quad \alpha\leq\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{2}$$

$$<=>\quad \alpha\leq\alpha\ .$$

Da dies immer richtig ist, ist Lemma 3.1 bewiesen.

Bemerkung:

In (0) wird für $k = n$ formal durch 0 dividiert, derselbe Faktor $(n-k)$ ist aber auch Faktor des Zählers von β, wird also gekürzt!

Wir betrachten nun einen beliebigen Polyeder $\mathrm{conv}\,(P^n_p)$.

Sei $(\lambda^{t,k})_{t=p,\ldots,n,\ k=1,\ldots,p}$ eine WV auf den Ecken $m^{(t,k)}$, $t=p,\ldots,n$, $k=1,\ldots,p$ dieses Polyeders. Sei mit $x^{t,k}$ der Kern des zu $m^{(t,k)}$ gehörigen Spiels $v^{m^{(t,k)}}$ bezeichnet.

Wir definieren

(1) $$m := \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)} \quad .$$

Dann besitzt der Spieler l den Anteil $m(l)$ der Ressourcen in dem neuen Spiel v^m, nämlich genau die Konvex-Kombination seiner Ressourcen in den Spielen $m^{(t,k)}$; also

(2) $$m(l) = \sum_{t=l}^{n} \sum_{k=l}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \left(\frac{2}{t} \cdot (1-\alpha) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)\right) + \sum_{t=l}^{n} \sum_{k=1}^{l-1} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot (1-\alpha) \, ,$$

wobei der Summe über eine leere Menge der Wert 0 zugeschrieben wird.

Da $\lambda^{t,k} = 0$ für $t < p$ oder $k > p$ ist eine alternative Beschreibung von $m(l)$ gegeben durch

(3) $$m(l) = \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=l}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \left(\frac{2}{t} \cdot (1-\alpha) + \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)\right) + \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{\min\{l-1,p\}} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot (1-\alpha) \, .$$

Natürlich gilt

$$\sum_{l=1}^{n} m(l) = 1 \, ,$$

denn m ist eine Konvex-Kombination von WVen, also selbst wieder eine WV. Die formale Rechnung ergibt:

$$\sum_{l=1}^{n} m(l) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{t=l}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot (1-\alpha) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{t=l}^{n} \sum_{k=l}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot (1-\alpha)$$

$$+ \sum_{t=p}^{n} \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{t} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot (1-\alpha)$$

$$+ \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{k} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} t \cdot \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot (1-\alpha)$$

$$+ \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} k \cdot \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (2\alpha-1)$$

$$= 2\,(1-\alpha) \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k}$$

$$+ (2\alpha-1) \cdot \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k}$$

$$= 2\,(1-\alpha) + 2\alpha-1$$

$$= 1$$

Wir definieren nun (das, wovon im Weiteren nachgewiesen wird, daß es der Kern ist) :

(4) $$x := \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot x^{t,k}$$

Dann ist die Kern-Auszahlung an den Spieler 1 gegeben durch:

(5) $$x(l) = \sum_{t=l}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

Eine einfache Rechnung ergibt:

x ist WV auf Ω ,

denn

(i) $x(l) \geq 0$ nach Definition

und

(ii) $$\sum_{l=1}^{n} x(l) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{t=l}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{t} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} t \cdot \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k}$$

$$= 1 ,$$

für die letzte Gleichung beachten wir, daß

$(\lambda^{t,k})_{t,k}$ eine WV auf $\{p,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$

induziert.

Mit dem folgenden Satz wird nachgewiesen, daß die Funktion

$$\mathcal{K} : \operatorname{conv}(P_p^n) \to \mathbb{R}^n$$
$$m \mapsto \mathcal{K}(v^m)$$

affin-linear ist.

<u>3.2 Satz</u>

Für $\alpha \geq \frac{1}{2}$; $m \in \operatorname{conv}(P_p^n)$, d.h.

$m \in \operatorname{conv}(\{m^{(t,k)} / t = p,\dots,n,\ k=1,\dots,p\})$

und m , x definiert durch (1) resp. (4) gilt:

$$\mathcal{K}(v^m) = x \ .$$

Für den Beweis ist unter Beachtung von Lemma 0.3 (3) der Nachweis der Prä-Kernel Bedingungen für x zu führen, d.h. es ist zu zeigen:

(i) x ist Imputation

(ii) $s_{ij}^{v^m}(x) = s_{ji}^{v^m}(x)$ für alle $i,j \in \Omega$, $i \neq j$

wobei

$s_{ij}^{v}(x) := \max \ \{e(S,x) \ / \ S \subset \Omega,\ i \in S,\ j \notin S\}$

und $e(S,x) := v(S) - x(S)$

<u>3.3 Bemerkung:</u>

Mit den Voraussetzungen des Satzes 3.2 gilt:

x ist Imputation.

Beweis:

Sei

$$m: = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}$$

$$x: = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot x^{(t,k)} .$$

Es ist $x(\Omega) = 1 = v(\Omega)$ schon nachgewiesen worden, daher bleibt nur noch zu zeigen:

$$\bigwedge_{l \in \Omega} x(l) \geq v(l).$$

Nach Definition war

$$v(l) = \frac{1}{1-\alpha} (m(l) - \alpha)^{+}.$$

Der Fall $m(l) \leq \alpha$ macht keine Umstände, denn dann gilt

$$v(l) = 0$$

und wegen $x(l) \geq 0$ folgt die Behauptung.

Es kann also $m(l) \geq \alpha$ vorausgesetzt werden, dann ist

$$v(l) = \frac{1}{1-\alpha} (m(l) - \alpha)$$

und

$$x(l) \geq v(l)$$

ist richtig genau dann, wenn

$$\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \geq \frac{1}{1-\alpha} (m(l) - \alpha)$$

$$= \Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t}\Big)$$

$$+ \Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\Big) - \frac{\alpha}{1-\alpha} .$$

Die obige Ungleichung ist äquivalent zu

$$0 \geq \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad .$$

Dies liefert

$$1 \geq \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{2\alpha-1}{\alpha} \quad .$$

Der rechte Ausdruck wird maximal für $l = p = 1$, $\lambda^{1,1} = 1$, dann aber gilt:

$$\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} + \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{2\alpha-1}{\alpha}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{2\alpha-1}{\alpha}$$

$$= \frac{1-\alpha + 2\alpha - 1}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha}$$

$$= 1 ,$$

damit ist $x(l) \geq v(l)$ für alle $l \in \Omega$ bewiesen. Für den Nachweis der Gleichheit der maximalen Exzesse für Spielerpaare (i,j), (j,i) benötigen wir noch einige Lemmata.

3.4 Lemma

Voraussetzungen wie in Satz 3.2. Dann gilt

(6) $\quad \dfrac{m(l)}{1-\alpha} \geq 2 \cdot x\ (l) \quad$ für $\quad 1 \leq l \leq n$

(7) $\quad \dfrac{m(l)}{1-\alpha} = 2 \cdot x\ (l) \quad$ für $\quad p < l \leq n$

Beweis:

$$\frac{m(l)}{1-\alpha} = \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{k} \cdot \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right)$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{l-1} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t}$$

$$= \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t}$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}$$

$$\geq 2 \cdot \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= 2\ x(l),$$

wobei die Ungleichung für $l > p$ eine Gleichung ist.

q.e.d.

3.5 Lemma

Setze

$s^{Vm}_{ij}\ (\cdot) := s^{m}_{ij}\ (\cdot)$, dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz 3.2:

$$s^{m}_{ij}\ (x) = v^{m}(i) - x\ (i)$$

oder

$$s^{m}_{ij}\ (x) = v^{m}(\Omega-j) - x\ (\Omega-j)$$

Beweis:

Definiere

$$\underline{\underline{T}}_{ij} := \{S \subset \Omega \;/\; i \in S,\; j \notin S\}$$

und sei $S \in \underline{\underline{T}}_{ij}$.

Annahme:

$$S \neq \{i\},\; \Omega - j$$

und

$$s_{ij}^{m}(x) = v^{m}(S) - x(S)$$
$$> v^{m}(i) - x(i),\; v^{m}(\Omega - j) - x(\Omega - j)$$

(i) Wir nehmen weiter an:

$$v^{m}(S) = 0$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v^{m}(S) - x(S) &= -x(S) \\ &\leq -x(i) \\ &\leq v^{m}(i) - x(i) \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Widerspruch zu

$$v^{m}(S) - x(S) > v^{m}(i) - x(i).$$

(ii) Wir nehmen nun an:

$$v^{m}(S) \neq 0 ,$$

damit gilt:

$$v^{m}(S) = \frac{1}{1-\alpha}(m(S) - \alpha).$$

Da $S \neq \Omega - j$ vorausgesetzt wurde, gibt es ein $l \in \Omega$, $l \neq j$, so daß

$$S + l \in \underline{\underline{T}}_{ij} .$$

Dann gilt:

$$v^m(S) - x(S) = \frac{1}{1-\alpha} \; (m(S) - \alpha) - x\,(S)$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha} \; (m(S) - \alpha) - x(S) + \frac{m(1)}{1-\alpha} - x(1)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \; (m(S) + m(1) - \alpha) - x(S) - x(1)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \; (m(S+1) - \alpha) - x(S+1)$$

$$= v^m\,(S+1) - x\,(S+1)\;,$$

wobei die Ungleichung aufgrund von Lemma 3.4 gilt. Die obige Rechnung aber ergibt durch Iteration einen Widerspruch zu

$$v^m(S) - x(S) > v^m\,(\Omega\text{-}j) - x\,(\Omega\text{-}j)$$

q.e.d.

3.6 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 gilt für $i < j$:

(8) $$m^{(t,k)}\,(i) \geq m^{(t,k)}\,(j)$$

$$x^{(t,k)}\,(i) \geq x^{(t,k)}\,(j)$$

(9) $$m\,(i) \geq m\,(j)$$

$$x\,(i) \geq x\,(j)$$

Beweis:

Klar.

Zum Beweis von Satz 3.2 ist unter Beachtung von Bemerkung 3.3 nur noch zu zeigen, daß für Paare (i,j), (j,i) die maximalen Exzesse

s^m_{ij} (x) und s^m_{ji} (x) identisch sind.

Wir werden von nun an den Parameter m an $s^m_{ij}(\cdot)$ und $v^m(\cdot)$ nicht mehr mitschreiben, dies kann zu keinen Verwechslungen führen, da $m \in P^n_p$ festgehalten wird (aber natürlich beliebig ist)!

Die folgende, etwas umfangreiche Fallunterscheidung für den Beweis der Gleichheit der Exzesse konnte leider nicht vermieden werden.

Beweis (Satz 3.2)

Gegeben seien $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, $p \in \{1,\dots,n\}$, $m \in P^n_p$, d.h.

$$m = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}$$

und

$$x = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot x^{t,k}$$

Seien $i, j \in \Omega$ mit $i < j$.

Fallunterscheidung:

1 $\quad m(j) \leq m(i) \leq \alpha$

2 $\quad m(j) \leq \alpha \leq m(i)$

($\alpha \leq m(j) \leq m(i)$ ist wegen $\alpha \geq \frac{1}{2}$ und $\Sigma\, m(i) = 1$ nicht möglich)

.1 $\quad 1 - m(i) \leq 1 - m(j) \leq \alpha$

.2 $\quad 1 - m(i) \leq \alpha < 1 - m(j)$

.3 $\quad \alpha \leq 1 - m(i) \leq 1 - m(j)$

.1 $\quad s_{ij}(x) = v(i) - x(i)$ und $s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$

.2 $\quad s_{ij}(x) = v(i) - x(i)$ und $s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$

.3 $s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$ und $s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$

.4 $s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$ und $s_{ji}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-i)$.

Es ist in jedem der Fälle zu zeigen:

$$s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$$

zu 1.1

$$\begin{aligned} & v(i) - x(i) \geq v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \\ \Leftrightarrow \quad & - x(i) \geq -1 + x(j) \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \geq x(i) + x(j) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist immer richtig, daher ist

$$v(i) - x(i) < v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$$

ausgeschlossen und es gilt:

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i) .$$

Die Fälle 1.1.3 und 1.1.4 können also nicht auftreten.

Wegen $v(j) - x(j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$

$\Leftrightarrow \quad 1 \geq x(i) + x(j)$

gilt $s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$,

dies schließt zusätzlich den Fall 1.1.2 aus.

zu 1.1.1

Um $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ zu zeigen, weisen wir jetzt, wie auch in den nachfolgenden Fällen, nach

(i) $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$

und

(ii) $s_{ji}(x) \leq s_{ij}(x)$.

Zu (i): $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(v)$

$\iff - x(i) \leq - x(j)$

$\iff x(i) \geq x(j)$,

Dies ist nach (9) richtig.

Zu (ii): $s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x)$

$\iff - x(i) \geq - x(j)$

$\iff x(i) \leq x(j)$

Nun ist nach Voraussetzung

$$1 - m(j) \leq \alpha$$

$$\iff 1 - \alpha \leq m(j)$$

$$\iff \frac{1 - \alpha}{m(j)} \leq 1$$

$$\iff \frac{m(j)}{1 - \alpha} \geq 1 .$$

Dies impliziert:

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j) ,$$

also $x(i) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$

Es reicht daher zu zeigen:

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) \leq x(j)$$

beziehungsweise

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq 2 \cdot x(j) .$$

Diese Ungleichung ist für $j > p$ richtig, denn dann gilt wegen (7) sogar die Gleichheit.

Sei nun $j \leq p$, dann ist auch $i \leq p$ und

$$x(i) = \sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

(10)
$$= \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=\max\{p,j\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= x\,(j)$$

ergibt: $$s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$$

Zu 1.2

$$v(i) - x(i) > v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$$

$$\iff \quad - x(i) \geq \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j)$$

$$\iff \quad \frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$$

und $$v(j) - x(j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

$$\iff \quad - x(j) \geq - 1 + x(i)$$

$$\iff \quad 1 \geq x(i) + x(j)\ .$$

Da dies immer erfüllt ist, sind die Fälle 1.2.2 und 1.2.4 ausgeschlossen.

Zu 1.2.1

Es ist unter der Voraussetzung $\frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$ zu zeigen:

$$v(i) - x(i) = v(j) - x(j)\ .$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$x(i) = x(j).$$

Nun gilt wegen $i < j$: $x(i) \geq x(j)$,

daher genügt es zu zeigen:

$$x(i) \leq x(j).$$

Für $j > p$ gilt wegen (7)

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

daher $\frac{m(j)}{1-\alpha} = 2 \cdot x(j) \leq x(i) + x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha}$

Es folgt $x(i) = x(j).$

Für $j \leq p$ wurde $x(i) = x(j)$ schon in (10) bewiesen.

Zu 1.2.3

Behauptung:

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)$$

impliziert $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt:

$$s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x\,(\Omega-j)$$

und $s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$,

daher ist zu zeigen:

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(j) - x(j),$$

also $$\frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) = -\,x(j).$$

Die letzte Gleichung ist äquivalent zu

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}\,.$$

Für $j \in \Omega$ gilt stets

$$2 \cdot x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

und zusätzlich für $j > p$:

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}\;,$$

daher bleibt nur zu zeigen:

Für $j \leq p$ gilt:

$$2 \cdot x(j) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha}\,.$$

Für $j \leq p$ aber ist in (10) gezeigt worden:

$$x(j) = x(i),$$

Dann liefert die Voraussetzung:

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j) = 2 \cdot x(j)$$

q.e.d.

Zu 1.3

$$v(i) - x(i) \geq v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\,x(i) \geq \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j) - \alpha) - 1 + x(j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$$

und $$v(j) - x(j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{m(i)}{1-\alpha} \geq x(i) - x(j).$$

Aufgrund $m(i) \geq m(j)$ nach (9) kann der Fall

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$$

und
$$\frac{m(i)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)$$

ausgeschlossen werden, d.h. die Situation des Falles 1.3.2 mit

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i)$$

und
$$s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

kann nicht eintreten.

Wir werden also nur die Fälle 1.3.1, 1.3.3 und 1.3.4 betrachten.

Zu 1.3.1

Behauptung:

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$$

impliziert: $v(i) - x(i) = v(j) - x(j)$

Beweis:

Derselbe wie in 1.2.1.

Zu 1.3.3

Unter der Voraussetzung

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha}$$

gilt: $v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(j) - x(j)$

Beweis:

Nach Voraussetzung zu Fall 1.3.3 gilt:

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = \frac{1}{1-\alpha}\,(1 - m(j) - \alpha) - 1 + x(j)$$

$$= -\frac{m(j)}{1-\alpha} + x(j)$$

$$\leq -2 \cdot x(j) + x(j)$$

$$= -x(j)$$

$$= v(j) - x(j),$$

wobei sich die Ungleichung aus (6) ergibt.

Es bleibt zu zeigen

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(j) - x(j),$$

d.h.
$$2 \cdot x(j) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

Für $j > p$ gilt wegen (7) sogar

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}\ ,$$

es ist also nur noch der Fall $j \leq p$ zu behandeln. Hierfür ergibt sich aber wegen (10) $x(i) = x(j)$ und somit

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j) = 2 \cdot x(j),$$

wobei die Ungleichung gerade durch die Voraussetzung geliefert wird. Damit ist

$$2 \cdot x(j) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha}\ , \quad \text{mithin}$$

$$s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x) \quad \text{bewiesen.}$$

Zu 1.3.4

In diesem Falle ist unter der Voraussetzung

$$x(i) + x(j) \geq \frac{m(i)}{1-\alpha} \geq \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

zu zeigen:

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i).$$

Beweis:

Es soll zunächst „≥" gezeigt werden.

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) \geq \frac{1}{1-\alpha}(1-m(i)-\alpha) - 1 + x(i)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) .$$

Nun gilt nach Voraussetzung:

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) \leq x(i) ,$$

daher genügt es zu zeigen:

$$x(i) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i)$$

oder $$2 \cdot x(i) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha} .$$

Diese Ungleichung ist wegen (6) richtig, also ist „≥" bewiesen.

Für die Ungleichung „≤" ist gemäß obiger Rechnung zu zeigen:

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$$

Nach Voraussetzung aber gilt:

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \leq x(j) ,$$

daher ist es hinreichend zu zeigen:

$$x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) ,$$

also $$2 \cdot x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} .$$

Auch diese Ungleichung ist nach (6) richtig.

q.e.d.

Zu 2

Aus der Voraussetzung $m(i) \geq \alpha > \frac{1}{2}$ folgt wegen

$m(1) \geq m(2) \geq \ldots \geq m(n)$ und $\sum_{i=1}^{n} m(i) = 1$: $m(i) \geq \alpha$ kann

nur auftreten, falls $i = 1$.

Es sind also im Folgenden nur Paare (1,j) und (j,1) zu betrachten.

Weiterhin liefert $m(1) > \frac{1}{2}$:

$$m \in \text{conv } (P_1^n) \ .$$

Es kann also auch $p = 1$ vorausgesetzt werden.
Aus $m(1) > \frac{1}{2}$ folgt ebenfalls:

$$1 - m(1) < \alpha \ ,$$

damit sind die Fälle 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 und 2.3.4 ausgeschlossen.

Zu 2.1

Die Voraussetzung

$$1 - m(j) \leq \alpha$$

liefert $\quad 1 - \alpha \leq m(j)$.

Nun gilt $\quad 1 = 1 - \alpha + \alpha \leq m(j) + m(1) \leq 1$

und damit $\quad m(1) = \alpha \ , \ m(j) = 1 - \alpha \leq \alpha$,

folglich sind unter diesen Voraussetzungen auch die Voraussetzungen des Falles 1.1 erfüllt, die Behauptung $s_{1j}(x) = s_{j1}(x)$ ergibt sich also mit dem dort durchgeführten Rechnungen.

Zu 2.2

$$s_{1j}(x) = v(1) - x(1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad v(1) - x\,(1) \geq v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$$

$$<=> \frac{1}{1-\alpha}\ (m(1) - \alpha) - x(1) \geq \frac{1}{1-\alpha}\ (1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j)$$

$$<=> \frac{m(1) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} \geq x(1) + x(j)$$

und $$s_{j1}(x) = v(j) - x(j)$$

$$<=> v(j) - x(j) \geq v(\Omega-1) - x(\Omega-1)$$

$$<=> - x(j) \geq - 1 + x(1)$$

$$<=> 1 \geq x(1) + x(j),$$

die letzte Ungleichung ist stets richtig, also ist unter den Voraussetzungen von 2.2 stets

$$s_{j1}(x) = v(j) - x(j)\ ,$$

und die Fälle 2.2.2 sowie 2.2.4 können nicht auftreten.

<u>Zu 2.2.1</u>

Unter der Voraussetzung

$$\frac{m(1) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} \geq x(1) + x(j)$$

gilt es zu zeigen:

$$v(1) - x(1) = v(j) - x(j)$$

<u>Beweis:</u>

$$v(1) - x(1) \geq v(j) - x(j)$$

$$<=> \frac{m(1)-\alpha}{1-\alpha} - x(1) \geq - x(j)$$

$$<=> x(1) \leq x(j) + \frac{m(1)-\alpha}{1-\alpha}\ .$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$x(1) \leq \frac{m(1) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} - x(j),$$

daher reicht es zu zeigen:

$$\frac{m(1) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} - x(j) \leq x(j) + \frac{m(1) - \alpha}{1-\alpha}$$

also $$\frac{m(1) - \alpha}{1 - \alpha} - \frac{m(1) - \alpha}{1-\alpha} + \frac{m(j)}{1-\alpha} \leq 2 \cdot x(j)$$

oder $$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq 2 \cdot x(j) .$$

Nun ist schon bemerkt worden:

$$p = 1$$

und wegen $i = 1$, $i \neq j$ folgt

$$j > 1$$

d.h. $$j > p.$$

Für $j > p$ aber gilt wegen (7):

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} = 2 \cdot x(j) \text{ , damit}$$

insbesondere $$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq 2 \cdot x(j).$$

Somit ist $v(1) - x(1) \geq v(j) - x(j)$ gezeigt.

Zum Beweis der Ungleichung „$\leq$" machen wir einen kleinen Exkurs.

Exkurs

Behauptung:

$$2 \cdot \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} - \sum_{t=1}^{j-1} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} \leq 1.$$

Beweis:

$$2 \cdot \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} - \sum_{t=1}^{j-1} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\leq 2 \cdot \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} - \lambda^{1,1} \cdot 1$$

$$= 2 \cdot \lambda^{1,1} + 2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} - \lambda^{1,1}$$

$$\leq \lambda^{1,1} + 2 \cdot (1 - \lambda^{1,1}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \lambda^{1,1} + (1 - \lambda^{1,1})$$

$$= 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir kehren nun zu 2.2.1 zurück und zeigen die Ungleichung

$$v(1) - x(1) \leq v(j) - x(j)$$

womit $\quad s_{1j}(x) = s_{j1}(x)$

bewiesen wäre. Also

$$v(1) - x(1) \leq v(j) - x(j)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}(m(1)-\alpha) - x(1) \leq - x(j)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(1)}{1-\alpha} - x(1) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} - x(j) \ .$$

Nun gilt aufgrund der Definition von m und x :

$$\frac{m(1)}{1-\alpha} - x(1) = \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \left(\frac{2}{t} + \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right) - \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \frac{2\alpha-1}{1-\alpha} + \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t}$$

denn, wie schon erwähnt, gilt $m \in \text{conv}\,(P_1^n)$, also $k = p = 1$ und somit ist

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} = 1$$

Außerdem:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} - x(j) = \frac{\alpha}{1-\alpha} - \sum_{t=j}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} .$$

$$\frac{m(1)}{1-\alpha} - x(1) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} - x(j)$$

ist folglich äquivalent zu

$$\frac{2 \cdot \alpha-1}{1-\alpha} + \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} - \sum_{t=j}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} ,$$

folglich zu

$$\sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} + \sum_{t=j}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} \leq \frac{\alpha-2\alpha+1}{1-\alpha}$$

sowie zu

$$2 \cdot \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} - \sum_{t=1}^{j-1} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} \leq 1 ,$$

gerade diese Ungleichung ist aber im Exkurs bewiesen worden.

Zu 2.2.3

Behauptung:

$$\frac{m(1) + m(j) - \alpha}{1 - \alpha} \leq x(1) + x(j)$$

impliziert:

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(j) - x(j)$$

Beweis:

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(j) - x(j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha} (1 - m(j) - \alpha) - 1 + x(j) = - x(j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

Wegen $j > i = 1 = p$ ist die letzte Gleichung richtig und somit

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(j) - x(j),$$

d.h.

$$s_{1j}(x) = s_{j1}(x)$$

bewiesen.

Bemerkung:

Wir haben die Voraussetzung nicht benutzt, d.h.

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(j) - x(j)$$

ist in jedem Falle richtig unter den allgemeinen Voraussetzungen von 2.2.

Aufgrund von Bemerkung 3.3 und der betrachteten Fallunterscheidungen ist nun Satz 3.2 bewiesen.

4. Der Kern von n-Personen EPS mit Parameter $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Wir benutzen auch in diesem Abschnitt wieder die Schreibweise $m^{t,k}$, P^n_p, wobei aber im Unterschied zum Abschnitt 3 definiert wird

$$m^{(t,k)} := m^{(t,k)-}$$

$$\text{conv}\,(P^n_p) := \text{conv}\,({}_aP^{n+}_p)\,.$$

Die Vorhergehensweise wird in diesem Abschnitt dieselbe wie in Abschnitt 3 sein. Wir betrachten zunächst die Kerne für Spiele $v^{m^{t,k}}$ und beweisen dann einen zu Satz 3.2 analogen Satz. Die Struktur der Kerne für Spiele der Form $v^{m^{(t,k)}}$ besitzt in diesem Fall $(\alpha \leq \frac{1}{2})$ eine etwas komplizierte Struktur:

<u>4.1 Lemma</u>

$$\mathcal{K}\,(v^{m^{(t,k)}}) = \frac{1}{1-\alpha}\,(\underbrace{\frac{1}{t}\cdot\alpha + \frac{1}{k}\cdot(1-2\alpha),\ldots\ \frac{1}{t}\cdot\alpha + \frac{1}{k}\cdot(1-2\alpha)}_{k\text{-mal}},\ \underbrace{\frac{1}{t}\cdot\alpha,\ldots\ \frac{1}{t}\cdot\alpha}_{(t-k)\text{-mal}},\ \underbrace{0,\ldots\ 0}_{(n-t)\text{-mal}})$$

<u>Beweis:</u>

Aufgrund Lemma 0.4 genügt es, $t = n$ zu betrachten. Sei $k \in \{1,\ldots,n\}$ beliebig. Die Ressourcenverteilung $m^{(t,k)}$ ist nun eine (k,β)-privilegierende WV (im Sinne von Definition 0.6), wobei β durch die Gleichung

$$\frac{1}{n} + \beta = \frac{2}{n}\cdot\alpha + \frac{1}{k}\cdot(1-2\alpha)$$

definiert ist. Es ergibt sich

$$\beta = \frac{n-k}{k\cdot n}\cdot(1-2\alpha) \geq 0\,.$$

Nach Satz 0.7 besitzen (k,β)-privilegierende Verteilungen den Kern

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\underbrace{\frac{2}{n} \cdot \alpha + 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha), \ldots \frac{2}{n} \cdot \alpha + 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)}_{k\text{-mal}},$$

$$\underbrace{\frac{2}{n} \cdot \alpha, \ldots, \frac{2}{n} \cdot \alpha}_{(n-k)\text{-mal}})$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} (\frac{1}{n} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha), \ldots, \frac{1}{n} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha) ,$$

$$\frac{1}{n} \cdot \alpha, \ldots, \frac{1}{n} \cdot \alpha)$$

und zwar genau dann, wenn die Ungleichungen

$$(0) \qquad \frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{n-k} \cdot \beta \leq \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{k \cdot n}{n-k} \cdot \beta$$

erfüllt sind. Die rechte dieser Ungleichungen ist wegen $\beta \leq 0$ und $\alpha \leq \frac{1}{2}$ trivial, es bleibt die linke zu verifizieren.

Aber

$$\frac{1}{2} - \frac{k \cdot n}{n-k} \cdot \beta \leq \alpha$$

$$<=> \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1-2\alpha) \leq \alpha$$

$$<=> \quad \frac{1}{2} \cdot (1-1+2\alpha) \leq \alpha$$

$$<=> \quad \alpha \leq \alpha$$

q.e.d.

<u>Bemerkung:</u>

In (0) wird für $k = n$ formal durch 0 dividiert, derselbe Faktor $(n-k)$ ist aber auch Faktor des Zählers von β , wird also gekürzt.

Es sei nun ein beliebiger Polyeder $\mathrm{conv}\,(P_p^n)$ und ein WV

$(\lambda^{t,k})_{t=p,\ldots,n,k=1,\ldots,p}$ auf den Ecken $m^{(t,k)}$ dieses Polyeders vorgegeben.

Wir definieren eine Ressourcenverteilung m als konvexe Kombination der Ressourcenverteilungen $m^{t,k}$, also

$$(1) \qquad m := \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}$$

damit $\qquad m \in \mathrm{conv}\,(P_p^n)$.

Im durch m induzierten EPS v^m besitzt der Spieler 1 den Anteil $m(1)$ der Ressource, wobei

$$(2) \qquad m(1) = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}(1)$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \left(\frac{2}{t} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)\right)$$

$$+ \sum_{t=1}^{n} \sum_{k=1}^{1-1} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot \alpha$$

$$= \sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \left(\frac{2}{t} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)\right)$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{\min\{p,1-1\}} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot \alpha ,$$

wobei der Summe über eine leere Menge der Wert Null zugeschrieben wird.

Sei nun $x^{t,k}$ der durch Lemma 4.1 bestimmte Kern des durch $m^{t,k}$ induzierten EPS $v^{m(t,k)}$, definiere

$$(3) \qquad x := \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot x^{t,k} .$$

Dann gilt für die Stelle 1 des Vektors x (die „Kern-Auszahlung" für den Spieler 1):

(4) $$x(l) = \frac{1}{1-\alpha}\Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n}\ \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \big(\tfrac{1}{t} \cdot \alpha + \tfrac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)\big)$$
$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n}\ \sum_{k=1}^{\min\{l-1,p\}} \lambda^{t,k} \cdot \tfrac{1}{t} \cdot \alpha\Big)$$

Es ist klar, daß m und x WVen sind, denn sie sind jeweils Konvex-Kombinationen von WVen.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, daß die Funktion

$$\mathcal{K} : \operatorname{conv} P^n_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$m \longmapsto \mathcal{K}(v^m)$$

affin-linear ist. Wir zeigen also:

4.2 Satz

Für $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $(\lambda^{t,k})_{t=p,\ldots,n,k=1,\ldots,p}$ WV auf $\{p,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$ sowie m, x definiert durch (1) resp. (3) gilt:
$$x = \mathcal{K}(v^m).$$

Unter Beachtung von Lemma 0.3, (3) ist dazu zu zeigen

(i) x ist Imputation

(ii) $s^{v^m}_{ij}(x) = s^{v^m}_{ji}(x)$ für alle $i, j \in \Omega$, $i \neq j$,
wobei

$s^{v}_{ij}(x)$ den maximalen Exzess des Spielers i über Spieler j bei dem Spiel v mit Auszahlungsvektor x bezeichnet (vergl. Abschnitt 3).

4.3 Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.2 gilt:

x ist Imputation, d.h.:

$$x(\Omega) = v(\Omega) \text{ und}$$

$$\bigwedge_{l \in \Omega} x(l) \geq v(l) .$$

Beweis:

$x(\Omega) = 1 = v(\Omega)$ ist klar, denn x ist Wahrscheinlichkeitsvektor. Es bleibt für beliebige $l \in \Omega$ zu zeigen:

$$x(l) \geq v(l).$$

Für $m(l) \leq \alpha$ ist nichts zu zeigen, denn dann gilt

$$v(l) = 0 \leq x(l).$$

Sei also $m(l) \geq \alpha$, also

$$v(l) = \frac{1}{1-\alpha} (m(l) - \alpha) .$$

Wir erhalten aus (2):

$$v(l) = \frac{1}{1-\alpha} \Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \big(\frac{2}{t} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)\big)$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot \alpha \Big) - \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \big(\frac{1}{t} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)\big)$$

$$+ \sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha \Big)$$

$$+ \frac{1}{1-\alpha} \Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha - \alpha \Big)$$

$$= x(l) + \frac{1}{1-\alpha} \Big(\sum_{t=\max\{p,l\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha - \alpha \Big) .$$

Damit ist

$$v(l) \leq x(l)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} \Big(\sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha - \alpha \Big) \leq 0$$

also genau dann, wenn

$$\sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha \leq \alpha \, .$$

Aber diese Ungleichung ist äquivalent zu:

$$\sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \leq 1 \, .$$

Nun gilt

$$\sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \leq \sum_{t=\max\{p,1\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k}$$

$$\leq 1,$$

denn $(\lambda^{t,k})_{t\in\{p,\ldots,n\},\ k\in\{1,\ldots,p\}}$ ist Wahrscheinlichkeitsvektor. Es folgt nun sofort die Behauptung.

Für den Rest des Beweises von Satz 4.2, der Gleichheit der maximalen Exzesse für Spielerpaare (i,j) und (j,i), $i,j \in \Omega$, $i \neq j$ benötigen wir noch einige Lemmata.

4.4 Lemma

Mit den Voraussetzungen von Satz 4.2 gilt:

(5) $$\bigwedge_{l \in \Omega} \frac{m(l)}{1-\alpha} \geq x(l)$$

(6) $$\bigwedge_{l \in \{p+1,\ldots,n\}} \frac{m(l)}{1-\alpha} = 2\, x(l)$$

(7) $$\bigwedge_{l \in \Omega} \frac{m(l)}{1-\alpha} \leq 2\, x(l)$$

(8) $$\bigwedge_{i,j \in \Omega} \frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$$

(9) Für $i < j \leq p$ gilt:

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) = \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) \text{ .}$$

Beweis:

Man sehe sich die Definitionen von m und x an, verwende die hieraus resultierenden Gleichungen (2) und (4) und rechne wie in Beweis von Lemma 3.4.

Lemma 4.5 (Analog zu Lemma 3.5)

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2 gilt:

$$s^m_{ij}(x) = v(i) - x(i)$$

oder

$$s^m_{ij}(x) = v(\Omega\text{-}j) - x(\Omega\text{-}j)$$

Beweis:

Auch dieser Beweis soll nicht ausgeführt werden, da er vollständig identisch ist mit dem Beweis von Lemma 3.5, wobei in (ii) anstatt Lemma 3.4, (6) die Ungleichung (5) aus Lemma 4.4 benutzt wird.

4.6 Lemma

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2 gilt für $i < j$:

(10) $$\bigwedge_{\substack{(t,k) \in \\ \{p,\dots,n\}x\{1,\dots,p\}}} m^{(t,k)}(i) \geq m^{(t,k)}(j)$$

$$\bigwedge_{\substack{(t,k) \in \\ \{p,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}}} x^{t,k}(i) \geq x^{t,k}(j)$$

(11) $\quad m(i) \geq m(j)$

$\quad x(i) \geq x(j)$

Beweis:

Klar.

Zum Beweis von Satz 4.2 ist unter Beachtung von Bemerkung 4.3, wie schon erwähnt, nur noch zu zeigen, daß die maximalen Exzesse $s^m_{ij}(x)$, $s^m_{ji}(x)$ für alle Spielerpaare (i,j) , (j,i) identisch sind. Wie in Abschnitt 3 wird im Folgenden der Index m an $s^m_{ij}(\cdot)$ weggelassen.

Wir beweisen nun Satz 4.2 mit Hilfe folgender Fallunterscheidungen:

Beweis: (Satz 4.2)

Gegeben seien $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$, $p \in \{ 1,\ldots, n \}$, $m \in P^n_p$, d.h.

$$m = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}$$

$$x = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot x^{t,k}$$

und $i, j \in \Omega$ mit $i < j$.

Fallunterscheidung:

1 $\quad \alpha \leq 1 - m(i) \leq 1 - m(j)$

2 $\quad 1 - m(i) < \alpha \leq 1 - m(j)$

3 $\quad 1 - m(i) \leq 1 - m(j) < \alpha$

.1 $m(j) \leq m(i) \leq \alpha$

.2 $m(j) \leq \alpha < m(i)$

.3 $\alpha < m(j) \leq m(i)$

In jedem der Fälle 1.1 bis 3.3 ist wieder zu unterscheiden, welche der Menge $\{i\}$, Ω-j resp. $\{j\}$, Ω-i für (i,j) resp. (j,i) den maximalen Exzess liefert, also

.1 $s_{ij}(x) = v(i)-x(i)$ und $s_{ji}(x) = v(j)-x(j)$

.2 $s_{ij}(x) = v(i)-x(i)$ und $s_{ji}(x) = v(\Omega-i)-x(\Omega-i)$

.3 $s_{ij}(x) = v(\Omega-j)-x(\Omega-j)$ und $s_{ji}(x) = v(j)-x(j)$

.4 $s_{ij}(x) = v(\Omega-j)-x(\Omega-j)$ und $s_{ji}(x) = v(\Omega-i)-x(\Omega-i)$.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit beginnen wir mit dem am schnellsten abzuhandelnden Fall 3, kommen dann zu Fall 2 und bearbeiten den langwierigsten Fall 1 zum Schluß.

<u>Zu 3</u>

Die Voraussetzung $1 - m(i) \leq 1 - m(j) < \alpha$ liefert

$$m(i) \geq m(j) > 1-\alpha$$

Nun ist $\alpha \leq \frac{1}{2}$, also $1-\alpha \geq \frac{1}{2}$, somit

$$m(i),\ m(j) > \frac{1}{2}\ .$$

Dies ist nicht möglich, da m eine Ressourcenverteilung auf die Spieler aus Ω ist, mithin

$$\sum_{l=1}^{n} m(l) = 1$$

gelten muß.

Zu 2

Aus $1 - m(i) < \alpha$ ergibt sich wegen $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$

$$1 - m(i) < 1 - \alpha ,$$

folglich $m(i) > \alpha$.

Dies schließt Fall 2.1 aus.
Weiterhin gilt

$$1 - m(i) < \alpha \iff 1 - \alpha < m(i) .$$

Sei nur zusätzlich $\alpha < m(j)$, so ergibt sich

$$1 = (1-\alpha) + \alpha < m(i) + m(j) \leq 1 ,$$

also wiederum ein Widerspruch. Damit ist auch der Fall 2.3 ausgeschlossen.

Wir betrachten nun

2.2

$1 - m(i) < \alpha$ impliziert
$v(\Omega\text{-}i) = 0$; dies liefert aber sofort

$$v(\Omega\text{-}i) - x(\Omega\text{-}i) \leq v(j) - x(j)$$

also $s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$.

Wir haben also als Unterfälle nur 2.2.1 und 2.2.3 zu betrachten.

Zu 2.2.1

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i)$$

$$\iff v(i) - x(i) \geq v(\Omega\text{-}j) - x(\Omega\text{-}j)$$

$$\iff \frac{1}{1-\alpha}(m(i) - \alpha) - x(i) \geq \frac{1}{1-\alpha}(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j)$$

$$\iff \frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1 - \alpha} \geq x(i) + x(j)$$

Exkurs Es gilt stets:

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1 - \alpha} \leq x(i) - x(j)$$

Beweis:

Sei $\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} > x(i) + x(j)$,

dann gilt $\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) + \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) > \frac{\alpha}{1-\alpha}$

und es folgt

$$(12) \quad \frac{\alpha}{1-\alpha} \Big(\sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} + \sum_{t-\max\{p,j\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \Big) > \frac{\alpha}{1-\alpha} \ ;$$

unter Benutzung von (2) und (4).

Es folgt nun insbesondere:

$$2 \cdot \sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} > 1 \ .$$

Da $(\lambda^{t,k})_{t=p,\ldots,n,\ k=1,\ldots,p}$ eine WV auf $\{p,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$ induziert, gilt auch

$$\sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} = 1 \ .$$

Die obige Ungleichung aber impliziert deswegen

$$\lambda^{1,1} > 0$$

und damit $p = 1$!

Weiterhin muß auch $i = 1$ gelten, denn für $i = 2$ ist:

$$2 \cdot \sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= 2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\leq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-\lambda^{1,1})$$

$$= (1 - \lambda^{1,1}) < 1$$

Wegen $i = p = 1$ ergibt sich nun:

$$\sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} + \sum_{t=\max\{p,j\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t} + \sum_{t=j>1}^{n} \lambda^{t,1} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\leq \lambda^{1,1} + (1-\lambda^{1,1}) \cdot \frac{1}{2} + (1-\lambda^{1,1}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \lambda^{1,1} + (1 - \lambda^{1,1})$$

$$= 1$$

also

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} + \sum_{t=\max\{p,j\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t}\right)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} .$$

Dies ist ein Widerspruch zu (12) und damit auch zu der Voraussetzung

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1 - \alpha} > x(i) + x(j) .$$

q.e.d.

Der Fall $s_{ij}(x) = v(i) - x(i)$ ist aufgrund des Exkurses also nicht möglich, und wir haben also unter 2. nur noch den Fall 2.2.3 zu betrachten.

Zu 2.2.3

In diesem Falle ist $\quad s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$

und $\quad s_{ij}(x) = v(\Omega\text{-}j) - x(\Omega\text{-}j)$,

es ist daher zu zeigen:

$$v(j) - x(j) = v(\Omega\text{-}j) - x(\Omega\text{-}j) .$$

Zunächst eine Bemerkung:

(i) Die Voraussetzung $1 - m(i) < \alpha$ liefert wegen $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$:

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \alpha < m(i) ,$$

aufgrund von $\sum_{l=1}^{n} m(l) = 1$ und $m(1) \geq m(2) \geq \ldots \geq m(n)$ folgt hieraus:

$$i = 1 .$$

(ii) Für $m(1) > 1 - \alpha$ gilt:

$$m \in \text{conv}\ (P_1^n) \text{ , d.h.}$$

$$p = 1 .$$

Beweis: (zu (ii))

Wir nehmen $p > 1$ an. Dann folgt

$$\begin{aligned} \underset{\substack{(t,k)\in\\ \{p,\ldots,n\}x\{1,\ldots,p\}}}{} m^{(t,k)}(1) &= \frac{2}{t} \cdot \alpha + \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha) \\ &\leq \frac{2}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{1} \cdot (1-2\alpha) \\ &= \alpha + (1-2\alpha) \\ &= 1 - \alpha , \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung wegen $p > 1$ richtig ist.

Für

$$m = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}$$

gilt also unter der Prämisse $p \geq 2$:

$$m(1) = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{(t,k)}(1)$$

$$= 1 - \alpha ,$$

da nach Voraussetzung und mit (i) $1 - \alpha < m(1)$ haben wir einen Widerspruch erhalten, folglich gilt

$$p = 1 .$$

Nun zum Beweis von 2.2.3:

$$v(\Omega\text{-}j) - x(\Omega\text{-}j) = v(j) - x(j)$$

gilt genau dann, wenn

$$\frac{1}{1-\alpha} (1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) = - x(j),$$

also genau dann, wenn

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha} .$$

Nun ist $j > i = p = 1$, also $j > p$. Für $j > p$ aber gilt nach Lemma 4.4, (6) die obige Gleichung

q.e.d.

<u>Bemerkung:</u>

Die Tatsache, daß wir im Fall 2.2.3 die Voraussetzung

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1 - \alpha} \leq x(i) + x(j)$$

nicht benutzt haben, darf nicht weiter verwundern; haben wir doch im Exkurs bewiesen, daß die umgekehrte Relation nicht gelten kann, damit ist, die obige Relation redundant.

Wir betrachten nun Fall 1:

Zu 1.1.1

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i) \ , \ s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$$

liefern $\quad v(i) - x(i) \geq v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$

$$\Leftrightarrow \quad - x(i) \geq \frac{1}{1-\alpha}(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$$

sowie $\quad v(j) - x(j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(i)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j).$$

Da $v(i) = v(j) = 0$, ist zu zeigen

$$x(i) = x(j) .$$

Nun gilt trivialerweise $x(i) \geq x(j)$, daher bleibt noch $x(i) \leq x(j)$ zu zeigen.

Aus den Voraussetzungen ergibt sich

$$\begin{aligned} x(i) &\leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j) \\ &\leq 2 \cdot x(j) - x(j) \\ &= x(j) , \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung wegen Lemma 4.4, (6) gilt. Damit ist $\quad s_{ij}(x) = s_{ji}(x) \quad$ gezeigt.

Zu 1.1.2

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i) \ , \ s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

liefern $\quad v(i) - x(i) \geq v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$

$$\Leftrightarrow \quad - x(i) \geq \frac{1}{1-\alpha}(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{m(j)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j)$$

sowie $$v(\Omega-i) - x(\Omega-i) \geq v(j) - x(j)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(i)-\alpha) - 1 + x(i) \geq x(j)$$

$$\Leftrightarrow x(i) + x(j) \geq \frac{m(i)}{1-\alpha}$$

Da $m(i) \geq m(j)$ wegen $i < j$, können beide Ungleichungen nur gleichzeitig erfüllt sein, wenn

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} = x(i) = x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}\,.$$

Dann aber gilt auch

$$s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j) = v(i) - x(i)$$

und $$s_{ji}(x) = v(j) - x(j).$$

Dieser Fall aber wurde schon in 1.1.1 bearbeitet.

<u>Zu 1.1.3</u>

$$s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)\,,$$

$$s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$$

liefern $$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(i) - x(i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) \geq x(i)$$

$$\Leftrightarrow \qquad x(i) + x(j) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

sowie $$v(j) - x(j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

also $$x(i) + x(j) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha}$$

Nun gilt

$$s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(j) - x(j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) \geq - x(j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 \cdot x(j) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha} \; .$$

Diese Ungleichung ist wegen Lemma 4.4 (7) erfüllt. Es bleibt

$$2 \cdot x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

zu zeigen.

Für $j > p$ gilt $2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha}$ wegen (6), also insbesondere "$\leq$".

Für $j \leq p$ verwenden wir

$$2 \cdot x(j) \leq 2 \cdot \left(\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i)\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1-\alpha} \sum_{t=\max\{p,i\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha$$

(13)
$$\overset{(*)}{\leq} 2 \cdot \frac{1}{1-\alpha} \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{t} \cdot \alpha$$

$$\leq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{t=\max\{p,j\}}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{2}{t} \cdot \alpha + \sum_{t=\max\{p,j\}}^{n} \sum_{k=j}^{p} \lambda^{t,k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (1-2\alpha)$$

$$= \frac{m(j)}{1-\alpha} \; ,$$

wobei die Gleichung (*) wegen $i < j \leq p$ richtig ist. Damit ist auch $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$ verifiziert.

q.e.d.

Zu 1.1.4

Aus den Voraussetzungen

$$s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$$

und

$$s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

ergibt sich

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(i) - x(i),$$

also

$$\frac{1}{1-\alpha}(1-m(j) - \alpha) - 1 + x(j) \geq - x(i)$$

und damit

$$\frac{m(j)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j) ;$$

sowie

$$v(\Omega-i) - x(\Omega-i) \geq v(j) - x(j),$$

und diese Ungleichung liefert

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} \leq x(i) - x(j) .$$

Nun ist $s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x)$ genau dann der Fall, wenn

$$\frac{1}{1-\alpha}(1-m(j) - \alpha) - 1 + x(j) \geq \frac{1}{1-\alpha}(1-m(i)-\alpha) - 1 + x(i),$$

was wiederum zur Ungleichung

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$$

äquivalent ist.

Wegen Lemma 4.4 (8) ist diese Ungleichung für alle $i < j$ richtig, und es gilt wegen (9) sogar die Gleichheit, wenn $i < j \leq p$.

Um $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$ zu zeigen, ist daher die Ungleichung

(14) $$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$$

für $j > p$ nachzuweisen.

Nun ist (14) äquivalent zu

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - \frac{m(j)}{1-\alpha} + x(j) \leq x(i),$$

aufgrund der Voraussetzung

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(j) \leq x(i)$$

genügt es daher zu zeigen:

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - \frac{m(j)}{1-\alpha} + x(j) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha} - x(j)$$

oder: $$2 \cdot x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha}.$$

Da $j > p$ vorausgesetzt werden konnte, ergibt sich aus Lemma 4.4 (6) sofort

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha} ,$$

mithin die Behauptung.

<u>Zu 1.2.1</u>

Die Voraussetzungen dieses Falles, nämlich

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i)$$

und $$s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$$

liefern $$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} > x(i) + x(j)$$

und $$\frac{m(i)}{1-\alpha} \geq x\,(i) + x\,(j)\ .$$

Aus dem Exkurs wissen wir aber :

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)$$

und damit $$s_{ij}(x) = v(\Omega\text{-}j) - x\,(\Omega\text{-}j).$$

Wir verweisen für diesen Fall auf die Rechnungen zu 1.2.3.

Zu 1.2.2.

In diesem Fall verweisen wir auf 1.2.4, denn aus

$$s_{ij}\;(x) = v(i) - x(i)$$

resp. $$s_{ji}\;(x) = v(\Omega\text{-}i) - x(\Omega\text{-}i)$$

ergibt sich

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1 - \alpha} > x(i) + x(j)$$

und $$\frac{m(i)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)\ .$$

Nun kann $$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1- \alpha} \geq x(i) + x(j)$$

höchstens dann auftreten, wenn

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} = x(i) + x(j)$$

(vergl. Exkurs in 2.2.1).

Die Gleichheit wird mit der in 2.2.4 zu behandelnden Ungleichung „$\leq$" erfaßt.

Zu 1.2.3

Aus $s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$

und $s_{ji}(x) = v(j) - x(j)$

ergeben sich die Ungleichungen

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)$$

und $$\frac{m(i)}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j);$$

wobei die erste der beiden Ungleichungen keine neuen Erkenntnisse bringen kann, da sie nach dem Exkurs redundant ist.

Nun ist $s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x)$

genau dann, wenn

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(j) - x(j)$$

also $$\frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) \geq - x(j)$$

folglich $$2 \cdot x(j) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha}$$

gilt. Die letzte dieser Ungleichungen ist aber aufgrund von Lemma 4.4 (7) richtig.

Es bleibt noch zu zeigen:

$$s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x) ,$$

mithin $$2 \cdot x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} .$$

Für $j > p$ ist die Ungleichung aufgrund von Lemma 4.4 (6) sogar als Gleichung erfüllt, für den Fall $j \leq p$ führen wir dieselbe Rechnung wie unter 1.1.3 (13) durch. Die dort benutzte Voraussetzung

$$x(j) + x(i) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha}$$

ist auch hier erfüllt.

Zu 1.2.4

Es ist hier $s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$

$$s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

vorausgesetzt. Auf die übliche Art und Weise erhalten wir wieder

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)$$

sowie $\frac{m(i)}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j).$

Nun aber gilt: $s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x)$

$$<=> \quad v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$$

$$<=> \quad \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) \geq \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(i)-\alpha)-1+x(i)$$

$$<=> \quad \frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j).$$

Nach Lemma 4.4 (8) ist diese Ungleichung für alle $i < j$ erfüllt, und es gilt wegen (9) noch zusätzlich die Gleichheit für $i < j \leq p$.

Daher ist zum Beweis von

$$s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$$

nur noch der Fall $j > p$ zu betrachten.

Nun ist

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$$

genau dann richtig, wenn

$$\frac{m(i) - m(j)}{1-\alpha} + x(j) \leq x(i)$$

gilt. Aufgrund unserer Voraussetzung:

$$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(j) \leq x(i)$$

genügt es daher zu zeigen:

$$\frac{m(i) - m(j)}{1-\alpha} + x(j) \leq \frac{m(i)}{1-\alpha} - x(j)$$

oder $$2 \cdot x(j) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} .$$

Für $j > p$ gilt aber aufgrund von Lemma 4.4 (6) die letzte Ungleichung sogar als Gleichung, womit auch

$$s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$$

bewiesen wäre.

Zu 1.3

$$s_{ij}(x) = v(i) - x(i) \quad \text{impliziert}$$

$$v(i) - x(i) \geq v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$$

und dies ist per üblicher Rechnung äquivalent zu

$$\frac{m(i) - m(j) - \alpha}{1-\alpha} \geq x(i) + x(j) .$$

Nun gilt stets die umgekehrte Relation (vergl. Exkurs) und daraus folgt

$$s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j) .$$

Wir erhalten auf dieselbe Art und Weise

$$s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i).$$

Und damit ist 1.3.4 der letzte noch zu behandelnde Fall.

Zu 1.3.4

Sei also $s_{ij}(x) = v(\Omega-j) - x(\Omega-j)$

und $s_{ji}(x) = v(\Omega-i) - x(\Omega-i)$.

Dann gilt $s_{ij}(x) \geq s_{ji}(x)$ genau dann, wenn

$$v(\Omega-j) - x(\Omega-j) \geq v(\Omega-i) - x(\Omega-i).$$

Unter Beachtung der Voraussetzungen von 1.3 ist dies äquivalent zu

$$\frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(j)-\alpha) - 1 + x(j) \geq \frac{1}{1-\alpha}\,(1-m(i)-\alpha) - 1 - x(i)$$

also zu $\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \geq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$.

Diese Relation ist nach Lemma 4.4 (8) richtig.
Es bleibt, um $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$ zu zeigen, nur noch die umbekehrte Relation

(15) $$\frac{m(i)}{1-\alpha} - x(i) \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - x(j)$$

nachzuweisen. Nach Lemma 4.4 (9) aber gilt sogar die Gleichheit, falls $j \leq p$.

Für $j > p$ benutzen wir unsere im Exkurs bewiesene Voraussetzung

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} \leq x(i) + x(j)$$

in der Form

$$\frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} - x(j) \leq x(i)$$

und zwar wie folgt:

(15) ist äquivalent zu

$$\frac{m(i) - m(j)}{1-\alpha} + x(j) \leq x(i) \text{ ,}$$

aufgrund der Voraussetzung reicht es also zu zeigen:

$$\frac{m(i) - m(j)}{1-\alpha} + x(j) \leq \frac{m(i) + m(j) - \alpha}{1-\alpha} - x(j)$$

oder $$2 \cdot x(j) \leq 2 \cdot \frac{m(j)}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ .}$$

Nun ist aber wegen $j > p$

$$2 \cdot x(j) = \frac{m(j)}{1-\alpha},$$

die nachzuweisende Ungleichung reduziert sich also auf

$$0 \leq \frac{m(j)}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

oder $$\frac{\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{m(j)}{1-\alpha}.$$

Diese Voraussetzung ist aber in Fall 1.3, insbesondere also in 1.3.4 erfüllt.

Mit diesem letzten Fall unserer Fallunterscheidung ist $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ für alle Paare (i,j) mit $i < j$ bewiesen.
Damit und mit Bemerkung 4.3 ist gezeigt, daß x der Kern des von m induzierten Spieles v^m ist; m, x wie in (1) respektive (3) definiert.

Summary

a) Wir haben mit Hilfe des Überdeckungssatzes aus Abschnitt 2 gezeigt, daß jede Ressourcenverteilung m mit

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n \quad \text{in einem Polyeder}$$

$$\text{conv}\,(P^n_p)\ ,\ p \in \{1,\ldots,n\}$$

liegt.

b) Wir haben weiterhin gezeigt, daß in jedem Polyeder die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \text{conv}\,(P^n_p) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ m &\longrightarrow \mathcal{K}(v^m) \end{aligned}$$

affin-linear ist, denn es ist durch die Sätze 3.2 für $\alpha \geq \frac{1}{2}$ und 4.2 für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ gezeigt worden, daß der Kern einer durch konvexe Kombinationen von Eckpunkten von $\text{conv}\,(P^n_p)$ induzierten

Spieles gleich derselben Konvex-Kombination der Kerne der von den Eckpunkten induzierten Spiele ist.

Dies bedeutet, daß der Kern von n-Personen EPS eine stückweise affin-lineare Funktion der Ressourcenverteilung ist, sie besteht aus höchstens n Teilstücken und zum Bestimmen des Kerns eines beliebigen n-Personen EPS hat man nur

(i) die Ressourcenverteilung so umzuordnen, daß gilt

$$m(1) \geq m(2) \geq \ldots \geq m(n),$$

(ii) den Polyeder $\operatorname{conv}(P_p^n)$ zu finden, der m enthält,

(iii) die Kerne der durch Eckpunkte induzierten Spiele gemäß Lemma 3.1 respektive Lemma 4.1 zu bestimmen,

(iv) diejenige Konvex-Komination $(\lambda^{t,k})_{t,k}$ zu finden für die gilt

$$m = \sum_{t=p}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda^{t,k} \cdot m^{t,k}$$

(v) und sodann gemäß des in (iv) bestimmten $\lambda^{t,k}$ die Konvex-Kombination der in (iii) bestimmten Kerne auszurechnen.

Literaturverzeichnis

[1] ESGUERRA, M. : Der Kern "Einfacher Produktionsspiele"
Diplomarbeit, 1978

[2] ROSENMÜLLER, J. : The Theory of Games and Markets
North Holland Publ.Co.,
erscheint demnächst

" WIRTSCHAFTSTHEORETISCHE ENTSCHEIDUNGSFORSCHUNG"

A series of books published by the Institute of Mathematical Economics, University of Bielefeld.

Wolfgang Rohde
Ein spieltheoretisches Modell eines Terminmarktes (A Game Theoretical Model of a Futures Market)
The model takes the form of a multistage game with imperfect information and strategic price formation by a specialist. The analysis throws light on theoretically difficult empirical phenomena.

Vol. 1 176 pages price: DM 24,80

Klaus Binder
Oligopolistische Preisbildung und Markteintritte (Oligopolistic Pricing and Market Entry)
The book investigates special subgame perfect equilibrium points of a three-stage game model of oligopoly with decisions on entry, on expenditures for market potential and on prices.

Vol. 2 132 pages price: DM 22,80

Karin Wagner
Ein Modell der Preisbildung in der Zementindustrie (A Model of Pricing in the Cement Industry)
A location theory model is applied in order to explain observed prices and quantities in the cement industry of the Federal Republic of Germany.

Vol. 3 170 pages price: DM 24,80

Rolf Stoecker
Experimentelle Untersuchung des Entscheidungsverhaltens im Bertrand-Oligopol (Experimental Investigation of Decision-Behavior in Bertrand-Oligopoly Games)
The book contains laboratory experiments on repeated supergames with two, three and five bargainers. Special emphasis is put on the end-effect behavior of experimental subjects and the influence of altruism on cooperation.

Vol. 4 197 pages price: DM 28,80

Angela Klopstech
Eingeschränkt rationale Marktprozesse (Market processes with Bounded Rationality)
The book investigates two stochastic market models with bounded rationality, one model describes an evolutionary competitive market and the other an adaptive oligopoly market with Markovian interaction.

Vol. 5 price: DM 23,-- appr

Orders should be sent to:

Pfeffersche Buchhandlung, Alter Markt 7, 4800 Bielefeld 1, West Germany.